

УДК 621.1

Р. И. ЕСЬМАН, Л. И. ШУБ

ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА И ТЕЧЕНИЯ ЖИДКИХ МЕТАЛЛОВ

Белорусский национальный технический университет

(Поступило в редакцию 25.03.2010)

Введение. Исследование процессов течения и теплообмена в жидких движущихся расплавах представляет как теоретический интерес, заключающийся в математическом описании сложных взаимосвязанных процессов тепломассопереноса, так и практический интерес, состоящий в создании научных основ новых технологий энергетики, металлургии и машиностроения, использующих эффекты движущихся расплавов. К таким технологиям относятся: непрерывные и центробежные способы литья, методы получения корпусных заготовок под низким и регулируемым давлением, методы литья выжиманием, а также использование жидкометаллических теплоносителей и реологических жидкостей в энергетике и других отраслях народного хозяйства [1, 2].

Математическая модель. Разработана математическая модель формирования тонкостенных литых изделий сложной конфигурации в металлической форме, где особое значение имеет начальная стадия заполнения с одновременным затвердеванием металла в процессе течения в полости литейной формы. Анализ этих факторов необходим при рассмотрении условий формирования тонкостенных корпусных заготовок, время затвердевания которых соизмеримо со временем заполнения формы.

Численным методом проведен расчет затвердевания и охлаждения движущегося расплава в полости цилиндрической формы заданной геометрии. Расчеты выполнены для двумерной модели с учетом переменной вязкости металла как функции температуры $\mu = f(T)$ во всей области течения. В качестве искоемых (зависимых) параметров выбраны составляющие скорости u и v (в продольном и поперечном направлениях), давление в потоке p , функции тока ψ , температуры T в потоке, затвердевшей корке металла, форме.

Численное решение задачи получено конечно-разностным методом [3]. Для нахождения дискретного аналога системы дифференциальных уравнений переноса и краевых условий используется нерегулярная (растягивающаяся) сетка со сгущением узлов вблизи контактных границ. Для расчета составляющих скорости применяется шахматная сетка с расположением переменных по схеме «бумеранг» (рис. 1). Контур, имеющий форму бумеранга, охватывает

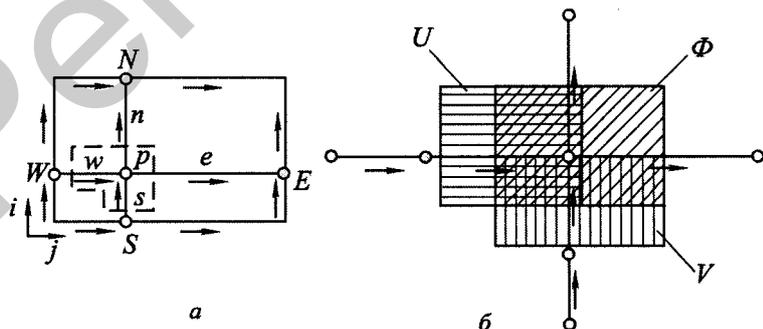


Рис. 1. Контрольные объемы на шахматной сетке: а – расположение переменных по схеме «бумеранг»; б – контрольные объемы с полюсами в точках p

триаду узловых точек, в которых хранится информация о давлении, температуре и других переменных, за исключением составляющих скорости. При такой схеме составляющие скорости u и v располагаются непосредственно на гранях контрольного объема, охватывающего узлы сетки, что дает возможность использовать их непосредственно для определения конвективных потоков и расчета градиента давления.

Запишем уравнения, определяющие течение жидкого металла и теплообмен во всей расчетной области $L \times R$. Уравнение энергии в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho c \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_x T}{\partial x} + \frac{\partial r v_r T}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]. \quad (1)$$

В левой части члены в круглых скобках определяют конвективный теплоперенос, их следует учитывать только в расчетной области, занятой каналом с движущимся жидким металлом. Во всей остальной расчетной области для металлической формы, стержня и затвердевшего металла следует положить $\partial r v_x T / \partial x + \partial r v_r T / \partial r = 0$.

