

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-4-274-283>

УДК 539.3

Решение контактной задачи для узла опирания балочной шарнирно опертой плиты

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков¹⁾, асп. П. Д. Скачѣк¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2019
Belarusian National Technical University, 2019

Реферат. Рассматривается решение контактной задачи для шарнирного узла опирания балочной плиты перекрытия (покрытия). Основная цель заключается в определении напряженного состояния области опирания плиты на стену. При этом решаются задачи построения эпюры реактивных давлений в области непосредственного контакта плиты и стены, уточнения расчетного пролета плиты, влияния размера зоны контакта на величину максимального изгибающего момента в середине плиты, определения области контакта при различных показателях гибкости и сравнения полученных результатов с известным решением взаимодействия жесткого штампа и упругой четвертьплоскости. Расчет ведется методом Б. Н. Жемочкина, реализация которого для данной задачи соответствует смешанному методу строительной механики. В качестве примера расчет выполняется на сосредоточенную нагрузку, приложенную в середине пролета плиты. В ходе исследования установлено, что при опирании железобетонной плиты как на бетонную стену, так и на кирпичную зона контакта сводится к двум участкам Жемочкина. При уменьшении показателя гибкости, что соответствует опиранию плиты на менее жесткое основание, возрастает контактная область, что, в свою очередь, влияет на увеличение расчетного пролета плиты и изгибающего момента в середине плиты. В случае опирания абсолютно жесткой плиты (показатель гибкости равен нулю) контактные напряжения достигают своего максимума в месте контакта края плиты и упругой четвертьплоскости. Характер эпюры подтверждается аналитической зависимостью распределения контактных напряжений, полученной В. М. Александровым при решении задачи о вдавливании жесткого штампа в грань упругого клина.

Ключевые слова: контактная задача, метод Б. Н. Жемочкина, упругая четвертьплоскость, узел опирания, шарнирно опертая плита, показатель гибкости

Для цитирования: Босаков, С. В. Решение контактной задачи для узла опирания балочной шарнирно опертой плиты / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // *Наука и техника*. 2019. Т. 18, № 4. С. 274–283. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-4-274-283>

Solution of Contact Problem for Supporting Node of Beam Hinged Plate

S. V. Bosakov¹⁾, P. D. Skachok¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers a solution of contact problem for hinged supporting node of beam floor slab (coating). The main goal is to determine a stress state of the area where a plate rests on the wall. In this case, a number of problems are solved: construction of reactive pressure diagrams in the area of direct plate and wall contact, clarification of the calculated plate span, influence of contact zone size on a value of maximum bending moment in the middle of the plate, determination of contact area at various indices of flexibility and comparison of the obtained results with the known solution of rigid stamp and elastic quarter-plane interaction. The calculation has been carried out by the Zhemochkin method, its implementation for

Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220113, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 265-97-28
ftk75@bntu.by

Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65 Nezavisimosty Ave.,
220113, Minsk, Republic of Belarus
Tel: +375 17 265-97-28
ftk75@bntu.by

the given task corresponds to a mixed method of structural mechanics. As an illustration, the calculation has been performed on a concentrated load applied in the middle of the plate span. In the course of the study, it has been established that when a reinforced concrete slab rests on concrete and brick walls, the contact zone reduces itself to two Zhemochkin sections. When a flexibility index is decreased that corresponds to slab support on a less rigid base, the contact area is increased, and that, in its turn, has an influence on an increase of the calculated slab span and the bending moment in the middle of the slab. In the case of an absolutely rigid plate support (flexibility index is equal to zero), the contact stresses reach their maximum value at the point of plate edge contact and elastic quarter-plane. The nature of the diagram is confirmed by an analytical dependence of contact stress distribution obtained by Aleksandrov V. M. when solving a problem of pressing a rigid stamp into an edge of an elastic wedge.

Keywords: contact problem, Zhemochkin method, elastic quarter-plane, support node, hinged plate, flexibility index

For citation: Bosakov S. V., Skachok P. D. (2019) T Solution of Contact Problem for Supporting Node of Beam Hinged Plate. *Science and Technique*. 18 (4), 274–283. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-18-4-274-283> (in Russian)

Введение

При проектировании и строительстве зданий и сооружений весьма ответственные участки – это узлы сопряжения и опирания конструкций. Как известно, в случае взаимодействия конструкций с разными механическими характеристиками узлы являются концентраторами напряжений. Поэтому возникает задача в более детальном исследовании напряженно-деформированного состояния зоны контакта различных конструкций, т. е. решается так называемая контактная задача. Кроме того, контактную задачу можно рассматривать как расчет конструкций (балок, плит и др.) на упругом основании, исследуя разные его модели.

Большой вклад в развитие методов расчета конструкций на упругом основании внесли такие ученые, как Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын, Т. А. Маликова, Г. К. Клейн, С. Н. Клепиков, Б. Г. Коренев, М. И. Горбунов-Посадов, В. И. Соломин, В. М. Александров и др. [1–9]. Наиболее простая – модель основания Винклера, или модель коэффициента постели [8], использовавшаяся, как правило, для расчета балок (ленточные фундаменты, шпалы рельсов и т. п.). Дальнейшее развитие фундаментостроения привело к появлению многих других моделей, а также их комбинаций. При этом рассматривалась как линейная, так и нелинейная их работа [4–9]. Каждая модель основания характеризуется конкретной функцией Грина. Поэтому при введении какой-либо модели основания главная задача состоит в определении для него функции Грина.

Особое место занимает решение контактных задач для упругого клина. Этим вопро-

сом занимались В. М. Александров, В. М. Пестерин, Д. А. Пожарский, К. В. Дмитриева и др. [1–3, 10–17]. В данной статье используется решение К. В. Дмитриевой, поскольку функция Грина для упругой четвертьплоскости выражается в элементарных функциях, достаточно легко интегрируется и дифференцируется [10, 11].

