

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 531/534: [57+61]

БОСЯКОВ

Сергей Михайлович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНЫХ
СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ТКАНЕЙ И БИОМЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ ЧЕЛОВЕКА В ЕСТЕСТВЕННОМ
И ПАТОЛОГИЧЕСКОМ СОСТОЯНИЯХ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности 01.02.08 – Биомеханика

Минск 2019

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научные консультанты:	ЖУРАВКОВ Михаил Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета;
	МИХАСЕВ Геннадий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой биомеханики и наномеханики Белорусского государственного университета
Официальные оппоненты:	ЧИЖИК Сергей Антонович, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси, первый заместитель Председателя Президиума НАН Беларуси;
	БАУЭР Светлана Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт- Петербургского государственного университета;
	ВИХРЕНКО Вячеслав Степанович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры механики и конструирования УО «Белорусский государственный технологический университет»
Оппонирующая организация	Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси»

Защита состоится «19» апреля 2019 г. в 11:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, проспект Независимости, 65, корпус 1, аудитория 202. Телефон ученого секретаря совета: (+37517) 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «19» марта 2019 г.

Ученый секретарь совета по защите диссертаций Д 02.05.07, кандидат физико-математических наук, доцент

П.И. Ширвель

© Босяков С.М., 2019
© Белорусский национальный
технический университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование биологических тканей и биомеханических систем в различных состояниях относится к одной из основных задач биомеханики. Результаты такого моделирования позволяют прогнозировать особенности функционирования органов и тканей в норме и при возникновении патологических изменений, а также формулировать рекомендации при назначении лечения, при выполнении профилактических мероприятий и послеоперационной реабилитации пациентов. В направлении разработки математических и компьютерных моделей биомеханического поведения и состояния различных биологических систем, достаточно полно учитывающих их структуру, особенности строения, физико-механические свойства отдельных элементов и граничные условия достигнуты значительные успехи. Среди исследований, посвященных биомеханическому моделированию зубочелюстной системы и ее элементов следует выделить работы Ю.И. Няшина, М.А. Осипенко, А.Н. Чуйко, Р. Gautam, С. Holberg, H. Iseri, A. Jafari, K. Tanne. Биомеханические аспекты ортодонтического лечения отдельных зубов рассматривались в исследованиях С. Bourauel, P.M. Cattaneo, С. Dorow, T.S. Fill, A. Kawarizadeh, С.G. Provatidis. Континуальные модели соединительных тканей и связок, а также описание их материальных свойств представлены в работах А.N. Natali, Е. Реѝа. Важные результаты, касающиеся определения физико-механических свойств костной ткани и особенностей ее иерархической структуры, отражены в исследованиях V.V. Silberschmidt, S.C. Cowin, А.А.Е. Orias, J.-Y. Rho, а также Р.К. Zysset. Модели поведения костной ткани и кости в целом при действии предельных нагрузок, соответствующих потере несущей способности кости, разрабатывались P.D.S. Dijkstra, R. Hambli, J.H. Hipp, J.H. Keyak, R.K. Nalla, E. Tanck, P.K. Zysset. Важные результаты, связанные с разработкой биомеханических моделей в офтальмологии и оториноларингологии, получены в работах С.М. Бауэр и М. Ferrazzini, R.Z. Gan, К.В. Hüttenbrink, I. Kirikae, T. Koike, C.F. Lee, G. Vollandri, F. Zhao. Среди работ белорусских ученых, посвященных разработке механико-математических моделей поведения биологических тканей, следует выделить исследования С.А. Чижика, Ю.М. Плескачевского и М.А. Журавкова. Модели различных биомеханических систем представлены в работах Г.И. Михасева, А.В. Чигарева и С.В. Шилько.

Как правило, основной целью разработки комплексных компьютерных и математических моделей является понимание функционирования биологических систем и биомеханический анализ их поведения в различных условиях. При этом формулировка практических рекомендаций по применению разработанных моделей и полученных результатов при назначении, прогнозировании последствий и предупреждении осложнений после лечения не является основной задачей исследования, причем одной из причин этого является как излишняя сложность предложенного подхода или

модели, так и принимаемые упрощения. Это обуславливает актуальность направления медицинской биомеханики, развиваемого в настоящей диссертационной работе, посвященной установлению закономерностей поведения плотной соединительной ткани и биомеханических систем человека в нормальном или патологическом состоянии на основании математических и численно-аналитических моделей, позволяющих спрогнозировать поведение этих систем в ходе лечения и сформулировать практические рекомендации для планирования соответствующих реабилитационных процедур.

В качестве биомеханических систем, формируемых плотной соединительной тканью, в частности костной и волокнистой тканью, рассматриваются длинные трубчатые кости, верхнечелюстной комплекс человека, периодонтальная связка корня зуба и колебательная система среднего уха. Патологические состояния этих биомеханических систем подразумевают возникновение перелома в области костного дефекта трубчатых костей, наличие односторонней или двусторонней расщелины верхней челюсти и альвеолярного отростка, а также возникновение ретракционного кармана барабанной перепонки (тимпанальной мембраны) среднего уха. Рассматриваемыми лечебными мероприятиями являются хирургическое вмешательство по удалению новообразований (хирургическая резекция), верхнечелюстное расширение по устранению перекрестного прикуса, устранение ретракционного кармана посредством установки трансплантата на тимпанальную мембрану и установка протеза среднего уха между основанием стремени и тимпанальной мембраной.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационная работа выполнялась в рамках следующих научных программ и проектов:

1. Инновационный проект Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь «Разработать методику автоматизированного проектирования и оптимизации конструкций зубо-челюстных протезов и ортодонтических аппаратов при аномалиях и деформациях челюстно-лицевой области, обусловленных расщелинами губы и неба, с применением универсальных CAD/CAE/CAM-систем» (№ ГР 20066150 от 15.12.2006 г., 2006–2008 гг.).

2. Инновационный проект Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь «Разработать математическую модель и программу расчета прочностных характеристик длинных трубчатых костей человека при выполнении секторальной резекции» (№ ГР 20113982 от 2011 г., 2011–2012 гг.).

3. Государственная программа научных исследований «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как

основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция») подпрограммы «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники», задание 1.8.01 (№ ГР 20113045 от 07.09.2011 г., 2011–2015 гг.), задание 1.8.01.1 (№ ГР 20161712 от 19.05.2016 г., 2016–2020 гг.).

4. Международный грант «Trans-Atlantic Micromechanics Evolving Research: Materials containing inhomogeneities of diverse physical properties, shapes and orientations» supported by FP7-PEOPLE-2013-IRSES Marie Curie Action «International Research Staff Exchange Scheme» (Приказ 259-ОД от 2 июня 2014 г. «Об участии Белорусского государственного университета в 7-й рамочной программе по международной схеме обмена научными работниками в рамках проекта ТАМЕР», 2014–2018 гг.).

5. Проект Ф17МС–002 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований «Метод специальных функций анализа моделей с дробными производными и их приложения к решению прикладных задач» (№ ГР 20170827 от 01.06.2017 г., 2017–2018 гг.).

Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы является установление закономерностей поведения плотной соединительной ткани и биомеханических систем человека в норме и при патологических изменениях на основании математических и численно-аналитических моделей, позволяющих прогнозировать результаты воздействия на эти системы в ходе лечения и формулировать практические рекомендации для планирования соответствующих реабилитационных процедур.

Для достижения поставленной цели в работе решены следующие основные задачи:

- на основании экспериментальных данных об анизотропном распределении упругих свойств длинных трубчатых костей и томографических данных разработаны конечно-элементные модели неповрежденных бедренных костей и бедренных костей с пострезекционными дефектами, имеющими различные линейные и угловые размеры;

- выполнен конечно-элементный расчет J -интегралов в области костного дефекта для бедренной кости под действием статической нагрузки, эквивалентной собственному весу, а также сочетаний нагрузок, соответствующих одновременному действию собственного веса, изгибающих моментов и крутящего момента;

- проведен натурный эксперимент по определению предельной нагрузки, эквивалентной действию собственного веса, под действием которой возникает перелом бедренной кости с костным дефектом, образующимся после хирургической резекции по удалению новообразований;

- определена функциональная зависимость величины предельной разрушающей нагрузки на бедренную кость от линейного и углового размера

пострезекционного дефекта при локализации дефекта в средней трети бедренной кости человека;

– на основании томографических данных разработаны конечно-элементные модели верхнечелюстного комплекса человека без расщелины, с односторонней расщелиной и двусторонней расщелиной, верхнечелюстного комплекса с односторонней расщелиной после выполнения различных типов остеотомии, а также разработаны конечно-элементные модели трех конструкций ортодонтического аппарата для расширения верхней челюсти, отличающиеся различным расположением винта относительно неба;

– выполнен конечно-элементный расчет напряженно-деформированных состояний, возникающих в верхнечелюстном комплексе человека без расщелины, с односторонней и двусторонней расщелиной, а также черепа с односторонней расщелиной и хирургическими разрезами, соответствующим различным типам остеотомии после активации различных конструкций ортодонтического аппарата Нугах;

– разработана механико-математическая модель перемещений корня зуба в форме составного парабооида в вязкоупругой периодонтальной связке, описываемой дробным ядром релаксации;

– разработана механико-математическая модель вязкоупругой периодонтальной связки, описывающая напряженно-деформированное состояние тканей периодонта при поступательных перемещениях корня зуба;

– разработана конечно-элементная модель колебательной системы среднего уха на основании томографических данных, включающая тимпанальную мембрану и слуховые косточки;

– выполнен конечно-элементный статический и модальный анализ конечно-элементной модели среднего уха в норме и среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств задневерхнего квадрата тимпанальной мембраны с учетом отрицательного звукового давления;

– выполнен сравнительный модальный анализ колебательной системы среднего уха в норме, среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств задневерхнего квадрата тимпанальной мембраны без хрящевого трансплантата и после установки хрящевого трансплантата различной толщины;

– разработана механико-математическая модель среднего уха, подвергшегося тотальной тимпанопластике, предусматривающая крутильные и поперечные колебания протеза, соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану с использованием хрящевого трансплантата и основание подножной пластины стремени;

– выполнен расчет собственных частот свободных колебаний системы «тимпанальная мембрана – протез среднего уха – подножная пластина стремени» и проведен анализ влияния физико-механических параметров этой системы на значения собственных частот.

Для решения поставленных в диссертационной работе задач применены методы механики деформируемого твердого тела и теории разрушения, метод конечных элементов, методы линейной и векторной алгебры, интерполяционные методы, методы операционного исчисления, методы решения дифференциальных уравнений, методы теории колебаний, метод малого параметра, а также методы дифференциального и интегрального исчисления.

Компьютерное моделирование и конечно-элементные расчеты выполнены на основании функциональных возможностей пакета ANSYS и ANSYS Workbench; численные и символьные результаты, визуализация полей напряжений и начальных положений корня зуба до и после приложения нагрузки получены с применением функциональных возможностей компьютерной системы *Mathematica*.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы состоит в разработке превентивного и прогностического направлений персонафицированной медицины на уровне биологических тканей, органов человека и систем органов человека, находящихся в нормальном (естественном) или в патологическом (измененном) состоянии на основании механико-математических и численно-аналитических биомеханических моделей. Новым результатом является разработка численно-аналитической модели трубчатой кости с учетом анизотропного распределения упругих свойств в различных отделах и анатомических квадрантах кости. Впервые установлена зависимость предельной нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом от линейных и угловых размеров дефекта, локализованного в средней трети кости. Новым научным результатом является разработка численно-аналитической модели интактного черепа человека, черепа человека с односторонней и двусторонней расщелиной, черепа человека с односторонней расщелиной и хирургическими разрезами, соответствующими различным типам остеотомии, с установленным на опорные зубы ортодонтическим аппаратом. Впервые разработана механико-математическая модель изменения напряженно-деформированного состояния вязкоупругой периодонтальной связки с течением времени, возникающего при поступательном перемещении корня зуба, использующая в качестве начальных условий распределение перемещений в тканях периодонта, возникающее при действии сосредоточенной силы на коронку зуба. Новым научным результатом является использование дробного ядра релаксации для описания вязкоупругих свойств периодонтальной связки при моделировании перемещений корня зуба в тканях периодонта с течением времени. Впервые разработана численно-аналитическая модель среднего уха с нелинейным распределением модуля упругости тимпанальной мембраны, соответствующим патологическим изменениям ее упругих свойств. Научная новизна механико-математической модели «тимпанальная мембрана – протез среднего уха – подножная пластина

стремени» состоит в определении спектров собственных частот свободных колебаний с учетом поперечных колебаний тимпанальной мембраны и крутильных колебаний протеза.

Положения, выносимые на защиту

Новыми результатами, выносимыми на защиту, являются:

1. Методика определения предельной нагрузки, при действии которой происходит разрушение бедренной кости человека после хирургической резекции под действием статической нагрузки, отличающаяся использованием численно-аналитической модели, учитывающей анизотропное распределение упругих свойств кортикальной костной ткани в различных анатомических квадрантах и отделах бедренной кости, которая позволила определить зависимость предельной нагрузки, соответствующей возникновению перелома бедренной кости с пострезекционным дефектом от линейного и углового размеров дефекта, а также сформулировать рекомендации по предупреждению патологического перелома после хирургической резекции.

2. Закономерности распределения эквивалентных напряжений и полей перемещений в интактном черепе человека, в черепе с односторонней и двусторонней расщелиной, в черепе с односторонней расщелиной и хирургическими разрезами, которые соответствуют различным типам остеотомии, после активации ортодонтического аппарата для устранения перекрестного прикуса, полученные на основании численно-аналитической модели черепа человека с опорными зубами и установленным ортодонтическим аппаратом, отличающейся нагружением черепа посредством смещения пластинок ортодонтического аппарата, позволившая установить влияние расположения винта ортодонтического аппарата и условий его активации на исправление перекрестного прикуса, а также установить влияние различных вариантов остеотомии на исправление перекрестного прикуса.

3. Методика определения напряженно-деформированного состояния вязкоупругой периодонтальной связки, отличающаяся учетом начальных и граничных условий, вызванных поступательным перемещением корня зуба, которая позволила установить распределение напряжений и деформаций в тканях периодонта с течением времени для планирования ортодонтического перемещения зубов.

4. Методика определения перемещений корня зуба в вязкоупругой периодонтальной связке с течением времени при действии нагрузки на коронку зуба, основанная на механико-математической модели системы «корень зуба – периодонтальная связка – костная ткань», отличающаяся использованием дробного ядра релаксации, позволившая установить зависимости поступательных перемещений и поворотов корня зуба от времени для прогнозирования условий приложения нагрузки и планирования ортодонтического перемещения зубов.