Если бы течение происходило при постоянных теплофизических свойствах жидкости, то для его описания следовало бы воспользоваться уравнением Навье – Стокса. Изменение вязкости от температуры можно учесть, применяя форму уравнений количества движения в направлениях. С учетом сказанного в цилиндрической системе координат уравнения движения запишем следующим образом:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial r v}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

уравнение изменения количества движения в проекции на ось r

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau_{rr} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{rx} = \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}; \quad (3)$$

уравнение изменения количества движения в проекции на ось x

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau_{rx} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx}. \quad (4)$$

Для ламинарного режима течения напряжения, входящие в уравнения (3), (4), выражаются таким образом:

$$\tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right), \quad \tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{v_r}{r}.$$

С учетом переменной вязкости μ в выражениях (5) перепишем уравнения неразрывности и количества движения в виде:

$$\frac{\partial r u}{\partial x} + \frac{\partial r v}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r u v}{\partial x} + \frac{\partial r v^2}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + Q_v, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r u^2}{\partial x} + \frac{\partial r u v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + Q_u, \quad (8)$$

где источниковые члены Q_v и Q_u соответственно равны

$$Q_v = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$Q_u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

При записи выражений (5) – (9) использованы безразмерные переменные

$$(\bar{x}, \bar{r}) = (x, r) / R, \quad u = v_x / u_0, \quad v = v_r / u_0, \quad (10)$$

$$\bar{t} = t u_0 / R_1, \quad \bar{\mu} = \mu / (\rho_f u_0 R_1), \quad \bar{p} = p / (\rho_f u_0^2),$$

черточки над которыми в уравнениях (6) – (10) и в дальнейшем опущены.

Введем также безразмерную температуру $\Theta = (T - T_\infty) / T_\infty$, где T – температура окружающей среды, и перепишем выражение (1) в виде

$$\rho u_0 R_1 c \left[\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r u \Theta}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \right]. \quad (11)$$

Начальные условия по скорости получаются из решения стационарных уравнений движения в канале при изотермическом процессе $T = T_{01}$. Для этого стационарные уравнения количества движения, которые получаются из выражений (7), (8) при приравнивании нулю локальных производных по времени $\partial u / \partial t = 0$, решаются при постоянных физических свойствах жидкости, соответствующих начальной температуре $T = T_{01}$, полученные поля скорости и давления принимаются за начальные условия.

Для описания численного метода перепишем уравнения (6), (8), (11) в обобщенной форме:

$$a \frac{\partial \Phi}{\partial t} + b \frac{1}{\partial} \left(\frac{\partial r u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial r v \Phi}{\partial r} \right) = d \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] Q_\Phi, \quad (12)$$

где $\Phi = 1, u, v, \Theta$.

В выражении (11) величины ρ, u_0, R, c и λ размерные, остальные безразмерные. Введение безразмерных комплексов $Re = \rho_f u_0 R_1 / \mu$ и $Pr = c_p \mu / \lambda$ не имеет смысла ввиду переменности физических свойств среды в области течения и во всей расчетной области.

Для решения системы уравнений (6) – (11) необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Начальные условия по температуре принимаются постоянными в каждой из подобластей: при $t = 0$ в подобласти (жидкий металл) $T = T_{01}$; в подобласти (металлическая форма) $T = T_{02}$ (рис. 2).

Сформулируем граничные условия на наружной поверхности формы, на оси симметрии, в плоскостях входного и выходного сечений. На наружной поверхности формы принимается

условие теплообмена с окружающей средой $\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha (T - T_\infty)$, а на оси – условие симметрии $\partial T / \partial r = 0$. В безразмерных переменных эти условия перепишутся

при $r = 1$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = Bi \Theta;$$

при $r = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0,$$

где $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ (λ – коэффициент теплопроводности материала формы, взятый при температуре наружной поверхности).

Для составляющих скорости с учетом ламинарного течения на твердых стенках выполняются условия «прилипания». На входе $x = 0$ и выходе $x = L$ для составляющих скорости и температуры принимаются «мягкие» граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю производной по продольной координате. Это обусловлено равномерным характером течения и теплопереноса.

