

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО<sup>1</sup>, Т. А. ЖУР<sup>2</sup>, И. П. БОЯРИНА<sup>2</sup>

## НЬЮТОНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПРИ УЧЕТЕ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 09.04.2010)

**1. Ньютоновские уравнения движения при учете светового давления.** В пустоте без учета светового давления ньютоновские уравнения движения (УД) пробного (легкого) тела массой  $m$  в гравитационном поле, создаваемом центрально-симметричным тяжелым телом (звездой) массой  $M$ , могут быть записаны в векторной форме [1]:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma M m}{r^3} \vec{r} = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор пробного тела;  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – его расстояние до начала координат  $O$  прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$ , совпадающее с центром масс тяжелого тела;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ г}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $t$  – ньютоновское абсолютное время.

Учет светового давления  $\vec{P}$  звезды на пробное тело приводит к появлению в (1) справа добавочного члена

$$\vec{P} = \frac{A_0}{r^3} \vec{r}, \quad (2)$$

где  $A_0 > 0$ , так как  $\vec{P}$  – центральная сила отталкивания, и  $A_0$  является постоянной величиной в случае стационарной светимости звезды;  $A_0$  имеет следующую структуру [2–6]:

$$A_0 = (k \sigma q_0 r_0^2 c^{-1}) \text{ г} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}, \quad (3)$$

где  $k$  – безразмерная постоянная, заключенная в пределах  $1 \leq k \leq 2$  ( $k=1$  для пробного тела, абсолютно поглощающего излучение,  $k=2$  для абсолютно отражающего тела, для диффузного в среднем отражения светового излучения обычно принимается  $k=1,44$ );  $\sigma \text{ см}^2$  – поперечное миделево сечение легкого тела, которое в случае сферического пробного тела радиусом  $R$  вычисляется по формуле  $\sigma = \pi R^2 \text{ см}^2$ ;  $q_0 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  – звездная постоянная, т. е. полное количество энергии электромагнитного излучения звезды, приходящего за 1 сек на  $1 \text{ см}^2$  площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии  $r_0$  от звезды;  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$  – скорость света в вакууме. В монографиях [2] и [7] содержится подробное обоснование формул (2) и (3).

В частности, для Солнца при  $r_0 = 1 \text{ а. е.}$  ( $1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$  – среднее расстояние от Земли до Солнца) имеем [5–8]:

$$q_0 = 1,36 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad A_0 = k \sigma \cdot 1,02 \cdot 10^{22} \text{ г} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}. \quad (4)$$

Значение  $q_0$  из (4) называется *солнечной постоянной*, характеризует *светимость* Солнца и служит эталоном при сравнении звездных постоянных и светимостей других звезд [7].

Запишем теперь УД пробного тела с учетом светового давления в удобном для нас виде. Для этого нуль справа в (1) заменим на  $\bar{P}$  из (2), перенесем  $\bar{P}$  в левую часть полученного уравнения и разделим его почленно на  $m$ :

$$\frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} + \frac{\gamma m_s}{r_s^3} \vec{r}_s = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } m_s = M - \frac{A_0}{\gamma m} = M - m_0, \quad m_0 = \frac{A_0}{\gamma m} = k \frac{\sigma}{m} q_0 r_0^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ г}, \quad (6)$$

и  $m_s$  называется *редуцированной массой* звезды (reduce – ослаблять) [9].

Подставив в (6) значения для  $q_0$ ,  $A_0$  из (4), получим редуцированную массу Солнца:

$$m_s = \left( 1,99 \cdot 10^{33} - k \frac{\sigma}{m} 1,53 \cdot 10^{29} \right) \text{ г}, \quad (7)$$

где  $M_0 = 1,99 \cdot 10^{33}$  г – масса Солнца. Букву  $r$  в (5) снабжаем индексом "s", так как УД (5) имеет решения, определяемые значением  $m_s$ .