5. Закономерности изменения спектров собственных частот свободных колебаний среднего уха в норме, среднего уха с патологическими

изменениями упругих свойств тимпанальной мембраны, а также среднего уха после установки хрящевого трансплантата и протеза, установленные на основании численно-аналитической модели, отличающейся слоистой структурой тимпанальной мембраны и нелинейным распределением модуля упругости задневерхнего квадрата, а также на основании механико-математической модели, предусматривающей крутильные и поперечные колебания протеза, которые позволяют планировать хирургические операции по устранению ретракционного кармана задневерхнего квадранта тимпанальной мембраны и протезированию среднего уха для улучшения слуховой проводимости.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты, выносимые на защиту диссертации, получены автором лично. Соавторы научных исследований принимали участие в обсуждении постановок задач и анализе полученных результатов (М.А. Журавков, Г.И. Михасев, В.В. Зильбершмидт, С.В. Рогозин), подготовке стереолитографических моделей, верификации численно-аналитических и механико-математических моделей органов человека (Д.В. Алексеев, А.В. Винокурова, Э. Димерчи, А.А. Дутина, А.В. Круподеров, А.А. Королева, А.Ф. Мселати, К.С. Юркевич, Ф. Стахович, Т. Тжепицински, И.Л. Славашевич), подготовке натурального эксперимента по статическому нагружению бедренной кости (А.В. Дорожко), а также проводили консультации, связанные с корректным описанием анатомических особенностей человека (А.Н. Доста, Д.А. Гричанок, Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк, И.Э. Шпилевский, А.В. Белецкий, О.А. Соколовский, Ю.В. Лихачевский).

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты, вошедшие в диссертационную работу, прошли апробацию на следующих международных и республиканских научных конференциях:

1. Международные научные конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений», АМАДЕ–2009, АМАДЕ–2011, АМАДЕ–2012, АМАДЕ–2015, АМАДЕ–2018 (Минск, 14–19 сентября 2009, 12–17 сентября 2011, 10–14 сентября 2012, 14–19 сентября 2015 г., 17–21 сентября 2018 г.).

2. Международные научные конференции по механике «Пятое Поляховские чтения» (Россия, Санкт-Петербург, 3–6 февраля 2009 г.) и «Шестые Поляховские чтения» (Россия, Санкт-Петербург, 30 января – 3 февраля 2012 г.).

3. The World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering (Germany, Munich, September 7–12, 2009).

4. Вторая международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Минск, 24–28 августа 2009 г.).

5. IV Белорусский Конгресс по теоретической и прикладной механике «Механика-2009» (Минск, 18–20 ноября 2009 г.).

6. XVIII Международная научно-техническая конференция «Прикладные задачи математики и механики» (Украина, Севастополь, 13–17 сентября 2010 г.).

7. 15th International Conference «Mathematical Modelling and Analysis» (Druskininkai, Lithuania, May 26–29, 2010).

8. International Conference «Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications» BFA-2, BFA-3 (Poland, Krakow, April 14–17, 2010; Poland, Rzeszow University, April 20–23, 2016).

9. XXXVIII, XXXIX, XLI, XLII, XLVI International Conferences «Advanced Problems in Mechanics» (Russia, St. Petersburg, July 1–5, 2010, July 1–5, 2011, July 1–6, 2013, June 30 – July 6, 2014, June 25–30, 2018).

10. X, XI и XII Всероссийская конференция «Биомеханика-2010» (Россия, Саратов, 16–22 мая 2010 г.; Россия, Пермь, 1–4 декабря 2014 г., Россия, Пермь, 5–8 декабря 2016 г.).

11. XXIII Congress of the International Society of Biomechanics (Belgium, Brussels, July 3–7, 2011).

12. XVI Конгресс педиатров России с международным участием «Актуальные проблемы педиатрии» (Россия, Москва, 24–27 февраля 2012 г.).

13. Международные научные конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–9 ноября 2012 г.) и «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–10 сентября 2016 г.).

14. Международная научная конференция «Современные проблемы механики и математики» (Украина, Львов, 21–25 мая, 2013 г.).

15. 9th International ISAAC Congress (Poland, Krakow, August 5–9, 2013).

16. Международная научная конференция «Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (Минск, 16–20 сентября 2013 г.).

17. III Уральский медицинский научно-практический форум с международным участием «Травматология: инновационные технологии в диагностике, лечении и реабилитации» (Россия, Уфа, 13–16 ноября 2013 г.).

18. III Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии mcIT-2013» (Гродно, 22–25 апреля 2013 г.).

19. International Scientific Conference «Advanced in Micromechanics of Materials–2014» (Poland, Rzeszow, July 8–11, 2014).

20. International Conference on Mathematical Models and Methods in Applied Sciences MMAS-2014 (Russia, St. Petersburg, September 23–25, 2014).

21. IX Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Львовский национальный университет, Львов, Украина, 15–19 сентября 2014 г.).

22. XLV Международный научно-методический семинар-коллоквиум «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» (Минск, 4–6 февраля 2014 г.).

23. International Workshop on Computer Algebra System in Teaching and Research CASTR-2015 (Siedlce University, Poland, October 21–25, 2015).

24. 21st Congress of the European Society of Biomechanics (Czech Republic, Prague, 5–8 July 2015).

25. 13th, 14th International Conference «Dynamical Systems – Theory and Applications» (Poland, Lodz, December 7–10, 2015; December 11–14, 2017).

26. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Россия, Казань, 20–24 августа 2015 г.).

27. 12th International Symposium on Bioinformatics Research and Applications ISBRA-2016 (Minsk, June 5–8, 2016).

28. International Scientific Conference «Progressive Technologies and Materials in Mechanical Engineering» PRO-TECH-MA 2016 (Poland, Rzeszow, June 22–24, 2016).

29. XXVII International Conference Mathematical and Computer Simulations in Mechanics of Solids and Structures. Fundamentals of Static and Dynamic Fracture MCM 2017 (Russia, Saint Petersburg, September 25–27, 2017).

30. Научно-практическая конференция с международным участием «Илизаровские чтения» и IV съезд травматологов и ортопедов Уральского федерального округа (Россия, Курган, 21–22 июня 2017 г.).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс в Белорусском государственном университете, на кафедре оториноларингологии и на кафедре ортопедической стоматологии и ортодонтии ГУО «Белорусская академия последипломного образования», в практическую деятельность учреждений «Областная стоматологическая поликлиника г. Гомеля», «Областная стоматологическая поликлиника г. Витебска», КУП «Клиника эстетической стоматологии», Федеральном государственном бюджетном учреждении «Федеральный центр травматологии, ортопедии и эндопротезирования» Министерства здравоохранения Российской Федерации, кафедре травматологии и ортопедии УО «Белорусский государственный медицинский университет», кафедре травматологии и ортопедии ГУО «Белорусская медицинская академия последипломного образования», кафедре травматологии, ортопедии и военно-полевой хирургии УО «Гродненский государственный медицинский университет», УЗ «Брестская детская областная больница», УЗ «Витебская детская областная клиническая больница», УЗ «Гомельская областная клиническая больница», УЗ «6-я городская клиническая больница г. Минска», УЗ «Городская клиническая больница скорой медицинской помощи г. Гродно», УЗ «Минская областная

клиническая больница», УЗ «Могилевская областная детская больница», Республиканском научно-практическом центре оториноларингологии, Республиканском научно-практическом центре детской онкологии, гематологии и иммунологии, Республиканском научно-практическом центре онкологии и медицинской радиологии имени Н.Н. Александрова, Республиканском научно-практическом центре травматологии и ортопедии. Разработана Инструкция по применению Министерства здравоохранения Республики Беларусь «Метод выбора трансплантата для хирургического лечения ретракционного кармана барабанной перепонки». Получен патент на изобретение ВУ № 20917 «Способ прогнозирования остаточной прочности длинной трубчатой кости конечности после секторальной резекции с рекомендацией метода компенсации потери прочности кости».

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 102 научных работах, из них: 1 коллективная монография и 1 глава в коллективной монографии, 37 статей в научных журналах, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 27 статей в научных рецензируемых журналах, материалах и трудах конференций, 36 тезисов докладов (общим объемом 68,8 авторского листа). Получены 2 свидетельства о регистрации компьютерных программ в Национальном центре интеллектуальной собственности Республики Беларусь, 1 патент Республики Беларусь на способ прогнозирования остаточной прочности длинной трубчатой кости конечности после секторальной резекции с рекомендацией метода компенсации потери прочности и разработана 1 инструкция по применению Министерства здравоохранения Республики Беларусь.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей пять глав, заключения, библиографического списка и шести приложений. Работа представлена на 362 страницах, содержит 122 иллюстрации, 38 таблиц, библиографический список из 656 наименований, включая 102 публикации автора, 20 страниц приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основное содержание диссертационной работы составляют пять глав.

В **первом** пункте **первой** главы рассматриваются структура, строение и механические свойства костной ткани на различных иерархических уровнях, а также подходы к определению напряженно-деформированного состояния и несущей способности кости. Во **втором** пункте **первой** главы представлен обзор результатов, связанных с моделированием процедуры верхнечелюстного расширения, применяемого для увеличения поперечного размера верхней

челюсти, является быстрое верхнечелюстное расширение. В **третьем** пункте **первой** главы представлены подходы к математическому и компьютерному моделированию поведения периодонтальной связки корня зуба при кратковременных (начальных) и долговременных (ортодонтических) перемещениях зуба. В **четвертом** пункте **первой** главы рассматриваются подходы к моделированию слуховой проводимости среднего уха.

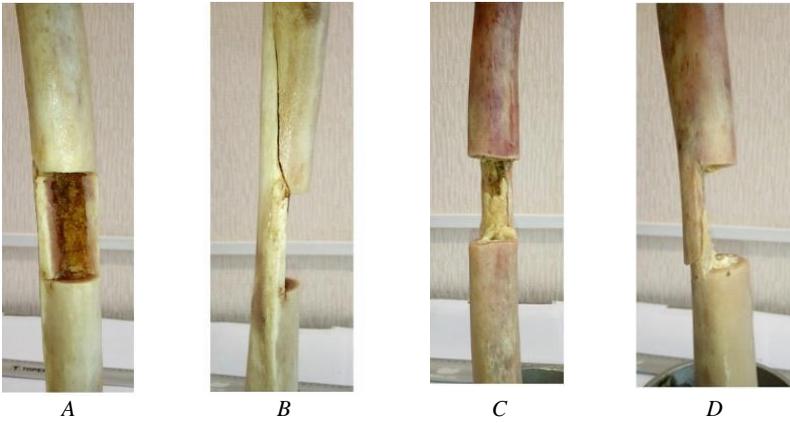
Вторая глава диссертации посвящена определению предельной нагрузки на бедренную кость человека с пострезекционным дефектом, возникающим после проведения хирургической операции по удалению новообразования. В **первом** пункте **второй** главы представлены результаты эксперимента по нахождению величин разрушающей нагрузки, при которой происходит перелом бедренной кости с костным дефектом под действием нагрузки, имитирующей действие собственного веса. В ходе эксперимента использованы два образца бедренной кости (образцы 1 и 2) с секторальными дефектами, имеющими различные геометрические размеры и локализованным в средней трети диафиза. Экспериментальные измерения для определения разрушающей нагрузки проводились на испытательной машине УМ–5А. Результаты эксперимента представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Разрушающая нагрузка для образцов 1 и 2 бедренных костей с различными геометрическими размерами пострезекционных дефектов

Образец бедренной кости	Линейный размер, мм	Угловой размер	Разрушающая нагрузка, кН
1	51,0	$\approx 140^\circ$	7,18
2	53,0	$\approx 270^\circ$	0,63

Совмещенные фрагменты образцов 1 и 2 бедренных костей после разрушения показаны на рисунке 1. Из рисунка 1 видно, что траектории распространения трещины в образцах 1 и 2 бедренной кости при различных линейных и угловых размерах пострезекционного дефекта локализованы различным образом.

Во **втором** пункте **второй** главы разработана методика определения предельной нагрузки на основании конечно-элементного расчета J -интегралов в области пострезекционного дефекта в соответствии с условиями экспериментального нагружения этих образцов бедренных костей. За критическую величину J -интеграла, соответствующую предельной нагрузке на бедренную кость, принимается экспериментально установленное значение J_c для различных анатомических квадрантов кортикальной костной ткани (А.А. Abdel-Wahab, V.V. Silberschmidt, 2011).

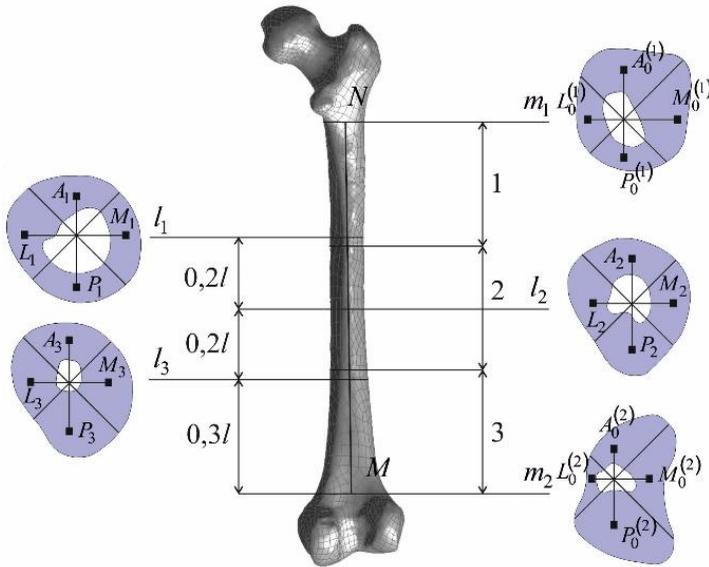


A – вид с боковой стороны образца 1; **B** – вид с передней стороны образца 1;
C – вид с боковой стороны образца 2; **D** – вид с передней стороны образца 2
Рисунок 1. – Совмещенные фрагменты разрушенных образцов 1 и 2 бедренной кости

Упругие свойств костной ткани бедра описываются двумерными интерполяционными функциями, выведенными на основании значений модулей упругости, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона для двадцати точек, расположенных в области кортикальной и губчатой костной ткани. Схематичное расположение точек на различных уровнях кортикальной и губчатой костной ткани показано на рисунке 2.

