ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ

(12)

РЕСПУБЛИКА БЕЛАРУСЬ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

(19) **BY** (11) **6758**

(13) **C1**

(51)[7] **G 01V 7/00**

(54) СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

(21) Номер заявки: a 20010235
(22) 2001.03.13
(46) 2005.03.30

(71) Заявитель: Белорусский национальный технический университет (BY)
(72) Автор: Джилавдари Игорь Захарович (BY)
(73) Патентообладатель: Белорусский национальный технический университет (BY)

(57)

1. Способ измерения ускорения свободного падения, включающий возбуждение свободных колебаний физического маятника, **отличающийся** тем, что измеряют время τ, за которое маятник совершает определенное число N полных колебаний, а также начальное, конечное и промежуточные значения амплитуд колебаний маятника, полагая их равными значениям α_n огибающей, где n - заданные числа прохождения маятником положения равновесия, удовлетворяющие соотношению $n \le 2N$, определяют соответствующие значениям огибающей значения моментов времени t_n по формуле:

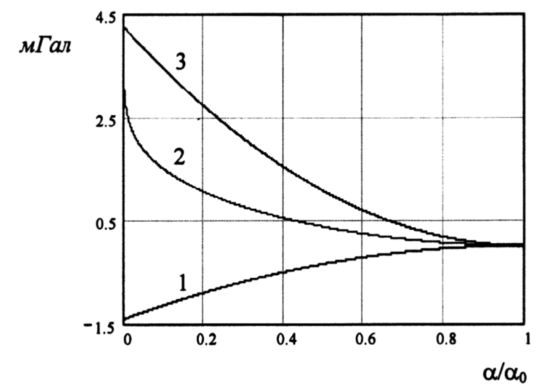
$$t_n = \frac{\tau}{2N} n,$$

по полученным значениям определяют огибающую $\alpha(t)$ как функцию времени, а ускорение свободного падения g определяют по формуле:

$$g = 4\pi^2 \frac{N^2 \ell}{\tau^2 (1-Q)^2},$$

где ℓ - приведенная длина маятника;

$$Q = \frac{1}{16\tau} \int_0^\tau \alpha^2(t) dt.$$



Фиг. 1

BY 6758 C1

2. Способ по п. 1, **отличающийся** тем, что огибающую $\alpha(t)$ определяют путем аппроксимации зависимости значений α_n от времени аналитической функцией, получаемой из решения дифференциального уравнения:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = \frac{M_{тр}(\dot{\varphi})}{I},$$

где φ - отклонение маятника от положения равновесия;

ω_0 - собственная циклическая частота;

$M_{mp}(\dot{\varphi})$ - момент силы трения;

I - момент инерции маятника,

при заданной зависимости $M_{mp}(\dot{\varphi})$ с помощью метода наименьших квадратов.

3. Способ по п. 1, **отличающийся** тем, что огибающую $\alpha(t)$ определяют путем аппроксимации зависимости значений α_n от времени аналитической функцией, получаемой подбором с помощью метода наименьших квадратов.

4. Способ по п. 2 или 3, **отличающийся** тем, что погрешность определения ускорения свободного падения δg вычисляют по формуле:

$$\delta g \approx 2g\delta Q,$$

где $\delta Q = \frac{\delta\overline{\alpha}}{8\tau}\int_0^\tau \alpha(t)dt$;

$\delta\overline{\alpha}$ - среднее квадратичное отклонение измеренных амплитуд от огибающей $\alpha(t)$.

(56)
Юзефович А. П., Огородова Л. В. Гравиметрия. -М.: Недра, 1980. - С. 62-65.
SU 1463007 A1, 1993.
SU 1827660 A1, 1993.
RU 2096813 C1, 1997.

Изобретение относится к области измерительной техники, в частности области измерений параметров гравитационного поля Земли и может быть использовано при относительных и абсолютных измерениях ускорения свободного падения.

Известен способ относительного измерения ускорения свободного падения [1] путем измерения деформаций упругих подвесов, удерживающих пробную массу, под действием этой силы. Основной недостаток этого способа состоит в том, что любые упругие подвесы, независимо от их конструкций, подвержены температурному, усталостному и временному дрейфу, в результате которых эти подвесы нуждаются в регулярной калибровке в геодезических пунктах с известным абсолютным значением силы тяжести. После такой калибровки приборы могут сохранять свою потенциальную точность в лучшем случае всего несколько часов.