**2. Интегрирование уравнений движения (1) и (5).** По хорошо известной методике (см., например, [1, 10, 11]) из УД (1) находим, что траектория движения пробного тела лежит в плоскости, в качестве которой без ограничения общности можно взять координатную плоскость  $xOy$ , т. е.  $z = 0$ . Введя на ней полярную систему координат по формулам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , получим два первых интеграла УД (энергии и площадей), которые позволяют сконструировать дифференциальное уравнение орбиты, допускающее точное интегрирование. Не приводя в тексте промежуточных вычислений (их можно найти, например, в [1, 10, 11]), сразу выпишем готовые результаты:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\gamma M}{r} = h = -\frac{\gamma M}{2p} (1 - e^2) \text{ – интеграл энергии}, \quad (8)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C = \sqrt{\gamma M p} \text{ – интеграл площадей}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \text{ – уравнение орбиты}, \quad (10)$$

где  $v$  – поступательная скорость пробного тела на орбите (10), которая является линией второго порядка с параметром  $p$  и эксцентриситетом  $e$ : при  $e = 0$  – окружность, при  $0 < e < 1$  – эллипс, при  $e = 1$  – парабола, при  $e > 1$  – гипербола.

Интегрирование УД (5) формально проводится точно так же, как и УД (1), но следует иметь в виду, что «массовый» центр у них разный –  $M$  и  $m_s$ . Чтобы различать решения УД (1) и (5), величины, связанные с УД (5), будем снабжать индексом "s" ( $s = 1, 2, 3$ ).

Интегрирование УД (5) проведем при следующих начальных условиях: I. Периастр орбиты (10), получаемый при  $\varphi = 0$ , совпадает с периастром новой орбиты из УД (5); II.  $dr / d\varphi = dr_s / d\varphi$  при  $\varphi = 0$ ; III.  $v(\varphi = 0) = v_s(\varphi = 0)$ .

Для УД (5) имеем три случая: 1)  $m_s > 0$ ; 2)  $m_s < 0$ ; 3)  $m_s = 0$ .

Для случая 1), когда  $M > m_0$ , полагаем  $s = 1$  и находим по методике решения УД (1):

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{\gamma m_1}{r_1} = h_1 = -\frac{\gamma m_1}{2p_1} (1 - e_1^2), \quad (11)$$

$$r_1^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_1 = \sqrt{\gamma m_1 p_1}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1 + e_1 \cos \varphi}{p_1}. \quad (13)$$

В силу принятых начальных условий орбита (13) конкретизируется, определенным образом привязывается к орбите (10), которую будем называть *опорной*, а параметры  $p_1, e_1$  однозначно выражаются через известные величины  $p, e, M, m_0$ . Действительно, легко устанавливаются следующие связи:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{M}{m_1} = \frac{1 + e_1}{1 + e}, \quad (14)$$

из которых сразу же извлекаем полезную информацию:

$$p_1 = \frac{Mp}{m_1} > p, \quad e_1 = \frac{Me + m_0}{m_1} > e, \quad (15)$$

т. е. у орбиты (13), которую будем называть *возмущенной*, параметр  $p_1$  и эксцентриситет  $e_1$  всегда больше, чем у опорной орбиты. Также легко показывается, что  $r_1 > r$  при одинаковых  $\varphi$  ( $r_1 = r$  только при  $\varphi = 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Для случая 2), когда  $m_2 < 0$  ( $M < m_0$ ), при тех же начальных условиях и по той же методике находим:

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{\gamma m_2}{r_2} = h_2 = \frac{\gamma m_2}{2p_2}(1 - e_2^2), \quad (16)$$

$$r_2^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_2 = \sqrt{-\gamma m_2 p_2}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{-1 + e_2 \cos \varphi}{p_2}, \quad (18)$$

$$\text{где } p_2 = -\frac{M}{m_2}p, \quad e_2 = 1 - \frac{M}{m_2}(1 + e). \quad (19)$$

