

**Босаков С.В., Белевич В.Н., Щетько Н.С.**

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ВТЯГИВАНИЯ КАНАТОВ В ИЗГИБАЕМЫХ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТАХ БЕЗОПАЛУБОЧНОГО ФОРМОВАНИЯ**

**Введение.** В настоящее время заводами сборного железобетона Республики Беларусь освоено производство предварительно напряженных многопустотных плит, изготавливаемых по технологии безопалубочного формования на оборудовании зарубежных фирм. В качестве основной рабочей напрягающей арматуры в этих плитах используются, как правило, арматурные канаты, особенности работы которых совместно с окружающим их бетоном до настоящего

времени недостаточно исследованы и освещены в отечественной литературе. Вместе с тем, внедрение отмеченной выше технологии требует досконального изучения характера деформирования конструкции и совместной работы бетона и арматуры на всех этапах изготовления и эксплуатации конструкции.

---

**Босаков Сергей Викторович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики Белорусского национального технического университета.

Беларусь, БНТУ, 220027, г. Минск, пр. Независимости, 65.

**Белевич Валерий Николаевич**, заведующий отделом строительных конструкций РУП «Институт БелНИИС».

**Щетько Николай Сергеевич**, младший научный сотрудник отдела строительных конструкций РУП «Институт БелНИИС».

---

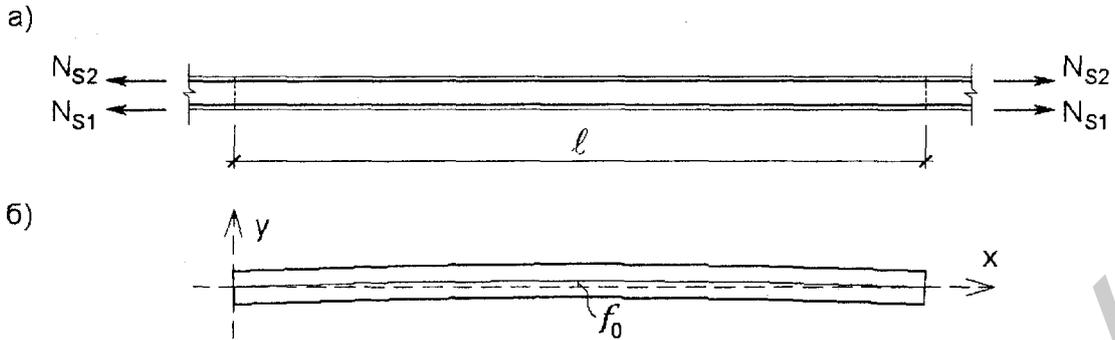


Рис. 1. Схемы плиты непрерывного формирования а) до разрезания напрягающих канатов; б) после разрезания канатов

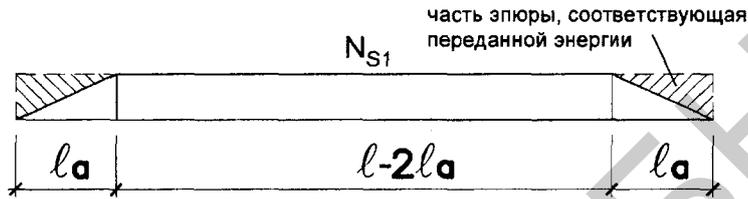


Рис. 2. К определению части потерянной энергии преднапряжения

Одними из важнейших критериев, характеризующих качество изготовления и надежность сцепления арматуры с бетоном, являются длина зоны передачи напряжений и величина втягивания канатов. Определение этих факторов в плитах беспалубочного формирования, по мнению авторов, следует выполнять с учетом особенностей технологии изготовления плит. Для этого необходимо выполнить, прежде всего, ряд теоретических исследований и сравнить полученные результаты с результатами проведенных натуральных экспериментов. Ниже авторами предложен теоретический подход по определению длины зоны передачи напряжений и величины втягивания канатов.