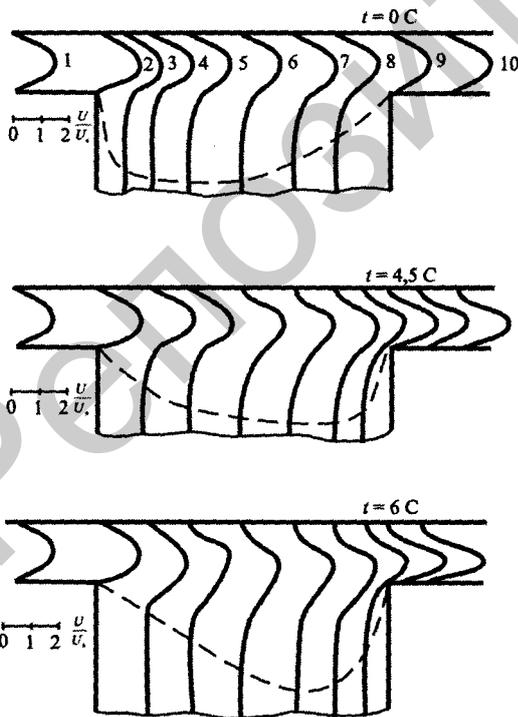


Рис. 2. Профили скорости в различных сечениях потока (1–10)

Если проекции скорости помещаются посередине между узлами, в которых заданы значения давления, то можно легко рассчитать соответствующие градиенты давления, которые входят в уравнения количества движения. Кроме того, при такой схеме составляющие скорости располагаются непосредственно на гранях контрольного объема, охватывающего узлы сетки, и это дает возможность использовать их непосредственно для определения конвективных потоков. В расчетной области составляющие скорости располагались посередине между узлами, что позволяет поместить нормальные составляющие скорости непосредственно на границах. Для построения разностных аналогов уравнений количества движения используются контрольные объемы с центром в точках расположения соответствующих проекций скорости. Таким образом, для переменных $\Phi = pT$ и составляющих скорости u и v используются три вида контрольных объемов, смещенных относительно друг друга (рис. 1).

Анализ результатов. Рассмотрим характер течения в начальный момент времени. Металл имеет постоянную температуру во всей области течения. Профили ($l-10$) безразмерной продольной скорости u/u_0 в характерных сечениях потока представлены на рис. 2. Профиль скорости l характерен для равномерного течения в трубе кольцевого сечения. Для продольной скорости получено выражение, в котором она представлена как функция отношения радиусов труб, образующих кольцевой зазор ($\theta = R_2/R_1$), и радиуса данной точки потока r . При принятых размерах $\theta = 0,14/0,15 = 0,933$ выражение для безразмерной скорости принимает вид

$$u/u_0 = 676,86(1-r^2 + 1,868lnr).$$

Теоретические значения скорости и значения скорости в полости цилиндрической стенки на различных расстояниях от плоскости сопряжения стенки с выступом, полученные в результате численного решения, приведены в табл. 1. Здесь l_1 и l_2 – расстояния от переднего и заднего края выступа, отнесенные к кольцевому зазору R_1-R_2 . Как следует из таблицы, профили скорости в кольцевом канале перед выступом и за ним деформируются сравнительно мало и численные значения скорости близки к теоретическим. Расхождение теоретических и численных данных в центральной части потока в сечениях $l_1 = 3$ и $l_2 = 7$ не превышает 3%. Расхождения в данных, наблюдаемые в непосредственной близости к стенкам, связаны с приближенной аппроксимацией граничного условия $u = 0$ в численной схеме и с округлением величины r , влияние которой при расчете вблизи точек $r = 0$ и $r = 1$ на значение скорости существенно.

Таблица 1. Профили скорости в канале сложного сечения

$r_{\text{разм}}, \text{ м}$	r	u/u_0						
		$l_1 = (L_1 - x)/(R_1 - R_2)$			$l_2 = (x - (L_1 + L_2))/(R_1 - R_2)$			
		0	0,275	3,0	0	0,4	1,6	7,0
0,14000	0,923	0	0	0	0	0	0	0
0,14025	0,935	0,241	0,226	0,216	0,303	0,217	0,214	0,219
0,14125	0,941	0,731	0,706	0,685	0,754	0,704	0,680	0,683
0,14250	0,950	1,169	1,155	0,138	1,137	1,125	1,119	1,130
0,14400	0,960	1,468	1,467	1,463	1,417	1,423	1,431	1,449
0,14600	0,973	1,438	1,442	1,448	1,385	1,416	1,433	1,447
0,14750	0,983	1,082	1,096	1,112	1,093	1,126	1,141	1,126
0,14875	0,992	,0631	0,647	0,664	0,693	0,725	0,716	0,677
0,14975	0,998	0,191	0,199	0,208	0,248	0,257	0,231	0,213
0,15000	1,000	0	0	0	0	0	0	0

На расстояниях $l_1 > 0,3$ и $l_2 > 8-10$ профили скорости остаются практически постоянными. Эти цифры определяют длину входного и выходного участков, наличие на них выступа оказывает влияние на характер течения в кольцевом канале.

