УДК 536.2:519.6

П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Введена специальная пси-функция и с ее помощью получены точное и приближенное аналитические представления решения смешанной задачи теории теплопроводности для стержня. Достоинством приближенной формулы является ее сравнительная простота и отсутствие квадратур. Найдена эффективная оценка погрешности приближенного решения.

Ключевые слова: *теплопроводность, смешанная задача, приближенное решение, пси-функция.*

Рассмотрим задачу о распределении температуры в тонком, однородном, теплоизолированном стержне, не имеющем источников теплоизлучения, в каждой точке которого задана начальная температура и известна температура в любой момент времени на каждом из концов стержня. Математической моделью этой задачи является однородное одномерное уравнение теплопроводности [1, стр. 18]

$$\partial_t T = a^2 \partial_{xx} T, \tag{1}$$

где $T = T(x, t)$ — температура стержня длиной $l > 0$ в точке $x \in [0, l]$ в момент времени $t \geq 0$.

В момент времени $t = 0$ известна начальная температура стержня

$$T(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, l], \tag{2}$$

причем функцию $f(x)$ мы будем предполагать удовлетворяющей условию Липшица (Lipschitz), т. е. существует константа $L > 0$ такая, что для всех $x_1, x_2 \in [0, l]$ выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|\,.$$

Концы стержня поддерживаются при температурах

$$T(0, t) = g_1(t), \quad T(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

где функции $g_1(t)$, $g_2(t)$ будем считать кусочно-монотонными на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющими условию Липшица с константами L_1, L_2 соответственно. Для начального (2) и краевых условий (3) выполняются условия согласования $f(0) = g_1(0)$, $f(l) = g_2(0)$.

Решение смешанной задачи (2), (3) для уравнения (1) может быть получено методом Фурье (Fourier) [2, стр. 546–547] в виде суммы двух рядов

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t),$$

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin k\omega x, \quad V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin k\omega x, \tag{4}$$

где

$$u_k(t) = \frac{2}{l} \exp(-\alpha k^2 t) \int_0^l f(y) \sin k\omega y\, dy,$$

$$v_k(t) = \frac{2\alpha k}{\pi} \int_0^t \exp(-\alpha k^2 s)\,(g_1(t-s) - (-1)^k g_2(t-s))\, ds, \tag{5}$$

$$\omega = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha = (a\omega)^2, \quad k \in N.$$

Ряды $U(x, t)$, $V(x, t)$ в (4) сходятся при $x \in (0, l)$, $t \geq 0$ и сумма $U(x, t) + V(x, t)$ в этой области является решением уравнения (1), а краевые условия (3) выполняются как предельные, т. е.

Белорусский национальный технический университет. 220013, г. Минск, просп. Независимости, 65; э-почта: pglasy@yandex.ru. Поступила 24.02.2011.

$$\lim_{x\to+0}\ (U(x,t)+V(x,t))=g_1(t)\ ,\quad \lim_{x\to l-0}\ (U(x,t)+V(x,t))=g_2(t)\ ,\quad t\ge 0\ .$$

Приближенное вычисление температуры стержня по формуле (4) связано с немалыми трудностями, так как, во-первых, приходится вычислять интегралы в коэффициентах (5), что само по себе задача непростая, и, во-вторых, оценка допускаемой при вычислении рядов $U(x, t)$, $V(x, t)$ погрешности весьма затруднительна.

В настоящей работе предлагается другой способ решения поставленной задачи, основанный на представлении температуры с помощью специальной функции, являющейся быстро сходящимся степенным рядом с экспоненциальными по времени коэффициентами. Рассмотрим ряд

$$\Psi_r(\lambda,t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda k^2 t)\,k^{-r}z^k\ , \tag{6}$$

зависящий от действительных переменных r, $\lambda > 0$, $t \ge 0$ и комплексного аргумента z, который мы будем называть *пси-функцией*. Данный ряд при $t = 0$ сходится абсолютно в круге $|z| < 1$, а при $t > 0$ он сходится абсолютно во всей комплексной плоскости. На единичной окружности $z = \exp(i\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Psi_r(\lambda,t,\exp(i\varphi))=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda k^2 t)\,k^{-r}\cos k\varphi+i\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda k^2 t)\,k^{-r}\sin k\varphi$$

