

УДК 004.043; 519.872

В. И. КУДРЯВЦЕВ<sup>1</sup>, О. Ф. ЗИРКО<sup>2</sup>

## ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАСЧЕТА ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ С ЦЕЛЬЮ УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

<sup>1</sup>НПФ «Адекват», Москва, Россия;<sup>2</sup>Белорусский институт системного анализа и информационного обеспечения научно-технической сферы (БелИСА), Минск

*Исследованы возможности использования математических моделей теории очередей с целью управления в реальном времени моделируемыми ней процессами дискретных производств. В качестве модельного примера рассматривалась система управления перестановками предметов обслуживания в очередях. Для анализа были использованы методы расчета управляемых ВМАР систем и методы теории восстановления на периодах занятости для очередей с вакансиями требований.*

*В результате исследования выяснено, что математическое моделирование в теории очередей может быть использовано для имитационного моделирования дискретного производства с целью проектирования и производственного анализа, но не может быть использовано для управления моделируемыми процессами в реальном времени.*

**Ключевые слова:** требование; управление в реальном времени; дискретно-событийное математическое моделирование; очередь; процесс управления системой; инженерный подход; перестановки; вакансии; ВМАР-системы.

### Введение

В дискретно-событийном математическом моделировании существуют попытки реализации задач управления процессами массового обслуживания, в которых предметы производственной и иной обработки моделируются как требования ( $Rq$ ) реализуемые в системе с обслуживающими приборами ( $Sv$ ), отображающими машины, механизмы и персонал [1]. В теории очередей (QT) сочетание  $Rq$  с  $Sv$  моделируется посредством очередей ( $Qu$ )  $Rq$ , которые задают порядок обслуживания их в  $Sv$  и образуют совместно с  $Rq$  и  $Sv$  систему массового обслуживания ( $QuS$ ). В рамках QT создано множество математических моделей  $QuS$ , для расчета процессов так называемого дискретного производства, в котором явно выделены предметы производства, над которыми осуществляются циклические операции обслуживания. В свое время математическое моделирование объектов управления, передаточных звеньев и регуляторов в теории автоматического управления привело к взрывному развитию средств автоматического управления непрерывными процессами. Однако в случае

QT, а также других теорий дискретно-событийного моделирования, подобного эффекта для системного управления  $QuS$  не происходит [2]. В данной статье на примере модели сложного управления  $Rq$  в  $QuS$  на основе QT была сделана попытка определить причину этого явления и оценить перспективы использования расчета QT для производственного управления в реальном времени.

### Формальный математический подход QT к моделированию управления в $QuS$ со сложным перемещением

В QT существует класс ВМАР систем с групповым марковским входным потоком [2], в котором может моделироваться сложное поведение  $Rq$  в системе однопоточных очередей. Как правило, функция управления такого рода системами в QT моделируют в виде специальной функции *CONT*. Логично предположить, что пользуясь уже существующими подходами QT, мы сможем реализовать управление для сложных производственных систем, которые моделируются в QT в виде ВМАР систем.

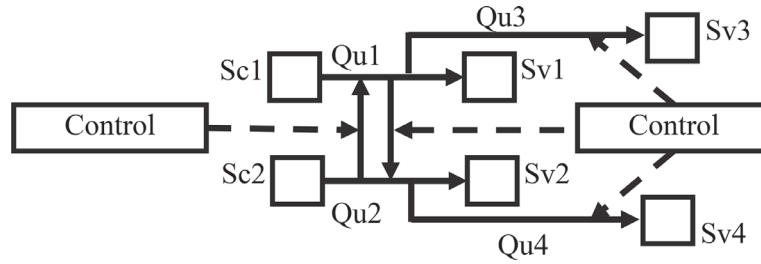


Рис. 1. Схема QuS типа VMAP с произвольными перестановками Rq в QuS

Для анализа такого управления был разработан модельный пример, схема которого представлена на рис. 1.

Пример включает в себя две QuS типа G/G/1/m с предельным количеством Rq равном  $m$ , представленные на рисунке 1 в виде систем Sc1-Qu1-Sv1 и Sc2-Qu2-Sv2. Для Rq в этих системах был установлен верхний предел времени ожидания их реализации  $\tau$  соответственно в Sv1 и Sv2. Те Rq в Qu1 или Qu2, для которых время ожидания их реализации превышает значение  $\tau$ , направляются в другой процесс однотипной реализации Qu2 или Qu1, где по условию прохождения очереди они не превысят значение  $\tau$ . Также они могут быть отправлены в процессы не однотипной, а иной их реализации, которые отображены на рис. 1 в виде систем Qu3-Sv3 и Qu4-Sv4. Все перемещения Rq между QuS осуществляются в процессе управления Control.