Известен способ измерения ускорения свободного падения [2, 3], в котором возбуждают свободные колебания физического маятника (в дальнейшем "маятник") и описывают процесс колебаний дифференциальным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0, \qquad (1)$$

где φ - отклонение маятника от положения равновесия;

ω_0 - собственная циклическая частота,

причем ω_0 выражается через изохронный период колебаний T_0 по формуле

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \qquad (2)$$

Изохронный период T_0 - это период колебаний идеального автономного маятника с бесконечно малой амплитудой. Он связан с ускорением свободного падения g по известной формуле

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \qquad (3)$$

где ℓ - приведенная длина маятника.

Решение уравнения (1), т.е. зависимость $\varphi(t)$ в данном способе аппроксимируют формулой

$$\varphi(t) = \alpha \sin\psi(t), \qquad (4)$$

где α = const - амплитуда;

и фаза колебаний

$$\psi(t) = \frac{2\pi}{T}, \qquad (5)$$

где T - период колебаний.

Период T зависит от амплитуды α согласно формулы

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right) \qquad (6)$$

Таким образом, формулы (3) и (6) являются основными формулами в данном способе измерений. Они используются как при абсолютном [2], так и при относительном [3] измерениях ускорения g. Из них следует, что для определения g достаточно измерить α, l и T.

Однако на опыте амплитуда α уменьшается в процессе колебаний вследствие наличия трения и период T также изменяется. Поэтому в этом способе период T заменяют средним периодом, который определяют по формуле

$$T_{cp} = \frac{\tau}{N}, \qquad (7)$$

где τ - время колебаний, в течение которого маятник совершает N полных колебаний, и связь между T_0 и T, учитывая, что $\alpha \ll 1$, записывают в виде

$$T_0 = T_{cp}\left(1 - \frac{1}{16} < \alpha >_a^2\right) = T_{cp}(1 - q), \qquad (8)$$

где q - так называемая в гравиметрии "поправка к периоду за амплитуду";

$<\alpha>_a$ - среднее арифметическое значение амплитуды.

На опыте поправку q определяют, измеряя начальное α_0 и конечное αk значения амплитуды колебаний:

$$q = \frac{1}{16} < \alpha >_a^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_k}{2}\right)^2. \qquad (9)$$

Время колебаний τ определяют, засекая моменты прохождения маятником положения равновесия, т.е. когда в формуле (4) $\varphi = 0$.

Амплитуды колебаний вычисляют, измеряя время τ_1 прохождения маятником малого углового интервала $\Delta\varphi$, середина которого совпадает с положением равновесия, по формуле

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2\sin\frac{\pi}{T}\tau_1} \approx \frac{\Delta\varphi}{2\sin\frac{\pi}{T_{cp}}\tau_1}. \qquad (10)$$

При абсолютных измерениях величины g [2], помимо измерения $T_{ср}$, измеряют также и приведенную длину ℓ, используя в качестве физического маятника оборотный маятник.

При относительных измерениях [3], т.е. при измерениях изменения Δg величины g между двумя геодезическими пунктами, измерять величину ℓ не требуется. Поэтому потенциальная точность относительных измерений существенно выше, чем при абсолютных измерениях, поскольку здесь точность ограничена лишь нестабильностью параметров маятника, в том числе нестабильностью затухания амплитуды.

Основные недостатки данного способа состоят в низкой точности и сложности реализации. Покажем это для случая относительных измерений ускорения свободного падения g, где требования к погрешности измерений наиболее высокие.

Из формул (3) и (8) следует, что Δg связано с изменением Δq поправки q равенством

$$\frac{\Delta g}{g} \approx 2\Delta g. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что погрешность δq измерения величины Δq или ее нестабильность должна удовлетворять условию

$$\delta q << \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|. \qquad (12)$$

Лучшими маятниковыми относительными гравиметрами являются гравиметры типа "Агат". Считается, что в этих гравиметрах минимальная величина $|\Delta g| = 4\cdot 10^{-2}$ мГал (1 мГал = 10^{-6} см/с^2). Это соответствует величине $|\Delta g/g| = 4\cdot 10^{-8}$, поскольку $g \approx 10^6$ мГал. Из формулы (12) следует, что для регистрации такого изменения g величина Δq должна быть стабильна или измерена с погрешностью не более 10^{-8}. В данном способе требование (12) к величине δq пытаются уменьшить, проводя измерения при одной и той же средней амплитуде $<\alpha>_a$ [4]. Однако здесь требование $\delta q < 10^{-8}$ не может быть выполнено.

Это объясняется тем, что:

математическая модель маятника (1), (4) - (6) не учитывает наличия трения в системе.

