УДК 62-506.29:519.21

# ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*д-р техн. наук, проф. А.А. ЛОБАТЫЙ*

*Белорусский национальный технический университет*
*lobaty@tut.by*

Задачи анализа и синтеза сложных динамических систем имеют важное значение в теории и практике. К сложным системам относят системы, состоящие из подсистем, каждая из которых в отдельности рассматривается как система. Обобщающей характеристикой стохастической динамической системы является многомерная плотность вероятности $\omega(X,t)$ для n-мерного вектора фазовых координат системы $X = X(t)$. Подсистемы сложной стохастической системы характеризуются плотностями вероятности $\omega_i(X_i,t)$ векторов $X_i(t)$ ($i = \overline{1,nn}$), где *nn* – количество подсистем сложной системы. При решении ряда задач исследования топологических свойств сложной стохастической системы может возникнуть необходимость выразить многомерную плотность вероятности системы $\omega(X,t)$ через плотности вероятностей её подсистем $\omega_i(X_i,t)$.

Если бы процессы $X_i(t)$ были независимыми (подсистемы работали автономно друг от друга), то многомерная плотность вероятности фазовых координат системы определялась бы через многомерные плотности вероятности фазовых координат подсистем выражением

$$\omega(X,t) = \prod_{i=1}^{nn} \omega_i(X_i,t)\,. \tag{1}$$

В действительности же процессы $X_i(t)$, $X_j(t)$ $(i \neq j = \overline{1,nv})$ зависимы (топологически связаны).

Представим плотность вероятности системы в виде

$$\omega(X,t) = \omega_{нез}(X,t) + \omega_{топ}(X,t)\,. \tag{2}$$

Второе слагаемое в выражении (2) характеризует топологию (взаимосвязи между подсистемами) сложной стохастической системы.

Для представления многомерной плотности вероятности распределения фазовых координат сложной системы $\omega(X,t)$ через многомерные плотности вероятности распределения фазовых координат подсистем $\omega_i(X_i,t)$ воспользуемся аппроксимацией $\omega(X,t)$ с помощью ортогональных многочленов [4]. Условием аппроксимации при этом определим совпадение законов распределения фазовых координат подсистем $\omega_i(X_i,t)$ и смешанных центральных моментов заданного порядка у $\omega(X,t)$ и аппроксимирующего выражения. Методы аппроксимации плотностей вероятности, основанные на ортогональных разложениях, достаточно подробно описаны в [2, 3].

По аналогии с [2] введем в рассмотрение гильбертово пространство многочленов $L_2$. В этом пространстве скалярное произведение образовано с помощью неотрицательной интегрируемой весовой функции $h(X)$.

$$(P_n(X), P_m(X)) = \int_a^b P_n(X) P_m(X) h(X) dx, \qquad (3)$$

$(n \neq m,\ n, m = 1, 2\ldots)$.

Пусть многочлены $P_n(X)$ и $P_m(X)$ являются ортонормированными, то есть каждый из них имеет положительный старший коэффициент и выполняется условие ортогональности

$$P_n(X), P_n(X)) = \|P_n(X)\|^2 \delta_{nm}, \qquad (4)$$

где $\|P_n(X)\|^2$ - норма в пространстве $L_2$, $\delta_{nm}$ - символ Кронекера.

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \qquad (5)$$

Для использования метода аппроксимации функции ортогональными многочленами представим плотность вероятности $\omega(X,t)$ в виде ряда

$$\omega(X,t) = \sum_{\bar{n}=1}^{\infty} C_{\bar{n}} \prod_{\nu=1}^{nn} h_\nu(X_\nu) P_{\nu n}(X_\nu), \qquad (6)$$

$\bar{n} = (n_1, n_2 \ldots n_n)$ - мультииндекс [4].