Случай 3) тривиален. При оговоренных начальных условиях решение УД (5) при  $m_3 = 0$  ( $M = m_0$ ) дает прямую, проходящую через периастр и перпендикулярную большой оси опорной орбиты (10); по этой прямой движется пробное тело. Эта прямолинейная траектория имеет следующее уравнение в полярных координатах и параметрические уравнения:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1 + e}{p} \cos \varphi; \quad x = \frac{p}{1 + e}, \quad y = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1 + e)t = v(\varphi = 0)t. \quad (20)$$

### 3. Обсуждение полученных закономерностей.

С л у ч а й 1). Формулы (11) – (15) относятся к случаю 1)  $m_1 > 0$ , т. е.  $M > m_0$ , когда пробное тело притягивается центром. Будем считать, что опорная орбита является эллипсом или окружностью:  $0 \leq e < 1$ . Тогда орбита (13) будет также эллипсом, если  $e_1 < 1$ , что осуществляется, как это следует из (15), только при выполнении неравенства

$$m_0 < \frac{1}{2}M(1 - e). \quad (21)$$

Этот возмущенный эллипс будет больших размеров по сравнению с опорным эллипсом или окружностью (10), так как согласно (15)  $p_1 > p$ ,  $e < e_1 < 1$  и  $r_1 > r$ , а также из формул

$$p_1 = a_1(1 - e_1^2), \quad p = a(1 - e^2) \quad (22)$$

вытекает, что  $a_1 > a$ . Происходит, образно говоря, «раздувание» опорного эллипса. Кроме того, из формул (15) и (22) следует точная формула:

$$a_1 = \frac{m_1(1-e)a}{M(1-e) - 2m_0}. \quad (23)$$

Теперь легко находим приращение  $\Delta a$  большой оси возмущенного эллипса (13) к большой оси опорного эллипса (10):

$$\Delta a = 2a_1 - 2a = \frac{2m_0(1+e)a}{M(1-e) - 2m_0}. \quad (24)$$

При выполнении неравенства (21)  $\Delta a > 0$ . Если же неравенство (21) превращается в равенство, то знаменатели в (23) и (24) обращаются в нуль и получаем  $a_1 = \infty$ ,  $\Delta a = \infty$  и согласно (15)  $e_1 = 1$ , т. е. параболу с параметром  $p_1 = 2p / (1+e)$ . Дальнейшее увеличение  $m_0$  в пределах  $M > m_0 > M(1-e)/2$  приводит к превращению параболы в гиперболу, так как согласно (15) получаем  $e_1 > 1$ . Парабола является сепаратрисой, отделяющей семейство эллипсов от семейства гипербол. Периастры у всех этих возмущенных орбит и опорной орбиты находятся в точке  $\Pi$  (рисунок). Действительная ось гипербол откладывается вправо от точки  $\Pi$ , так как  $a_1 < 0$  и  $\eta_1 < 0$  при  $\varphi = \pi$ . Движение пробного тела происходит по левой ветви гиперболы (13), охватывающей центр притяжения  $F$ .

Следует отметить, что так как согласно (14)  $Mp = m_1 p_1$ , то секторная скорость пробного тела одна и та же для всех орбит:

$$C_1 = \sqrt{\gamma m_1 p_1} = \sqrt{\gamma M p} = C. \quad (25)$$

Поступательные же скорости  $v$  и  $v_1$  пробного тела на опорной орбите (10) и возмущенных орбитах (13) совпадают согласно начальному условию только в периастре, когда  $\varphi = 2\pi n$ , а в остальных точках орбит всегда  $v > v_1$ . Действительно, из (8) и (11) получаем выражения

$$v^2 = \frac{\gamma M}{p}(1 + 2e \cos \varphi + e^2), \quad v_1^2 = \frac{\gamma m_1}{p_1}(1 + 2e_1 \cos \varphi + e_1^2), \quad (26)$$