На основе составленной схемы был выполнен расчет вероятностей реализации  $k$ -го Rq для следующих процессов: 1) основного процесса при условии ограничения времени ожидания Rq – вероятность  $(PB_k^{M,j})_l$ ; 2) процесса в присутствии перестановок Rq между очередями – вероятность  $(PB_l^{M,j})_{rr}$ . Результаты расчетов представлены в формулах (1) и (2) соответственно:

$$\begin{aligned}
 (PB_k^{M,j})_l &= \frac{\prod_{l=0}^{k-1} \rho_l(T)}{k!} P_o(T) \times \\
 &\times (\exp(-\lambda_k(T) - \mu_k(T))T) F^{(k)}(CONT) + \\
 &+ \frac{\prod_{l=0}^{n-1} \rho_{l1}(T)}{n!} \sum_{l3=1}^l \prod_{l2=n}^{l3} (PA_{rr}^M)_{l2} P_o(T) \times \\
 &\times (1 + \exp(-\mu_{l3}(T)\tau)) (\exp(-\lambda_{l3}(T) - \mu_{l3}(T))T) \times \\
 &\times F^{(l3)}(CONT),
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 (PB_l^{M,j})_{rr} &= \frac{\prod_{l=0}^{n-1} \rho_{l1}(T)}{n!} \prod_{l2=n}^l (PA_{rr}^M)_{l2} P_o(T) \times \\
 &\times (1 + \exp(-\mu_l(T)\tau)) (\exp(-\lambda_l(T) - \mu_l(T))T) \times \\
 &\times F^{(l)}(CONT).
 \end{aligned} \tag{2}$$

В них  $k$  – номер требования, относительно которого начат расчет;  $j$  – индекс QuS (Qu1, Qu2, Qu3 либо Qu4), в которую осуществляется перестановка;  $l$  – номер Rq в новой QuS после перестановки;  $M$  – индекс, характеризующий марковский тип действующих потоков;  $l3, l1, l2$  – вспомогательные индексы;  $rr$  – обозначение процесса перестановки;  $T$  – время, относительно которого ведется расчет;  $CONT$  – переменная, характеризующая управляющий процесс Control;  $F^{(l)}(CONT)$  – функция распределения переменной  $CONT$ ;  $(PA_{rr}^M)_k$  – вероятность того, что в результате реализации Rq в сопряженном процессе перестановки оно окажется в другой Qu;  $\lambda_l(T)$ ;  $\mu_l(T)$  – интенсивности поступления и обработки требований  $l$  в момент времени  $T$ ;  $\rho_l(T)$  – коэффициент соотношения интенсивности входного и выходного потоков QuS,  $\rho_l(T) = \lambda_l(T) / \mu_l(T)$ ;  $P_o(T)$  – вероятность того, что в момент начала расчета, в Qu отсутствовали Rq. Вывод формул (1) и (2) представлен в [3].

Анализ (1) и (2) показал, что  $F^{(l)}(CONT)$  является статистическим обобщением процесса Control по некоторой выборке вариантов управляющих воздействий в QuS1 или QuS2. Управляющий процесс учитывается как случайный процесс, не зависящий от основного процесса, что не позволяет использовать расчет для определения параметров оптимального управления относительно конкретных состояний управляемой системы [1, 4]. Это является характерной чертой абстрактного математического подхода к расчету в QT, в против-



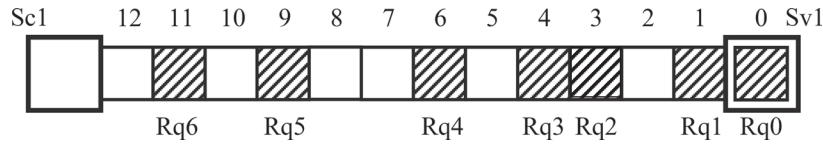


Рис. 3. Системная модель QuS1 с вакансиями для Rq:  $\square$  – вакансия Rq на одном из мест Qu1;  $\text{шaded}$  – Rq на одном из мест Qu1