и, значит:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda k^2 t)\,k^{-r}\cos k\varphi=\operatorname{Re}\Psi_r(\lambda,t,\exp(i\varphi))\ ,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda k^2 t)\,k^{-r}\sin k\varphi=\operatorname{Im}\Psi_r(\lambda,t,\exp(i\varphi))\ . \tag{7}$$

Отыщем оценку для пси-функции, которую мы будем использовать в дальнейшем. Если $r \ge 0$, $\exp(-\lambda t)|z| < 1$, то

$$|\Psi_r(\lambda,t,z)|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\exp(-\lambda k^2 t)\,k^{-r}z^k|\le\sum_{k=1}^{\infty}(\exp(-\lambda t)\,|z|)^k=\frac{|z|}{\exp(\lambda t)-|z|}$$

и, таким образом, на единичной окружности

$$|\Psi_r(\lambda,t,\exp(i\varphi))|\le\frac{1}{\exp(\lambda t)-1}\ ,\quad r\ge 0\ ,\quad t>0\ . \tag{8}$$

Выразим теперь решение (4) поставленной выше смешанной задачи через пси-функцию. Действительно:

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\exp(-\alpha k^2 t)\int_0^l f(y)\sin k\omega y\,dy\right)\sin k\omega x=$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l f(y)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\alpha k^2 t)\cos k\omega(y-x)-\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\alpha k^2 t)\cos k\omega(y+x)\right)dy\ ,$$

$$V(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\alpha k}{\pi}\int_0^t\exp(-\alpha k^2 s)\,(g_1(t-s)-(-1)^k g_2(t-s))\,ds\right)\sin k\omega x=$$

$$=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^t\left(g_1(t-s)\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\alpha k^2 s)\,k\sin k\omega x-g_2(t-s)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\exp(-\alpha k^2 s)\,k\sin k\omega x\right)ds\ .$$

Отсюда, учитывая (7), получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}U(x,t)&=\frac{1}{l}\int_0^l f(y)\operatorname{Re}(\Psi_0(\alpha,t,\exp(i\omega(y-x)))-\Psi_0(\alpha,t,\exp(i\omega(y+x))))\,dy\ ,\\ V(x,t)&=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^t\operatorname{Im}(g_1(t-s)\,\Psi_{-1}(\alpha,s,\exp(i\omega x))-g_2(t-s)\,\Psi_{-1}(\alpha,s,-\exp(i\omega x)))\,ds\ .\end{aligned} \tag{9}$$

Займемся теперь аппроксимацией функций (9). Для вычисления $U(x, t)$ разобьем отрезок $[0, l]$ на n равных частей точками $x_m = mh$, $m = \overline{0, n}$, $h = \dfrac{1}{n}$, и заменим под знаком интеграла в правой части первой из формул (9) на каждом из частичных отрезков $[x_{m-1}, x_m]$, $m = \overline{1, n}$, функцию $f(y)$ ее значением в средней точке отрезка. В результате интегрирования получим:

$$U(x,t) \approx \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\int_{x_{m-1}}^{x_m} f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\mathrm{Re}\,(\Psi_0(\alpha, t, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_0(\alpha, t, \exp(i\omega(y+x))))\,dy =$$

$$= \frac{1}{l\omega}\sum_{m=1}^{n} f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\alpha k^2 t)\,k^{-1}\sin k\omega(y-x) - \sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\alpha k^2 t)\,k^{-1}\sin k\omega(y+x)\right)\Bigg|_{x_{m-1}}^{x_m} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n} f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\mathrm{Im}\,(\Psi_1(\alpha, t, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_1(\alpha, t, \exp(i\omega(y+x))))\Bigg|_{x_{m-1}}^{x_m}.$$

Таким образом:

$$U(x,t) \approx U_n(x,t), \tag{10}$$

где

$$U_n(x,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n} f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\mathrm{Im}\,(\Psi_1(\alpha, t, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_1(\alpha, t, \exp(i\omega(y+x))))\Bigg|_{x_{m-1}}^{x_m}. \tag{11}$$