Умножим выражение (6) на $\prod_{\nu=1}^{nn} P_{\nu m}(X_\nu)$ и проинтегрируем по всему пространству $\Omega$ изменения вектора фазовых координат *X*.

$$\int_\Omega \omega(X,t) \prod_{\nu=1}^{nn} P_{\nu n}(X_\nu) dX = \sum_{\bar{n}=1}^{\infty} C_{\bar{n}} \int_\Omega \prod_{\nu=1}^{nn} h_\nu(X_\nu) P_{\nu n}(X_\nu) P_{\nu m}(X_\nu) dX =$$

$$= \sum_{\bar{n}=1}^{\infty} C_{\bar{n}} \prod_{\nu=1}^{nn} \int_\Omega h_\nu(X_\nu) P_{\nu n}(X_\nu) P_{\nu m}(X_\nu) dX. \qquad (7)$$

Легко видеть, что интеграл в правой части (7) определяет норму в пространстве $L_2$. Следовательно

$$\sum_{\bar{n}=1}^{\infty} C_{\bar{n}} = \frac{\int_\Omega \omega(X,t) \prod_{\nu=1}^{nn} P_{\nu m}(X_\nu) dX}{\prod_{\nu=1}^{nn} \|P_{\nu m}\|^2} = C_{\bar{m}}. \qquad (8)$$

В качестве весовых функций $h_\nu(X_\nu)$ примем многомерные плотности вероятности распределения фазовых координат подсистем

$$h_\nu(X_\nu) = \omega_\nu(X_\nu, t). \qquad (9)$$

Построим систему ортогональных многочленов посредством следующих рекуррентных формул (процесс ортогонализации Грама-Шмидта [1]):

$$P_{\nu m}(X_\nu) = \gamma_{\nu m}(X_\nu) - \sum_{r=0}^{m-1} a_{mr} P_{\nu r}(X_\nu), \qquad (10)$$

где $\gamma_{\nu m}(X_\nu) \in L_2$ - множество линейно независимых функций.

Коэффициенты $a_{mr}$ определяются скалярным произведением

$$a_{mr} = (\gamma_{\nu m,} P_{\nu r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu m}(X_\nu) P_{\nu r}(X_\nu) \omega_\nu (X_\nu, t) dX_\nu . \qquad (11)$$

В качестве функций $\gamma_{\nu m}(X_\nu)$ выберем следующее выражение:

$$\gamma_{\nu m}(X_\nu) = \left( \frac{\Delta_\nu^{\ *}}{\Delta_\nu} \right)^m, \ (m = 0,1,\ldots), \qquad (12)$$

где $\Delta_\nu = \Delta_\nu(t)$ - определитель, соответствующий матрице корреляционных моментов $\nu$-й подсистемы $\theta_\nu(t)$ размерности $n\nu \times n\nu$.

$$\Delta_\nu(t) = \begin{vmatrix} \theta_{\nu 11}(t) \ldots\ldots\ldots \theta_{\nu 1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_{\nu 1n}(t) \ldots\ldots\ldots \theta_{\nu nn}(t) \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

$\Delta_\nu^{\ *} = \Delta_\nu^{\ *}(t)$ - окаймленный определитель размерности $n\nu + 1 \times n\nu + 1$ вида

$$\Delta_\nu^{\ *}(t) = \begin{vmatrix} \theta_{\nu 11}(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \theta_{\nu 1n}(t) & x_{\nu 1}(t) - m_{\nu 1}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \theta_{\nu 1n}(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \theta_{\nu nn}(t) & x_{\nu n}(t) - m_{\nu n}(t) \\ x_{\nu 1}(t) - m_{\nu 1}(t) \ldots\ldots\ldots\ldots x_{\nu n}(t) - m_{\nu n}(t) & 0 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Определитель $\Delta_\nu^{\ *}$ можно записать в виде [2]

$$\Delta_\nu^{\ *} = \sum_{p=1}^{n\nu} \sum_{q=1}^{n\nu} K_{\nu pq}(x_{\nu pq} - m_{\nu p})(x_{\nu q} - m_{\nu q}) = \sum_{p,q=1}^{n\nu} K_{\nu pq}(x_{\nu p} - m_{\nu p})(X_{\nu q} - m_{\nu q}), \qquad (15)$$

$n\nu$ - размерность (количество фазовых координат) $\nu$-й подсистемы, $K_{\nu pq}$ - алгебраическое дополнение элемента $\theta_{\nu pq}$ матрицы $\theta_\nu = \theta_\nu(t)$.

