УДК 621.9.048.7

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

к.т.н М.А. Раджух

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь,
hekr@mail.ru

Создание в середине 50-х годов прошлого столетия математической теории оптимального управления было связано с потребностями решения технических и экономических задач. Проблемы управления, в частности проблемы отыскания наилучшего, оптимального управления, возникают всюду. Наиболее яркие примеры таких задач – это задачи управления летательными аппаратами, управления технологическим процессом на производстве и т. п. В настоящее время оптимальное управление выросло в обширную самостоятельную теорию, использующую в своих исследованиях аппарат высшей алгебры, математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений.

Принцип максимума Понтрягина – это определенного типа необходимое условие экстремума, которое дает возможность среди всех возможных допустимых процессов выделить те, которые могут претендовать на роль оптимальных. Для определенного класса задач управления принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

1. Постановка задачи оптимального управления.

Постановка любой конкретной задачи оптимального управления включает в себя ряд факторов: математическую модель управляемого объекта, цель управления (именуемую иногда критерием качества), различного рода ограничения на траекторию системы, управляющее воздействие, длительность процесса управления, класс допустимых управлений и т.д. Остановимся на этих факторах подробнее.

Будем предполагать что объект управления описывается уравнением:

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \tag{1.1}$$

или в скалярной форме

$$\dot{x}_k(t) = f_k(x_1 ... x_n, u_1 ... u_m, t), \tag{1.2}$$

где $x = [x_1 ... x_n]^{\mathrm{T}}$ - вектор состояния,

$u = [u_1 ... u_m]^{\mathrm{T}}$ - вектор управления,

t – время ,

$t \in$ T; $[t_0, t_k]$ - интервал времени функционирования системы,

$x \in R^n$; n - мерное эвклидово пространство, элементами служат векторы;

$u \in U_{доп} \subset R^m$; $U_{доп}$ - множество допустимых значений управления;

$f(x,u,t)$ - непрерывная вместе со своими частными производными векторная функция.

$x(t_0) = x_0$ - начальные условия.

Информация о *x(t)* не используется.

Структура управления может быть записана в виде:

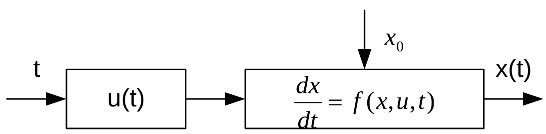

Рисунок 1.1 - Структурная схема процесса управления

Функционал качества управления в общем случае имеет вид (задача Больца):

$$J_0 = \varphi_0(x,t_k) + \int_{t_0}^{t_к} F_0(x,u,t)dt, \qquad (1.3)$$

где $\varphi_0(x,t_k)$ *и* $F_0\,(x,u,t)$ - заданные непрерывно-дифференцируемые функции.

Постановка задачи: Требуется найти такую тройку $\alpha^* = (x^*, u^*, t^*)$, что

$$J_0(\alpha^*) = \min J_0(d), \qquad (1.4)$$

x^* - оптимальная траектория;

u^* - оптимальное управление;

$t^{*}{}_к$ - оптимальный момент окончания работы системы.

Типовые задачи оптимизации (Майера, Лагранжа, быстродействие и т.д.) сводятся к обобщённой задаче, при этом функционал J_0 рассматривается в каждый текущий момент времени как дополнительная фазовая координата $x_{n+1}(t)$.

Рассмотрим разные критерии:

1. Максимальное быстродействие. Время t считается дополнительной x_{n+1} координатой, определяемой уравнением

$$\dot{x}_{n+1} = 1,\ x_{n+1,_0} = x_{n+1}(t_0) = t_0. \qquad (1.5)$$

Таким образом, задача минимизации времени управления t_k-t_0 сводится к минимизации $x_{n+1}(t)_к$ фазовой координаты.