При уровне требования к допустимой погрешности измерений g порядка $4\cdot 10^{-8}$, это приводит к тому, что простой замены формулы (6) на формулы (8) - (9) в этом случае оказывается недостаточным;

в формуле (4) амплитуду α считают постоянной, а в противоречащей ей формуле (9) не учитывается характер затухания амплитуды, обусловленной трением. Оказывается, что вид закона затухания амплитуд, т.е. вид зависимости $\alpha(t)$, который в прототипе не может быть установлен, существенно влияет на поправку q, проявляя себя в виде систематической погрешности измерений (фиг. 1);

трение нестабильно. Оно может заметно изменяться, как в процессе одной серии колебаний, так и в промежутке между сериями. Поэтому ожидать высокой стабильности q или рассчитать влияние трения на величину q с высокой точностью нельзя. Эта нестабильность проявляет себя в виде случайной погрешности измерений;

допустимая погрешность $\delta\varphi$ определения границ интервала $\Delta\varphi$ в формуле (10) должна удовлетворять условию

$$\delta\varphi \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta\varphi}{\alpha}\delta\alpha, \qquad (13)$$

где $\delta\alpha$ - допустимая погрешность измерения амплитуды колебаний.

В свою очередь, из формулы (9) при условии, что погрешности измерений амплитуд α_0 и αk одинаковы и равны $\delta\alpha$, следует, что погрешность δq измерения q связана с погрешностью $\delta\alpha$ соотношением

$$\delta q = \frac{1}{4} < \alpha >_a \delta\alpha. \qquad (14)$$

Отсюда и из (12), (13) получим требования к допустимым погрешностям $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$:

$$\delta\alpha << \frac{2}{<\alpha>_a}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|; \qquad (15)$$

$$\delta\varphi << \frac{\Delta\varphi}{\alpha}\frac{1}{<\alpha>_a}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|. \qquad (16)$$

Для облегчения требований (15) и (16) в данном способе приходится существенно ограничивать начальное отклонение маятника α_0. В частности, при $\left|\frac{\Delta g}{g}\right| \approx 10^{-8}$ (стандартное требование для современных относительных маятниковых гравиметров) из (15) найдем, что даже при $\alpha = 1$ угл. град. $\approx 0{,}018$ радиан, погрешность $\delta\alpha << 0{,}46$ угл. с. В свою очередь, из (16) при $\frac{\Delta\varphi}{\alpha} = 0{,}5$ имеем $\delta\varphi << 0{,}23$ угл. с. Реально оба требования выполнить очень сложно.

Влияние трения в данном способе пытаются устранить особым устройством опоры маятника, вакуумированием пространства, в котором качается маятник, и проведением измерений при малых, менее одного градуса, амплитудах колебаний. Это также усложняет реализацию способа. Однако даже такие меры оказываются не достаточными для компенсации зависимости периода $T_{ср}$ от амплитуды [4].

Задачей изобретения является увеличение точности и упрощение реализации маятникового способа измерений.

Решение этой задачи обеспечивается тем, что в известном способе измерения ускорения свободного падения, включающем возбуждение свободных колебаний физического маятника, измеряют время τ, за которое маятник совершает определенное число N полных колебаний, а также начальное, конечное и промежуточные значения амплитуд колебаний маятника, полагая их равными значениям α_n огибающей, где n - заданные числа прохождения маятником положения равновесия, удовлетворяющие соотношению $n \le 2N$, определяют соответствующие значениям огибающей значения моментов времени t_n по формуле

$$t_n = \frac{\tau}{2N} n,$$

и по полученным значениям определяют огибающую $\alpha(t)$ как функцию времени, а ускорение свободного падения определяют по формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{N^2 \ell}{\tau^2 (1-Q)^2},$$

где ℓ - приведенная длина маятника;

$$Q = \frac{1}{16\tau}\int_0^\tau \alpha^2(t)dt.$$

В частности, в предлагаемом способе огибающую a(t) определяют путем аппроксимации зависимости измеренных значений α_n от времени аналитической функцией, получаемой из решения дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = \frac{M_{тр}(\dot{\varphi})}{I},$$

где φ - отклонение маятника от положения равновесия;

ω_0 - собственная циклическая частота;

$M_{тр}(\dot{\varphi})$ - момент силы трения;

I - момент инерции маятника.

В частности, в предлагаемом способе огибающую $\alpha(t)$ определяют путем аппроксимации зависимости измеренных значений α_n от времени аналитической функцией, получаемой подбором, с помощью метода наименьших квадратов.

В предлагаемом способе погрешность определения ускорения свободного падения δg вычисляют по формуле

$$\delta g \approx 2g\delta Q,$$

где $\delta Q = \dfrac{\delta\overline{\alpha}}{8\tau}\int_0^\tau \alpha(t)dt;$

$\delta\overline{\alpha}$ - среднее квадратичное отклонение измеренных амплитуд от огибающей $\alpha(t)$.