Кольцевой поток при выходе за срез кольцевого канала и попадании в пространство выступа срывается, в результате чего расширяется и образуется возвратное течение. На рис. 2 штриховой линией разделены зоны прямого и возвратного течения. Следует отметить, что интенсивность обратного течения мала. Максимальная отрицательная скорость не превышает по модулю значения 0,05. В выбранном масштабе такие величины незначительно отличаются от нуля, поэтому профили скорости возвратного течения на рисунке не приводятся.

Рассмотрим характер изменения давления. В кольцевом канале на достаточно большом расстоянии от выступа вверх и вниз по потоку течение является параболическим, давление по сечению канала практически не изменяется. В рассматриваемом течении расчетные значения градиента давления на левой и правой границах расчетной области соответственно равны $(\partial \bar{p} / \partial x)_{x=L} = -0,624$, $(\partial \bar{p} / \partial x)_{x=0} = -0,606$. Отличие в величинах $\partial \bar{p} / \partial x$ на входе и выходе связано с тем, что выбранные сечения лежат в области не полностью развитого параболического характера течения. В трубах размерный градиент давления связан с коэффициентом гидравлического трения по формуле

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)_{\text{разм}} = -\frac{\lambda}{2d_r} \rho u_0^2.$$

Отнесем давление к ρu_0^2 , расстояние x – к радиусу R_1 , учтем, что гидравлический диаметр d_r определяется по формуле $d_r = 4(1-\theta)R_1$. В результате получаем зависимость между λ и безразмерным градиентом давления $\partial \bar{p} / \partial x$ в виде

$$\lambda = -4(1-\theta) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right).$$

Поскольку $\theta = 0,933$, находим $\lambda_{x=1} = 0,1665$ и $\lambda_{x=0} = 0,1616$. Сравним данные значения с теоретическими. Коэффициент гидравлического трения в кольцевой трубе при $\theta > 0,5$ определяется по формуле, в которой число Рейнольдса подсчитывается по ширине кольцевого канала: $Re = \rho u_0 R_1 2(1-\theta) / \mu$. При начальной температуре $T_0 = 923$ К коэффициент динамической вязкости $\mu = 9,0 \cdot 10^{-3}$ Па·с. С учетом значения плотности $\rho = 2670$ кг/м³ будем иметь

$$Re = 2670 \cdot 0,1 \cdot 0,15 \cdot 2(1-0,933) / 9 \cdot 10^{-3} = 593.$$

Находим теоретическое значение $\lambda = 96/593 = 0,1619$, которое хорошо согласуется со значениями коэффициентов λ , полученных численным путем.

Расчеты показывают, что течение в срывной зоне является практически безградиентным. Малые градиенты давления определяют малые значения скорости в зоне возвратного течения, о чем было упомянуто выше. При сужении потока на входе в кольцевой канал на линии $r=R_2$ давление резко падает. На срезе кольцевого канала при $x = L_1 + L_2$ перепад давления $P_c - P_0$ меняет знак. На некотором расстоянии от среза градиент давления быстро исчезает, а затем становится таким же, как и на наружной поверхности трубы.

Увеличение скорости и уменьшение площади проходного сечения в кольцевом канале в период охлаждения приводят к значительному увеличению падения давления по длине потока и росту гидравлического сопротивления кольцевых каналов и, как следствие, – к возрастанию давления, необходимого для подачи расплава в полость. Значения безразмерного градиента давления $\partial \bar{p} / \partial x$ и коэффициента гидравлического трения λ в выходном сечении расчетной области, а также перепада давления $\Delta p = \frac{P_{x=L} - P_{x=0}}{\rho u_0^2}$ в различные моменты времени приведены в табл. 2.