2. Терминальный критерий (задача Майера). Новая фазовая координата

$$x_{n+1} = J_0 = \varphi_0(x,t_k), \qquad (1.6)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \sum_{к=1}^{n} \frac{d\varphi_0}{dx_k} f_k(x_1 ... x_n, u_1 ... u_m, t). \qquad (1.7)$$

3. Задача Лагранжа (интегральный критерий). Если функционал качества задан в виде:

$$J_0(t_k) = \int_{t_0}^{t_к} F_0(x,u,t)dt, \qquad (1.8)$$

то приняв текущее значение (1.8) за новую переменную x_{n+1}:

$$x_{n+1}(t) = J_0 = \int_{t_0}^{t_k} F_0(x,u,t)dt, \qquad (1.9)$$

получим для этой переменной уравнение:

$$\dot{x}_{n+1} = F_0(x_1 ... x_n, u_1 ... u_m, t) \qquad (1.10)$$

Задача сводится к нахождению минимальной функции $x_{n+1}(t)$. На конечное состояние объекта накладываются ограничения в виде равенств:

$$q_j(x_1(t_k) ... x_n(t_k)) = 0,\ j = \overline{1,r}, \qquad (1.11)$$

где q_j – некоторые дифференцируемые функции.

При такой постановке задача сводится к решению множителя Лагранжа. В соответствии с этим методом задача оптимизации сводится к описанию экстремума функции следующего вида:

$$\pi = x_{n+1}(t_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j q_j(x_1(t_k) ... x_n(t_k)), \qquad (1.12)$$

где λ_j – неопределенные множители Лагранжа, определяемые из условия (1.11).

2. Условия оптимальности (по Понтрягину)

Принцип максимума связывает оптимизируемый (минимизируемый) функционал состояния π с динамикой процесса через функцию Гамельтона (функцию Понтрягина)

$$H(x,u,\psi,t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f_i+\psi_{n+1}f_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}\psi_i f_i\ , \tag{2.1}$$

где f_i – правые части уравнений (1.1, 1.2) для x_i ($i=1,n$) и одним из уравнений (1.6), (1.8), (1.10) для x_{n+1} ($\dot{x}_{n+1}=f_{n+1}$) в зависимости от задачи оптимизации.

Вспомогательные функции ψ_i удовлетворяют уравнению:

$$\dot{\psi}_i=-\sum_{j=1}^{n+1}\psi_j\frac{df_j}{dx_i};\ i=\overline{1,n+1} \tag{2.2}$$

для заданных конечные условия, определяемые выражением:

$$\psi_i(t_k)=-\frac{d\pi}{dx_i}=-\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{dq_j}{dx_i};\ i=\overline{1,n+1}; \tag{2.3}$$

$$\psi_{n+1}(t_k)=-1$$

В соответствии с принципом максимума для обеспечения оптимального управления *u(t)* функция Гамильтона H имеет максимум по отношению к управлению на всем интервале [t_0, t_k] . Оптимальное управление и при каждом t должно доставлять максимум Гамильтон функции.

Продифференцировав H по вспомогательным функциям $\frac{dH}{d\psi_i}$ получим:

$$\frac{dH}{d\psi_i}=f_i(x,u,t)=\dot{x}_i(t);\ i=\overline{1,n+1} \tag{2.4}$$

Дифференцируя (2.1) по x_i, получим:

$$\frac{dH}{dx_i}=\sum_{j=1}^{n+1}\psi_i\frac{df_j}{dx_i}=-\dot{\psi}_i;\ i=\overline{1,n+1} \tag{2.5}$$

Таким образом, выражения (2.4) и (2.5) позволяют привести уравнение (2.1) и (2.2) к следующей канонической форме уравнений Гамильтона:

$$\dot{x}_i=\frac{dH}{d\psi_i};\quad i=\overline{1,n+1} \tag{2.6}$$

$$\dot{\psi}_i=-\frac{dH}{dx_i};\ i=\overline{1,n+1} \tag{2.7}$$

Решения канонических уравнений – «двухточечная задача», для которых $x(t_0)$ заданы в начальный момент времени, а $\psi(t_k)$ - в конечный момент времени.