Постановка задачи и методика расчета

Исследуется напряженно-деформированное состояние узла шарнирного опирания балочной плиты на стену. Определяются реактивные давления в местах контакта плиты и стены, изгибающие моменты и поперечные силы в плите.

Принимается:

- для плиты считаются справедливыми гипотезы изгиба [18];
- в контактной зоне не учитываются касательные напряжения;
- стены, на которые опирается плита, принимаем в виде упругих четвертьплоскостей;
- связи между основанием и плитой считаются односторонними, работающими только на сжатие.

Поставленную задачу рассчитываем методом Б. Н. Жемочкина [5, 6]. Для этого область контакта упругого основания и плиты условно разбиваем на участки равной длины (участки Жемочкина). В середине каждого участка ставятся вертикальные жесткие связи, через которые осуществляется контакт плиты с упругой четвертьплоскостью. Считается, что усилие в связи вызывает равномерно распределенные контактные напряжения по ширине участка. В центре пролета балки вводится защемление.

Полученную статически неопределимую систему решаем смешанным методом строительной механики, где за основные неизвестные приняты усилия в связях Жемочкина и перемещения (угол поворота и вертикальное перемещение) во введенном в середине пролета плиты защемлении (рис. 1)

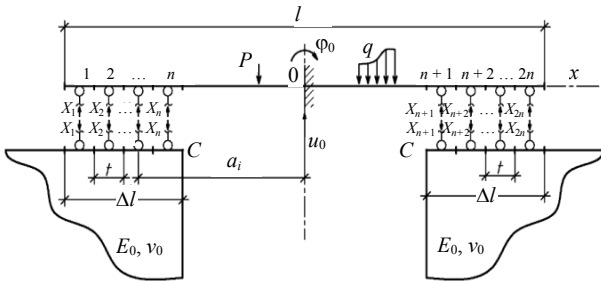


Рис. 1. Расчетная схема балочной плиты

Fig. 1. Design scheme of beam plate

Для нахождения основных неизвестных смешанного метода составляется система канонических уравнений, имеющая для рассматриваемой задачи особую структуру, отличающуюся от традиционной [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}x_1 + \delta_{1,2}x_2 + \dots + \delta_{1,n}x_n + u_0 + a_1\varphi_0 + \Delta_{1,P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n,1}x_1 + \delta_{n,2}x_2 + \dots + \delta_{n,n}x_n + u_0 + a_n\varphi_0 + \Delta_{n,P} = 0; \\ \delta_{n+1,n+1}x_{n+1} + \delta_{n+1,n+2}x_{n+2} + \dots + \delta_{n+1,2n}x_{2n} + u_0 + \\ + a_{n+1}\varphi_0 + \Delta_{n+1,P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{2n,n+1}x_{n+1} + \delta_{2n,n+2}x_{n+2} + \dots + \delta_{2n,2n}x_{2n} + u_0 + \\ + a_{2n}\varphi_0 + \Delta_{2n,P} = 0; \\ -\sum_i^{2n} x_i + P = 0; \quad -\sum_i^{2n} a_i x_i + M = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\delta_{i,j}$ – коэффициенты при неизвестных в связях Жемочкина; u_0, φ_0 – неизвестные перемещения в защемлении; n – число участков Жемочкина; P, M – опорные реакции защемления от действия внешней нагрузки (они же – равнодействующие внешних сил).

В матричном виде система (1) записывается следующим образом:

$$\mu A \bar{x} + \bar{\Delta}_P = 0, \quad (2)$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{i,j} & & 0 & & 1 & a_i \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & \delta_{n+i,n+j} & & 1 & a_{n+i} \\ & & & \dots & & \\ -1 & & -1 & & 0 & 0 \\ -a_i & & -a_{n+i} & & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

матрица коэффициентов при неизвестных; $\bar{x} = \{x_i, u_0, \varphi_0\}$ – вектор-столбец неизвестных; $\bar{\Delta}_P$ – вектор-столбец свободных членов; μ – коэффициент,

$$\mu = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}; \quad (3)$$

E_0 – модуль деформаций основания; ν_0 – коэффициент Пуассона основания.

Коэффициенты при неизвестных усилиях в связях Жемочкина определяются по формуле

$$\delta_{i,j} = \xi W_{i,j} + V_{i,j}, \quad (4)$$

где $W_{i,j}$ – вертикальное перемещение точки i плиты от действия вертикальной единичной силы, приложенной в точке j ; $V_{i,j}$ – перемещение точки i поверхности упругой четвертьплоскости от действия единичной силы, приложенной в точке j и распределенной по участку Жемочкина; ξ – показатель гибкости, зависящий от соотношения жесткостей плиты и основания [5].

Формула для определения перемещений балки следующая:

$$W_{i,j} = \frac{a_j^2}{l^2} \left(3 \frac{a_i}{l} - \frac{a_j}{l} \right), \quad \text{при } a_i \geq a_j; \quad (5)$$

$$W_{i,j} = \frac{a_i^2}{l^2} \left(3 \frac{a_j}{l} - \frac{a_i}{l} \right), \quad \text{при } a_i \leq a_j, \quad (6)$$

где a_i – координата точки i , в которой определяется перемещение; a_j – координата точки приложения единичной силы.

Показатель гибкости [5]

$$\xi = \frac{\pi E_0 b l^3}{12 E_b I_b} \frac{1 - \nu_b^2}{1 - \nu_0^2}, \quad (7)$$

где E_b, I_b, ν_b – модуль упругости, момент инерции, коэффициент Пуассона балочной плиты; $b = 1$ м – ширина выделяемой полосы из состава перекрытия.