Измерение значений огибающей колебаний и вычисление соответствующих им моментов времени позволяют определить вид функции $\alpha(t)$ в каждом проводящемся опыте и даже в реальном времени. В прототипе эта функция не может быть определена. В свою очередь, это позволяет вычислить поправку Q к конечному значению фазы колебаний и, как следствие, существенно повысить точность вычисления ускорения свободного падения, поскольку Q также является и поправкой к искомой величине ускорения g. Это нашло свое отражение в формуле (21). Эта формула вытекает из математической модели (17)-(19) предлагаемого способа.

В принципе, математическая модель (17)-(19) хорошо известна в теории колебаний. Поэтому она и приведена в ограничительной части сущности изобретения. Однако строгий анализ ее и применение вытекающих из него выводов в проблеме измерений ускорения свободного падения с высокой точностью до сих пор не проводились.

Отметим также, что при наличии трения из формулы (10) определяются не амплитуды колебаний, а именно значения огибающей в моменты прохождения маятником положения равновесия. Это различие незначительно при малом трении, но должно учитываться при относительно большом трении.

Использование формулы (20) для вычисления моментов времени t_n делает эту процедуру весьма простой. Эта возможность появляется благодаря тому, что, как ниже будет показано, в предлагаемом способе нет необходимости прибегать к такому понятию как период колебаний, а точности определения значений огибающей $\alpha(t)$ в эти моменты оказывается достаточной. Значения чисел n в предлагаемом способе задают до опыта, например, 0; 5; 10;...

Полное число значений огибающей, которое может быть измерено в предлагаемом способе, равно числу прохождений маятником положения равновесия. Если N - число фиксируемых полных колебаний, то число прохождений положения равновесия равно 2N. В данном способе можно измерять не все значения огибающей, а лишь их определенное число $Na < 2N$, где $Na = \max n$. Например, можно измерять каждое десятое значение огибающей, соответствующее каждому десятому прохождению маятником положения равновесия. Поэтому здесь $Na \leq 2N$. Число Na выбирают из соображений достижения необходимой точности вычисления поправки Q.

В отличие от прототипа, поправка Q - это поправка за амплитуду не к среднему периоду, а к конечной фазе колебаний. Ниже будет показано, что необходимость введения именно этой поправки обусловлено самой процедурой измерения.

Аналитический вид поправки Q зависит от того, с какой точностью решают дифференциальное уравнение (17). В частном случае, когда решение ищут в первом приближении асимптотической теории нелинейных колебаний (наиболее точной теории из существующих), т.е. в виде (19), поправка дается формулой (22). Она достаточно просто и однозначно вытекает из этого решения. Это будет показано ниже.

Из формулы (22) явно следует, что поправка Q зависит от вида функции $\alpha(t)$. Данная особенность позволяет правильно учесть влияние характера трения и исключить систематическую погрешность измерений, связанную с этим трением. Кроме того, это же позволяет исключить случайные погрешности измерений, связанные с изменением трения в маятнике в каждой серии колебаний и между этими сериями, т.к. всякое изменение трения отражается на функции $\alpha(t)$.

Сказанное иллюстрируется на фиг. 1. Здесь представлена зависимость разности Q-q от конечной амплитуды колебаний маятника, выраженная в мГал и вычисленная при начальной амплитуде $\alpha_0 = 40$ угл. мин. Такую начальную амплитуду реализуют в гравиметрах "Агат". В рассмотренных ниже случаях эта разность может быть вычислена аналитически. Она зависит только от значения амплитуды и не зависит от коэффициента трения. Здесь представлены случаи действия кулонова трения ($M_{тр}$ в (17) не зависит от величины угловой скорости маятника) - кривая 1, случай действия линейного трения ($M_{тр}$ в (17) пропорционален угловой скорости маятника) - кривая 2 и случай действия квадратичного трения ($M_{тр}$ в (17) пропорционален квадрату угловой скорости маятника) - кривая 3. Из фиг. 1 видно, что указанная разность может существенно превышать расчетную погрешность, равную 0,01 мГал.

Возможность учета влияния характера трения в величине Q позволяет также существенно упростить реализацию предлагаемого способа измерений, поскольку открывает возможность проводить измерения без вакуумирования рабочего объема прибора. Дополнительно это же позволяет исключить наличие вибраций основания в той степени, в какой эти вибрации влияют на характер затухания колебаний маятника.

Измерение дополнительных значений огибающей в предлагаемом способе позволяет существенно облегчить требование к погрешности подобных измерений по сравнению с прототипом. Ниже будет показано, что это требование имеет вид

$$\delta\alpha << \frac{4\sqrt{N_a - 1 - m}}{<\alpha>}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|, \qquad (24)$$

где Na - число измеренных значений огибающей;

m - число степеней свободы статистического ансамбля, образованного этими значениями (обычно $m \le 3$).