Двенадцать точек A_k , L_k , P_k и M_k , $k = \overline{1,3}$, расположены в четырех анато-мических квадрантах трех различных поперечных сечений бедренной кости, расположенных в ее различных отделах на одном из трех соответствующих уровней l_1 , l_2 и l_3 диафизарной части бедра. Восемь точек $A_n^{(0)}$, $L_n^{(0)}$, $P_n^{(0)}$ и $M_n^{(0)}$, $n = \overline{1,2}$ расположены в на уровнях m_1 и m_2 в дистальном и проксимальном отделах бедренной кости соответственно. Губчатая кость рассматривается как однородная изотропная среда с модулем упругости, поэтому в точках $A_n^{(0)}$, $L_n^{(0)}$, $P_n^{(0)}$ и $M_n^{(0)}$, $n = \overline{1,2}$ принимается $E_1 = E_2 = E_3 = 8,0$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0,3$ и модуль сдвига $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 3,08$ ГПа для всех анатомических квадрантов (К. Tanne, M. Sakuda, 1991). Значения для постоянных упругости в точках A_k , L_k , P_k и M_k , $k = \overline{1,3}$, расположенных в поперечном сечении бедренной кости на уровнях l_1, l_2 и l_3 задаются в соответствии с экспериментальными данными (J.Y. Rho, 1996). При этом предполагалось, что в радиальном

направлении упругие свойства бедренной кости в пределах поперечного сечения остаются неизменными.



1 – верхняя треть; **2** – средняя треть; **3** – нижняя треть

Рисунок 2. – Уровни l_1 , l_2 и l_3 , а также уровни m_1 и m_2

бедренной кости, на которых расположены узлы интерполирования, используемые при нахождении зависимостей постоянных упругости от окружной и продольной координат

С учетом анизотропного распределения упругих свойств и ударной вязкости для моделей 1 и 2 бедренных костей с пострезекционным дефектом предельная нагрузка составила 6670 Н и 580 Н для нагрузки, эквивалентной собственному весу человека. Отличие этих значений от величин предельной нагрузки, определенных в ходе эксперимента для модели 1 и 2 бедренной кости составляет приблизительно 7,4% и 7,9% соответственно.

Также во **втором** пункте **второй** главы для бедренной кости с пострезекционным дефектом в средней трети, проведен анализ влияния комбинаций нагрузок на ее несущую способность. Предельная комбинация нагрузки на бедренную кость подразумевает такое значение одновременно действующих собственного веса и изгибающего момента для сгибания-разгибания бедра, собственного веса и изгибающего момента для отведения-приведения бедра, собственного веса и крутящего момента для поворота бедра, при которых достигается критическое значение J_C . Наиболее

неблагоприятным является одновременное действие собственного веса и изгибающего момента для сгибания-разгибания бедренной кости. Наименее опасным является действие изгибающего момента для отведения-приведения бедра, дополняющее действие собственного веса человека.

В **третьем** пункте **второй** главы выполнен расчет критических значений J -интегралов для бедренных костей с пострезекционными дефектами в средней трети, имеющими различные линейные и угловые размеры, локализованными в средней трети диафиза. В результате получена двумерная функция зависимости предельной нагрузки, эквивалентной действию собственного веса, для бедренной кости с пострезекционными дефектами:

$$\begin{aligned}
 P(\varphi, l) = & \frac{0,000807926l^3\varphi^3}{d^3} + \frac{0,0503512l^3}{d^3} - \frac{0,0330683l^2\varphi^2}{d^2} - \\
 & - \frac{0,0334204l^2\varphi}{d^2} - \frac{0,297254l^2}{d^2} + \frac{0,0105334l\varphi^2}{d} + \frac{0,758809l\varphi}{d} \\
 & - \frac{0,377378l}{d} + 0,10782\varphi^3 - 0,479546\varphi^2 - 3,31142\varphi + 12,5833,
 \end{aligned} \quad (1)$$

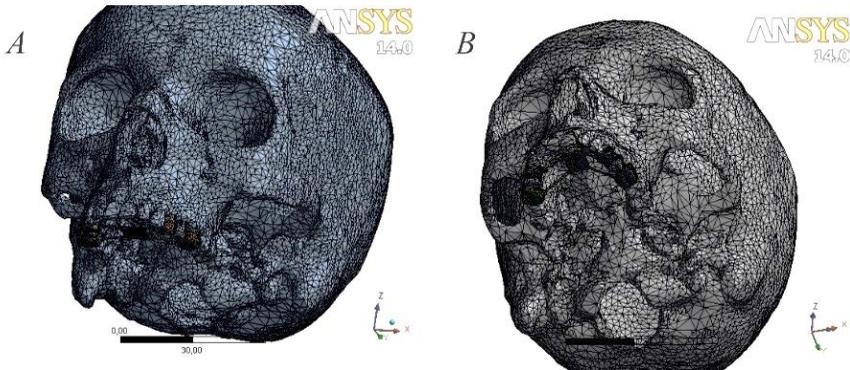
где φ – угловой размер пострезекционного дефекта, задаваемый в радианах в пределах от $\pi/2$ до $3\pi/2$; l – линейный размер дефекта, задаваемый в долях срединного диаметра d бедренной кости в средней трети.

Из соотношения (1) следует, что на величину предельной нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом, расположенным на внутренней стороне средней трети диафиза, наиболее существенное влияние оказывает угловой размер дефекта.

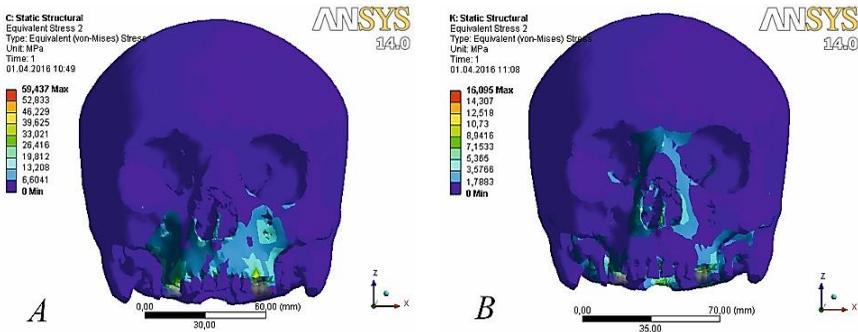
В **первом** пункте **третьей** главы представлены результаты разработки численно-аналитической модели черепа человека с установленным ортодонтическим аппаратом Нугах. Упругие свойства костных структур описываются на основании зависимости между минеральной плотностью костной ткани и модулем упругости. Рассматриваются три модели ортодонтического аппарата: модель 1 с расположением винта и стержней аппарата в окклюзионной плоскости, модели 2 и 3 с расположением винта на 8 мм и 2 мм ближе к небу по отношению к окклюзионной плоскости. Нагружение черепа осуществляется посредством смещения пластинок аппарата в трансверсальном направлении на расстояние, кратное 0,2 мм (соответствует повороту винта на одну четверть оборота); узлы каждой модели в окрестности затылочного отверстия жестко защемлены. Модели 1 и 2 устанавливались на интактный череп, на череп с односторонней и двухсторонней расщелиной, а также на череп с односторонней расщелиной после выполнения различных типов остеотомии. Модель 3 устанавливалась на череп без расщелины и на череп с односторонней расщелиной. Интактный

череп человека с установленными моделями 1 и 2 ортодонтического аппарата приведен на рисунке 3.

Во **втором** и третьем пунктах **третьей** главы приведены и систематизированы результаты расчета напряженно-деформированного состояния интактного черепа, черепа с односторонней и двусторонней расщелиной после активации моделей 1, 2 и 3. Распределение эквивалентных напряжений в костных структурах интактного черепа после активации моделей 1 и 2 ортодонтического аппарата приведено на рисунке 4.

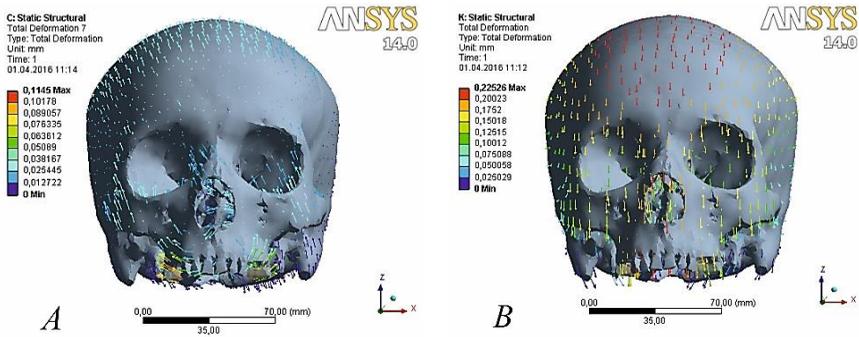


A – интактный череп с моделью 1; *B* – интактный череп с моделью 2
Рисунок 3. – Конечно-элементные модели черепа человека с установленным ортодонтическим аппаратом



A – интактный череп с моделью 1; *B* – интактный череп с моделью 2
Рисунок 4. – Распределение эквивалентных напряжений (МПа) в лицевой части интактного черепа после активации различных моделей ортодонтического аппарата

На рисунке 5 приведены поля полных перемещений точек интактного черепа после активации моделей 1 и 2 ортодонтического аппарата.



A – интактный череп с моделью 1; *B* – интактный череп с моделью 2

Рисунок 5. – Векторные поля полных перемещений (мм) точек интактного черепа после активации различных моделей ортодонтического аппарата

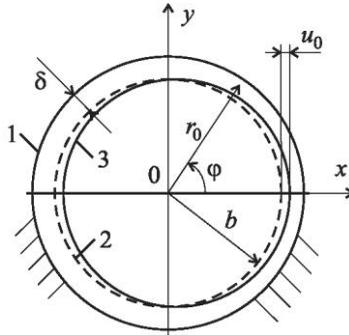
На основании сравнительного анализа эквивалентных напряжений в костных структурах интактного черепа, черепа с односторонней расщелиной и черепа с двусторонней расщелиной, полных перемещений их точек, а также перемещений их точек в трансверсальном, сагиттальном и вертикальном направлениях, возникающих после активации моделей 1, 2 и 3 ортодонтического аппарата, установлено влияние смещения винта аппарата относительно неба на напряженно-деформированного состоянии рассмотренных моделей черепов.

Четвертый пункт третьей главы посвящен определению напряжений и перемещений точек интактного черепа при увеличении расстояния, на которое смещаются пластинки ортодонтического аппарата после его активации (при увеличении количества оборотов ортодонтического аппарата). Показано, что при увеличении расстояния, на которое смещаются пластинки модели 2, качественный характер распределения напряжений и перемещений практически не изменяется и имеют место только количественные различия.

В **пятом пункте третьей** главы представлены результаты сравнительного анализа напряженно-деформированных состояния верхнечелюстного комплекса с односторонней расщелиной после выполнения различных типов остеотомии и активации моделей 1 и 2. Рассматривается три типа остеотомии: разрез выполняется на внешней стороне верхней челюсти (остеотомия РО), разрез проходит через внешнюю и внутреннюю стенки верхней челюсти (остеотомия FO), разрезы выполняются на внешней стенки верхней челюсти, а также между альвеолярным отростком верхней челюсти и крыловидным отростком (остеотомия РОСР). Показано, что после отсечения крыловидного

отростка поворот верхнечелюстного комплекса практически отсутствует и, в основном, наблюдается трансверсальное смещение частей верхней челюсти.

Для определения напряженно-деформированного состояния вязкоупругой периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба в **первом** пункте **четвертой** главы разработана аналитическая модель, основанная на решении граничной задачи о перемещении абсолютно твердого тела в вязкоупругой среде. Предполагается, что корень зуба поступательно перемещается в горизонтальном направлении в периодонтальной связке на величину u_0 . Положение сечения корня при отсутствии нагрузки и его положение равновесия при поступательном смещении в плоскости xOy , а также геометрические размеры сечения показаны на рисунке 6.



1 – внешний контур периодонтальной связки; **2** – положение сечения корня зуба до действия нагрузки; **3** – положение сечения корня зуба после действия нагрузки;
 u_0 – смещение корня зуба в направлении оси xOy ; φ – полярный угол;

b – радиус поперечного сечения корня зуба

Рисунок 6. – Положение сечения корня зуба в плоскости xOy до и после перемещения на величину u_0

Уравнения движения для периодонтальной связки преобразованы к виду

$$\begin{aligned}
 A_{11}u^{(0)}(r, \varphi, t) + A_{12}v^{(0)}(r, \varphi, t) &= \varepsilon \frac{\partial^2 u(r, \varphi, t)}{\partial t^2}, \\
 A_{21}u^{(0)}(r, \varphi, t) + A_{22}v^{(0)}(r, \varphi, t) &= \varepsilon \frac{\partial^2 v(r, \varphi, t)}{\partial t^2}, \\
 u^{(0)}(r, \varphi, t) &= u(r, \varphi, t) - \int_0^t K(\tau)u(r, \varphi, t - \tau)d\tau,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$v^{(0)}(r, \varphi, t) = v(r, \varphi, t) - \int_0^t K(\tau) v(r, \varphi, t - \tau) d\tau,$$

$$A_{11} = r(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1-\nu}{r} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad A_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3-4\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$A_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-4\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad A_{22} = \frac{(1-2\nu)r}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1-2\nu}{r} + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

где $u(r, \varphi, t) = u_r(r, \varphi, t)/h$, $v(r, \varphi, t) = u_\varphi(r, \varphi, t)/h$ – безразмерные радиальные и окружные перемещения; $u_r(r, \varphi, t)$ и $u_\varphi(r, \varphi, t)$ – радиальные и окружные

перемещения; h – высота корня зуба; $\varepsilon = \frac{\rho h^2}{E_0 t_0^2} (1+\nu)(1-2\nu)$ – безразмерный

параметр; t_0 – характерное время ($t_0 = 1$ час); $K(t)$ – ядро релаксации для нормальных и касательных напряжений; ρ – плотность тканей периодонтальной связки; E_0 и ν – мгновенный модуль упругости и коэффициент Пуассона периодонтальной связки ($\nu = \text{const}$). Обзор диапазона значений мгновенных модулей упругости и коэффициентов Пуассона периодонтальной связки, выполненный в работах A. Kawarizadeh, C. Bougarel, A. Jäger, 2003, и J.S. Rees, P.H. Jacobsen, 1997, показал, что наименьшие значения этих величин составляют 0,05 МПа и 0,3 соответственно. Плотность тканей периодонта $\rho = 1060$ кг/м³ (S.A. Wood et al., 2011). Высота корня зуба в среднем резцов может быть принята 13,0 мм (С.А. Наумович и др., 2002). В этом случае $\varepsilon \approx 1,44 \cdot 10^{-12}$. Для наиболее часто используемых при проведении расчетов упругих постоянны $E_0 = 680$ кПа и $\nu = 0,45$ безразмерный параметр составит $\varepsilon \approx 2,95 \cdot 10^{-15}$.