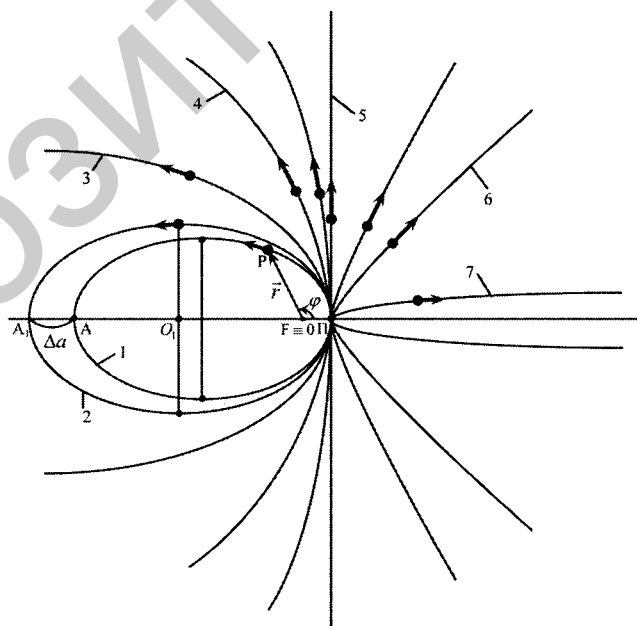


Схема расположения опорной и возмущенных орбит: 1 – опорный эллипс; 2 – возмущенный эллипс, случай (36)–(38); 3 – парабола-сепаратриса; 4 – левая ветвь возмущенной гиперболы, случай (46); 5 – прямая, по которой возможно движение частицы; 6 – правая ветвь возмущенной гиперболы, случай (44); 7 – случай (43) ( $\vec{r} = \overline{OP}$  – радиус-вектор частицы  $P$ ;  $\Pi$  – периастр всех орбит;  $A$  и  $A_1$  – апоастры опорного и возмущенного эллипсов;  $F$  – фокус для всех орбит, в котором находится силовой центр (звезда))

из которых и (15) следует, что  $v(\varphi = 2\pi n) = v_1(\varphi = 2\pi n)$ , а для остальных  $\varphi$  имеем  $v > v_1$ . Для эллипсов ( $e < 1$  и  $e_1 < 1$ ) в апоастре, когда  $\varphi = (2n+1)\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , имеем:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1-e), \quad v_1 = v \left( 1 - \frac{4m_0}{M(1-e)^2} \left( 1 - e - \frac{m_0}{M} \right) \right)^{1/2}. \quad (27)$$

Из (26) следует также, что и  $v$ , и  $v_1$  достигают наибольшего значения в периастре, а в апоастре принимают наименьшее значение.

Из интеграла площадей (9) при использовании орбиты (10) находим время  $t$  как функцию  $\varphi$ :

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{\gamma M}} \left[ \frac{e \sin \varphi}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \varphi)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \quad (28)$$

Формула (28) верна только при  $e < 1$ .

Если  $\varphi = \pi$ , то должно быть  $t = T/2$ , где  $T$  – период обращения по опорной орбите пробного тела. Тогда из (28) с помощью (22) при этих значениях  $\varphi$  и  $t$  получаем третий закон Кеплера, который запишем в виде

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3. \quad (29)$$

При учете светового давления из интеграла площадей (12) при использовании (13) и (22) выведем аналогичные формулы:

$$t = \sqrt{\frac{p_1^3}{\gamma m_1}} \left[ \frac{e_1 \sin \varphi}{(e_1^2 - 1)(1 + e_1 \cos \varphi)} + \frac{2}{(1 - e_1^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (30)$$

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1} a_1^3, \quad (31)$$

которые верны только при  $e_1 < 1$ .