Если Na >> 1, то, сравнив эту формулу с формулами (13) и (15), увидим, что требования к $\delta\alpha$ и к $\delta\varphi$ облегчаются, примерно, в $2\sqrt{N_a}$ раз. При измерениях, маятник может совершать несколько тысяч полных колебаний. Если измерять значения огибающей при каждом прохождении положения равновесия, т.е. дважды за один период, то при N = 1000 имеем $N_a = 2000$ и $2\sqrt{N_a} > 90$. Такое уменьшение требований к $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$ позволяет существенно упростить реализацию предлагаемого способа по сравнению с прототипом.

В предлагаемом способе на основании измеренных значений огибающей вид огибающей $\alpha(t)$ может быть определен несколькими стандартными способами. Например, можно предложить два метода аппроксимации зависимости измеренных значений аналитической функцией. В первом методе исходят из соображений физической реальности, т.е. решают нелинейное дифференциальное уравнение (17) при заданной зависимости $M_{mp}(\dot{\varphi})$. Второй метод более простой: можно выбрать гладкую монотонно убывающую аналитическую функцию, которая достаточно хорошо проходит между измеренными значениями. В обоих методах используется стандартная процедура метода наименьших квадратов. Примеры реализации обоих методов приведены ниже.

Существует и третий метод определения огибающей - численный. Это метод сплайн-аппроксимации. Реализация этого метода с использованием современных компьютерных программ не встречает трудностей. Однако он менее точен, чем предыдущие.

Формула (23) для вычисления погрешности δQ поправки к фазе является следствием формулы (22). Вычисление δQ позволяет выбрать оптимальное число измеряемых амплитуд Na и допустимое значение погрешности $\delta\alpha$ их измерения.

Докажем справедливость формулы (22). Для этого необходимо рассмотреть процедуру решения дифференциального уравнения (17). Из асимптотической теории решения нелинейных дифференциальных уравнений следует, что в первом приближении этой теории процесс затухающих колебаний физического маятника описывается формулой (19), причем в этом случае фаза колебаний определяется из уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{16}\alpha^2(t). \qquad (25)$$

Интегрируя (25) при условии $\psi(0) = 0$, получим

$$\psi(\tau) = \omega_0\tau(1\text{-}Q), \qquad (26)$$

где Q - дается формулой (22). Таким образом, формула (22) доказана.

Докажем теперь справедливость формулы (21). На опыте измерение времени колебаний и в способе - прототипе, и в предлагаемом способе осуществляют путем включения таймера в момент прохождения маятником положения равновесия и последующего его выключения также в этот момент через определенное число N колебаний. Как это следует из (19), в момент включения таймера фаза $\psi(t) = 0$, в момент выключения -

$$\psi(\tau) = 2\pi N. \qquad (27)$$

Следовательно, в обоих способах имеют дело не с периодом колебаний, а именно с фазой колебаний. Формула (21) следует из формул (18), (26) и (27).

Обратим внимание на то, что, как легко видно, при последовательном анализе математической модели предлагаемого способа измерений мы нигде не имеем дело с понятием "период колебаний".

Если ввести средний период по формуле $Tcp = \frac{\tau}{N}$, то из формул (2), (26) и (27) получим равенство

$$T_0 = Tcp(1\text{-}Q), \qquad (28)$$

которое по виду совпадает с равенством (8), используемым в способе-прототипе. Однако здесь есть принципиальное различие. Если в (8) поправка к периоду q пропорциональна квадрату среднего арифметического значения амплитуды $(< a >_a)^2$ (см. формулу (9)), то в предлагаемом способе аналогичная поправка Q пропорциональна среднему от квадрата амплитуды $< a^2 >$ (см. формулу (22)). Ниже показано, что результаты расчетов по этим формулам могут существенно различаться, причем это различие тем больше, чем больше затухание колебаний маятника.

Из формулы (21), учитывая, что $Q << 1$, с помощью стандартной процедуры, включающей логарифмирование и последующее дифференцирование, получим связь погрешности δg измерения g с погрешностью δQ определения поправки Q:

$$\frac{\delta g}{g} \approx 2\delta Q. \qquad (29)$$

В случае относительных измерений погрешность δg должна быть существенно меньше изменения Δg, определяемого в процессе измерений. Следовательно, должно выполняться условие

$$\delta Q << \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|. \qquad (30)$$

Обратим внимание на то, что Q - это функционал: величина Q зависит от вида кривой зависимости $\alpha(t)$, соединяющей начальную и конечную амплитуды на виброграмме. Вследствие погрешностей измерений и воздействия случайных внешних факторов, промежуточные экспериментальные точки (т.е. измеренные значения огибающей), как правило, не могут лежать на одной монотонной кривой. Поэтому, если не вводить каких - либо ограничений, аппроксимирующих кривых среди этих точек можно провести сколь угодно много. Поэтому под погрешностью δQ следует понимать среднее квадратическое отклонение значений Q при переходе от выбранной аппроксимирующей кривой ко всем возможным другим кривым.