В случае поступательных перемещений корня зуба в периодонтальной связке решение системы (2) имеет вид

$$u(r, \varphi, t) = u_1(r, t) \cos(\varphi), \quad v(r, \varphi, t) = v_1(r, t) \sin(\varphi). \quad (3)$$

Решение системы (2) с учетом соотношений (3) найдено с использованием преобразования Лапласа при начальных условиях

$$u_1(r, 0) = u_2(r), \quad v_1(r, 0) = v_2(r), \quad \left. \frac{\partial u_1(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_1(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

где $u_2(r)$ и $v_2(r)$ – распределение перемещений точек периодонтальной связки при мгновенном перемещении корня зуба на величину u_0 , определяемые из решения соответствующей статической задачи

$$\begin{aligned}
 u_2(r) &= c_1 r^2 (1 - 4\nu) + \frac{c_2}{r^2} - \frac{4c_3(1 - \nu)}{3 - 4\nu} + c_3 \ln(r) + c_4, \\
 v_2(r) &= c_1 r^2 (5 - 4\nu) + \frac{c_2}{r^2} + c_3 - c_3 \ln(r) - c_4, \\
 c_1 &= Bb^2 u_0 (3 - 4\nu) \ln(b/b_1), \quad c_2 = Bb^2 b_1^2 u_0 \left(b^2 - b_1^2 - b_1^2 (3 - 4\nu)^2 \ln(b/b_1) \right), \\
 c_3 &= 2Bb^2 u_0 (3 - 4\nu) (b^2 - b_1^2), \\
 c_4 &= Bb^2 u_0 \left((b^2 - b_1^2)(7 - 8\nu) + 2(3 - 4\nu)(b_1^2 \ln(b) - b^2 \ln(b_1)) \right), \\
 \frac{1}{B} &= (b^2 - b_1^2) \left(b_1^2 - b^2 + (b^2 + b_1^2)(3 - 4\nu)^2 \ln(b/b_1) \right),
 \end{aligned}$$

где b – радиус поперечного сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня; $b_1 = b + \delta_0$; δ_0 – ширина периодонтальной связки в плоскости xOy .

После применения преобразования Лапласа, решения полученной системы представляются в виде асимптотического разложения в ряд по малому параметру ε :

$$u_1^*(r, p) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}^*(r, p) \varepsilon^{k-1}, \quad v_1^*(r, p) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{0k}^*(r, p) \varepsilon^{k-1}. \quad (4)$$

Решение (4) найдено для двух членов в разложении. Обратное преобразование Лапласа полученных решений выполнено в предположении, что релаксация напряжений в периодонтальной связке описывается ядром релаксации Максвелла $K(t) = A_M \exp(-b_M t)$ (К. Komatsu et al., 2004, L. Qian et al., 2009, N. Slomka et al., 2008), а также с учетом граничных условий

$$u_1(b, 0) = u_0, \quad v_1(b, 0) = u_0, \quad u_1(b_1, 0) = 0, \quad v_1(b_1, 0) = 0.$$

На основании полученных решений определены параметры вязкоупругого ядра релаксации Максвелла для геометрической формы корня зуба, описываемой параболоидом вращения в предположении, что релаксация напряжений в тканях периодонтальной связки после приложения нагрузки (и последующего мгновенного смещения) происходит приблизительно в

течении пяти часов (W.D. Van Driel et al., 2000). Установлено, что коэффициент Пуассона существенно влияет как на величину нормальных и касательных напряжений в периодонтальной связке, так и на характер распределения напряжений. При уменьшении коэффициента Пуассона возрастает различие между напряжениями в точках внутренней и внешней поверхностей периодонтальной связки. Это различие при коэффициенте Пуассона 0,49 составляет 0,7%; при коэффициентах Пуассона 0,45 и 0,30 различие составляет приблизительно 3,1% и 9,5% соответственно.

В **первом** пункте **четвертой** главы представлены результаты разработки механико-математической модели малых перемещений корня зуба вязкоупругой периодонтальной связке. Уравнения движения корня зуба имеют вид

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF + M \frac{d^2 \vec{u}_0}{dt^2} - \vec{f} = 0, \quad \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF + J \frac{d^2 \vec{\theta}_r}{dt^2} - \vec{m} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$, $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – главный момент и вектор внешних сил соответственно; σ – тензор напряжений; $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – единичный вектор нормали к внутренней поверхности периодонтальной связки (или внешней поверхности корня зуба); M и J – масса и осевой момент инерции корня зуба соответственно; $F \equiv F(x, y, z) = 0$ – уравнение внешней поверхности корня зуба.

Внешняя поверхность жестко закреплена в костной ткани зубной альвеолы и остается неподвижной при перемещениях зуба. Точки периодонтальной связки на ее внутренней поверхности жестко прикреплены к поверхности корня зуба, и при действии на коронку зуба сосредоточенной силы перемещаются вместе с корнем. Компоненты тензора напряжений с учетом вязкоупругих свойств в этих точках периодонтальной связки задаются в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{E_\infty}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left((1-2\nu)\varepsilon_{ij} - \nu_\varepsilon \int_0^t \xi \left(-\frac{\tau}{\tau_\varepsilon} \right) \varepsilon_{ij}(t-\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \nu \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} - \nu_\varepsilon \int_0^t \xi \left(-\frac{\tau}{\tau_\varepsilon} \right) \varepsilon_{kk}(t-\tau) d\tau \right) \right), \quad (6)$$

где τ_ε – время релаксации; $\nu_\varepsilon = (E_\infty - E_0)/E_\infty$; E_0 и E_∞ – мгновенный и релаксационный модули упругости; $\xi\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_\varepsilon^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)^{\gamma n} \frac{1}{\Gamma(\gamma(n+1))}$ – дробная экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, которая описывает релаксацию нормальных и касательных напряжений; γ – параметр дробности; ε_{ik} – компоненты тензора деформаций, $i, k = \overline{1, 3}$; $0 < \gamma \leq 1$.

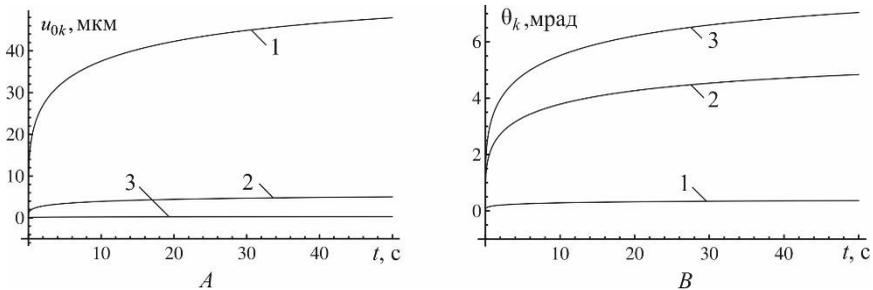
Поскольку толщина периодонтальной связки очень мала, углы поворота очень малы, использованы линейризованные соотношения, определяющие перемещения абсолютно твердого тела u_x , u_y и u_z через его поступательные перемещения вдоль осей координат и углы поворота относительно этих же осей. С учетом этих соотношений в соответствии с работами Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой, получено решение системы (5) в пренебрежении инерционными членами, поскольку продолжительность действия нагрузки на корень зуба предполагается достаточно большой (от 0 до 45 с), и масса зуба малой (~ 1 г). Результат решения имеет вид

$$u_{0k} = \frac{A_k R(t)}{A}, \quad R(t) = 1 + \nu_\sigma \frac{t^\gamma}{\tau_\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\gamma(n+1))} \left(\frac{t}{\tau_\sigma}\right)^{\gamma n}, \quad (7)$$

$$u_{01} = u_{0x}, \quad u_{02} = u_{0y}, \quad u_{03} = u_{0z}, \quad u_{04} = \theta_x, \quad u_{05} = \theta_y, \quad u_{06} = \theta_z,$$

где u_{0x} , u_{0y} и u_{0z} – поступательные перемещения корня зуба вдоль осей координат; θ_x , θ_y и θ_z – углы поворота корня зуба относительно осей координат A – определитель, составленный из коэффициентов системы (3) при поступательных перемещениях и углах поворота; A_k – определитель, полученный из определителя A заменой k -го столбца на столбец свободных членов; $\nu_\sigma = (E_\infty - E_0)/E_0$; τ_σ – время ретардации. Решения (7) соответствуют начальным условиям $u_{0k}(0) = A_k/A$, $k = \overline{1, 6}$.

На рисунке 7 показаны зависимости поступательных перемещений u_{0x} , u_{0y} и u_{0z} , а также углов поворота θ_x , θ_y , θ_z от времени для точек периодонтальной связки, расположенных на ее внутренней поверхности. При этом параметр дробности γ принимался равным 0,35; время ретардации τ_σ и параметр ν_σ равны 550 с и 130 соответственно. Для принятых параметров вязкоупругой модели в соответствии с требованиями Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, 2007, 2010, время релаксации τ_ε составляет 10,995 мкс.



A – зависимость поступательных перемещений u_{0k} , $k = \overline{1, 3}$;

B – зависимость углов поворота θ_k , $k = \overline{1, 3}$; $1 \equiv x$, $2 \equiv y$, $3 \equiv z$

Рисунок 7. – Зависимости поступательных перемещений и углов поворота зуба от времени при наклонно-вращательном перемещении

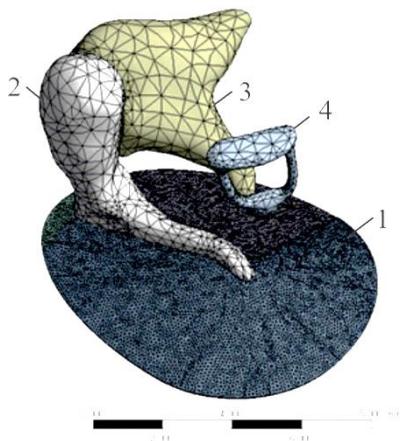
Приведенные на рисунке 7 зависимости качественно и количественно с достаточно высокой точностью соответствуют экспериментально полученным результатам R.J. Pruptniewicz, C.J. Burstone, 1979.

Показано, что одновременное изменение параметра v_{σ} и параметра дробности γ позволяет задавать различные промежутки времени для фазового перехода и максимальные значения перемещений корня зуба в периодонтальной связке для любой нагрузки. Величина максимального перемещения и угла поворота при различных значениях нагрузки может быть задана посредством изменения величины параметра v_{σ} . Увеличение параметра дробности приводит к увеличению длительности фазового перехода и величины максимального перемещения корня зуба (при постоянных значениях параметров v_{σ} и τ_{σ}).

В **первом** пункте **пятой** главы представлены результаты разработки численно-аналитическая модель среднего уха в норме и среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств задневерхнего квадранта. Трехмерная твердотельная модель тимпанальной мембраны является слоистой: *pars flaccida* соответствует один слой, задневерхний квадрант *pars tensa* состоит из двух слоев, остальная область *pars tensa* состоит из трех слоев. Твердотельные трехмерные модели молоточка, наковальни и стремени получены на основании томографических данных. Конечно-элементная модель среднего уха представлена на рисунке 8.

Отрицательное звуковое давление в барабанной полости моделировалось приложением статической равномерно распределенной нормальной нагрузки на внешней стороне тимпанальной мембраны. Патологические изменения упругих свойств задневерхнего квадранта описываются посредством уменьшения его модуля упругости. При этом рассматриваются два случая:

случай 1 ранней стадии образования ретракционного кармана, соответствующий началу его возникновения и характеризующийся возникновением очага патологии; случай 2, соответствующий образованию ретракционного кармана, при котором в результате развития патологии тимпанальной мембраны уменьшается модуль упругости всего задневерхнего квадранта доопределенного значения.



1 – тимпанальная мембрана; 2 – молоточек; 3 – наковальня; 4 – стремя
Рисунок 8. – Конечно-элементная модель среднего уха

Для случаев 1 и 2 модуль упругости задневерхнего квадрата описывается следующим образом:

$$E_{\text{PSQ}}^{(1)} = E_{\text{pt}}^{(n)} - \left(E_{\text{pt}}^{(n)} - E_{\text{pt}} \right) \exp\left(-k_x(x-x_0)^2 - k_y(y-y_0)^2\right), \quad E_{\text{PSQ}}^{(2)} = E_{\text{pt}}, \quad (8)$$

где $E_{\text{PSQ}}^{(1)}$ и $E_{\text{PSQ}}^{(2)}$ – модули упругости задневерхнего квадрата для случаев 1 и 2 соответственно; $E_{\text{pt}}^{(n)}$ – модуль упругости *pars tensa* среднего уха в норме; E_{pt} – модуль упругости задневерхнего квадрата при патологических изменениях его упругих свойств; k_x и k_y – коэффициенты, характеризующие изменение модуля упругости от очага патологии на задневерхнем квадранте до примыкающих к нему участков *pars tensa* и *pars flaccida*; (x_0, y_0) – координаты точки очага патологии.

Для случаев 1 и 2 величина отрицательного звукового давления составляет 120 дБ (20 Па), модуль упругости *pars tensa*, за исключением задневерхнего квадрата, составлял 33,4 МПа, модуль упругости *pars flaccida* равен 11,1 МПа. Модуль упругости задневерхнего квадранта изменялся для случая 1 в соответствии с функцией $E_{PSQ}^{(1)}$. При этом модуль упругости $E_{pt}^{(n)} = 33,4$ МПа, коэффициенты $k_x = 1,5 \cdot 10^6$ мм⁻² и $k_y = 0,75 \cdot 10^6$ мм⁻² соответственно. Модуль упругости E_{pt} принимал какое-либо из следующих значений: 33,4; 22,0; 11,0; 9,0 или 3,0 МПа. В таблице 2 приведены соотношения между максимальным прогибом задневерхнего квадранта для среднего уха в норме ($u_{\text{норм}} = 3,072$ мкм) и среднего уха с патологическим изменением упругих свойств, описываемых случаями 1 и 2.