Упругое основание рассматриваемой задачи представляет четвертьплоскость (рис. 2).

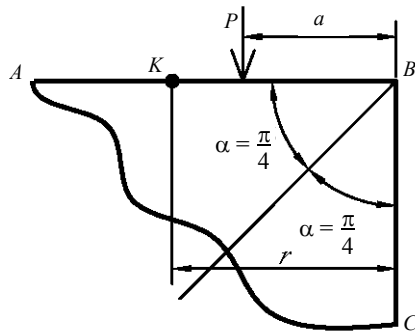


Рис. 2. Упругий клин
Fig. 2. Elastic wedge

Задача определения тангенциальных перемещений точек грани AB решена в работах К. В. Дмитриевой [10, 11]. Если принять $P = 1$, то на основании ее результатов имеем следующую формулу для определения относительного вертикального перемещения точки K поверхности четвертьплоскости:

$$V = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)}}{a^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)} - r^{\frac{\pi}{2} A(\alpha)}} \right)^2 + \frac{\pi}{8\alpha} \beta_1 \operatorname{sech} [C(\alpha, a, r)] + \quad (8)$$

$$+ \left(\frac{\pi}{8\alpha} \right)^3 \beta_3 \frac{\sin^2 h^2 [C(\alpha, a, r)] - \cos h [C(\alpha, a, r)]}{\cos h^3 [C(\alpha, a, r)]} + \dots,$$

где $A(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}; \quad (9)$

$$C(\alpha, a, r) = \frac{\pi}{16} \ln \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2; \quad (10)$$

$$\beta_1 = -\frac{4}{3A(\alpha)} + \frac{16(4\alpha^5 - 2\alpha^3 \sin^2 2\alpha - \alpha^4 \sin 4\alpha)}{3(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^2}; \quad (11)$$

$$\beta_3 = \frac{16}{45A^3(\alpha)} - \frac{128\alpha^5(8\alpha^4 - 3\sin^4 2\alpha - \rightarrow}{45(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^3} \rightarrow \rightarrow \frac{-6\alpha^3 \sin 4\alpha - \alpha \sin^2(2\alpha) \sin(4\alpha)}{45(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)^3} + 8\alpha^2 \beta_1. \quad (12)$$

Для определения перемещения точки приложения единичной силы распределяем силу на участке Жемочкина и вычисляем определенный интеграл от (8). Чтобы вычислить (8), предварительно раскладываем в ряд Тейлора выражение (8) в окрестности точки $r = a$ и берем первые три члена ряда [10]. При этом отметим, что данные перемещения определяются относительно вершины клина (точка B).

Далее решаем систему уравнений (2)

$$\bar{x} = -\frac{1}{\mu} A^{-1} \bar{\Delta}_p. \quad (13)$$

Положительные компоненты вектора \bar{x} соответствуют усилиям сжатия в связях Жемочкина, а отрицательные – усилиям растяжения. При шарнирном опирании конструкции появление усилий растяжений в связях Жемочкина говорит об отрыве конструкции от основания, поэтому для определения контактной зоны необходимо поочередно удалять растянутые стержни, т. е. выключать их из работы с последующим пересчетом вектора (13) на каждом шаге. Таким образом, организуется итерационный процесс, признаком окончания которого являются положительные компоненты вектора \bar{x} .

Отметим, что найденная величина контактной зоны в значительной мере зависит от показателя гибкости ξ .

Решение поставленной задачи

Для численного исследования напряженно-деформированного узла опирания рассматривается железобетонная многопустотная плита марки Пб0-15 (Серия 1.141-1, вып. 2 «Панели перекрытий железобетонные многопустотные»), опирающаяся по концам на бетонную стену ($l = 5,98$ м – длина плиты; $E_b = E_0 = 29$ ГПа; $\nu_b = \nu_0 = 0,18$ – механические характеристики материалов железобетонной плиты и стены,

принятые согласно табл. 3.1 [19] для бетона класса С16/20).

Так как плита имеет ширину 1,49 м, а в плоской постановке рассматривается полоса шириной 1,00 м, для определения момента инерции поперечного сечения выделенной полосы считаем момент инерции поперечного сечения рассматриваемой многопустотной плиты с последующим пересчетом для полосы. При определении момента инерции поперечное сечение многопустотной плиты приводится к эквивалентному тавровому сечению (исключаются пустоты плиты), для которого и считается момент инерции, при этом учитывается рабочая арматура [20]. Момент инерции в пересчете для рассматриваемой полосы $I_b = 41547,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. По приведенным геометрическим и механическим характеристикам системы «стена – балка» имеем для случая бетонной стены показатель гибкости $\xi = 134748$. Данная величина, согласно (7), безразмерная.

Глубина опирания Δl плиты перекрытия, опираемой по двум сторонам, согласно п. 6.4.2 [21] должна быть не менее 100 мм. В дальнейших расчетах принимаем $\Delta l = 0,100 \text{ м}$.

Количество участков Б. Н. Жемочкина в первом приближении для каждого узла $n = 5$. Длина участка Жемочкина

$$t = \frac{\Delta l}{n}. \quad (14)$$

Формируем матрицу коэффициентов (4) канонических уравнений при учете только первого слагаемого формулы (8).

Составляем вектор-столбец свободных членов. Принимаем нагрузку $P = 27000 \text{ Н/м}$, действующую на балку в виде сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета балки, т. е. в начале координат. Поскольку в начале координат введено защемление, перемещения точек балки в местах установки связей Жемочкина от действия внешней нагрузки равны 0, а также момент в защемлении от действия внешней нагрузки равен 0.