В соответствии с формулами (10), (11) определим ортогональные многочлены начиная с многочлена нулевого порядка.

а) при $m$=0:

$$P_{\nu 0}(X_\nu) = \gamma_{\nu 0}(X_\nu) - a_{00} P_{\nu 0}(X_\nu). \qquad (16)$$

С учетом $a_{00}$=0 и выражения (12)

$$P_{\nu 0}(X_\nu) = \gamma_{\nu 0}(X_\nu) = 1. \tag{17}$$

б) при $m=1$

$$P_{\nu 1}(X_\nu) = \gamma_{\nu 1}(X_\nu) - a_{10} P_{\nu 0}(X_\nu), \tag{18}$$

$$\gamma_{\nu 1}(X_\nu) = \frac{\Delta_\nu^{\ *}}{\Delta_\nu} \tag{19}$$

$$a_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu 1}(X_\nu) P_{\nu 0}(X_\nu) \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_\nu^{\ *} / \Delta_\nu) \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu = 1, \tag{20}$$

так как [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_\nu^{\ *}(t) \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu = \Delta_\nu(t). \tag{21}$$

Подставив в правую часть выражения (18) вычисленные значения неизвестных, получим значение второго многочлена

$$P_{\nu 1}(X_\nu) = \left( \frac{\Delta_\nu^{\ *}}{\Delta_\nu} \right) - 1. \tag{22}$$

в) при $m=2$

$$P_{\nu 2}(X_\nu) = -a_{20} P_{\nu 0}(X_\nu) - a_{21} P_{\nu 1}(X_\nu) + \gamma_{\nu 2}(X_\nu), \tag{23}$$

$$\gamma_{\nu 2}(X_\nu) = \left( \frac{\Delta_\nu^{\ *}}{\Delta_\nu} \right)^2. \tag{24}$$

Из (11) следует, что

$$a_{20} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu 2}(X_\nu) P_{\nu 0}(X_\nu) \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_\nu^{\ *} / \Delta_\nu)^2 \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu =$$

$$= (1/\Delta_\nu^{\ 2}) \sum_{p,q=1}^{n\nu} \mu_{\nu\nu pq} K_{\nu pq} K_{\nu kl}, \tag{25}$$

$$a_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu 2}(X_\nu) P_{\nu 1}(X_\nu) \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta_\nu^{\ *} / \Delta_\nu)^2 [\Delta_\nu^{\ *} / \Delta_\nu) - 1] \omega_\nu(X_\nu, t) dX_\nu =$$

$$= (1/\Delta_\nu^{\ 3}) \sum_{p,q=1}^{n\nu} \mu_{\nu\nu\nu\nu pq} K_{\nu pq} K_{\nu kl} K_{\nu mr}. \tag{26}$$

$\mu_{\nu\nu pq}$, $\mu_{\nu\nu\nu\nu pq}$ - смешанные центральные моменты соответственно четвертого и шестого порядка ($k, l, m, r = \overline{1, n\nu}$).

Для обеспечения сформулированных в начале параграфа условий аппроксимации плотности вероятности необходимо в разложении (6) оставить члены с коэффициентами, сумма индексов которых не превышает порядка учитываемых смешанных центральных моментов распределения составляющих векторов фазовых координат подсистем.

Аппроксимирующую функцию для плотности вероятности $\omega(X, t)$ определим при учете смешанных центральных моментов распределения до второго порядка включительно. Коэффициенты разложения $C_{\bar{m}}$ вычислим по формуле (8), подставляя соответствующие значения ортогональных многочленов.

$$C_{\bar{0}} = \int_{\Omega} \omega(X,t) = 1. \qquad (27)$$

При значении мультииндекса $\overline{m}$ (при коэффициенте $C$) $m_i = 1$, $m_j = 0$ ($i \neq j$, $\nu = i$) с учетом (21) и (22)

$$C_{\bar{m}} = C_i = \int_{\Omega} \omega(X,t) P_{i1}(X_i) dX = \int_{-\infty}^{\infty} [(\Delta_i^* - \Delta_i)/\Delta_i] \omega(X,t) dX = 0. \qquad (28)$$