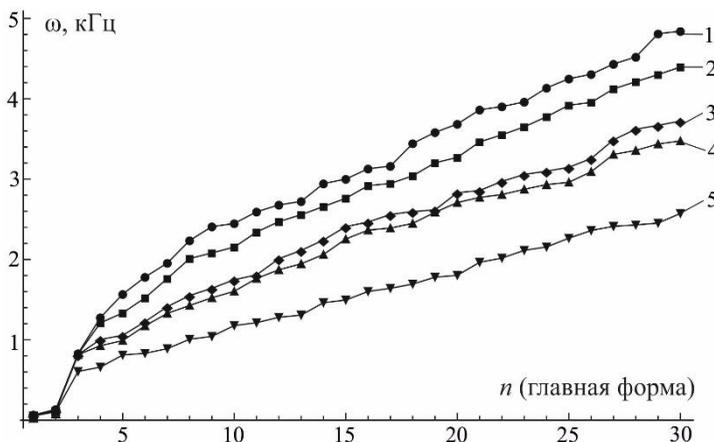
Таблица 2. – Величины максимального прогиба задневерхнего квадранта при статическом давлении 20 Па (120 дБ)

E_{pt} , МПа	Максимальный прогиб $u^{(1)}$ (мкм) для случая 1	$\frac{u^{(1)}}{u_{\text{норм}}}$	Максимальный прогиб $u^{(2)}$ (мкм) для случая 2	$\frac{u^{(2)}}{u_{\text{норм}}}$
22,0	3,132	1,020	4,418	1,440
11,0	3,340	1,087	8,343	2,720
9,0	3,433	1,118	10,100	3,290
3,0	3,951	1,286	29,67	9,660

В случае 1, соответствующему ранней стадии образования ретракционного кармана, собственные частоты свободных колебаний среднего уха при модуле упругости E_{pt} , принимающем одно из значений 22,0; 11,0; 9,0 и 3,0 МПа, практически не отличаются от собственных частот свободных колебаний среднего уха в норме. Для случая 2 собственные частоты свободных колебаний среднего уха в норме и среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств тимпанальной мембраны для соответствующих форм колебаний показаны на рисунке 9.

В **втором** пункте **пятой** главы на основании разработанной конечно-элементной модели среднего уха выполнена оценка толщины хрящевого трансплантата, накладываемого на задневерхний квадрант тимпанальной мембраны в случае изменения его упругих свойств. Толщина трансплантата определена на основании условия приближенного равенства частот свободных колебаний для соответствующей главной формы колебаний среднего уха в норме и среднего уха при патологических изменениях упругих свойств и наложенным на задневерхний квадрант хрящевым трансплантатом. Поскольку собственные частоты свободных колебаний среднего уха на ранней стадии образования ретракционного кармана и среднего уха в норме практически не

отличаются для соответствующих главных форм, использовать хрящевой трансплантат в этом случае в случае 1 нецелесообразно.



1 – среднее ухо в норме ($E_{pt} = 33,4$ МПа); 2 – $E_{pt} = 22,0$ МПа;
3 – $E_{pt} = 11,0$ МПа; 4 – $E_{pt} = 9,0$ МПа; 5 – $E_{pt} = 3,0$ МПа

Рисунок 9. – Значения собственных частот свободных колебаний модели среднего уха для соответствующих главных форм

Диапазоны толщин хрящевого трансплантата, накладываемого на ретракционный карман, для различных модулей упругости задневерхнего квадранта, а также диапазоны собственных частот среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств задневерхнего квадранта приближенно совпадающие с соответствующим диапазоном собственных частот среднего уха в норме после установки хрящевого трансплантата систематизированы в таблице 3.

Таблица 3. – Толщина хрящевого трансплантата для задневерхнего квадранта в случае 2 и диапазон собственных частот свободных колебаний, на которых возможно осуществить компенсацию потери слуха после тимпанопластики

E_{pt} , МПа	Диапазон толщины хрящевого трансплантата, мкм	Диапазон компенсируемых частот при ухудшении слуха
22,0	40–650	от 2,0 кГц до 5,0 кГц
11,0	360–450	от 2,3 кГц до 5,0 кГц
9,0	400–650	все собственные частоты
3,0	450–580	все собственные частоты

В **третьем** пункте **пятой** главы приведены результаты определения частот свободных колебаний среднего уха после тимпанопластики на основании механико-математической модели, описывающей изгибные колебания кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную барабанную перепонку, и плоскостные движения протеза, замещающего звено «молоточек – наковальня» и соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану с подвижным основанием подножной пластины стремени.

Считаем, что протез является недеформируемым твердым телом. При малых низкочастотных колебаниях системы движение основания протеза учитывается поступательное перемещение W_p вдоль оси Cz и угловое перемещение Θ_p относительно оси Cy' (C – центр основания протеза), которая является одним из таких узловых диаметров, вокруг которого протез совершает повороты. В результате перемещения конец ствола протеза (точка S) занимает новое положение S' . Исходное и конечное положения колебательной системы «тимпанальная мембрана – протез – подножная пластина стремени» после элементарного перемещения – поворота на угол Θ_p показаны на рисунке 10 (в точку S_Θ переходит точка S после поворота на угол протеза на угол Θ_p).

Уравнение малых колебаний круглой упругой кольцевой пластинки, моделирующей реконструированную тимпанальную мембрану, имеет вид

$$D\Delta^2W(r, \varphi, t) + \rho h \frac{d^2W(r, \varphi, t)}{dt^2} = 0, \quad (9)$$

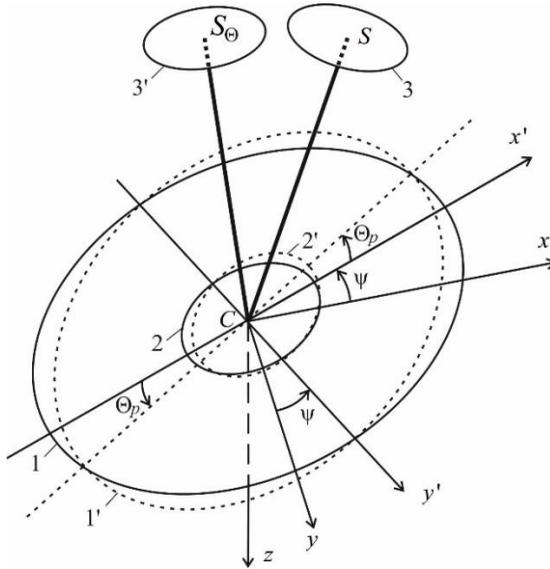
где D – цилиндрическая жесткость пластины; ρ – плотность пластины; r, φ – полярные координаты (φ – угол, отсчитываемый в плоскости $x'Sy'$ от оси Cx' против часовой стрелки); $W(r, \varphi, t)$ – прогиб пластины.

Граничные условия на внешнем и внутреннем контурах тимпанальной мембраны, совершающей малые колебания, имеют вид

$$\begin{aligned} W(b, \varphi, t) = W_p(t) + b\Theta_p(t)\cos(\varphi), \quad W(a, \varphi, t) = 0, \\ \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=b} = \Theta_p(t)\cos(\varphi), \quad \left. \frac{\partial W(r, \varphi, t)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где a, b – радиусы внешних контуров тимпанальной мембраны и протеза соответственно; $W_p = w_p \sin(\omega t)$; $\Theta_p = \theta_p \sin(\omega t)$; w_p, θ_p – амплитуды

поступательного и вращательного движений протеза, соответственно; ω – искомая частота свободных колебаний системы.



C – центр реконструированной тимпанальной мембраны и основания протеза;
 1 и 2 – исходное положение реконструированной тимпанальной мембраны
и основания протеза; 3 – исходное положение основания стремени; $1'$ и $2'$ –
положение реконструированной тимпанальной мембраны и основания протеза
после поворота на угол Θ_p ; $3'$ – расположение основания стремени после
поворота основания протеза на угол Θ_p ; Ψ – угол между осями Cy и Cy'
систем координат $(Cxyz)$ и $(Cx'y'z')$

Рисунок 10. – Геометрическая модель реконструированного
среднего уха с установленным протезом

Решение уравнения колебаний реконструированной тимпанальной мембраны с граничными условиями (10) можно представить в виде

$$W(r, \varphi, t) = (w_0(r) + w_1(r) \cos(\varphi)) \sin(\omega t), \quad (11)$$

где w_0 и w_1 – амплитуды колебаний пластины, соответствующие поступательному и вращательному движениям протеза, а соответствующие граничные условия для этих функций имеют вид:

$$w_0(b) = w_p, w_0(a) = 0, w_1(b) = b\theta_p, w_1(a) = 0, \\ \left. \frac{\partial w_0(r)}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \left. \frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right|_{r=b} = \theta_p, \left. \frac{\partial w_0(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial w_1(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12)$$

С учетом (11), функции $w_0(r)$ и $w_1(r)$ представимы в виде:

$$w_0(r) = A_1 I_0(k_0 r) + A_2 J_0(k_0 r) + A_3 Y_0(k_0 r) + A_4 K_0(k_0 r), \\ w_1(r) = B_1 I_1(k_0 r) + B_2 J_1(k_0 r) + B_3 Y_1(k_0 r) + B_4 K_1(k_0 r), \quad (13)$$

где $k_0^4 = h\rho\omega^2/D$, $I_n(k_0 r)$, $J_n(k_0 r)$, $Y_n(k_0 r)$ и $K_n(k_0 r)$ – функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка ($n=0, 1$); неизвестные константы A_k и B_k , $k = \overline{1, 4}$, находятся из граничных условий (12).

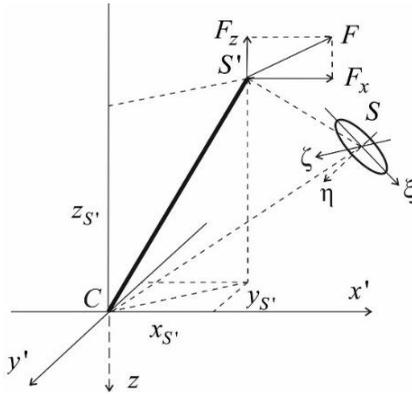
Основание протеза (круглая пластинка радиуса b) жестко скреплено с кольцевой пластинкой по внутреннему контуру, а другим концом шарнирно закрепленного на подножной пластине стремени. Силы и моменты, действующие на протез в результате его поступательного перемещения вдоль оси Cz и поворота вокруг оси Cy' , обозначены следующим образом: Q_{10} – перерезывающие силы, возникающие при смещении протеза по нормали к его поверхности; Q_{1p} и M_{1p} – перерезывающие силы и изгибающие моменты, возникающие при повороте протеза на угол Θ_p ; F_x и F_z – компоненты реакции F подножной пластины стремени, действующие на протез со стороны основания стремени вдоль осей Cx' и Cz соответственно. С учетом принятых обозначений уравнения колебаний протеза примут вид

$$2 \int_0^\pi \left[(M_{1p} + Q_{1p}b) \cos(\varphi)r \right]_{r=b} d\varphi + F_x z_{S'} - F_z y_{S'} = J \frac{d^2 \Theta_p}{dt^2}, \\ 2 \int_0^\pi [Q_{10}r]_{r=b} d\varphi + F_z = m \frac{d^2 W_p}{dt^2}, \quad (14)$$

где m – масса протеза; J – момент инерции протеза относительно оси Cy' .

Центр тяжести подножной пластины стремени при движении протеза также смещается в точку S' с координатами $(\xi_{S'}, \eta_{S'}, \zeta_{S'})$ локальной системы координат $(S\xi\eta\zeta)$, совершая повороты α_ξ , α_η и α_ζ относительно

координатных осей $S'\xi$, $S'\eta$ и $S'\zeta$. На рисунке 11 обозначены силы, действующие при этом на основание стремени.



$x_{S'}$, $y_{S'}$ и $z_{S'}$ – координаты точки S' в системе координат $(Cx'y'z)$;
 $(S\xi\eta\zeta)$ – локальная система координат, связанная с основанием стремени

Рисунок 11. – Силы, действующие на подножную пластину стремени

Уравнения движения основания стремени можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 F_x + F_\xi \cos(\delta_{x''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{x''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{x''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 x'(t)}{dt^2}, \\
 F_y + F_\xi \cos(\delta_{y''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{y''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{y''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 y'(t)}{dt^2}, \\
 F_z + F_\xi \cos(\delta_{z''\xi}) + F_\eta \cos(\delta_{z''\eta}) + F_\zeta \cos(\delta_{z''\zeta}) &= m_{pp} \frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \\
 m_\xi = J_\xi \frac{d^2 \alpha_\xi}{dt^2}, m_\eta = J_\eta \frac{d^2 \alpha_\eta}{dt^2}, m_\zeta = J_\zeta \frac{d^2 \alpha_\zeta}{dt^2},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где m_{pp} – масса основания стремени; $2J_\xi = m_{pp}a_0^2$, $2J_\eta = m_{pp}b_0^2$ и $2J_\zeta = m_{pp}(a_0^2 + b_0^2)$ – главные центральные моменты инерции подножной пластины стремени относительно координатных осей $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно (a_0 , b_0 – полуоси эллиптической подножной пластины стремени); F_ξ , F_η и F_ζ – проекции реакции связки овального окна на оси

координат $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно, возникающие при колебаниях протеза; m_ξ , m_η и m_ζ – реактивные моменты относительно координатных осей $S\xi$, $S\eta$ и $S\zeta$ соответственно; $\delta_{x''\xi}$, $\delta_{x''\eta}$ и $\delta_{x''\zeta}$ – углы между осью координат Cx' и осями координат $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ соответственно; $\delta_{y''\xi}$, $\delta_{y''\eta}$ и $\delta_{y''\zeta}$ – углы между осью координат Cy' и осями координат $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ соответственно; $\delta_{z''\xi}$, $\delta_{z''\eta}$ и $\delta_{z''\zeta}$ – углы между осью координат Cz и осями координат $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ соответственно; β_x , β_y и β_z – углы Эйлера, определяющие связь между системами координат $(S\xi\eta\zeta)$ и $(Cxyz)$.

Характеристическое уравнение, найденное на основании систем уравнений (14) и (15), решено численно для геометрических и материальных постоянных, принятых G. Mikhasev et al., 2010, A.A. Selyaninov et al., 2009, F. Zhao et al., 2009. В таблице 4 приведены значения собственных частот свободных колебаний системы, состоящей из мембраны среднего уха с протезом и подножной пластины стремени.