Решаем систему линейных алгебраических уравнений и получаем вектор неизвестных. Согласно способу [6], усилия в связях Жемочкина есть равнодействующие реактивных давлений, равномерно распределенных в каждом участке Жемочкина, поэтому легко перейти к эпюре реактивных давлений – необходимо найденные усилия поделить на длину участка Жемочки-

на (рис. 3). Точка *A* соответствует краю плиты, точка *B* – вершина клина.

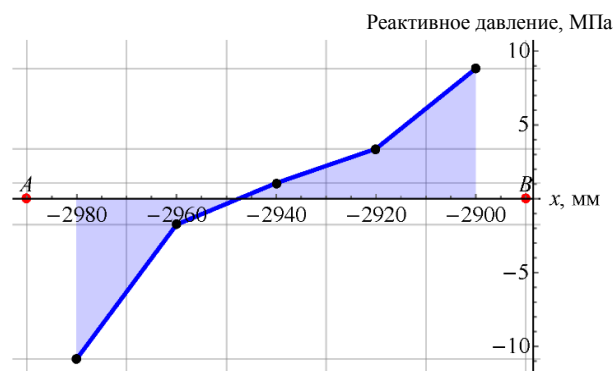


Рис. 3. Эпюра реактивных давлений в левом узле

Fig. 3. Plot of reactive pressures in left node

Поскольку нагрузка приложена в середине пролета плиты и глубина опирания плиты для левого и правого узлов одинаковая, то и эпюры реактивных давлений в левом и правом узлах одинаковые.

Согласно принятой схеме расчета (рис. 1), положительный знак усилия соответствует усилию сжатия в связи Жемочкина, а отрицательный – усилию растяжения. Усилие растяжения соответствует отрыву конструкции от основания, а следовательно, связи, в которых появляются растягивающие усилия, «выключаются» из работы. Поочередно удаляя «растянутые связи» и пересчитывая вектор неизвестных, в конечном итоге придем к реальной контактной зоне, признаком которой – положительные знаки при усилиях в оставшихся связях. В силу симметрии левого и правого узлов далее приводим эпюры реактивных давлений только для левого узла (рис. 4).

Как видно из рис. 4, осталась одна связь в рассматриваемом узле, ближайшая к краю стены. При $n = 20$ контактная зона также сводится к одной связи Жемочкина, т. е. к двум участкам Жемочкина.

Условимся в дальнейшем при исследовании контактной зоны принимать количество участков Жемочкина в одном узле опирания $n = 20$.

Как показали вычисления, основной вклад в определение коэффициентов δ_{ij} (4) принадлежит первому слагаемому формулы (8) и учет второго и третьего слагаемых несущественно влияет на конечный результат. В дальнейшем учитываем только первые два слагаемых уравнения (8).

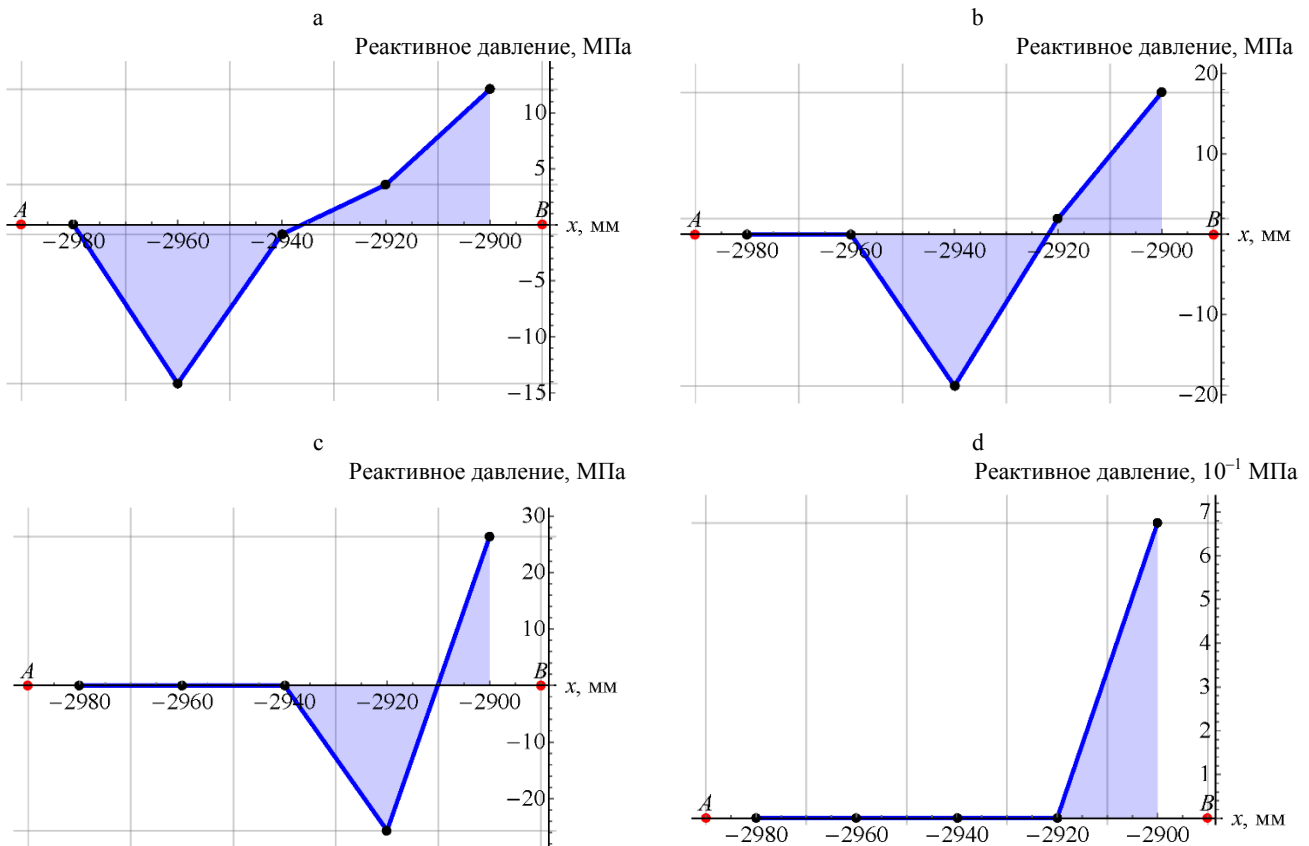


Рис. 4. Эпюры реактивных давлений после удаления: а – одной растянутой связи; б – двух связей; с – трех; д – четырех связей
 Fig. 4. Plot of reactive pressures after removal of: a – one stretched bond; b – two bonds; c – three; d – four bonds