На нем в нижней части рис. 3 представлена нумерация Rq, ожидающих реализации в Sv. Кроме Rq на модели QuS представлены вакансии Rq. Для отображения количества вакансий Rq, находящихся перед рассчитываемым  $k$ -м Rq, где  $k$  – номер Rq в Qu на момент времени  $T$ , введем переменную  $\alpha_k$ . Однако данная переменная не отображает явно топологию вакансий Rq в Qu в момент времени расчета  $T$ , от которой зависит риск аномальной задержки реализации. Явно задавать топологию вакансий Rq на любой момент времени можно, если ввести дополнительный концепт места Qu с номерами  $h$ , которые представлены на рис. 3 непосредственно над Qu. Исходя из этого, будем использовать переменную места Qu  $h_k = k + \alpha_k$ , где  $h_k$  – номер места Qu, занимаемое  $k$ -м Rq. При этом  $m \geq h_k \geq k$ , где  $m$  – верхний предел количества Rq в Qu.

Для моделирования управляющих воздействий на участке Qu, следующем за  $h_k$  местом Qu введем переменную  $\beta_k$  баланса изъятий и вставок Rq в данную Qu, а количество Rq планируемых к реализации в этой же QuS обозначим как  $\gamma_k$ , а с учетом Rq уже реализуемого в Sv – как  $\gamma_{k+0}$ . Соответственно для описания количества вакансий во всей QuS после  $k$ -го Rq, а не только в Qu в момент времени расчета  $T$  будем использовать переменную  $\alpha_{k+0}$ .

Применяя метод дискретных преобразований для решения систем дифференциальных уравнений и следуя рекомендациям Н. Джейсуола [7], по разработанной модели была пересчитана вероятность реализации  $k$ -го Rq в QuS при ограничении верхнего значения остаточного времени реализации  $\Delta\tau_k^\beta$ , которая выражается в следующей формуле:

$$P_k(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta) = \frac{(k-1)!}{h!} \exp(\Delta\tau_k^\beta) = a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta) \sum_{j=0}^{k-1} C_{nj}^j \times \exp(\Delta\tau_{nj}(\gamma_0 - \alpha_{nj+0} - \beta_{nj})), \quad (3)$$

где  $j$  – индекс, в которую предполагалось попасть в результате перестановки;  $j$  – номер Rq, которым станет оно в новой QuS;  $n_j = h - k + j$ ;  $C_{nj}^j$  – биномиальный коэффициент [3, 7]; физический смысл его означает количество способов, которыми можно попасть на место  $j$  из  $n_j$  возможных;

$\Delta\tau_k^\beta = \tau - t_k$  – остаточное время реализации, в течение которого Rq начиная с момента времени  $t_k$  еще может ожидать реализации в Sv, а по истечении этого времени Rq должен покинуть Qu без реализации;  $\gamma_{k+0} = \gamma_k + \gamma_0$ ; – приведенное количество требований в системе с ожиданием, которые планируются к реализации и обслуживаются в QuS; при этом  $\gamma_0 = 1 - \tau_w^0 / \tau_r$ ;  $\tau_r$  – среднее время обслуживания Rq в Sv;  $\tau_w^0$  – длительность обслуживания на месте 0 в момент времени начала отсчета;  $a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta)$  – коэффициент масштабирования – коэффициент взаимосвязи количественных характеристик очереди с параметрами времени ожидания [3]. Значение  $a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta)$  равно:

$$a(\alpha_{k+0}, \gamma_{k+0}, \Delta\tau_k^\beta) = \frac{(k-1)!}{h!} \exp(\Delta\tau_k^\beta) \times \left[ \sum_{j=0}^{k-1} C_{nj}^j \exp(\Delta\tau_{nj}(\gamma_0 - \alpha_{nj+0} - \beta_{nj})) \right]^{-1}, \quad (4)$$

при  $k = \overline{1, N}$ .

Был разработан алгоритм управления QuS, особенностью которого являлось то, что расчет по выражениям (3) и (4) осуществлялся последовательно относительно мест QuS в порядке: от Sv к концу Qu с расчетом  $P_k$  для каждого  $k$ -го Rq. Сравнения его с минимально допустимым для реализации значением  $P_\beta$ , определением относительно  $k$ -го Rq управляющего воздействия и итерационным уточнением переменной управления  $\beta_{k+1}$  подтвердили теоретическую возможность управления инореализаций Rq в отдельной QuS.