Оценим погрешность формулы (10). Поскольку

$$U(x,t) - U_n(x,t) = \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\int_{x_{m-1}}^{x_m}\left(f(y) - f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\right)\mathrm{Re}\,(\Psi_0(\alpha, t, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_0(\alpha, t, \exp(i\omega(y+x))))\,dy,$$

то, принимая во внимание условие Липшица для функции $f(x)$ и оценку (8) для пси-функции $\Psi_0(\alpha, t, z)$ на единичной окружности, получим при $x \in [0, l]$ и $t > 0$:

$$|U(x,t) - U_n(x,t)| \le \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\int_{x_{m-1}}^{x_m}\left|f(y) - f\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}\right)\right| \times$$

$$\times\,|\Psi_0(\alpha, t, \exp(i\omega(y-x))) - \Psi_0(\alpha, t, \exp(i\omega(y+x)))|\,dy \le$$

$$\le \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\int_{x_{m-1}}^{x_m} L\left|y - x_{m-1} - \frac{h}{2}\right|\frac{2}{\exp(\alpha t)-1}\,dy \le \frac{2L}{(\exp(\alpha t)-1)\,l}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{m-1}}^{x_m}\frac{h}{2}\,dy = \frac{Lh}{\exp(\alpha t)-1}.$$

Следовательно, равномерно по $x \in [0, l]$ при $t > 0$

$$|U(x,t) - U_n(x,t)| \le \frac{Lh}{\exp(\alpha t)-1} \tag{12}$$

и, таким образом, приближенная формула (10) имеет первый порядок точности относительно шага h. Кроме того, как следует из (12), полученная оценка равномерна также и по времени t на полуоси $[t_0, +\infty]$, $t_0 > 0$, и равномерна по $x \in [0, l]$:

$$\lim_{t \to +\infty}(U(x,t) - U_n(x,t)) = 0.$$

Прежде чем приступить к приближенному вычислению функции $V(x, t)$, найдем одну полезную оценку для пси-функции $\Psi_1(\alpha, t, \exp(i\omega x))$. Обозначим

$$a_k(t,s) = \frac{1 - \exp(-\alpha k^2(t-s))}{k}, \quad b_k(x,s) = \exp(-\alpha k^2 s)\sin k\omega x, \quad k \in N.$$

Тогда

$$\operatorname{Im} \Psi_1 (\alpha, z, \exp (i\omega x)) \Big|_s^t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha k^2 t) - \exp(-\alpha k^2 s)}{k} \sin k\omega x = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k (t, s)\, b_k (x, s)\,. \tag{13}$$

Лемма. *Выберем и зафиксируем произвольное $l_0 \in (0, l)$. Тогда при всех $t \geq s \geq 0$ и $x \in [l_0, l]$ ряд (13) сходится равномерно и имеет место неравенство*

$$\left| \operatorname{Im} \Psi_1 (\alpha, z, \exp (i\omega x)) \Big|_s^t \right| = \left| \operatorname{Im} \Psi_1 (\alpha, t, \exp (i\omega x)) - \operatorname{Im} \Psi_1 (\alpha, s, \exp (i\omega x)) \right| \leq 2a\omega M\sqrt{t-s}\,, \tag{14}$$

где $M = \left(\sin \dfrac{\omega l_0}{2} \right)^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим неотрицательную функцию

$$\varphi_k (y) = \frac{1 - \exp(-\alpha k^2 y)}{k}, \quad k \in N, \quad y \geq 0\,.$$

Для нее прежде всего заметим, что $\varphi_k(y) \leq \dfrac{1}{k}$ и, значит:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k (y) = 0 \ \text{ равномерно по } \ y \geq 0\,. \tag{15}$$