Для многомерных систем задача решается приблизительно методом итерации.

3. Доказательство необходимых условий оптимальности (по принципу максимума).

Большинство практических задач – это задачи со свободным правым концом и заданным временем переходного процесса.

Понтрягин предложил рассмотреть так называемую игольчатую вариацию оптимизации уравнения.

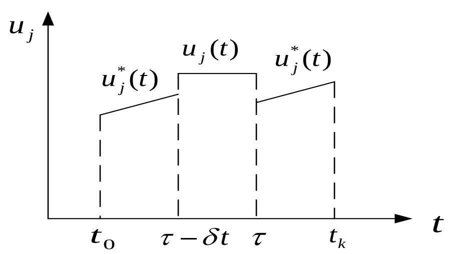

Рисунок 3.1 – Игольчатое варьирование

Достаточно строгое доказательство принципа максимума получено методом вариационного исчисления. При этом рассмотрены вариации (бесконечно малые приращения)

Т.о. выразив зависимости между всеми приращениями легко видеть, что

$$\delta\pi = -\delta t\left[H(x,u,\psi,t) - H(x^*,u^*,\psi,t)\right]. \tag{3.1}$$

Из (4.20) следует, что $\delta\pi \geq 0$ при допустимой вариации δu только при

$$H(x^*,u^*,\psi,t) \geq H(x,u,\psi,t). \tag{3.2}$$

В частном случае, когда ограничения на управление нет, оптимальное управление определяется из условия

$$\frac{dH}{du_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

как и при использовании вариационного исчисления.

4. Условие трансверсальности

В задачах вариационного исчисления основное условие минимизации функции - $d\pi = 0$. Формулировка данного условия называется определением значения функций $\psi(t_k), i = \overline{1,n}$.

Вариационными методами доказывается необходимое условие оптимальности:

$x_{n+1}(t_k) \geq 0$ - критерий оптимальности из задачи Майера, Лагранжа сводится к задаче Больца. В то же время:

$\delta x_{n+1}(t_k) = -\delta t\left[H(x,u,\psi,t) - H(x^*,u^*,\psi,t)\right]$

На основе определения H -> $\delta x_{n+1}(t_k)$ =0 (****)

Из выражения для H:

$$H(x,u,\psi,t)\delta t = \sum_{i=1}^{n}\psi_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\delta t + \psi_{n+1}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}\delta t, \tag{4.1}$$

при $t=t_k$: $\psi_{n+1} = -1$.

Из (4.1) при малых вариациях $t = t_k$, $\partial t = \delta t$, $\partial x = \delta x$ имеем

$$H(x,u,\psi,t)\delta t_k = \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t_k)\delta x_i(t_k) - \delta x_{n+1}. \tag{4. 2}$$

В то же время

$$\delta x_{n+1} = \frac{\partial J_0}{\partial x}\delta x + \frac{\partial J_0}{\partial t}\delta t, \tag{4. 3}$$

при $t = t_k$, $\delta t = 0$, $\delta x_{n+1}(t_k) = \delta\varphi_0(t_k)$.

Подставим 4.2 и 4.3 в (****) и получим:

$$\delta\varphi_0(t_k) - H(x^*,u^*,\psi,t)\delta t_k + \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t_k)\delta x_i(t_k) = 0 \tag{4. 4}$$

- условие трансверсальности для задачи со свободным правым концом.

Для других классов задач (с подвижными концами) условие трансверсальности будет отличаться, имея схожий вид.