Величина контактной зоны зависит от соотношения жесткостей опираемой конструкции и основания, т. е. от показателя гибкости ξ . Рассмотрим также опирание плиты на каменную кладку. Последовательность расчета останется прежней, изменятся только механические характеристики основания. Согласно разделу 7.6.2 [20],

модуль упругости каменной кладки в рассматриваемом случае $E_0 = E = 8,6$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_0 = \nu = 0,18$. Таким образом, показатель гибкости при опирании плиты на каменную кладку $\xi = 44399,8$. Задача при таком показателе гибкости имеет похожее решение, как и в случае бетонной стены (рис. 5).

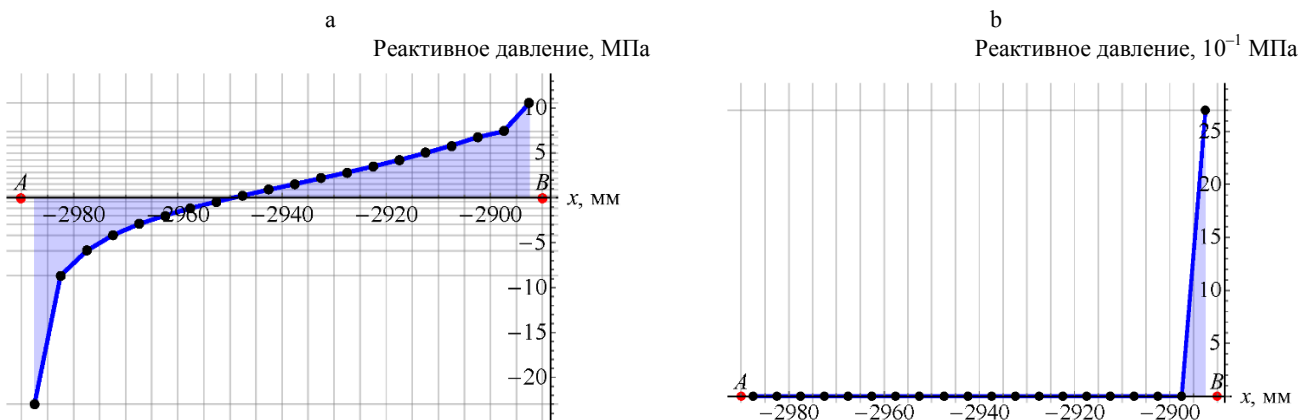


Рис. 5. Эпюры реактивных давлений: а – до удаления растянутых стержней; б – после удаления растянутых стержней
 Fig. 5. Plot of reactive pressures: a – before removal of stretched rods; b – after removal of stretched rods

Величина контактной зоны находится в пределах одного участка Жемочкина.

Сравним векторы неизвестных для каменной кладки и бетонной стены (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение решения для стен из разных материалов при первой итерации

Comparison of solution for walls from various materials during first iteration procedure

Реактивное давление в участках Жемочкина, МПа	
Каменная кладка	Бетонная стена
-19,297	-22,980
-7,246	-8,667
-4,910	-5,905
-3,433	-4,167
-2,387	-2,942
-1,558	-1,974
-0,855	-1,153
-0,229	-0,421
0,350	0,256
0,898	0,904
1,432	1,538
1,960	2,174
2,493	2,824
3,039	3,500
3,606	4,214
4,204	4,982
4,842	5,818
5,531	6,747
5,974	7,396
8,285	10,557

Из табл. 1 видно, что для менее жесткого основания реактивные давления по абсолютной величине для участков Жемочкина меньше, чем для более жесткого основания. Однако равнодействующие в первом и во втором случаях будут равны $P/2$.

Особый интерес представляют данные, получаемые при различных показателях гибкости ξ . Рассмотрим для начала предельный случай $\xi = 0$, что соответствует опиранию абсолютно жесткой плиты. Эпюра распределения контактных напряжений не имеет принципиального значения – бетонная это стена или из каменной кладки. Считаем стену бетонной. Для данного случая получена эпюра, приведенная на рис. 6.

Чтобы удостовериться в правильности применяемой методики расчета, полученные результаты для случая опирания абсолютно жесткой плиты сопоставим с приближенным теоретическим решением В. М. Александрова [9].

В [9] рассмотрен случай действия на грань плоского клина жесткого штампа (рис. 7).