При изменении производственных условий в формулы (3) и (4) должны быть измене-



ны. Эти изменения должны быть внесены посредством составления новой системы дифференциальных уравнений с последующей проверкой решения на адекватность [1, 8], что доступно лишь узкому специалисту и представляет трудность для автоматизации.

Кроме того, для согласования процессов объекта управления и исполнительного механизма в процессе управления, а также нескольких процессов управления между собой необходима оценка, задающая для исполнительных механизмов ограничения, на которые они бы могли ориентироваться при реализации управляющих воздействий [9, 10]. Здесь это ограничения при изъятии, вставке  $R_q$  в  $Q_u$ , транспортировке  $R_q$ , подготовке вакансий или наоборот устранении вакансий  $R_q$  в  $Q_u$ . Между тем оценка вероятности реализации при заданном остаточном времени ожидания  $P_k | \Delta\tau_k^\beta$  для последующего ее сравнения с  $P_\beta$  не имеет мгновенных измеряемых значений. Получение же в явном виде обратной оценки  $\Delta\tau_k | P_\beta$ , представляющей собой остаточное время ожидания  $k$ -м  $R_q$  своей реализации в  $Q_u$  без превышения значения  $P_\beta$

из выражений (3) и (4) для последующего сравнения ее с  $\Delta\tau_k^\beta$  для рассматриваемого модельного примера, невозможно [1, 3, 6]. Использование численных методов для расчета  $\Delta\tau_k | P_\beta$  чревато низкой скоростью сходимости или даже отсутствием результатов вычислений, что не позволяет считать такой метод расчета при управлении  $R_q$  в реальном времени универсальным [1, 8].

### Заключение

Таким образом, можно констатировать, что использование расчета QT в целях системного управления предметами обработки в условиях дискретного производства теоретически возможно, однако оно не может быть универсальным и применимым для автоматической адаптации систем управления к изменяющимся производственным условиям. Исходя из этого, применение расчета QT целесообразно ограничить лишь имитационным моделированием типовых производственных ситуаций и типовых ситуаций управления с целью их производственного анализа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Маторин, С. И.** Имитационное моделирование с использованием системно-объективного подхода / С. И. Маторин, А. Г. Жихарев, Н. О. Зайцева – Прикладная информатика. Научные статьи. № 6(60): НОЧ «МФПУ «Синергия», 2015. 14 С.
2. **Семенова О. В.** Многопороговое управление системой массового обслуживания ВМАР/С/1 С МАР-потокм катастрофических сбоев / О. В. Семенова // Автоматика и телемеханика. – М., 2007. С. 24–32.
3. **Зирко, О. Ф.** Информационная поддержка процессов дискретных производств на основе очередей требований [Депонированная рукопись] / О. Ф. Зирко, В. И. Кудрявцев – ГУ БелИСА – 2016. – № Д201616 – Режим доступа: www.belisa.org.by, www.depositary.bas-net.by. – 296 с.
4. **Luis Damas and Robin Milner.** Principal type-schemes for functional programs. In POPL-82: Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, ACM, 2012 (in English), pp. 207–212.
5. **Зирко О. Ф.** Управление дискретными производственными и бизнес-процессами: теория и методика / В. И. Кудрявцев, О. Ф. Зирко // Новости науки и технологии, 2016. № 3(38). – С. 39–47.
6. **Кудрявцев, В. И.** Автоматическое управление дистрибуцией в очередях / В. И. Кудрявцев, О. Ф. Зирко // Научно-информационное обеспечение развития АПК: матер. IX Междунар. науч.практ. конф. – М.: ФГБНУ «Росинформротех», 2017. – С. 137–142.
7. **Джейсуол, Н. К.** Очереди с приоритетами / Н. К. Джейсуол – М.:»Мир», 1973. – 279 с.
8. **Зирко, О. Ф.** Моделирование производственных процессов в вычислительных структурах и структурах данных / О. Ф. Зирко, В. И. Кудрявцев / Развитие информатизации и государственной системы научно-технической информации (РИНТИ–2017): доклады XVI Междунар. конф., Минск, 16 ноября 2017 г. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2017. – С. 153–159.
9. **Лобатый, А. А.** Импульсное управление гибридной электротехнической системой / А. А. Лобатый, Ю. Н. Петренко, А. Эльзейн, А. С. Абуфанас // Системный анализ и прикладная информатика, 2016. № 4(12). – С. 46–51.
10. **Hilghsmith, Jim.** Agile Software Development Ecosystems / Jim Hilghsmith – Addison-Wesley Professional, 2002 (in English). – 448 С.