Таблица 4. – Собственные частоты свободных колебаний тимпанальной мембраны среднего уха и подножной пластины стремени с установленным между ними протезом, а также соответствующие номера узловых линий n_ψ

Угол ψ	ω_1 , кГц $n_\psi = 0$	ω_2 , кГц $n_\psi = 1$	ω_3 , кГц $n_\psi = 2$	ω_4 , кГц $n_\psi = 3$
$\pi/6$	15,61	42,81	83,20	135,52
$\pi/4$	15,60	42,74	82,73	133,07
$\pi/3$	15,58	42,58	81,92	129,29
$\pi/2$	15,65	44,20	119,43	168,72

На основании полученного характеристического уравнения исследовано влияние модуля упругости хрящевого трансплантата и жесткости связки овального окна на собственные частоты колебаний системы. Установлено, что при увеличении модуля упругости трансплантата и жесткости связки овального окна собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха также возрастают. В то же время, изменение модуля упругости трансплантата оказывает более существенное влияние на изменение значений собственных частот, чем изменение жесткости овального окна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Разработана методика определения предельной нагрузки, при действии которой происходит разрушение бедренной кости человека после хирургической резекции на основании численно-аналитической модели кости с учетом анизотропного распределения упругих свойств по длине кости и в различных анатомических квадрантах в соответствии с экспериментальными данными для кортикальной костной ткани. Полученные значения разрушающей нагрузки с достаточно высокой точностью соответствуют результатам эксперимента по нахождению разрушающей нагрузки для различных образцов бедренной кости с пострезекционными дефектами. Получена функция зависимости предельной нагрузки при которой возникает перелом бедренной кости после хирургической резекции, от линейного и углового размеров пострезекционного дефекта в средней трети бедренной кости, позволившие сформулировать рекомендации по послеоперационной реабилитации пациентов, подвергшихся удалению опухолеподобного поражения в средней трети бедренной кости. Установлено, что для бедренной кости с пострезекционным дефектом в средней трети, наиболее неблагоприятным является одновременное действие собственного веса и изгибающего момента для сгибания-разгибания бедренной кости, а также одновременное действие собственного веса человека и крутящего момента для поворота бедра [11, 18, 29, 33, 37, 49, 53, 54, 57, 75, 77, 79, 82, 84, 87, 98, 99, 101].

2. Установлены закономерности распределения эквивалентных напряжений и полей перемещений в интактном черепе человека, черепа с односторонней и двусторонней расщелиной с установленным ортодонтическим аппаратом для исправления перекрестного прикуса, а также в костных структурах черепа человека с односторонней расщелиной неба и хирургическими разрезами, которые соответствуют различным типам остеотомии, на основании численно-аналитической модели черепа человека, нагружаемой посредством смещения пластинок ортодонтического аппарата, позволившая установить влияние расположения винта ортодонтического аппарата, условия его активации, а также влияние различных типов остеотомии на исправление перекрестного прикуса [1, 3, 4, 10, 15, 20, 24, 35, 36, 40, 41, 42, 46, 47, 48, 51, 52, 55, 58, 62, 66, 67, 68, 69, 78, 81, 83, 85, 90].

3. Разработана механико-математическая модель вязкоупругой периодонтальной связки, отличающаяся учетом начальных и граничных условий, вызванных поступательным перемещением корня зуба. Параметры ядра релаксации определены на основании экспериментальных данных о перемещении корня зуба в периодонтальной связке. Установлены распределения напряжений и деформаций в тканях периодонта с течением времени [1, 14, 16, 19, 21, 27, 38, 56, 80, 86, 97].

4. Разработана механико-математическая модель перемещения корня зуба в вязкоупругой периодонтальной связке с использованием ядра релаксации с

параметром дробности. Изменение параметра дробности позволяет задавать различный временной промежуток для переходной фазы периодонтальной связки. При определении параметров дробного ядра вязкоупругости использованы экспериментальные данные о перемещениях и поворотах зуба в периодонтальной связке с течением времени [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 21, 22, 23, 25, 28, 31, 39, 43, 44, 45, 46, 50, 59, 60, 63, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 88, 89, 92, 93, 94].

5. Установлены закономерности изменения спектров частот свободных колебаний среднего уха в норме, среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств задневерхнего квадранта тимпанальной мембраны, а также среднего уха после установки хрящевого трансплантата и протеза среднего уха, рассчитанные на основании численно-аналитической модели, отличающейся слоистой структурой тимпанальной мембраны и нелинейным распределением модуля упругости задневерхнего квадрата, а также на основании механико-математической модели, предусматривающей крутильные и поперечные колебания протеза, которые позволяют планировать хирургические операции устранения ретракционного кармана задневерхнего квадранта тимпанальной мембраны и протезирование среднего уха для улучшения слуховой проводимости [26, 30, 32, 34, 61, 64, 65, 91, 95, 96, 100, 102].

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Результаты **второй** главы могут использоваться для определения предельной нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом, локализованным на внутренней стороне в средней трети диафиза и формулировке рекомендаций по предупреждению патологического перелома бедренной кости после хирургической резекции [104, 106]. Результаты **третьей** главы могут быть использованы при проектировании ортодонтических аппаратов для устранения перекрестного прикуса и прогнозирования напряжений и деформаций интактного черепа, черепа с односторонней и двусторонней расщелиной с учетом различных условий активации ортодонтического аппарата для расширения верхней челюсти, а также прогнозирования влияния различных типов остеотомии на напряжения и деформации, возникающие в черепе с односторонней расщелиной после активации ортодонтического аппарата для расширения верхней челюсти [103]. Результаты **четвертой** главы могут быть использованы для разработки автоматизированных компьютерных программ для моделирования ортодонтических перемещений зубов на основании напряжений и деформаций, возникающих при смещении корня зуба в периодонтальной связке. Результаты **пятой** главы могут быть использованы при планировании хирургических операций по тимпанопластике и устранению ретракционного кармана тимпанальной мембраны, а также для определения толщины хрящевого трансплантата, накладываемого на задневерхний квадрант тимпанальной мембраны для устранения ретракционного кармана [105].

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Коллективные монографии

1. Босяков, С.М. Реакция верхнечелюстного комплекса на ортодонтическую нагрузку / С.М. Босяков, Д.А. Гричанюк, А.Ф. Мселати. – Germany, Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2017 – 208 с.

2. Bosiakov, S. An analytical model for stress-strain state analysis of a periodontal ligament under static loading / S. Bosiakov // Complex analysis and potential theory with applications / Editors: T. Aliev Azerogly, A. Golberg, S. Rogosin. – Cambridge, 2014. – Chapter 3. – P. 11–22.

Статьи в рецензируемых научных журналах и сборниках

3. Михасев, Г.И. Биомеханическое моделирование ортодонтического аппарата с четырьмя стержнями / Г.И. Михасев, С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 1. – С. 156–159.

4. Mikhasev, G.I. Determination of power factors developed by the orthodontic appliance for the maxilla extension / G.I. Mikhasev, S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich // Russian Journal of Biomechanics. – 2010. – Vol. 14, No. 1. – P. 72–82.

5. Bosiakov S.M. Determination of stiffnesses of the bone tissue at translational displacements and rotations of the tooth root / S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich // Russian Journal of Biomechanics. – 2010. – Vol. 14, No. 2. – P. 36–45.

6. Босяков, С.М. Анализ напряжений, возникающих под действием сосредоточенной нагрузки, в области контакта периодонта с корнем зуб / С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Механика машин, материалов и механизмов. – 2010. – № 4. – С. 75–78.

7. Bosiakov, S. The modeling of the displacement of the fang in the bone stock under the concentrated force / S. Bosiakov, K. Yurkevich // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. – 2011. – Vol. III. – P. 25–29.

8. Bosiakov, S.M. Mathematical modelling of initial tooth root displacements in bone tissue under action of instant static loading / S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich // Russian Journal of Biomechanics. – 2011. – Vol. 15, No. 3. – P. 22–29.

9. Босяков, С.М. Анализ условий поступательного перемещения корня зуба в линейно упругой периодонтальной оболочке / С.М. Босяков, Абдуфтах Фрхат Мселати // Механика машин механизмов и материалов. – 2013. – № 5. – С. 7–11.

10. Босьяков, С.М. Конечно-элементный анализ влияния конструкции ортодонтического аппарата на расширение верхней челюсти / С.М. Босьяков, А.Н. Доста, А.В. Винокурова // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4, Ч. 1. – С. 39–49.

11. Босьяков, С.М. Анализ поврежденности бедренной кости с пострезекционным дефектом при действии статической нагрузки / С.М. Босьяков, И.Э. Шпилевский, Д.В. Алексеев // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – 2014. – Вып. 29. – С. 148–152.

12. Босьяков, С.М. Аналитическая модель начальных поступательных перемещений корня зуба в линейно-упругой периодонтальной связке / С.М. Босьяков, Г.И. Михасев // Механика машин материалов и механизмов. – 2014. – № 3. – С. 68–72.

13. Bosiakov, S.M. On the application of a viscoelastic model with Rabotnov's fractional exponential function for assessment of the stress-strain state of the periodontal ligament / S.M. Bosiakov // International Journal of Mechanics. – 2014. – Vol. 8. – P. 347–352.

14. Босьяков, С.М. Определение центра сопротивления для корня зуба в форме кругового гиперболоида / С.М. Босьяков, А.В. Круподеров, Абдуфтах Фрхат Мселати // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2014. – № 4. – С. 72–78.

15. Босьяков, С.М. Перемещения верхнечелюстного комплекса перекрестного прикуса / С.М. Босьяков, А.В. Винокурова, А.Н. Доста // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 4. – С. 87–94.

16. Босьяков, С.М. Моделирование напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки при начальных перемещениях корня зуба / С. М. Босьяков, А.Ф. Мселати, К.С. Юркевич // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 84–89.

17. Bosiakov, S. Viscoelasticity of periodontal ligament: an analytical model / S. Bosiakov, A. Koroleva, S. Rogosin, V. Silberschmidt // Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes. – 2015. – Vol. 1. – P. 7.1–7.11.

18. Bosiakov, S. Damage prediction of the femur with postresection defect / S. Bosiakov, D. Alekseev, I. Shpileuski // Current Trends in Analysis and Its Applications. – 2015. – Vol. XVI. – P. 753–760.

19. Yurkevich, K. On one approach to the periodontal ligament takes into account its viscoelastic properties / K. Yurkevich, S. Bosiakov // Current Trends in Analysis and Its Applications. – 2015. – Vol. XVI. – P. 785–792.

20. Bosiakov, S. Biomechanical effects of maxillary expansion in cross-bite patients during orthodontic treatment with Hyrax system / S. Bosiakov,

A. Vinokurova, A. Dosta // *Current Trends in Analysis and Its Applications*. – 2015. – Vol. XVI. – P. 793–802.

21. Bosiakov, S.M. Mathematical modelling of initial displacements of the tooth root in hyperboloid of two-sheets form / S.M. Bosiakov, A.F. Mselati, A.V. Krupoderov // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2015. – Vol. 19, No. 2. – P. 161–176.

22. Bosiakov, S. Regions of resistance for model of the single-rooted tooth: different symmetry cases / S. Bosiakov, A.F. Mselati // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2015. – Vol. 19, No. 3. – P. 223–235.

23. Mselati, A.F. Conditions for translational movement of the composite paraboloid with one plane of symmetry / A.F. Mselati, S.M. Bosiakov // *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*. – 2015. – Vol. V. – P. 355–364.

24. Bosiakov, S. Deformations at the craniofacial complex depending on the HYRAX device design / S. Bosiakov, A. Vinokurova, A. Dosta // *Scientific Letters of Rzeszow University of Technology*. – 2015. – Vol. 32. – P. 5–15.

25. Bosiakov, S. Analytical modeling of the viscoelastic behavior of periodontal ligament with using Rabotnov's fractional exponential function / S. Bosiakov, S. Rogosin // *Computational Problems in Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 343. – P. 153–167.

26. Finite-element modelling of the tympanic membrane retraction pocket under negative pressure in the tympanic cavity / G.I. Mikhasev, S.M. Bosiakov, L.G. Petrova, M.M. Maisyuk // *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. – 2015. – Vol. 13, No 3. – 2015. – P. 249–257.

27. Bosiakov, S. Mathematical model for analysis of translational displacements of tooth root / S. Bosiakov, G. Mikhasev // *Mathematical Modelling and Analysis*. – 2015. – Vol. 20, No. 4. – P. 490–501.

28. Bosiakov, S. Translational displacements of the asymmetrical tooth root: region of resistance / S. Bosiakov, A.F. Mselati // *Analytic methods of analysis and differential equations*. – 2015. – Vol. V. – P. 17–26.

29. Assessment of ultimate load for human femur after surgical resection: comparative experiment / S. Bosiakov, D. Alekseev, A. Koroleva, S. Rogosin, I. Shpileuski, V. Silberschmidt, E. Demirci, A. Dorozhko // *Analytic methods of analysis and differential equations*. – 2015. – Vol. V. – P. 27–36.

30. Конечно-элементное моделирование свободных колебаний реконструированного среднего уха при стапедотомии / С.М. Босяков, И.Л. Славашевич, К.С. Юркевич, Г.И. Михасев // *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. – 2016. – № 1. – С. 101–106.

31. Босяков, С.М. Аналитическая модель периодонтальной связи неравномерной толщины / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. – 2016. – № 1. – С. 107–113.

32. Assessment of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system: effect of the cartilage transplant / G. Mikhasev, S. Bosiakov, L. Petrova, M. Maisyuk, K. Yurkevich // *Dynamical systems: modelling*. – 2016. – Vol. 181. – P. 243–255.

33. Formation of microcracks near surgical defect in femur: assessment of ultimate loading conditions / S.M. Bosiakov, D.V. Alekseev, I.E. Shpileuski, V.V. Silberschmidt, F. Stachowicz, T. Trzepiecinski // *Scientific Letters of Rzeszow University of Technology*. – 2016. – Vol. 33. – P. 91–99.

34. Выбор толщины хрящевого трансплантата для хирургического лечения ретракционного кармана тимпанальной мембраны на основании модального анализа колебательной системы среднего уха / Г.И. Михасев, С.М. Босьяков, К.С. Юркевич, А.А. Дутина, Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк // *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. – 2017. – № 2. – С. 52–58.

35. Bosiakov, S. Craniofacial stress patterns and displacements after activation of Hyrax device: finite-element modelling / S. Bosiakov, A. Vinokurova, A. Dosta // *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. – 2017. – Vol. 15, No. 3. – P. 517–533.

36. Effect of Hyrax screw localization on cranium response during rapid maxillary expansion / S. Bosiakov, A. Vinokurova, I. Slavashovich, D. Grichanyuk, F. Stachowicz // *Scientific Letters of Rzeszow University of Technology*. – 2017. – Vol. 34. – P. 17–28.

37. Effect of surgical defect localization on ultimate load-bearing capacity of human femur: finite-element energy-based assessment/ S.M. Bosiakov, D.V. Alekseev, V.V. Silberschmidt, I.E. Shpileuski // *Procedia Structural Integrity*. – 2017. – Vol. 6. – P. 27–33.