С помощью формул (15), (22), (29), (31) доказывается, что  $T_1 > T$ , а формула (31) трансформируется в формулу

$$T_1^2 = T^2 \left( 1 - \frac{m_0}{M} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2m_0}{M(1-e)} \right]^{-3}. \quad (32)$$

Формула (32) дает возможность легко получить разницу  $\Delta T$  между  $T_1$  и  $T$ :

$$\Delta T = T_1 - T = T \left\{ \left( 1 - \frac{m_0}{M} \right) \left[ 1 - \frac{2m_0}{M(1-e)} \right]^{-3/2} - 1 \right\}. \quad (33)$$

**З а м е ч а н и е.** Если  $e_1 > 1$ , то формулы (30)–(33) теряют смысл, а вместо формулы (30) имеем:

$$t = \sqrt{\frac{p_1^3}{\gamma m_1}} \left[ \frac{e_1 \sin \varphi}{(e_1^2 - 1)(1 + e_1 \cos \varphi)} - \frac{2}{(e_1^2 - 1)^{3/2}} \ln \left| \frac{(e_1 + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{e_1^2 - 1}}{(e_1 + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \sqrt{e_1^2 - 1}} \right| \right]. \quad (30^*)$$

**С л у ч а й 2).** Имеем центральное поле отталкивания, так как  $m_2 < 0$ . В нем согласно (19)  $e_2 > 1$ , т. е. траекторией движения пробного тела может быть только гипербола, точнее – правая ветвь гиперболы (18), которая не охватывает центр отталкивания  $F$  (см. рисунок). Эта ветвь проходит через периастр  $\Pi$  опорной орбиты и пробное тело в этой точке имеет поступательную скорость  $v_2(\varphi = 0) = v(\varphi = 0)$  согласно начальному условию. В любой точке правой ветви орбиты (18)

$v_2(\varphi) > v(\varphi)$ . В силу (19)  $Mp = -m_2 p_2$ . Поэтому  $C_2 = C$ , т. е. секторные скорости для опорной орбиты (10) и возмущенной орбиты (18) равны. Время  $t$  как функцию  $\varphi$  можно найти, интегрируя (17) с использованием (18):

$$t = \sqrt{\frac{p_2^3}{-\gamma m_2}} \left[ \frac{e_2 \sin \varphi}{(e_2^2 - 1)(-1 + e_2 \cos \varphi)} - \frac{2}{(e_2^2 - 1)^{3/2}} \ln \left| \frac{(e_2 + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{e_2^2 - 1}}{(e_2 + 1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \sqrt{e_2^2 - 1}} \right| \right]. \quad (34)$$

С л у ч а й 3). Согласно (20) движение пробного тела происходит по прямой с постоянной скоростью  $v_3 = v(\varphi = 0) = \sqrt{\gamma M / p(1 + e)}$ . Связь  $t$  с  $\varphi$  выражается формулой:

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{\gamma M}} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{(1 + e)^2}. \quad (35)$$

**4. Числовые оценки.** При учете влияния светового давления на закономерность движения пробного тела ключевую роль играет величина  $m_0$ , которую можно вычислять по формуле (6), а для Солнечной системы – по формуле (7). Образно говоря,  $m_0$  определяет «парусность» тела.

Рассмотрим подробнее движения пробного тела в Солнечной системе. Пусть тело сферически симметричное радиусом  $R$ , массой  $m$  и диффузно отражающее свет, т. е.  $k = 1,44$ . Тогда  $\sigma = \pi R^2$  и согласно (7)

$$m_0 = \frac{R^2}{m} \cdot 6,92 \cdot 10^{29} \text{ г}. \quad (36)$$

Пусть, далее, пробное тело имеет характеристики американского спутника Земли «Эхо-1»: сфера-баллон с  $R = 15$  м,  $m = 68$  кг. Тогда

$$m_0 = 2,29 \cdot 10^{31} \text{ г}, \quad m_1 = 1,97 \cdot 10^{33} \text{ г}. \quad (37)$$