Используя правило дифференцирования функционалов и обобщенную теорему о среднем значении для произведения двух функций, из (22) найдем

$$\delta Q = \frac{1}{8t}\int_0^t \alpha(t)\delta[\overline{\alpha}(t)-\alpha(t)]dt = \frac{\delta\overline{\alpha}}{8t}\int_0^t \alpha(t)dt = \frac{1}{8} < \alpha > \delta\overline{\alpha}, \qquad (31)$$

где $\overline{\alpha}(t)$ - произвольная огибающая, которой можно связать начальную и конечную точки кривой $\alpha(t)$ и отличная от этой кривой;

$\delta\overline{\alpha}$ - среднее значение отклонений различных огибающих $\overline{\alpha}(t)$ от кривой $\alpha(t)$;

$< \alpha >$ - среднее значение огибающей. Следовательно, формула (23) доказана. Отсюда и из (30) получим

$$\delta\overline{\alpha} << \frac{4}{< \alpha >}\left|\frac{\Delta g}{g}\right|. \qquad (32)$$

Значение $\delta\overline{\alpha}$ определим, как это обычно делают для случайных величин, средним квадратическим отклонением измеряемых на опыте значений огибающей αn относительно кривой $\alpha(t)$:

$$\delta\overline{\alpha} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{N_a}\sum_n \frac{1}{N_a - 1 - m}(\alpha_n - \alpha(t_n))^2}, \qquad (33)$$

где N_a -число всех измеренных значений огибающей;

m - число степеней свободы статистического распределения (в нашем случае число параметров кривой $\alpha(t)$);

α_n - измеряемые на опыте значения огибающей;

$\alpha(tn)$ - значения аппроксимирующей функции в моменты времени прохождения маятником положения равновесия.

Величину δQ грубо можно оценить также по очевидной формуле

$$\delta Q = \frac{1}{16t}\sqrt{\sum_n \left\{\left[(\alpha_n)^2 - \alpha(t_n)^2\right]\cdot(t_{n+1} - t_n)\right\}^2}, \qquad (34)$$

в которой операция суммирования заменяет операцию интегрирования в (31).

Теперь получим формулу (13). Из (19) следует, что вблизи положения равновесия маятник проходит малый угловой интервал $\Delta\varphi$ за малое время $\tau_1(\omega_0\tau_1 << 1)$, определяемое равенством

$$\Delta\varphi \approx \alpha \sin\omega_0\tau_1 \approx \alpha\omega_0\tau_1. \qquad (35)$$

Отсюда найдем связь между погрешностью $\delta\varphi$ в определении границ интервала $\Delta\varphi$ и погрешностью $\delta\alpha$ в определении текущего значения огибающей α:

$$\delta\alpha \approx 2\frac{\delta\varphi}{\omega_0\tau_1}. \qquad (36)$$

Множитель "2" здесь появился потому, что интервал $\Delta\varphi$ имеет две границы. Учитывая, что $\omega_0\tau_1 \approx \frac{\Delta\varphi}{\alpha}$, из (35) получим формулу (13).

Получим теперь соотношение (24). Будем считать, что в (33) разности α_n - $\alpha(t_n)$, которые обусловлены погрешностью измерения значений огибающей, по модулю примерно одинаковы и равны $\delta\alpha$. Тогда из (33) следует

$$\delta\overline{\alpha} \approx \frac{\delta\alpha}{\sqrt{N_a - 1 - m}}. \qquad (37)$$

Подставляя (37) в (32), получим искомое требование (24).

Приведем пример определения огибающей для случая, когда задана зависимость $M_{mp}(\dot{\varphi})$. Определим $M_{mp}(\dot{\varphi})$ в виде

$$M_{mp}(\dot{\varphi}) = -I\left\lfloor b_0 \mathrm{sign}(\dot{\varphi}) + b_1\dot{\varphi} + b_2\dot{\varphi}^2 \mathrm{sign}(\dot{\varphi})\right\rfloor, \qquad (38)$$

где b_i = const,

т.е. будем считать, что трение содержит кулонову, линейную и квадратичную составляющие.

Следует отметить, что функция (38) имеет вид более общий по сравнению с теми функциями, которые рассматриваются в работах по теории колебаний. В этих работах рассматриваются лишь частные случаи, которые следуют из (38).