Далее, обозначив $\alpha k^2 y = v$, получим

$$\varphi_k (y) = a\omega \frac{1 - \exp(-v)}{\sqrt{v}} \sqrt{y}\,. \tag{16}$$

Производная функции $\gamma(v) = \dfrac{1 - \exp(-v)}{\sqrt{v}}$ равна $\gamma'(v) = \dfrac{\exp(-v)(2v+1) - 1}{2v\sqrt{v}}$ и если $\gamma'(1) > 0$, $\gamma'(2) < 0$, то точка максимума v_0 данной функции принадлежит интервалу (1, 2). Очевидно также, что во всех точках этого интервала $\gamma(v) < 1$. Следовательно:

$$\varphi_k (y) = a\omega\gamma(v)\sqrt{y} \leq a\omega\sqrt{y}\,, \quad k \in N, \quad y \leq 0\,,$$

и, поскольку $a_k(t, s) = \varphi_k(t - s)$, $k \in N$:

$$a_k (t, s) \leq a\omega\sqrt{t-s}\,, \quad k \in N\,. \tag{17}$$

Из приведенного выше исследования функции $\gamma(v)$ и (16) следует, что при фиксированных t и s последовательность $a_k(t, s)$, $k \in N$, возрастает, если $\alpha k^2(t - s) \leq v_0$, и убывает, если $\alpha k^2(t - s) > v_0$. В соответствии с (15) эта последовательность равномерно бесконечно мала при всех $t \geq s \geq 0$. Далее, учитывая, что последовательность $\exp(-\alpha k^2 s)$, $k \in N$, $s \geq 0$, не возрастает и

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\omega x = \frac{\cos \dfrac{\omega x}{2} - \cos \dfrac{(2n+1)\,\omega x}{2}}{2 \sin \dfrac{\omega x}{2}} \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} \sin k\omega x \right| \leq M\,, \quad n \in N\,, \quad x \in [l_0, l]\,,$$

и учитывая [3, стр. 308], заключаем, что при любом натуральном n и $x \in [l_0, l]$, $s \geq 0$

$$\left| B_n (x, s) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k (x, s) \right| \leq M \exp(-\alpha s) \leq M\,. \tag{18}$$

Учитывая (18) и свойства последовательности $a_k(t, s)$, $k \in N$, установленные выше, можем утверждать, что ряд (13) по признаку Дирихле (Dirichlet) [3, стр. 432] сходится равномерно при $t \geq s \geq 0$ и $x \in [l_0, l]$.

Для доказательства оценки (14) применим преобразование Абеля (Abel) [3, стр. 307] к частичной сумме ряда (13):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (t, s)\, b_k (x, s) = a_n (t, s)\, B_n (x, s) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k (t, s) - a_{k+1} (t, s))\, B_k (x, s)\,.$$

Отсюда, использовав (18), получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t, s)\, b_k(x, s)\right| \le \left(a_n(t, s) + \sum_{k=1}^{n-1} \left|a_k(t, s) - a_{k+1}(t, s)\right|\right) M .$$

Обозначим через k_0 максимальное из натуральных чисел k, для которых $\alpha k^2(t-s) \le \nu_0$. Тогда, раскрыв модули в предыдущем неравенстве, можем переписать его в виде

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t, s)\, b_k(x, s)\right| \le \left(a_{k_0}(t, s) + a_{k_0+1}(t, s) + \left|a_{k_0}(t, s) - a_{k_0+1}(t, s)\right| - a_1(t, s)\right) M ,$$

откуда $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t, s) b_k(x, s)\right| \le 2\max\left\{a_{k_0}(t, s), a_{k_0+1}(t, s)\right\} M$ и, следовательно, ввиду (17) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t, s) b_k(x, s)\right| \le$ $\le 2a\omega M\sqrt{t-s}$, что при $n \to \infty$ и доказывает неравенство (14), а вместе с ним и лемму.