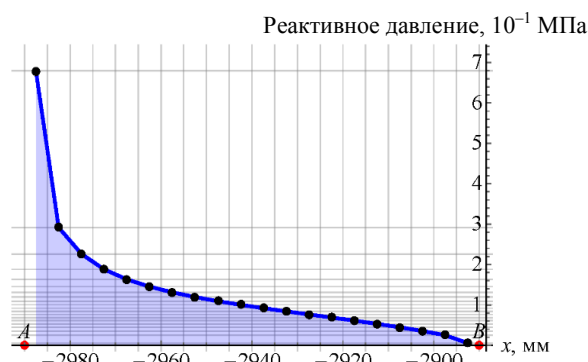


Рис. 6. Распределение напряжений в контактной зоне при опирании абсолютно жесткой плиты

Fig. 6. Distribution of stresses in contact zone while supporting absolutely rigid plate

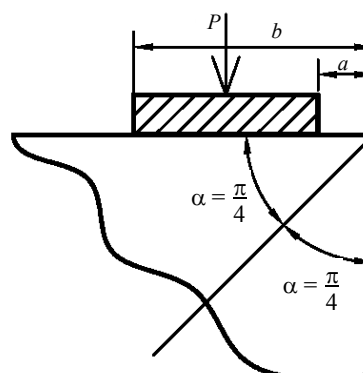


Рис. 7. Схема штампа

Fig. 7. Stamp scheme

Формула для определения эпюры контактных напряжений под штампом [9]

$$q(r) = \frac{B P r^{\pi B - 1}}{\sqrt{(r^{\pi B} - a^{\pi B})(r^{\pi B} - b^{\pi B})}}, \quad (15)$$

где r – координата точки, в которой определяется реактивное давление, относительно вершины клина; B – коэффициент, зависящий от угла створа клина α ; P – равнодействующая в узле.

Для рассматриваемой задачи: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $a = 0$;

$$b = \Delta l; \quad B(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{2(4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha)}. \quad \text{Совместная}$$

эпюра реактивных давлений под штампом показана на рис. 8.

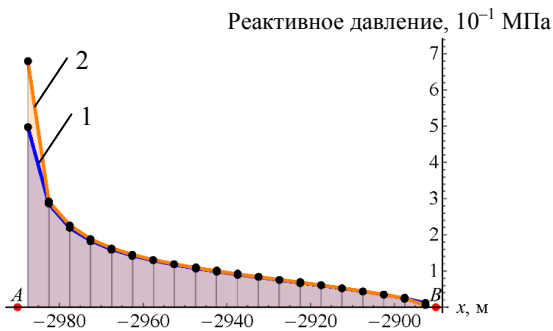


Рис. 8. Совместная эпюра реактивных давлений под штампом:

- 1 – решение В. М. Александрова;
- 2 – по рассчитываемой методике

Fig. 8. Joint plot of reactive pressures under stamp:
1 – Alexandrov solution;
2 – according to calculated methodology

Также сравнению подлежит определение расстояния до равнодействующей контактных напряжений H . По формуле (9) найдено $H = 0,073343$ м, а по предложенной методике $H = 0,0729351$ м. Погрешность составила

$$\frac{|0,0729351 - 0,073343|}{0,073343} \cdot 100 \% = 0,56 \%$$

Решения для контактных напряжений при различных значениях показателя гибкости ξ представлены на рис. 9.

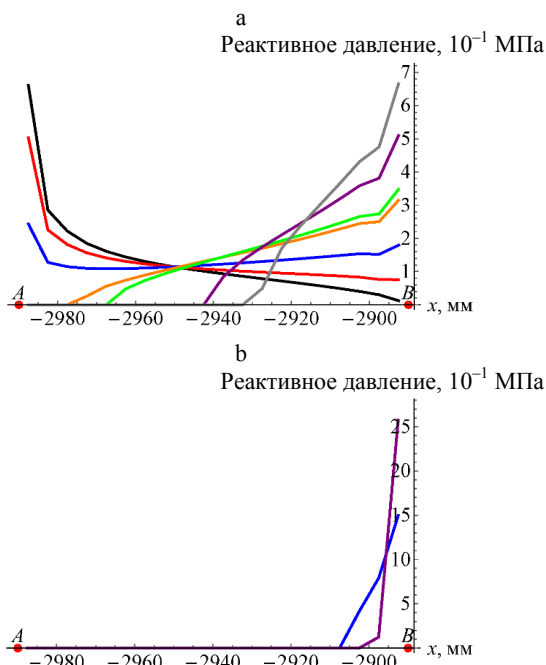


Рис. 9. Кривые распределения напряжений в контактной зоне при ξ : а – $10 \div 1000$; б – $2500 \div 5000$
Fig. 9. Stress distribution curves in contact zone with ξ : а – $10 \div 1000$; б – $2500 \div 5000$

По рис. 9 видно, что при увеличении показателя гибкости происходит уменьшение контактной зоны. При этом если принять, что на четвертьплоскость опирается железобетонная плита, то показатель гибкости (7) будет зависеть от модуля деформации основания.

Теперь выполним расчет контактной зоны с учетом местных деформаций плиты в узле опирания. Поскольку глубина площадки опирания Δl в два раза меньше высоты балки, часть балки в зоне опирания будем рассматривать как упругую четвертьплоскость (рис. 10).

Перемещения точек грани упругой четвертьплоскости плиты вычисляем по той же формуле (8), что и перемещения точек грани основания. В силу аналогичности расчетных моделей четвертьплоскостей плиты и основания наблюдается антисимметрия относительно центра матрицы единичных перемещений точек поверхностей четвертьплоскости основания и четвертьплоскости плиты. Например, единичное перемещение $V_{2,4}$ точки 2 основания от действия единичной силы $X_4 = 1$ равняется перемещению точки 4 балки от действия единичной силы $X_2 = 1$.