Для коэффициентов, у которых $m_i = m_j = 1$, а остальные индексы равны нулю [4].

$$C_{\bar{m}} = C_{ij} = \int_{\Omega} \omega(X,t) \prod_{\nu=1}^{nn} P_{\nu 1}(X_\nu) dX = \int_{\Omega} \omega(X,t) \prod_{\nu=1}^{nn} [(\Delta_i^* - \Delta_i)/\Delta_i] dX =$$

$$= [1/(\Delta_i \Delta_j)] \int_{\Omega} [(\Delta_i^* - 1)(\Delta_j^* - 1)] \omega(X,t) dX =$$

$$= [1/(\Delta_i \Delta_j)] \int_{\Omega} [\Delta_i^* \Delta_j^* - \Delta_i^* - \Delta_j^* + 1] \omega(X,t) dX =$$

$$= [1/(\Delta_i \Delta_j)] \sum_{p,q=1}^{ni,nj} [\mu_{ijpq} K_{ipq} K_{jpq} - \Delta_i - \Delta_j + 1]. \qquad (29)$$

При $m_i = 2$, $\nu = i$ и нулевых остальных индексах на основании выражения (2.30)

$$C_{\bar{m}} = C_{ii} = \int_{\Omega} \omega(X,t) P_{i2}(X_i) dX =$$

$$= \int_{\Omega} [-a_{20} - a_{21}((\Delta_i^* - \Delta_i)/\Delta_i) + (\Delta_i^*/\Delta_i)^2] \omega(X,t) dX = 0. \qquad (30)$$

$a_{20}, a_{21}$ - определяются выражениями (25), (26).

При интегрировании (30) второе слагаемое равно нулю, так как выражение в скобках равно нулю [4]. Третье слагаемое равно первому с обратным знаком. Следовательно, $C_{ii} = 0$.

Для определения аппроксимирующего выражения для плотности вероятности $\omega(X,t)$ подставим значения коэффициентов $C_{\bar{n}}$ и ортогональных многочленов $P_{\nu n}(X_\nu)$ в формулу (6).

$$\omega(X,t) = C_0 \prod_{\nu=1}^{nn} h_\nu(X_\nu) P_{\nu 0}(X_\nu) + \sum_{i=1}^{n\nu} C_i \prod_{\nu=1}^{nn} h_\nu(X_\nu) P_{\nu i}(X_\nu) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n\nu} \sum_{j=1}^{n\nu} C_{ij} \prod_{\nu=1}^{n\nu} h_\nu(X_\nu) P_{\nu i}(X_\nu). \qquad (31)$$

Второе слагаемое в (31) равно нулю в соответствии с (28). В третьем слагаемом в соответствии с (29), (30) учитывается только коэффициент $C_{ij}$. После подстановки соответствующих компонент и выполнения соответствующих преобразований окончательно получим аппроксимирующее выражение:

$$\omega(X,t)=\prod_{\nu=1}^{nn}\omega_\nu(X_\nu,t)\{1+\sum_{i,j=1}^{nn}\sum_{p,q=1}^{ni,nj}\left(\frac{1}{\Delta_i\Delta_j}\right)^2[\mu_{ijpq}K_{ipq}K_{jpq}-$$

$$-\Delta_i-\Delta_j+1)(\Delta_i^*-\Delta_i)(\Delta_j^*-\Delta_j)]\}\qquad(32)$$

В данном случае *nv* - размерность системы (количество подсистем); $ni$, $nj$ - соответственно размерность $i$-й и $j$-й подсистем (количество фазовых координат).

Проверим равенство плотностей вероятности подсистем $\omega_\nu(X_\nu,t)$ и соответствующие составляющие аппроксимирующего выражения. Для этого используем известную формулу из теории вероятностей.

$$\omega_k(X_k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(X,t)dX^{(k)},\qquad(33)$$

где $dX^{(k)}=dx_1,dx_2...dx_{k-1},dx_{k+1}...dx_{nv}$.