38. Bosiakov, S. Viscoelastic behavior of periodontal ligament: stresses relaxation at translational displacement of a tooth root / S. Bosiakov, G. Mikhasev, S. Rogosin // *Trends in Mathematics: Modern Problems in Applied Analysis*. – 2018. – Vol. IV. – P. 51–64.

39. Yurkevich, K. Analytical modelling of the tooth translational motions: comparative analysis for different shapes of root / K. Yurkevich, S. Bosiakov, H. Altenbach // *Advanced Structured Materials*. – 2018. – Vol. 80. – P. 449–461.

Статьи в научных журналах и материалах конференций

40. Доста, А.Н. Компьютерный анализ напряженно-деформированного состояния ортодонтического аппарата / А.Н. Доста, С.М. Босьяков, К.С. Юркевич // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник*. – 2008. – Вып. 23. – С.18–23.

41. Босьяков, С.М. Параметрическое моделирование и конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния ортодонтических аппаратов с четырьмя коронками / С.М. Босьяков, А.Н. Доста // Пятые Поляховские чтения: Избранные труды Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 3–6 февраля 2009 г. СПб, 2009. – С. 356–360.

42. Bosiakov, S. The calculation of teeth roots displacement which appears during orthodontical treatment / S. Bosiakov, K. Yurkevich, A. Dosta // World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering: IFMBE Proceedings, Dössel O., Schlegel W.C. (Eds.), September 7 – 12, 2009, Munich, Germany, Vol 25/11. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. – P. 209–211.

43. Босьяков, С.М. Определение жесткости костной ткани при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба / С.М. Босьяков, К.С. Юркевич // Прикладные задачи математики и механики, XVII международная науч.-техн. конф. (2009; Севастополь), 14–19 сент. 2009 г. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. – С. 149–152.

44. Босьяков, С.М. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки / С.М. Босьяков, К.С. Юркевич // Прикладные задачи математики и механики: материалы XVIII международной науч.-техн. конф., 13–17 сент. 2010 г. / М-во образования и науки Украины, Севастоп. нац. техн. ун-т. Редкол.: Пашков Е.В. (предс.) и др.; научн. ред. Обжерин Ю.Е. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – С. 48–52.

45. Босьяков, С.М. Определение жесткостей костной ткани при поступательных перемещениях корня зуба / С.М. Босьяков, К.С. Юркевич // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах. – Т. 2. Дифференциальные уравнения и современные проблемы механики. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 27–31.

46. Журавков, М.А. Биомеханическое моделирование в стоматологии / М.А. Журавков, С.М. Босьяков // Наука и инновации. – 2010. – № 6. – С. 56–68.

47. Доста, А.Н. Биомеханический анализ быстрого расширения верхней челюсти винтом Нугах / А.Н. Доста, С.М. Босьяков, К.С. Юркевич // Стоматологический журнал. – 2010. – № 4. – С. 308–312.

48. Доста, А.Н. Биомеханический анализ быстрого расширения верхней челюсти винтом NYRAX в случае расщелины неба и альвеолярного отростка / А.Н. Доста, С.М. Босьяков, К.С. Юркевич // Стоматологический журнал. – 2011. – № 1. – С. 34–37.

49. Босьяков, С.М. Вычислительный эксперимент по нахождению максимальных напряжений, возникающих в трубчатых костях после

выполнения секторальной резекции / С.М. Босяков, Э.И. Шпилевский // Труды 6-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах (под ред. С. В. Рогозина). Т. 2. «Дифференциальные уравнения». – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 25–28.

50. Босяков, С.М. Нелинейная модель начальных перемещений корня зуба в костной ткани под действием статической нагрузки / С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Труды 6-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах (под ред. С. В. Рогозина). – Т. 2. «Дифференциальные уравнения». – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 29–32.

51. Босяков, С.М. Определение усилий, развиваемых ортодонтическим аппаратом с четырьмя стержнями и винтом, с учетом упругости пародонта / С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Труды Белорусского государственного технологического университета. Физ.-мат. науки и информатика. – 2012. – № 6. – С. 3–6.

52. Босяков, С. Корпусное перемещение зубов при верхнечелюстном расширении / С. Босяков, А. Доста, А. Винокурова // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. - Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 213–215.

53. Анализ опасных объемов для бедренной кости с пострезекционным дефектом / С. Босяков, И. Шпилевский, С. Щербаков, Д. Алексеев // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 215–217.

54. Шпилевский, И.Э. Программа расчета остаточной прочности костей конечностей при секторальной резекции / И.Э. Шпилевский, С.М. Босяков, Ю.В. Лихачевский // Достижения медицинской науки Беларуси = Accomplishments of medical science in Belarus: рецензируемый науч.-практ. ежегодник. Вып. 18 / М-во здравоохранения Респ. Беларусь, ГУ «Респ. науч. мед. б-ка»; ред.: В.И. Жарко (гл. ред.) и др. – Минск : ГУ РНМБ, 2013. – С. 152–154.

55. Босяков, С.М. Биомеханическое проектирование ортодонтических аппаратов NYRAX для верхнечелюстного расширения / С.М. Босяков, А.В. Винокурова, А.Н. Доста // Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures: материалы междунар. науч. конф., 16-20 сент. 2013 г., Минск, Беларусь /

под общ. ред. Г.И. Михасева, Х. Альтенбаха. – Минск.: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 179–181.

56. Юркевич, К.С. Вязкоупругая модель периодонтальной связки / К.С. Юркевич, С.М. Босяков, И.К. Королев // Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур = Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures: материалы междунар. науч. конф., 16–20 сент. 2013 г., Минск, Беларусь / под общ. ред. Г.И. Михасева, Х. Альтенбаха. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – С. 208–210.

57. О прогнозировании патологического перелома бедренной кости человека, подвергнутой секторальной резекции / С.М. Босяков, С.С. Щербаков, И.Э. Шпилевский, Д.В. Алексеев // Труды Белорусского государственного технологического университета. Физ.-мат. науки и информатика. – 2013. – № 6. – С. 21–23.

58. Босяков, С.М. Анализ влияния конструкции ортодонтического аппарата на напряженно-деформированное состояние черепа человека при верхнечелюстном расширении / С.М. Босяков, А.В. Винокурова, А.Н. Доста // Труды Белорусского государственного технологического университета. Физ.-мат. науки и информатика. – 2013. – № 6. – С. 24–26.

59. Босяков, С. Моделирование винтовой оси при начальных перемещениях корня зуба в линейно упругой периодонтальной связке / С. Босяков, Абдуфтах Фрхат Мселати // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 200–202.

60. Bosiakov, S. Fractional viscoelastic model of the tooth root displacements in «noncompressible» periodontal ligament / S. Bosiakov // Recent Advances in Mathematical Methods in Applied Sciences. Proceedings of the 2014 International Conference on Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (MMAS' 2014). Saint Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia, September 23–25, 2014. Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, 2014. – P. 114–117.

61. Численное моделирование условий возникновения ретракционного кармана тимпанальной мембраны / Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк, Г.И. Михасев, С.М. Босяков // Материалы XI Всероссийской конференции с международным участием и школы-семинара для молодых ученых, 1–4 декабря 2014 г. Пермь, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2014. – С. 180–183.

62. Босяков, С.М. Анализ перемещений черепа и опорных зубов при верхнечелюстном расширении / С.М. Босяков, А.В. Винокурова // Материалы XI Всероссийской конференции с международным участием и

школы-семинара для молодых ученых, 1–4 декабря 2014 г. Пермь, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2014. – С. 184–187.

63. Босяков, С.М. Аналитическая модель начальных движений корня зуба в линейно упругой периодонтальной связке / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // Материалы XI Всероссийской конференции с международным участием и школы-семинара для молодых ученых, 1–4 декабря 2014 г. Пермь, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2014. – С. 187–190.

64. Геометрические размеры хрящевого трансплантата для задневерхнего квадранта тимпанальной мембраны с патологическими изменениями упругих свойств / Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк, Г.И. Михасев, С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Оториноларингология. Восточная Европа. – 2015. – № 4. – С. 48–57.

65. Хирургический подход к профилактике ретракционной холестеатомы в детском возрасте / Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк, Г.И. Михасев, С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Оториноларингология. Восточная Европа. – 2016. – № 2. – С. 192–202.

66. Влияние расположения винта ортодонтического аппарата на напряженно-деформированное состояние черепа при верхнечелюстном расширении / С.М. Босяков, Д.А. Гричанюк, А.Н. Доста, А.В. Винокурова, И.Л. Славашевич // Стоматолог. – 2017. – № 4. – С. 54–60.

Тезисы конференций

67. Босяков, С.М. Параметрическое моделирование и конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния ортодонтических аппаратов с четырьмя коронками / С.М. Босяков, А.Н. Доста // Пятые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 3–6 февраля 2009 г. – С. 202.

68. Михасев, Г.И. Моделирование ортодонтического аппарата для расширения верхней челюсти / Г.И. Михасев, С.М. Босяков // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тезисы докладов Второй международной научной конференции. Часть I. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2009. – С. 71–73.

69. Bosiakov, S. Some cases of mathematical modeling applications in orthopedic stomatology / S. Bosiakov, K. Yurkevich // Mathematical Modelling and Analysis: Abstract, 15th International Conference, May 26–29, Druskininkai, Lithuania. 2010., Vilnius Gediminas Technical University, 2010. – P. 9.

70. Босяков, С.М. Моделирование напряженного состояния периодонтальной связки в области контакта периодонта с корнем зуба с учетом атрофии костной ткани / С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Биомеханика 2010: Тез. докл. X Всерос. конф. / Под ред. проф. Л.Ю. Коссовича. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. – С. 46–47.

71. Yurkevich, K.S. Analysis of stress deformed condition of periodontal layer / K.S. Yurkevich, S.M. Bosiakov // Book of abstracts, XXXVIII of Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» July 1–5, 2010, St. Petersburg (Repino), Russia, IPME RAS 2010. – P. 101.

72. Bosiakov, S.M. Biomechanical modeling of tooth root movements in bone stock / S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich // Book of abstracts of XXXIX Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics», St. Petersburg (Repino), Russia, July 1–5, 2011. / IPME RAS, 2011. – P. 75.

73. Yurkevich, K.S. Biomechanical modeling of teeth roots displacement in bone stock under static loading / K.S. Yurkevich, S.M. Bosiakov // Book of abstracts of XXIII congress of the International Society of Biomechanics, Brussels, Belgium, July 3–7, Brussels, 2011. – P. 24.

74. Босяков, С.М. Нелинейная модель перемещений корня зуба в костной ткани / С.М. Босяков // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. конф. 12–17 сент. 2011 г., Минск, Беларусь. Минск: ИМНАНБ, 2011. – С. 30.

75. Босяков, С.М. Анализ прочности трубчатых костей после секторальной резекции / С.М. Босяков, И.Э. Шпилевский / Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. конф. 12–17 сент. 2011 г., Минск, Беларусь. Минск: ИМ НАНБ, 2011. – С. 30–31.

76. Босяков, С.М. Биомеханическое моделирование начальных перемещений корня зуба в костной ткани / С.М. Босяков, К.С. Юркевич // Шестые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 30 января – 3 февраля 2012 г. – С. 202.

77. Шпилевский, И.Э. Оценка прочности бедренной кости человека с применением методов компьютерного моделирования / И.Э. Шпилевский, С.М. Босяков, Ю.В. Лихачевский // Сборник материалов XVI Конгресса педиатров России с международным участием «Актуальные проблемы педиатрии». Москва, 24–27 февраля 2012 г. – С. 871.

78. Босяков, С.М. Вычислительный эксперимент по определению напряженно-деформированного состояния черепа человека, возникающего при расширении верхней челюсти / С.М. Босяков, А.Н. Доста // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл.

международ. науч. семинара 10–14 сент. 2012 г., Минск, Беларусь.–Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2012. – С. 13.

79. Босяков, С.М. Анализ влияния локализации дефекта на снижение прочности бедренной кости после проведения секторальной резекции / С.М. Босяков, И.Э. Шпилевский, Д.В. Алексеев // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. международ. науч. семинара 10–14 сент. 2012 г., Минск, Беларусь. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2012. – С. 13–14.

80. Босяков, С.М. Нестационарная модель вязкоупругой периодонтальной оболочки / С.М. Босяков // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. международ. науч. семинара 10–14 сент. 2012 г., Минск, Беларусь. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 2012. – С. 14–15.

81. Босяков, С.М. Биомеханическое моделирование расширения верхней челюсти / С.М. Босяков, А.Н. Доста // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. международ. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Часть 3. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 57–58.

82. Босяков, С.М. Определение коэффициента увеличения напряжений для оценки прочности бедренной кости после секторальной резекции / С.М. Босяков, И.Э. Шпилевский // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. международ. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Часть 3. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 58–59.

83. Bosiakov, S.M. On the FEM modeling of craniofacial displacements during rapid maxillary expansion / S.M. Bosiakov, A.V. Vinokurova, A.N. Dosta // XLI Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics» July 1–6, 2013, St. Petersburg (Repino), Russia / Book of Abstracts. Saint-Petersburg State University, – 2013. – P. 37–38.

84. Bosiakov, S.M. The prediction of the fracture risk of the long bones after sectoral resection / S.M. Bosiakov // XLI Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics» July 1–6, 2013, St. Petersburg (Repino), Russia / Book of Abstracts. Saint-Petersburg State University, 2013. – P. 62.

85. Bosiakov, S.M. Biomechanical effects of rapid maxillary expansion in cleft patients during HYRAX treatment / S.M. Bosiakov, A.V. Vinokurova, A.N. Dosta // Abstracts 9th International ISAAC Congress, August 5–9, 2013 in Krakow, Poland / Wspolpraca wydawnicza Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, Gliwice, 2013. – P. 39.

86. Yurkevich, K. Viscoelastic model of the periodontal ligament / K. Yurkevich, S. Bosiakov // Abstracts 9th International ISAAC Congress,

August 5–9, 2013 in Krakow, Poland / Wspolpraca wydawnicza Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, Gliwice, 2013. – P. 226–227.

87. Расчет прочности длинных трубчатых костей при выполнении секторальной резекции / И.Э. Шпилевский, О.А. Соколовский, Ю.В. Лихачевский, С.М. Босяков // III Уральский медицинский научно-практический форум с международным участием «Травматология: инновационные технологии в диагностике, лечении и реабилитации»: Материалы форума: Сборник тезисов докладов / ООО Конгрессно-выставочный центр «Урал» (Челябинск). Челябинск: Издательство Южно-Уральского государственного медицинского университета, 2013. – С. 57–58.