Найдем аппроксимацию функции $V(x, t)$. Для этого зафиксируем $t > 0$ и разобьем отрезок $[0, t]$ на n равны частей точками $t_m = m\tau$, $m = \overline{0, n}$, $\tau = t/n$. Заменим далее под знаком интеграла в правой части второй из формул (9) на каждом из частичных отрезков $[t_{m-1}, t_m]$, $m = \overline{1, n}$, функции $g_1(t-s)$ и $g_2(t-s)$ их значениями в средней точке отрезка. В результате после несложного интегрирования придем к приближенному равенству

$$V(x, t) \approx \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathrm{Im}\left(g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right) \Psi_{-1}(\alpha, s, \exp(i\omega x)) - g_2\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right) \Psi_{-1}(\alpha, s, -\exp(i\omega x))\right) ds =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{Im}\left(g_2\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right) \Psi_1(\alpha, s, -\exp(i\omega x)) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right) \Psi_1(\alpha, s, \exp(i\omega x))\right) \Bigg|_{t_{m-1}}^{t_m}$$

и, следовательно:

$$V(x, t) \approx V_n(x, t) , \tag{19}$$

где

$$V_n(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{Im}\left(g_2\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right) \Psi_1(\alpha, s, -\exp(i\omega x)) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right) \Psi_1(\alpha, s, \exp(i\omega x))\right) \Bigg|_{t_{m-1}}^{t_m} . \tag{20}$$

Проведем оценку погрешности приближенной формулы (19) при $x > 0$ и $t > 0$, учитывая вторую из формул (9)

$$V(x, t) - V_n(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \left(I_m^{(1)} - I_m^{(2)}\right) ,$$

где

$$I_m^{(1)} = \alpha \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left(g_1(t-s) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right) \mathrm{Im}\, \Psi_{-1}(\alpha, s, \exp(i\omega x))\, ds ,$$

$$I_m^{(2)} = \alpha \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left(g_2(t-s) - g_2\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right) \mathrm{Im}\, \Psi_{-1}(\alpha, s, -\exp(i\omega x))\, ds .$$

Для каждого из интегралов $I_m^{(1)}$, $I_m^{(2)}$ используем вторую теорему о среднем значении (формулу Бонне (Bonnet)) [3, стр. 119], разбив, если потребуется, отрезок $[t_{m-1}, t_m]$ на отрезки, внутри каждого из которых функции $g_1(t-s)$, $g_2(t-s)$ монотонны по аргументу s. Для простоты предположим, что эти функции монотонны на всем отрезке $[t_{m-1}, t_m]$. В результате после интегрирования получим

$$I_m^{(1)} = \alpha\left(g_1(t - t_{m-1}) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right) \int_{t_{m-1}}^{s_m} \mathrm{Im}\, \Psi_{-1}(\alpha, s, \exp(i\omega x))\, ds +$$

$$+ \alpha\left(g_1(t - t_m) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right) \int_{s_m}^{t_m} \mathrm{Im}\, \Psi_{-1}(\alpha, s, \exp(i\omega x))\, ds =$$

$$= -\left(g_1(t-t_{m-1}) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right) \operatorname{Im} \Psi_1(\alpha, s, \exp(i\omega x)) \Big|_{t_{m-1}}^{s_m} -$$

$$-\left(g_1(t-t_m) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right) \operatorname{Im} \Psi_1(\alpha, s, \exp(i\omega x)) \Big|_{s_m}^{t_m},$$

где $s_m \in [t_{m-1}, t_m]$. Отсюда, учитывая то обстоятельство, что функции $g_1(t)$ удовлетворяют условию Липшица, и используя неравенство (14), в котором $l_0 = x$, находим

$$|I_m^{(1)}| \le \left|g_1(t-t_{m-1}) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right| \left|\operatorname{Im} \Psi_1(\alpha, s, \exp(i\omega x)) \Big|_{t_{m-1}}^{s_m}\right| +$$

$$+ \left|g_1(t-t_m) - g_1\left(t - t_{m-1} - \frac{\tau}{2}\right)\right| \left|\operatorname{Im} \Psi_1(\alpha, s, \exp(i\omega x)) \Big|_{s_m}^{t_m}\right| \le$$

$$\le L_1 \frac{\tau}{2} 2a\omega M\sqrt{s_m - t_{m-1}} + L_1 \frac{\tau}{2} 2a\omega M\sqrt{t_m - s_m} \le 2a\omega L_1 M\tau\sqrt{\tau}.$$