Если такой спутник запустить на орбиту Земли, т. е. сделать спутником Солнца, то его опорное движение будет отличаться от возмущенного на значительные величины, вычисленные согласно (24), (27), (33):

$$\Delta a \approx 3,66 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad \Delta v = v - v_1 \approx 0,68 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad \Delta T \approx 0,48 \text{ года}. \quad (38)$$

В межпланетном пространстве существуют объекты (малые тела, частицы, молекулы, ионы, атомы и т. д.), для которых отношение  $R^2 / m$  в (36) настолько велико, что  $m_0$  близко к массе Солнца или даже больше ее:  $m_0 > M$  (см. [8, 9]). В последнем случае редуцированная масса Солнца [9]  $m_2 = M_0 - m_0 < 0$ . Тогда получаем для таких объектов поле отталкивания и решением УД (5) будут только ветви гипербол (18), которые не охватывают центральное тело [10, 11] (см. рисунок). Такие объекты «выметаются» из Солнечной системы, что существенно влияет на формирование межпланетной среды, ее плотности, на состояние метеорного вещества, поведение комет, образование у них хвостов и т. д.

Легко установить «порог», после которого поле притяжения превращается в поле отталкивания для пробного тела. Находим из (7), что при равенстве

$$k \frac{\sigma}{m} = 1,30 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1} \quad (39)$$

гравитационное притяжение в Солнечной системе уравновешивается световым отталкиванием. За порогом (39), т. е. при

$$k \frac{\sigma}{m} > 1,30 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}, \quad (40)$$

редуцированная масса Солнца  $m_2 = M_0 - m_0 < 0$ . Пробное тело (частица) с характеристикой  $k\sigma/m$ , удовлетворяющей неравенству (40), оказывается в центральном поле отталкивания и будет по гиперболе уходить из Солнечной системы. Скорость  $v_2$  удаления от Солнца по орбите (18) вычисляется из интеграла энергии (16), которому можно придать вид:

$$v_2 = \left[ -\frac{\gamma M_2}{p_2} (1 - 2e_2 \cos \varphi + e_2^2) \right]^{1/2}. \quad (41)$$

Связь  $\varphi$  с  $t$  задается функцией (34), из которой (и из (18)) видно, что угол  $\varphi$  ограничен интервалом  $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ , концы которого определяются значением  $\varphi_0$  из равносильных равенств:

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right| = \sqrt{\frac{e_2 - 1}{e_2 + 1}}, \text{ или } \cos \varphi_0 = \frac{1}{e_2}. \quad (42)$$

Значение  $2\varphi_0$  дает угол между асимптотами гиперболы, по которой частица уходит в бесконечность.

Из наблюдений известно [8, 9], что в космосе существуют частицы, для которых порог (39) превышает. Скорость и время их ухода из звездной (Солнечной) системы зависит от того, насколько «сильно» неравенство (40). Например, для очень пористой частицы, имеющей большое миделево сечение  $\sigma$  и малую массу  $m$ , при  $1 \leq k \leq 2$  достижимо следующее значение

$$k \frac{\sigma}{m} = k\pi \frac{R^2}{m} \approx (1 \div 2) 5,26 \cdot 10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}, \quad (43)$$

т. е. получаем сильное неравенство (40) (сильное отталкивание).

Для частицы, радиус которой  $R = 10^{-5}$  см и масса  $m = 10^{-14}$  г [8, 9],

$$k \frac{\sigma}{m} = k\pi \frac{R^2}{m} \approx (1 \div 2) 3,14 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}, \quad (44)$$

т. е. получаем «слабое» неравенство (40) (слабое отталкивание).