5. Алгоритм применения принципа максимума

1) Для модели процесса $\dot{x} = f(x,u,t)$ и функционала Больца (1.3), составить Гамильтониан

$$H(x,u,\psi,t) = \sum_{j=1}^{n}\psi_j f_j(x,u,t) + \psi_{n+1} f_{n+1}(x,u,t).$$

$\psi_j(t_k) = -1;$

2) Найти структуру оптимального управления из условия максимума Гамильтона по управлению

$$u^*(t) = u^*(x,\psi,t).$$

3) Составить систему канонических уравнений с заданными в задаче условиями

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \dfrac{\partial H(x^*,u^*,\psi,t)}{\partial t} = f_i(x^*,u^*,\psi,t), \quad x_i(t_0) = x_{0i}, \\ \psi_i(t) = -\dfrac{\partial H(x^*,u^*,\psi,t)}{\partial x_i}, \quad \psi_i(t_k) = \psi_{ki}. \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

4) Получить недостающие условия для уравнений составленной системы из условий трансверсальности

$$\delta\varphi_0(t_k) - H(t_k)\delta t_k + \sum_{i=1}^{n}\psi_i(t_k)\delta x_i(t_k) = 0.$$

5) Решить двухточечную краевую задачу для системы канонических уравнений.

В результате определяется тройка: (t^*, x^*, u^*), на которой достигается экстремум функционала качества.

6. Пример решения задачи с помощью принципа максимума

Дано: модель ОУ описывается

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t),$$

$$x(0) = 0 = x_0$$

$$t \in [0,1]$$

Минимизируемый функционал качества: $J_0 = \int_0^1 u^2(t)dt - x(1) \to \min$

Требуется найти оптимальную пару (x^*,u^*), на которой достигается минимум функционала.

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем

$$f(x,u,t) = x + u,$$

$$F_0 = u^2, \quad \varphi_0 = -x.$$

Решается задача Больца

1) Составляем гамильтониан $H = \psi(x + 1u) - u^2$

2) Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствует, можно применить необходимые условия безусловного экстремума.

$$\frac{\partial}{\partial u}H(x,u,\psi,t) = \psi - 2u = 0.$$

Отсюда, $u^* = \dfrac{\psi}{2}$ и $\dfrac{\partial H^2}{\partial u^2} = -2 < 0$.

Т.к. ограничения на управление отсутствуют, то можно применить необходимые условия безусловного экстремума, т.к. вторая производная < 0, то этот экстремум является максимальным

3) Выписываем условие трансверсальности с учетом результата пункта 2.

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi} = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \quad \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi(t), \quad x(0) = 0.$$

4) Проверяем условие трансверсальности. Так как $\varphi_0 = -x$ то $\delta\varphi_0 = -\delta x$ и $[-\delta x - H(t_k)\delta t_k + \psi(t_k)\delta x] = 0.$

Поскольку $t_k = 1$(по условию), то $t_k - 1 = 0$ и $\delta t_k = 0$.

В результате имеем $[\psi(t_k) - 1]\delta x = 0 \Rightarrow \psi(1) - 1 = 0 \Rightarrow \psi(1) = 1$, т.к.

5) Решаем полученную двухточечную задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \dfrac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0; \\ \dot{\psi}(t) = -\psi(t), \quad \psi(1) = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения с конечными условиями имеем $\dot{\psi}(t) = e^{1-t} \Rightarrow u^* = \dfrac{1}{2}e^{1-t}$ - оптимальное управление.

Решая первое уравнение с начальными условиями, получаем оптимальную траекторию $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{4}\left[e^{1+t} - e^{1-t}\right].$

Задачи размерности выше 2 решаются, как правило численно, не аналитически, методом итерации.

Таким образом, принцип максимума Л.С. Понтрягина представляет собой определенного вида необходимое условие оптимальности для задачи оптимального управления. В его формулировке участвуют функции специального вида гамильтониан (функция Понтрягина) и сопряженные переменные. Это необходимое условие принимает тот или иной вид в зависимости от разновидности задачи оптимального управления. Существует определенная схема применения принципа максимума. Однако в общем случае использование принципа максимума требует высокой математической квалификации и нередко – изобретательности.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., Наука 1976.

2. Понтрягин Л. С. [и др.]. Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М.: Наука, 1969.

3. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и т.т.; 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. 4-е изд. перераб. и доп. – С-Пб.: изд-во Профессия, 2004.