### REFERENCES

1. **Matorin, S. I.** Simulation modeling using system-objective approach / S. I. Matorin, A. G. Zhikharev, N. About. Zaitsev. – Applied Informatics. Scientific article. № 6 (60), 2015. (in Russian) – 14 P.

2. **Semenova, O. V.** Multithreshold control of the queueing system MAR/1 MAR stream of catastrophic failures / O. V. Semenova // Automation and remote control – Moscow, 2007 (in Russian). – Pp. 24–32.
3. **Zirko, O. F.** Information support of discrete manufacturing processes queue-based requirements [of the Deposited manuscript] / O. F. Zirko, V. I. Kudryavtsev – SO BelISA – 2016. – №D201616 – Access Mode: www.belisa.org.by; www.depositary.bas-net.by – 296 p.
4. **Zirko, O. F.** Control of discrete processes in production and business: theory and methodic / V. I. Kudryavtsev, O. F. Zirko // News of science and technology, 2016. № 3(38) (in Russian). – Pp. 39–47.
5. **Kudryavtsev, V. I.** Automatic distribution management in queues / Kudryavtsev V. I., O. F. Zirko // Scientific and information support of agroindustrial complex development [Ter. IX mezhdunar. science. practice. Conf.]: FGNU «Rosinformagrotekh», 2017 (in Russian). – Pp. 437–442.
6. **Jaiswal, N. K.** Priority queues / N. K. Jaiswal. – Moscow: Мир, 1973 (in Russian). – 279 P.
7. **Luis Damas and Robin Milner.** Principal type-schemes for functional programs. In POPL-82: Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, ACM, 2012 (in English), pp. 207–212.
8. **Zirko, O. F.** Simulation of production processes in the computational structures and data structures/ O. F. Zirko, V. I. Kudryavtsev // Development of Informatization and state system of scientific and technical information (DISTI–2017): reports of the XVI Intern. Conf. Minsk, 16 November 2017 – Minsk: UIIP NASB, 2017 (in Russian). – Pp. 153–159.
9. **Lobaty, A. A.** Impulse control of a hybrid electrical system / A. A. Lobaty, Yu. N. Petrenko Yu. N., A. Elzeyan, A. S. Abufanas // System Analysis and Applied Informatics, 2016. No. 4 (12). – P. 46–51.
10. **Jim Hilghsmith.** Agile Software Development Ecosystems/ Jim Hilghsmith – Addison-Wesley Professional, 2002 (in English). – 448 P.

Поступила  
30.03.2018

После доработки  
25.02.2019

Принята к печати  
25.03.2019

V. I. KUDRIAVTSEV, O. F. ZIRKO

## THE POSSIBILITY OF APPLYING CALCULATION BASED ON QUEUING THEORY WITH THE AIM OF REAL-TIME CONTROL

*Possibilities of using mathematical models of the theory of queues for the purpose of control of processes of discrete productions modeled by it in real time are investigated. As a model example, a system for managing the rearrangements of service items in queues was considered. For the analysis the methods of calculation of BMAP-controlled systems and the methods of the theory of recovery on periods of employment for queues with vacancies of requirements were used.*

*As a result of research it is found out that mathematical modeling in the theory of queues can be used for simulation of discrete production for the purpose of design and the production analysis, but cannot be used for management of the modeled processes in real time.*

**Keywords:** demand; real-time control; discrete event mathematical modeling; queue; process control system; engineering approach; permutations; jobs; BMAP-system.



**Kudryavtsev V. I.**, doctor of technical science, deputy director of Research and production company «ADEC VAT» in Moscow, Russia;  
e-mail: vik171@ya.ru



**Zirko O. F.**, scientific worker of department of scientific and methodological support of examination and registration in «Belarusian Institute of system analysis and information support of scientific and technical sphere», Minsk, Belarus;  
e-mail: olzirko@yandex.by