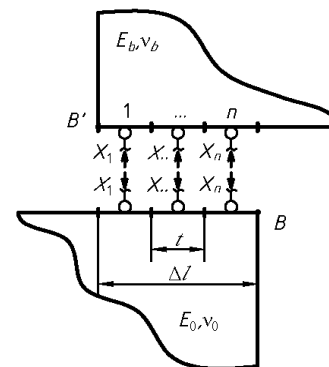


Рис. 10. Расчетная схема левого узла при учете местных деформаций: E_0, ν_0 – модуль деформации и коэффициент Пуассона основания; E_b, ν_b – модуль упругости и коэффициент Пуассона плиты
Fig. 10. Design scheme of left node while taking into account local deformations: E_0, ν_0 – strain modulus and Poisson's ratio of base; E_b, ν_b – elastic modulus and Poisson's ratio of plate

При расчете системы с учетом местных деформаций коэффициенты при неизвестных усилиях в связях Жемочкина определяются по следующей формуле:

$$\delta_{i,j} = \xi W_{i,j} + V_{i,j} + \psi V'_{i,j}, \quad (16)$$

где $V'_{i,j}$ – единичное перемещение точек грани четвертьплоскости плиты, определяется по (8); ψ – коэффициент, определяемый выражением

$$\psi = \frac{1 - \nu_b^2 E_0}{1 - \nu_0^2 E_b} \quad (17)$$

Как показали дальнейшие расчеты, контактная зона при учете местных деформаций плиты увеличивается (рис. 11).

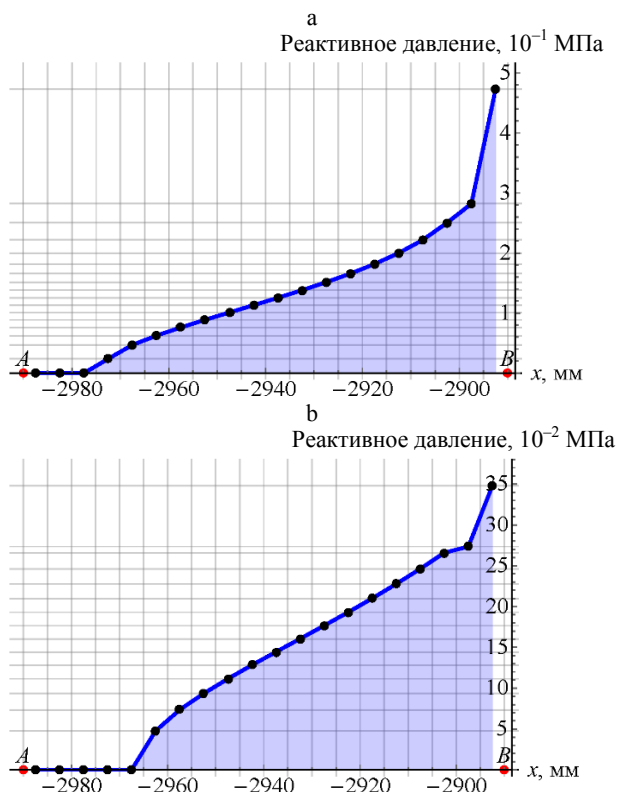


Рис. 11. Сравнение контактной зоны при учете местных деформаций плиты (а) и без их учета (б) при $\xi = 500$

Fig. 11. Comparison of contact zone while taking into account local deformations of plate (a) and without taking them into account (b) with $\xi = 500$

Особенность расчета на другие виды нагрузок заключается только в изменении вектора столбца свободных членов $\vec{\Delta}_p$. Весь алгоритм расчета остается прежним.

ВЫВОДЫ

1. Предложен итерационный алгоритм определения контактной зоны узла опирания балочной шарнирно опертой плиты при решении задачи методом Б. Н. Жемочкина.

2. В ТНПА расчетный пролет изгибаемых элементов принимается как сумма расстояния между внутренними поверхностями опор и половиной минимальной величины между рабочей высотой сечения и толщины опоры. Как показали вычисления, при опирании желе-

зобетонной балочной шарнирно опертой плиты на стену, выполненную как из бетона, так и из каменных материалов, расчетный пролет следует принимать как

$$l_{eff} = l_0 + \frac{5 \Delta l}{3 \cdot 20}, \quad (18)$$

где l_0 – расстояние между внутренними поверхностями стен; Δl – глубина опирания плиты.

3. При изменении показателя гибкости от $0 \leq \xi \leq 10000$ максимальный изгибающий момент меняется в пределах $\frac{1,025Pl}{4} \leq M \leq \frac{Pl}{4}$,

где l – расстояние между ближайшими к вершинам четвертьплоскостей связями Жемочкина.

4. Основное влияние на размеры зоны контакта оказывает соотношение жесткостей опираемой конструкции и основания. Принимая плиту абсолютно жесткой, наибольшее реактивное давление возникает у края опираемой конструкции, что подтверждается теоретическим решением В. М. Александрова.

5. Учет местных деформаций в плите увеличивает контактную зону опирания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, В. М. Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
2. Александров, В. М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В. М. Александров, Д. А. Пожарский. М.: Факториал, 1998. 288 с.
3. Александров, В. М. Плоские контактные задачи для составного упругого клина / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2006. № 6. С. 27–30.
4. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
5. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.
6. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синецын. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
7. Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. Киев: Будівельник, 1967. 184 с.
8. Коренев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. М.: Госстройиздат, 1954. 231 с.
9. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 496 с.
10. Дмитриева, К. В. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными гранями / К. В. Дмитриева // Вестник БНТУ. 2010. № 4. С. 24–29.