Можно показать, что в первом приближении асимптотической теории нелинейных колебаний из (38), (17) и (19) следует, что функция $\alpha(t)$ имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0 - \dfrac{k_1\alpha_0 + 2k_0}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-D}t\right)}{1 + \dfrac{k_1 + 2k_2\alpha_0}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-D}t\right)}, \qquad (39)$$

если D < 0, или

$$\alpha(t) = \frac{\left(\sqrt{D} - k_1\right)\alpha_0 - 2k_0 + \left\lfloor\left(\sqrt{D} + k_1\right)\alpha_0 + 2k_0\right\rfloor \exp\left(-\sqrt{D}t\right)}{\sqrt{D} + k_1 + 2k_2\alpha_0 + \left(\sqrt{D} - k_1 - 2k_2\alpha_0\right)\exp\left(-\sqrt{D}t\right)}, \qquad (40)$$

если D > 0,

где

$$D = k_1^2 - 4k_0k_2; \qquad (41)$$

где, в свою очередь, k_0, k_1, k_2 - постоянные коэффициенты, связанные в нашем случае с коэффициентами b_i, соотношениями

$$k_0 = \frac{\tau}{\pi^2 N} b_0, \quad k_1 = \frac{1}{2} b_1, \quad k_2 = \frac{8N}{3\tau} b_2. \qquad (42)$$

Именно коэффициенты k_i определяются из опыта на основании измерений значений огибающей.

По формулам (39)-(42), пользуясь методом численной нелинейной аппроксимации, например имеющимся в широко известной компьютерной программе "Mathcad", можно легко определить коэффициенты k_i и тем самым определить вид огибающей $\alpha(t)$ в каждом случае колебаний маятника.

Рассмотрим теперь второй метод определения огибающей $\alpha(t)$ - путем подбора аналитической функции. С этой целью можно использовать известную компьютерную программу "Table Curve", содержащую более 8000 аналитических функций, с помощью которых можно совершить процедуру аппроксимации опытных данных. Для этого достаточно ввести в программу значения измеренные значения огибающей и соответствующие им моменты времени. Программа выстроит все свои аналитические функции в соответствии с достигаемой точностью аппроксимации, и останется лишь выбрать наиболее подходящую из них. Реализация этого метода представлена ниже (формула (42)).

На фиг. 1 представлена зависимость от амплитуды колебаний разности Q-q, вычисленной при значении начальной амплитуды α_0 = 40 угл. мин.

На фиг. 2 в виде отдельных кружков представлены результаты измерений значений огибающей для реального маятника и соответствующие моменты времени. В виде непрерывной линии здесь же показана огибающая, полученная в результате аппроксимации методом наименьших квадратов на основании формулы (40).

На фиг. 3 показан разброс измеренных значений огибающей относительно кривой $\alpha(t)$.

На фиг. 1 кривая 1 относится к случаю, когда на маятник действует кулоново трение, кривая 2 - к случаю действия линейного трения, кривая 3 - случаю действия квадратичного трения.

На фиг. 2 и фиг. 3 по оси ординат отложены значения углов, выраженные в радианах, по оси абсцисс отложено время колебаний в секундах.

Приведем пример реализации предлагаемого способа на опыте. В нашем распоряжении имелся маятник, который мог совершать свободные колебания без вакуумирования и использования каких-либо способов изоляции его от вибраций основания. Маятник подсвечивался лучом лазера, который отражался от закрепленного на нем зеркальца. В процессе колебаний измерялись амплитуды колебаний, которые при малом трении мало отличаются от значений огибающей. Эти амплитуды определялись визуально на неподвижной шкале. Способ осуществляли следующим образом.

Отклонив маятник, привели его в состояние свободных колебаний.

Включили таймер в момент первого прохождения маятником положения равновесия.

В процессе колебаний измерили восемь амплитуд, включая начальную и конечную, и определили соответствующие им моменты времени (таблица). Таймер был выключен в момент прохождения маятником положения равновесия через 7105 полных колебаний.

Время, с	0	390	870	1440	2140	3060	4260	5400
Значения амплитуд, угл. мин.	125	109	94	78	62	47	31	22

График этой табличной зависимости, где углы выражены в радианах, представлен на фиг. 2 в виде отдельных точек.

Используя формулу (40) и компьютерную программу "Mathcad", рассчитали коэффициенты k_i. Были получены следующие значения: $k_0 = 4{,}891\cdot10^{-7}$; $k_1 = 2{,}564\cdot10^{-4}$; $k_2 = 1{,}903\cdot10^{-3}$. Огибающая $\alpha(t)$, т.е. кривая (40) с этими значениями коэффициентов k_i, показана в виде непрерывной линии на фиг. 2.