88. Bosiakov, S.M. The analytical model of a periodontal membrane in the form of an elliptical hyperboloid / S.M. Bosiakov, A.F. Mselati // XLII Summer School – Conference «Advanced Problems in Mechanics», June 30–July 6, 2014, St. Petersburg (Repino), Russia / Book of Abstracts. Saint-Petersburg State University, 2014. – P. 21–22.

89. Босяков, С.М. Математическое моделирование начальных перемещений корня зуба в периодонтальной оболочке с использованием уравнения винтовой линии / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // Тезисы XI Всероссийской конференции «Биомеханика-2014», г. Пермь, 1–4 декабря 2014 года, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета. – С. 27.

90. Босяков, С.М. Влияние конструкции ортодонтического аппарата на напряженно-деформированное состояние опорных зубов и костей черепа при верхнечелюстном расширении / С.М. Босяков, А.В. Винокурова // Тезисы XI Всероссийской конференции «Биомеханика–2014», г. Пермь, 1–4 декабря 2014 года, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета. – С. 28.

91. Конечно-элементный анализ условий соприкосновения тимпанальной мембраны и костей среднего уха / Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк, Г.И. Михасев, С.М. Босяков // Тезисы XI Всероссийской конференции «Биомеханика-2014», г. Пермь, 1–4 декабря 2014 года, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета. – С. 103.

92. Yurkevich, K. Analytical modelling of the stress-strain state of the periodontal ligament in the shape of the two-sheeted hyperboloid / K. Yurkevich, S. Bosiakov // 21st Congress of the European Society of Biomechanics. ESB 2015 – Book of Extended Abstracts (Prague, Czech Republic, 5–8 July 2015). – Prague: České vysoké učení technické v Praze, 2015. – P. 228.

93. Босяков, С.М. Условия приложения нагрузки для поступательного перемещения корня зуба / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // XI

Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – С.48–49.

94. Analytical modeling of the almost incompressible viscoelastic periodontal ligament / S.M. Bosiakov, A.A. Koroleva, S.V. Rogosin, V.V. Silberschmidt // Analytical methods of analysis and differentials equations: Abstracts of Reports of the 8th International Workshop. September 14–19, 2015, Minsk, Belarus. – Minsk: Institute of Mathematics of NAS of Belarus. – P. 20–21.

95. Влияние хрящевого импланта барабанной перепонки на собственные частоты свободных колебаний среднего уха / Г.И. Михасев, С.М. Босяков, Л. Г. Петрова, М.М. Майсюк // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. научн. семинара. 14 – 19 сентября 2015 г., Минск, Беларусь: Институт математики НАН Беларуси, 2015. – С. 62–63.

96. Assessment of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system: effect of the cartilage transplant / G. Mikhasev, S. Bosiakov, L. Petrova, M. Maisyuk, K. Yurkevich // 13th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications DSTA 2015. Abstracts / Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. Lodz, December 7 – 10, 2015. Poland. – P. 209.

97. Bosiakov, S.M. Viscoelastic response of the periodontal ligament to long acting load on a tooth / S.M. Bosiakov, G.I. Mikhasev // P. Drygás, V. Mityushev, B. Sobek, M. Zima (Eds.), The 3rd International Workshop «Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications», Rzeszów, Poland, April 20 – 23, 2016. Abstracts. University of Rzeszów. – P. 23.

98. Формирование микротрещин в области пострезекционного дефекта в бедренной кости: оценка критических нагрузок / С.М. Босяков, В.В. Зильбершмидт, Д.В. Алексеев, И.Э. Шпилевский // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 5 – 10 сентября 2016 г. В 5 ч. / Ред. С.Г. Красовский. – Часть 3. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. – С. 74–75.

99. Оценка предельной нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом: сравнительный эксперимент / С.М. Босяков, В.В. Зильбершмидт, Д.В. Алексеев, И.Э. Шпилевский // Тезисы докладов XII Всероссийской конференции «Биомеханика-2016» г. Пермь, 5–8 декабря 2016 г., Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2016 г. – С. 19–20.

100. Конечно-элементное прогнозирование толщины хрящевого трансплантата при тимпанопластике / Г.И. Михасев, С.М. Босяков, К.С. Юркевич, Л.Г. Петрова, М.М. Майсюк // Тезисы докладов XII Всероссийской конференции «Биомеханика-2016», г. Пермь, 5 – 8 декабря

2016 г., Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2016 г. – С. 78–79.

101. Компенсация прочности костей конечностей после секторальной резекции / А.В. Белецкий, И.Э. Шпилевский, О.А. Соколовский, Ю.В. Лихачевский, С.М. Босяков // Материалы научно-практической конференции с международным участием «Илизаровские чтения» и IV съезда травматологов и ортопедов Уральского федерального округа – Курган, 2017. С. 51–52.

102. Tympanoplasty of the middle ear with a retraction pocket: recommendations based on the modal finite element analysis / G. Mikhasev, S. Bosiakov, K. Yurkevich, A. Dutina, L. Petrova, M. Maisyuk // 14thConference on Dynamical Systems Theory and Applications DSTA 2017, Abstracts, 2017, J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, J. Mrozowski, P. Olejnik (Eds.) Łódź, December 11 – 14, 2017. – P. 311.

Свидетельства о регистрации компьютерных программ

103. Программный модуль «Orthodontic Appliance Modeler» CAD пакета CATIA V5, № 030 (авторы С.А. Наумович, А.Н. Доста, С.М. Босяков, К.С. Юркевич).

104. Компьютерная программа «Программа оценки прочности длинных трубчатых костей после проведения секторальной резекции», № 502 (авторы И.Э. Шпилевский, С.М. Босяков, К.С. Юркевич, А.В. Сенченко).

Инструкция по применению Министерства здравоохранения Республики Беларусь

105. Метод выбора трансплантата для хирургического лечения ретракционного кармана барабанной перепонки: инструкция по применению Министерства здравоохранения Республики Беларусь, Регистрационный номер 116 – 1216 от 16 декабря 2016 г. / Майсюк М.М., Петрова Л.Г., Еременко Ю.Е., Михасев Г.И., Босяков С.М., Юркевич К.С., 2016. – 9 с.

Патент

106. Способ прогнозирования остаточной прочности длинной трубчатой кости конечности после секторальной резекции с рекомендацией метода компенсации потери прочности: пат. ВУ 20917 / И.Э. Шпилевский, С.М. Босяков. – Опубл. 09.12.2016.

РЭЗІЮМЭ

Басякоў Сяргей Міхайлавіч

Матэматычнае мадэляванне шчыльных злучальных тканін і біямеханічных сістэм чалавека ў натуральным і паталагічным станах

Ключавыя словы: сцэгная костка, хірургічная рэзекцыя, лімітавая нагрузка, J -інтэграл, анізатрапія касцяной тканіны, крыжаваны прыкус, хуткае пашырэнне верхняй сківіцы, астэатамія, вязкапругкі перыадантальны звязак, дробавае ядро рэлаксацыі, напружана-дэфармаваны стан, сярэдняе вуха, тымпанальная мембрана, ретраакцыйная кішэня, ўласная частата вольных ваганняў, тоўшчыня трансплантанта задневерхняга квадранта.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца распрацоўка прэвентыўнага і прагнастычнага напрамкаў персаніфікаванай медыцыны на ўзроўні сістэм органаў чалавека, якія знаходзяцца ў нармальным (натуральным) або ў паталагічным (змененым) станах на падставе механіка-матэматычных і колькасна-аналітычных біямеханічных мадэляў.

У якасці **метадаў даследавання** выкарыстаны метады механікі дэфармаванага цвёрдага цела і тэорыі разбурэння, метады канчатковых элементаў, метады лінейнай і вектарнай алгебры, интерпаляцыйныя метады, метады аперацыйнага вылічэння, метады рашэння дыферэнцыяльных раўнанняў, метады тэорыі ваганняў, метады малаго параметра, а таксама метады дыферэнцыяльнага і інтэгральнага вылічэння; выкарыстаны пакет *Mathematica*, праграмныя комплексы ANSYS і ANSYS Workbench.

Новымі вынікамі з'яўляюцца метады вызначэння лімітавай нагрузкі на сцэгную кость чалавека, распрацаваная на падставе колькасна-аналітычнай мадэлі, якая ўлічвае анізатропнае размеркаванне пругкіх уласцівасцяў картыкальнай касцяной тканіны, заканамернасці размеркавання эквівалентных напружанняў і палёў перасоўванняў ў чэрапе чалавека пасля актывацыі артадантычнага апарата, распрацоўка механіка-матэматычных мадэляў перасоўванняў кораня зуба ў глейка-пругкам перыодантальнаму звязку і яго напружанага стану, заканамернасці змены спектраў ўласных частот вольных ваганняў сярэдняга вуха ў норме і сярэдняга вуха з паталагічнымі зменамі пругкіх уласцівасцяў задневерхняга квадранта да і пасля тымпанапластыкі, пэўныя на падставе колькасна-аналітычнай і механіка-матэматычнага мадэляў.

Атрыманыя вынікі **рэкамендуецца выкарыстоўваць** для фармулёўкі рэкамендацый па папярэджанні паталагічнага пералому сцэгнай косткі пасля хірургічнай рэзекцыі, пры праектаванні артадантычных апаратаў і прагназавання ўплыву розных тыпаў астэатаміі для ліквідацыі перакрываванага прыкусу, для распрацоўкі аўтаматызаваных камп'ютэрных праграм для мадэлявання артадантычных перасоўванняў зубоў, а таксама пры планаванні хірургічных аперацый па цімпанапластыцы і ліквідацыі ретраакцыйнай кішэні тымпанальнай мембраны.

Галіной выкарыстання атрыманых вынікаў з'яўляецца біямеханіка, хірургія, траўматалогія і артапедыя, сківічна-асабовая хірургія, артадантычная і артапедычная стаматалогія, атарыналарынгалогія.

РЕЗЮМЕ

Босяков Сергей Михайлович

Математическое моделирование плотных соединительных тканей и биомеханических систем человека в естественном и патологическом состояниях

Ключевые слова: бедренная кость, хирургическая резекция, предельная нагрузка, J -интеграл, анизотропия костной ткани, перекрестный прикус, быстрое расширение верхней челюсти, остеотомия, вязкоупругая периодонтальная связка, дробное ядро релаксации, напряженно-деформированное состояние, среднее ухо, тимпанальная мембрана, ретрационный карман, собственная частота свободных колебаний, толщина трансплантата задневерхнего квадранта.

Целью диссертационной работы является установление закономерностей состояния плотной соединительной ткани и биомеханических систем человека в норме и при патологических изменениях на основании математических и численно-аналитических моделей, позволяющих прогнозировать результаты воздействия на эти системы в ходе лечения и формулировать практические рекомендации для планирования соответствующих реабилитационных процедур.

В качестве **методов исследования** использованы методы механики деформируемого твердого тела и теории разрушения, метод конечных элементов, методы линейной и векторной алгебры, интерполяционные методы, методы операционного исчисления, методы решения дифференциальных уравнений, методы теории колебаний, метод малого параметра, а также методы дифференциального и интегрального исчисления; использованы пакет *Mathematica*, программные комплексы ANSYS и ANSYS Workbench.

Новыми результатами являются методика определения предельной нагрузки на бедренную кость человека, разработанная на основании численно-аналитической модели, учитывающей анизотропное распределение упругих свойств кортикальной костной ткани, закономерности распределения эквивалентных напряжений и полей перемещений в черепе человека после активации ортодонтического аппарата, разработка механико-математических моделей перемещений корня зуба в вязко-упругой периодонтальной связке и ее напряженно-деформированного состояния, закономерности изменения спектров собственных частот свободных колебаний среднего уха в норме и среднего уха с патологическими изменениями упругих свойств задневерхнего квадранта до и после тимпанопластики, установленные на основании численно-аналитической и механико-математической моделей.

Полученные результаты **рекомендуется использовать** для формулировки рекомендаций по предупреждению патологического перелома бедренной кости после хирургической резекции, при проектировании ортодонтических аппаратов и прогнозирования влияния различных типов остеотомии для устранения перекрестного прикуса, для разработки автоматизированных компьютерных программ для моделирования ортодонтических перемещений зубов, а также при планировании хирургических операций по тимпанопластике и устранению ретрационного кармана тимпанальной мембраны.

Областью применения полученных результатов является биомеханика, хирургия, травматология и ортопедия, челюстно-лицевая хирургия, ортодонтическая и ортопедическая стоматология, оториноларингология.

SUMMARY

Bosiakov Sergei Mihailovich

Mathematical modeling of dense connective tissues and human biomechanical systems in natural and pathological conditions

Key words: virtual femur, surgical resection, ultimate load, J -integral, cortical bone anisotropy, cross bite, rapid maxillary expansion, osteotomy, viscoelastic periodontal ligament, fractional relaxation kernel, stress-strain state, middle ear, tympanic membrane, retraction pocket, natural frequency of free oscillations, thickness of the posterosuperior quadrant graft.

The aim of the thesis is to develop preventive and prognostic directions of personalized medicine at the level of human organ systems in normal (natural) or pathological (changed) conditions on the basis of mechanical and mathematical and numerical-analytical biomechanical models.

The methods of researches are the methods of mechanics of solids and the theory of fracture, the finite element method, methods of linear and vector algebra, interpolation methods, methods of operational calculus, methods for solving of differential equations, methods of the theory of vibrations, the method of small parameter, as well as differential and integral calculus methods; the computer algebra system *Mathematica*, the ANSYS and ANSYS Workbench software were utilized.

New results are the techniques of assessment of the ultimate load on the human femur, developed on the basis of numerical-analytical model taking into account the anisotropic distribution of the elastic properties of cortical bone tissue, the patterns of distributions of equivalent stresses and fields of displacement in the human skull after activation of the orthodontic device, development of the mechanical and mathematical models of the tooth root movements in the viscoelastic periodontal ligament and its stress-strain state, patterns of changes of the natural frequency spectra of free oscillations of normal middle ear and middle ear with pathological changes of the elastic properties of posterosuperior middle ear quadrant after tympanoplasty evaluated on the basis of numerical and analytical and mechanical-mathematical models.

The obtained results are recommended to be used to formulate recommendations for the prevention of pathological fractures of the femur after surgical resection, in designing of orthodontic devices and predicting the effect of different types of osteotomy to eliminate cross-bite, to develop automated computer programs for modeling orthodontic movements of teeth, as well as for planning of the surgical operations of tympanoplasty and for elimination of the retraction pocket of the tympanic membrane.

The field of application of the obtained results is biomechanics, surgery, traumatology and orthopedics, maxillofacial surgery, orthodontic and orthopedic dentistry, and otorhinolaryngology.