Если рассматривать частицы, радиусы которых  $R = 10^{-5}$  см, массы  $m = 6 \cdot 10^{-14}$  г, то при диффузном отражении света, когда  $k = 1,44$ , получаем

$$k \frac{\sigma}{m} = 0,75 \cdot 10^4, \quad m_0 = 1,15 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad M_0 > m_0 > \frac{1}{2} M_0 (1 - e). \quad (45)$$

Для таких же частиц (согласно (7)) редуцированная масса Солнца  $m_1 = 0,84 \cdot 10^{33}$  г  $> 0$  (еще поле притяжения), но  $e_1 > 1$  и возмущенные орбиты будут ветвями гипербол, хотя опорная орбита является эллипсом (10) (см. рисунок).

Имея оценки (43) – (45), можно вычислить в случае Солнечной системы  $\varphi_0$  (см. (42)),  $p_2$  и  $e_2$  для возмущенной орбиты, редуцированную массу Солнца для разных частиц, время  $t_1$  и  $t_2$  ухода частиц за пределы Солнечной системы, или время достижения частицей Плутона  $t_{\text{П}}$ , скорость движения  $v_1$  и  $v_2$  на выходе за эти пределы и другие величины. При этом следует помнить, что должны выполняться начальные условия. Для полной определенности опорный эллипс (10) будем считать орбитой Земли и отражение света частицей диффузным. Тогда  $e = 0,017$ ,  $p = 1,5 \cdot 10^{13}$  см,  $k = 1,44$ . Теперь рассмотрим разные случаи.

**С л у ч а й (43).** Из (7) находим редуцированную массу Солнца  $m_2 = -1,16 \cdot 10^{37}$  г. Из (19) получаем  $p_2 = 2,57 \cdot 10^9$  см,  $e_2 = 1 + 1,74 \cdot 10^{-4}$ . Из (42) вычисляем  $\cos \varphi_0 = 1 - 1,74 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varphi_0 \approx 1^\circ$ . Время  $t_2$ , нужное для ухода атома водорода из перигелия П при начальной скорости  $v(\varphi = 0)$

за пределы Солнечной системы  $2 \cdot 10^5$  а. е., вычисляем с помощью (34), куда вместо  $m_2, p_2, e_2$  подставляем только что найденные их значения, а  $\varphi$  заменяем на  $\varphi_1$ , которое удовлетворяет (18) при  $r_2 = 2 \cdot 10^5$  а. е.  $= 3 \cdot 10^{18}$  см. В итоге по формуле (34) имеем  $t_2 = 915,74 \cdot 10^7$  сек  $\approx 290$  лет. Промежуток времени  $t_{\Pi}$ , необходимый для достижения орбиты Плутона ( $r_2 = 40$  а. е.), равен  $t_{\Pi} = 1,6 \cdot 10^6$  сек  $\approx 18,5$  сут. Скорость  $v_2$  частицы на границе Солнечной системы и скорость  $v_{\Pi}$  в районе орбиты Плутона можно вычислить по формуле (41):  $v_2 \approx 3230$  км  $\cdot$  сек $^{-1}$ ,  $v_{\Pi} \approx 3197$  км  $\cdot$  сек $^{-1}$ .

С л у ч а й (44). Аналогично случаю (43) последовательно находим:  $m_2 = -4,93 \cdot 10^{33}$  г;  $p_2 = 6,06 \cdot 10^{12}$  см;  $e_2 = 1,41$ ;  $\cos \varphi_0 = 0,7092$ ;  $\varphi_0 \approx 44^\circ 50'$ ;  $t_2 = 29052 \cdot 10^7$  сек  $\approx 9194$  года;  $t_{\Pi} \approx 8,9 \cdot 10^7$  сек  $\approx 2,82$  года;  $v_2 \approx 73,2$  км  $\cdot$  сек $^{-1}$ ;  $v_{\Pi} \approx 72,5$  км  $\cdot$  сек $^{-1}$ .