Вычислили поправку Q по формуле (22). При использовании формулы (40) поправка может быть вычислена аналитически. Получили значение $Q = 2{,}2736\cdot10^{-5}$. Если этот результат выразить в мГал (для этого его необходимо умножить на 10^6), получим 22,736 мГал.

Вычислили среднее квадратическое отклонение измеренных амплитуд от огибающей по формуле (33). Эти отклонения показаны на фиг. 3. Было получено значение $\delta\overline{\alpha} = 5{,}9544\cdot10^{-5}$.

Рассчитали погрешность δQ по формулам (31) и (33). Выразив в мГал, получили $\delta Q = 0{,}255$ мГал (расчет по формуле (34) дал близкое значение $\delta Q = 0{,}220$ мГал). Разброс значений измеренных амплитуд относительно огибающей, выраженный в радианах, показан на фиг. 3.

Если исходить из формулы (9) для прототипа, получим, что поправка к периоду за амплитуду q = 28,482 мГал. Следовательно, разность между этими значениями в прототипе и в предлагаемом способе q-Q = 5,76 мГал. Этот результат представляет собой погрешность поправки к периоду в прототипе. Если сравнить эту погрешность с погрешностью δQ в предлагаемом способе, найдем, что погрешность прототипа превосходит аналогичную погрешность предлагаемого способа примерно в 22 раза. Такое большое различие в результатах обусловлено тем, что в способе-прототипе не учтено влияние характера затухания амплитуды колебаний на поправку к среднему периоду.

В данном примере число измеренных амплитуд Na = 8. Если бы здесь измерялась каждая амплитуда, то было бы Na = 14210. Тогда для погрешности оценки Q имели бы $\delta Q \approx 1{,}01\cdot10^{-4}$ мГал. Такова потенциальная точность предлагаемого способа при вычислении поправки к периоду "за амплитуду" для данного маятника. Следовательно, предлагаемый способ позволяет определять поправки за амплитуду для маятниковых измерений, проводящихся без откачки воздуха из рабочих объемов.

Что касается второго метода определения огибающей - метода подбора аналитической функции, то в рассматриваемом практическом случае с помощью компьютерной программы "Table Curve" была выбрана следующая функция, содержащая четыре параметра:

$$\alpha_1(t) = \frac{a + ct}{1 + bt + dt^2}, \qquad (43)$$

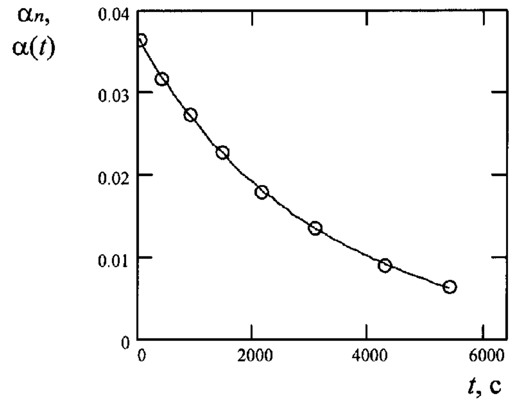
где

$$a = 0{,}03606;\ b = 0{,}00022;\ c = -3{,}699 \cdot 10^{-6};\ d = 1{,}245 \cdot 10^{-8}.$$

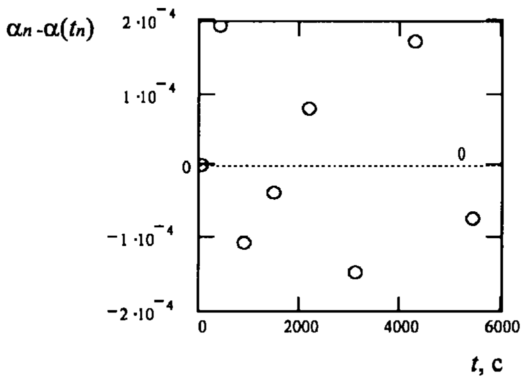
Здесь $\delta\overline{\alpha} = 3{,}257 \cdot 10^{-4}$. Эта величина больше, чем предыдущая, примерно в 5,5 раз. Поэтому имеет смысл использовать предыдущую функцию в качестве аппроксимирующей.

Источники информации:

1. Юзефович А.П., Огородова Л.В. Гравиметрия. - М.: Недра, 1980. - Гл. 4.
2. Юзефович А.П., Огородова Л.В. Гравиметрия. - М.: Недра, 1980. - Гл. 2.
3. Юзефович А.П., Огородова Л.В. Гравиметрия. - М.: Недра, 1980. - Гл. 3.
4. Юзефович А.П., Огородова Л.В. Гравиметрия. - М.: Недра, 1980. - С. 65.



Фиг. 2



Фиг. 2