11. Дмитриева, К. В. Расчет нелинейно-упругой гибкой стенки в упругом основании / К. В. Дмитриева. Минск: Беларус. нац. техн. ун-т, 2017. 26 с.
12. Кулагина, М. Ф. Решение первой основной задачи теории упругости для клина в степенных рядах / М. Ф. Кулагина, Э. Г. Иванов // Известия Тульского государственного университета. 2009. Вып. 2. С. 127–138.
13. Митрофанов, Б. П. Действие нормальной сосредоточенной силы на упругий прямоугольный бесконечный клин / Б. П. Митрофанов // Известия Томского политехнического института. 1964. Т. 114. С. 112–114.
14. Молчанов, А. А. Обобщения контактной задачи Галина и взаимодействие штампов / А. А. Молчанов, Д. А. Пожарский // Вестник Нижегородского университета имени Лобачевского. 2011. № 4–4. С. 1636–1638.
15. Пестренин, В. М. Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи / В. М. Пестренин, И. В. Пестренина, Л. В. Ландик // Вестник Томского государственного университета. 2014. Т. 27, № 1. С. 95–109.
16. Пожарский, Д. А. К расчету напряжений в трехмерном упругом клине / Д. А. Пожарский, Н. А. Ларцева // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2007. № 2. С. 31–32.
17. Рекомендации по расчету осадок и кренов прямоугольных фундаментов на клиновидном основании / НИИОСП Госстрой СССР. М., 1985. 29 с.
18. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. 2-е изд. испр. М.: Высш. шк., 2000. 560 с.
19. Еврокод 2. Проектирование ЖБК. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий: ТКП EN 1992-1-1–2009*. Введ. 10.12.2009. Минск: Минстройархитектуры, 2010. 191 с.
20. Расчет и конструирование сборных железобетонных конструкций многоэтажного каркасного здания / Н. А. Рак [и др.]. Минск: БНТУ, 2012. 96 с.
21. Возведение строительных конструкций, зданий и сооружений. Основные требования: ТКП 45-1.03-314–2018. Введ. 06.02.2018. Минск: Минстройархитектуры, 2018. 124 с.
22. Поступила 14.03.2019
Подписана в печать 28.05.2019
Опубликована онлайн 31.07.2019
23. REFERENCES
1. Alexandrov V. M., Romalis B. L. (1986) *Contact Problems in Mechanical Engineering*. Moscow, Mashinostroyeniye Publ. 176 (in Russian).
2. Alexandrov V. M., Pozharsky D. A. (1998) *Nonclassical Spatial Mechanics Problems for Contact Interaction of Elastic Solids*. Moscow, Faktorial Publ. 288 (in Russian).
3. Alexandrov V. M., Pozharsky D. A. (2006) Plane Contact Problem for Split Flexible Wedge. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki University = News North-Caucasian Region Natural Sciences Series*, (6), 27–30 (in Russian).
4. Bosakov S. V. (2002) *Statistical Calculations of Plates on Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
5. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on Elastic Foundation*. 3th ed. Moscow, Stroyizdat Publ. 680 (in Russian).
6. Zhemochkin B. N., Sinityn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculations of Foundation Beams and Plates on Elastic Foundation*. 2nd ed. Moscow, Gosstroyizdat Publ. 240 (in Russian).
7. Klepikov S. N. (1967) *Calculation of Structures on Elastic Foundation*. Kiev, Budivelnik Publ. 184 (in Russian).
8. Korenev B. G. (1954) *Calculation Problems for Beams and Plates on Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroyizdat Publ. 231 (in Russian).
9. Galin L. A. ed. (1976) *Development of Theory for Contact Problem in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).
10. Dmitrieva K. V. (2010) Contact Problem for Punch on Flexible Wedge with Free Edges. *Vestnik BNTU*, (4), 24–29 (in Russian).
11. Dmitrieva K. V. (2017) *Calculation of Non-Linear-Elastic Flexible Wall in Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 26 (in Russian).
12. Kulagina M. F., Ivanov E. G. (2009) Solution of First Main Problem of Elasticity Theory for Wedge in Power-Law Series. *Izvestiya Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta = Izvestiya Tula State University*, (2), 127–138 (in Russian).
13. Mitrofanov B. P. (1964) Action of Normal Concentrated Force on Elastic Rectangular Wedge of Infinite Extent. *Izvestiya Tomskogo Politehnicheskogo Instituta [Proceedings of Tomsk Polytechnical Institute]*, 114, 112–114 (in Russian).
14. Molchanov A. A., Pozharsky D. A. (2011) Generalization of the Galin Contact Problem and Punch Inter-Action. *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta im. N. I. Lobachevskogo = Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, (4–4), 1636–1638 (in Russian).
15. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L. V. (2014) Non-Standard Problems for Uniform Elements of Structures with Specific Features in the Form of Wedges under Conditions of Plane Problem. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta = Tomsk State University Journal*, 27 (1), 95–109 (in Russian).
16. Pozharsky D. A., Lartseva N. A. (2007) On Stress Calculation in 3D-Flexible Wedge. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki University = News North-Caucasian Region Natural Sciences Series*, (2), 31–32 (in Russian).
17. Gersevanov Research Institute of Bases and Underground Structures (NIIOSP) of USSR State Committee for Construction (1985) *Recommendations on Calculation of Settlement and Displacement of Rectangular Foundation on Wedge-Type Base*. Moscow. 29 (in Russian).
18. Alexandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. (2000) *Resistance of Materials*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 560 (in Russian).
19. ТКП [Technical Code of Common Practice] EN 1992-1-1–2009*. *Eurocode 2. Designing of Reinforced Concrete Structures. Part 1-1. General Rules and Rules for Assignments*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2010. 191 (in Russian).
20. Rak N. A., Danilenko I. V., Smekh V. I., Shcherbak S. B. (2012) *Calculation and Designing of Assembled Reinforced Structures for Multi-Storey Half-Timbered Building*. Minsk, Belarusian National Technical University. 96 (in Russian).
21. ТКП [Technical Code of Common Practice] 45-1.03-314–2018. *Installation of Building Structures, Buildings and Facilities. Basic Requirements*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2018. 124 (in Russian).

Received: 14.03.2019

Accepted: 28.05.2019

Published online: 31.07.2019