Совершенно аналогично $|I_m^{(2)}| \le 2a\omega L_2 M\tau\sqrt{\tau}$ и, следовательно:

$$|V(x,t) - V_n(x,t)| = \frac{2}{\pi}\left|\sum_{m=1}^{n} (I_m^{(1)} - I_m^{(2)})\right| \le \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n} \left(|I_m^{(1)}| + |I_m^{(2)}|\right) \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n} 2a\omega (L_1 + L_2) M\tau\sqrt{\tau} = 4al^{-1}(L_1 + L_2) Mt\sqrt{\tau}.$$

Таким образом, имеет место равномерная по $x \in [l_0, l]$ оценка

$$|V(x,t) - V_n(x,t)| \le 4al^{-1}(L_1 + L_2) Mt\sqrt{\tau} \tag{21}$$

и, значит, приближенная формула (19) имеет порядок точности $1/2$ относительно шага τ.

Сводя воедино все проведенные выше исследования, можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *При сделанных предположениях относительно функций $f(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ точное решение смешанной задачи (2), (3) для уравнения теплопроводности (1) выражается через пси-функцию (6) по формуле*

$$T(x,t) = U(x,t) + V(x,t),$$

где функции $U(x, t)$, $V(x, t)$ представляются формулами (9), а приближенное — по формуле

$$T_{n_1 n_2}(x,t) = U_{n_1}(x,t) + V_{n_2}(x,t), \tag{22}$$

в которой функции $U_{n_1}(x, t)$ и $V_{n_2}(x, t)$ вычисляются по формулам (11) и (20) соответственно. Из (12) и (21) следует, что допускаемая при этом погрешность вычисления для произвольных фиксированных $l_0 \in (0, l)$ и $t > 0$ равномерна по $x \in [l_0, l]$ и не превышает величины

$$\frac{Lh}{\exp(\alpha t) - 1} + 4al^{-1}(L_1 + L_2) Mt\sqrt{\tau},$$

где $h = l/n_1$, $\tau = t/n_2$ и, таким образом, имеет порядок $O(h + \sqrt{\tau})$.

Пример. Для уравнения теплопроводности

$$\partial_t T = \frac{1}{25}\partial_{xx} T$$

рассмотрим смешанную задачу

$$T(x,0) = 3\sin\sqrt{2x} - 5\cos 2\pi x, \quad x \in [0,1],$$

$$T(0,t) = -5\exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{25}\right), \quad T(1,t) = 3\exp\left(-\frac{2t}{25}\right)\sin\sqrt{2} - 5\exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{25}\right), \quad t \ge 0.$$

Точным решением данной задачи является функция

$$T(x,t) = 3\exp\left(-\frac{2t}{25}\right)\sin\sqrt{2}\,x - 5\exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{25}\right)\cos 2\pi x.$$

Тестирование приближенного решения этой задачи по формуле (22), проведенное в среде компьютерной алгебры Mathematica, показало, что уже при $n_1 = n_2 = 50$ во всех внутренних узлах сетки $x_k = 0.1k$, $k = \overline{0, 10}$; $t_j = j$, $j = \overline{0, 10}$, точное решение отличается от приближенного по абсолютной величине меньше, чем на 10^{-2}.

Заключение. Используя специальную пси-функцию, являющуюся быстросходящимся степенным рядом с экспоненциальными по времени коэффициентами, сконструировали новую эффективную приближенную формулу для решения смешанной задачи теории теплопроводности для стержня. Получена также оценка погрешности приближенной формулы.

Обозначения

a^2 — коэффициент температуропроводности, м^2/с; h — шаг разбиения по длине стержня; i — мнимая единица; Im — мнимая часть комплексного числа; l — длина стержня, м; L, L_1, L_2 — постоянные из условия Липшица; M — постоянная; N — множество натуральных чисел; Re — действительная часть комплексного числа; s, t, v, x, y — действительные переменные; v_0 — точка максимума функции; z — комплексная переменная; α, ω — постоянные; γ — функция; λ — положительная переменная пси-функции; τ — шаг разбиения по времени; Ψ_r, Ψ_{-1}, Ψ_0, Ψ_1 — пси-функции.

Литература

1. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
2. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: ГИФМЛ, 1962.
3. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ГИФМЛ, 1962. Т. 2.