Подставим вместо $\omega(X,t)$ аппроксимирующее выражение.

$$\omega_k(X_k,t)=\omega_k(X_k,t)=\prod_{\nu=1}^{nn}{}^{(k)}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\nu(X_\nu,t)dX_\nu+$$

$$+[\omega_k(X_k,t)/(\Delta_i,\Delta_j)^2]\{\prod_{\nu=1}^{nv}{}^{(k)}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\nu(X_\nu,t)\sum_{i,j=1}^{nn}\sum_{p,q=1}^{ni,nj}F_{ij}(\Delta_i^*-\Delta_i)(\Delta_j^*-\Delta_j)dX_\nu,\qquad(34)$$

где обозначено

$$F_{ij}=(\mu_{ijpq}K_{ipq}K_{jpq}-\Delta_i-\Delta_j+1).\qquad(35)$$

Символ $(k)$ в выражении (34) означает, что сомножитель с индексом $k$ не входит в произведение $\prod_{\nu=1}^{nn}{}^{(k)}(...)$.

Очевидно, что интеграл в первом слагаемом выражения (34) равен единице. Второе слагаемое равно нулю. Для доказательства этого необходимо поочередно выделить из двойной суммы члены, соответствующие $\nu=i$, $\nu=j$ а также учесть формулу (31). Таким образом, (34) превратилось в тождество.

Проверим равенство корреляционных матриц $\theta_k$,

$$|\theta_k|=\sum_{p,q=1}^{nk}\theta_{kpq}K_{kpq}.\qquad(36)$$

Матрицы равны, если равны их компоненты $\theta_{kpq}$, которые вычисляются по известной формуле

$$\theta_{kpq}=\int_{-\infty}^{\infty}(x_{kp}-m_{kp})(x_{kq}-m_{kq})\omega(X,t)dX.\qquad(37)$$

Подставим в подынтегральную часть (37) аппроксимирующее выражение (32).

$$\theta_{kpq} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_{kp} - m_{kp})(x_{kq} - m_{kq})\omega_k (X_k, t)dx_k \prod_{\nu=1}^{nn} {}^{(k)} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\nu (X_\nu, t)dX_\nu +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} (x_{kp} - m_{kp})(x_{kq} - m_{kq})\prod_{\nu=1}^{nn} {}^{(k)}\omega_\nu (X_\nu, t)\sum_{i,j}^{nn} \sum_{p,q=1}^{ni,nj} [F_{ij}(\Delta_i^* - \Delta_i)(\Delta_j^* - \Delta_j)]dX \quad , (38)$$

где $F_{ij}$ определяется выражением (35).

Первое слагаемое в правой части (38) равно $\theta_{kpq}$. Второе слагаемое равно нулю при поочередном выделении из двойной суммы членов с $\nu = i$, $\nu = j$ и учете формулы (21). Следовательно, выражение (38) превратилось в тождество.

Таким образом, входящее в выражение (2) второе слагаемое, характеризующее топологию сложной стохастической системы, с учетом (1), имеет вид

$$\omega_{mon}(X, t) = \prod_{\nu=1}^{nn} \omega_\nu (X_\nu, t)\{ \sum_{i,j=1}^{nn} \sum_{p,q=1}^{ni,nj} \left( \frac{1}{\Delta_i \Delta_j} \right)^2 [\mu_{ijpq} K_{ipq} K_{jpq} -$$

$$- \Delta_i - \Delta_j + 1)(\Delta_i^* - \Delta_i)(\Delta_j^* - \Delta_j)]\} \quad (39)$$

При гауссовой аппроксимации плотностей вероятности подсистем $\omega_i(X_i, t)$, что в большинстве прикладных задач дает хорошие результаты, векторы математических ожиданий $m_i(X_i, t)$ и матрицы корреляционных моментов подсистем $\theta_i(X_i, t)$ полностью определяют многомерные плотности вероятности $\omega_i(X_i, t)$.

Представление плотности вероятности системы через плотности вероятности подсистем позволяет более полно и точно решать ряд прикладных задач анализа и синтеза сложной системы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. Под ред. В.Б. Лидского. М. 1969.
2. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. - М.: Наука, 1983.
3. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. - М.: Логос, 2004. - 1000 с.
4. Лобатый А.А. Ортогональное разложение на многомерные плотности вероятности // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук, 2005, № 2, с. 81-86.