С л у ч а й (45). Используя равенства (7), (11) – (15), (30), находим:  $m_1 = 0,84 \cdot 10^{33}$  г;  $p_1 = 3,55 \cdot 10^{13}$  см;  $e_1 = 1,41$ ;  $\cos \varphi_0 = -0,7092$ ;  $\varphi_0 \approx 135^\circ 10'$ ;  $t_1 = 240420 \cdot 10^7$  сек  $\approx 76082$  года;  $t_{\Pi} \approx 15,34$  года;  $v_1 \approx 12,5$  км  $\cdot$  сек $^{-1}$ ;  $v_{\Pi} \approx 13,2$  км  $\cdot$  сек $^{-1}$ .

Для планет Солнечной системы согласно формуле (7)  $m_0 \sim (10^{10} \div 10^{11})$  г и, естественно, световое давление практически не влияет на движение планет. Но следует иметь в виду, что существуют звездные планетарные системы, в которых центральная звезда имеет светимость, превосходящую светимость Солнца в  $10^3 \div 10^6$  раз [8], что приводит соответственно к увеличению возмущений в элементах опорных орбит спутников звезды во столько же раз. В этой ситуации определение массы центральной звезды по наблюдениям ее спутника с помощью третьего закона Кеплера (31) приводит к нахождению редуцированной массы звезды  $m_s = M - m_0$ , но истинная масса звезды  $M = m_1 + m_0$  может значительно отличаться от  $m_1$ , что следует иметь в виду. Таким образом, светимость звезд может существенно влиять на величину  $m_0$  и правильное определение массы звезды.

В заключение заметим, подчеркивая важность исследований по влиянию электромагнитных излучений на движение тел, что в 60–70-х годах XX века в научной литературе широко обсуждались проекты «космического солнечного паруса» [12–14], в которых решались задачи выхода космического аппарата, оснащенного солнечным парусом в качестве двигателя малой тяги, из зоны притяжения планеты и дальнейшего движения в качестве спутника Солнца или других планет.

Подчеркнем, что эти задачи решались и исследование в данной работе проводилось в рамках ньютоновской теории тяготения, но представляет научный и, возможно, практический интерес решение подобных и других задач по движению тел с учетом светового давления в рамках эйнштейновской теории тяготения (в общей теории относительности), что авторы предполагают осуществить, опираясь на результаты настоящего исследования, в последующих работах.

## Литература

1. Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
2. Э л ь я с б е р г П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., 1965.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля. М., 1988. § 47, 54.
4. Я в о р с к и й Б. М., Д е т л а ф А. А. Справочник по физике. М., 1965. С. 526, 634.
5. К а п л а н С. А. Давление излучения. Маленькая энциклопедия «Физика космоса». М., 1976. С. 215.
6. А к с е н о в Е. П. Движение искусственных спутников Земли. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., 1976. С. 617.
7. А к с е н о в Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., 1977. § 9.1.
8. К о н о н о в и ч Э. В., М о р о з В. И. Общий курс астрономии. М., 2004.
9. Р а д з и е в с к и й В. В. Солнечная система. Маленькая энциклопедия «Физика космоса». М., 1976. С. 61.
10. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика. М., 1965. § 15.
11. Р я б у ш к о А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979.
12. С к о п ц о в А. П. // Проблемы механики управляемого движения. Вып. 1. Пермь. 1972.
13. Г р о з д о в с к и й Г. Л., И в а н о в Ю. Н., Т о к а р е в В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., 1975.
14. Б е л е ц к и й В. В. Очерки о движении космических тел. М., 1977.



*A. P. RYABUSHKO, T. A. ZHUR, I. P. BOYARINA*

**NEWTONIAN MOTION OF A BODY IN THE GRAVITATIONAL FIELD  
WITH LIGHT PRESSURE**

**Summary**

In the Newtonian approximation of the general relativity, the energy integral, the orbital angular momentum and the equation of the orbit of a test body with light pressure have been derived and discussed. Several Newtonian effects are predicted. Some numerical values of these effects are given.