Таблица 2. Зависимость гидравлических параметров от времени

t, c	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$	λ	Δp
0	0,624	0,166	0,0503
3	0,792	0,211	0,0657
4,5	1,980	0,528	0,1400
6	5,028	1,340	0,3915

Охлаждение металла происходит главным образом за счет теплоотвода в металлическую форму. Вблизи контактной поверхности с формой наблюдаются наибольшие градиенты температур, что видно по сгущению изотерм. Однако по длине потока охлаждение осуществляется неравномерно. Цилиндрическая стенка перед выступом охлаждается наименьшим образом за счет постоянной подачи в полость горячего расплавленного металла. Напомним, что по условиям постановки задачи левая входная граница поддерживается при постоянной температуре $T = T_0 =$

923 К. Наиболее интенсивно охлаждается жидкий металл в области, примыкающей к сечению сопряжения выступа с выходной цилиндрической стенкой. Объясняется это тем, что в окрестности входного сечения кольцевого канала при втекании в него жидкости из широкой полости выступа происходит ее поджатие к наружной цилиндрической стенке, о чем свидетельствуют профили скорости. Это в свою очередь приводит к возрастанию локальных коэффициентов теплоотдачи на контактной границе форма–расплав и, как следствие, – к более активному охлаждению металла.

На рис. 2 представлены профили скорости в характерных сечениях потока и линии тока в моменты времени $t = 4,5$ и 6 с от начала охлаждения, а в табл. 2 отмечен характер изменения давления p_0 и p_c в моменты времени $t = 3, 4,5$ и 6 с. Можно отметить следующие закономерности.

В период начального охлаждения картина течения жидкого металла изменяется незначительно. Заметной деформации профилей не происходит. Линии тока также трансформируются незначительно. Однако наиболее чувствительным к изменению температуры и вязкости является давление. Уже к моменту времени $t = 3$ с падение давления вдоль по потоку существенно увеличивается. Дальнейшее охлаждение приводит к значительному изменению профилей скорости и картины линий тока. Профили скорости на рис. 2 показывают, что вблизи контактной поверхности форма–расплав вначале формируется зона малых, а затем зона нулевых скоростей потока, причем последнее связано с появлением твердой фазы. Эта зона локализуется в окрестности сечения сужения потока и простирается вниз по течению в кольцевой трубе. К моменту времени $t = 6$ с $u_{\max} = 3$ (в начальный момент $u_{\max} \approx 1,5$), причем максимум скорости с течением времени поджимается к внутренней стенке кольцевой полости. Об этом же свидетельствует картина линий тока. Расположение линий тока показывает, что циркуляционное движение в полости выступа также деформируется, отходит от стенок выступа и поднимается к поверхности сопряжения выступа с цилиндрической стенкой.

Заключение. Исследованы теплофизические и гидродинамические особенности движения жидких металлов и сплавов в каналах цилиндрического сечения. Решена сопряженная задача гидродинамики и теплообмена при движении расплавов.

В результате проведенных исследований установлены новые количественные соотношения между тепловыми и гидродинамическими параметрами движущегося металла. Из анализа температурных и скоростных полей выявлено влияние краевых условий на структуру потока расплава.

Анализ процессов тепломассопереноса при течении жидких металлов и сплавов проведен с учетом зависимости эффективной вязкости от температуры во всей области течения.

Из анализа результатов математического моделирования и численного эксперимента выявлен физический механизм течения жидких металлов и сплавов с изменяющейся вязкостью в каналах цилиндрического сечения. Исследование полученных картин линий тока позволяет определить зоны вихревого циркуляционного течения в кольцевых цилиндрических каналах, что открывает возможности прогнозирования расположения дефектных зон в изделиях, получаемых специальными технологиями литья (жидкой штамповкой, методами выжимания и непрерывного литья и др.).

Результаты математического моделирования и численного эксперимента позволяют определить основные управляющие параметры специальных технологий литья.

Результаты проведенного анализа закономерностей движения расплавленных металлов и сплавов в каналах сложной геометрии представляют в совокупности научную основу для разработки специальных технологий формирования тонкостенных корпусных литых изделий (технологии непрерывного литья, жидкой штамповки, литья под низким и регулируемым давлением и др.).

Литература

1. Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуб Л. И. Расчеты процессов литья. Мн., 1977.
2. Есьман Б. И. Термогидравлика при бурении скважин. М., 1982.
3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.

R. I. ESMAN, L. I. SHUB

HEAT TRANSFER AND STREAM PROCESSES OF MELT METALS

Summary

A mathematical model and an algorithm for numerical solution of conjugate problem concerning hydrodynamics and heat transfer of hardening and cooling processes with liquid melt flow is given.

Quantitative relationships between heating and hydrodynamics parameters of moving melts are presented.