**1. Определение величины втягивания напрягающих канатов при передаче усилия обжатия на бетон в процессе резки отформованной бетонной полосы на отдельные плиты заданной длины**

Рассмотрим плиту непрерывного формирования до разрезания (рис. 1а) напрягающих канатов и после (рис. 1б). Будем считать, что известно:

- будущий начальный выгиб –  $f_0$ ;
- погонная нагрузка от собственного веса –  $q_{с.в.}$ ;
- напряжение преднапряжения канатов с учетом потерь –  $\sigma_0$ ;
- площадь напрягающих канатов –  $A_s$ ;
- модуль упругости материала канатов –  $E_s$ ;
- длина плиты (горизонтальная проекция) –  $l$ ;
- начальная изгибная жесткость преднапрягаемой плиты –  $B$ ;
- эксцентриситет оси каната относительно оси плиты –  $e$ ;
- продольная жесткость напрягаемой плиты –  $E_b A_b$ .

Необходимо определить длину зоны передачи напряжений  $l_a$  и величину втягивания канатов  $\delta$ . При проведении теоретических расчетов будем считать, что:

- на длине зоны передачи напряжений  $l_a$  усилия в напрягающих канатах меняются по закону треугольника;
- к середине пролета плиты усилия преднапряжения в канатах не меняются после резки бетонной полосы;
- расчет ведется в упругой стадии, так как на этом этапе не допускается трещинообразование в бетоне;
- возможные динамические эффекты при резке не учитываются;
- работа верхней напрягающей проволоки, ввиду ее малой площади по сравнению с площадью напрягающих канатов, при вычислении энергии изгиба плиты также не учитывается.

Расчет будем выполнять энергетическим способом. Часть энергии полностью растянутых до разрезания канатов после резки идет на работу по выгибу плиты (энергия деформаций изгиба и сжатия) и на работу по преодолению сил собственного веса плиты. Эта часть

энергии определяется через длину зоны передачи нагрузки  $l_a$  и на рис. 2 ей соответствует площадь заштрихованных треугольников.

Поэтому эту часть потерянной энергии можно посчитать по формуле:

$$\Delta U = 2 \int_0^{l_a} \frac{N_{s1}^2 dx}{2E_s A_s} = \frac{N_{s1}^2 l_a}{3E_s A_s} \quad (1)$$

где  $N_{s1} = \sigma_0 A_s$  – усилие в канате.

Далее последовательно находим:

- работу по изгибу плиты, принимая эпюру изгибающих моментов в следующем виде (рис. 3).  
Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательный результат в следующем виде:

$$U_M = \frac{1}{240B} (40e^2(3l - 4l_a)N_{s1}^2 - 20el(l^2 - 2l_a)N_{s1} q_{св} + (l^5 - 10ll_a^4 + 8l_a^5)q_{св}^2), \quad (2)$$

- работу по сжатию плиты, принимая эпюру продольных сил в плите равной эпюре продольных растягивающих сил в канатах с обратным знаком

$$U_N = \frac{N_{s1}^2 (l - \frac{4}{3}l_a)}{2E_b A_b} \quad (3)$$

- работу по подъему балки. При этом зададимся очертанием изогнутой оси преднапряженной плиты в виде синусоиды

$y(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ , которая хорошо описывает прогибы шарнирно опертой плиты при действии равномерно распределенной нагрузки [2]. Выражение для работы имеет вид:

$$A = q_{с.в.} \int_0^l y(x) dx = q_{с.в.} \frac{2f_0 l}{\pi} \quad (4)$$

Приравнивая сумму выражений (4), (3) и (2) выражению (1), получим требуемую формулу для определения длины зоны передачи напряжений (компоненты длины зоны анкеровки) в виде алгебраического уравнения пятой степени. В том случае, когда момент от собственного веса плиты имеет малое значение, по сравнению с моментом от сил преднапряжения, она несколько упрощается и имеет следующий законченный вид:

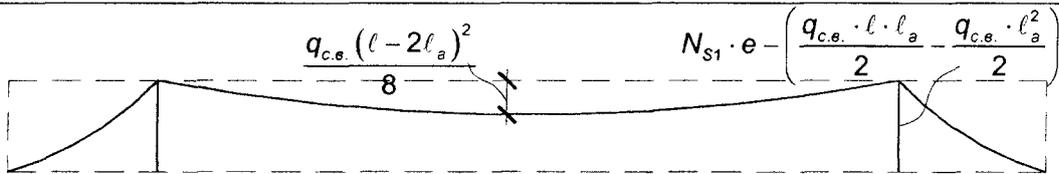


Рис. 3. Принятая эпюра изгибающих моментов в преднапряженной плите

$$\ell_a = \frac{1 + \frac{E_b A_b}{B} e^2 \left(1 + \frac{4 B f_0 q_{c.e.}}{\pi N_{S1}^2 e^2}\right) \frac{E_s A_s}{E_b A_b} \frac{3 \ell}{2}}{1 + 2 \frac{E_s A_s}{B} e^2} \quad (5)$$

Теперь величина втягивания каната  $\delta$  определится перемножением единичной эпюры продольных сил на треугольную эпюру  $N_{S1}$  (рис. 2) в пределах длины зоны передачи напряжений  $\ell_a$ . Получаем

$$\delta = \frac{N_{S1}}{2 E_s A_s} \ell_a, \quad (6)$$

что полностью повторяет формулу Гийона [1]. Анализ формулы (5) показывает, что на величину длины зоны передачи напряжений помимо факторов, отмеченных в обзоре авторов [1], влияют также следующие: изгибная жесткость напрягаемой плиты, ее длина, эксцентриситет расположения канатов относительно оси плиты и собственный вес плиты. Вопрос учета сцепления канатов с бетоном авторами не рассматривался ввиду его значительной сложности и неопределенности. Авторы считают, что это область анализа расчета плиты относится к наиболее сложным контактным задачам теории упругости.

В таблице 1 приведены экспериментальные величины длины зоны анкеровки канатов  $\ell_a$  и втягивания канатов  $\delta$  для четырех плит безопалубочного формования, изготовленных по итальянской технологии «Weiler-Italia» и испытанных в отделе строительных конструкций РУП «Институт БелНИИС».

Таблица 1

№ п/п	Дата испытания	Плита	$\ell_a$ , м	$\delta$ , мм
1	11.07.2008 г.	2ПТМ72.15.22-9.5S1400	0,536	1,51
2	15.07.2008 г.	2ПТМ72.15.22-10.5S1400	0,692	1,95
3	13.06.2008 г.	2ПТМ63.15.22-10S1400	0,373	1,05
4	2.11.2009 г.	2ПТМ72.12.22-6S1350	0,401	1,02

При заполнении таблицы 1 изгибная жесткость плиты была определена по формуле:

$$B = \frac{M L^2}{\pi^2 f_0} - \frac{(q_{c.e.} + q) \ell^4}{8 \pi^2 f_0} \quad (7)$$

где  $M = N_{S1} e$ .

## 2. Обоснование некоторых предпосылок теоретического расчета по определению величины втягивания напрягающих канатов при передаче усилия обжатия на бетон в процессе резки отформованной дорожки на отдельные плиты заданной длины

**Предпосылка 1.** Есть три веских соображения, подтверждающих первую предпосылку. Во-первых, на рис. 4 приводится диаграмма распределения напряжений в канатах по длине зоны передачи напряжений согласно [1], которая не слишком отличается от прямолинейной.

Во-вторых, если предположить, что распределение контактных касательных напряжений отлично от равномерного (что соответствует треугольной эпюре  $N_{S1}$  на длине  $\ell_a$ , принятой исполнителями в настоящей статье) и меняется по симметричному закону с осью

симметрии при  $\ell_a / 2$ , то все равно, при  $\ell_a / 2$  текущие значения  $N_{S1}$  будут совпадать с  $N_{S1}$  при равномерном распределении контактных касательных напряжений и равных площадях эпюр контактных касательных напряжений.

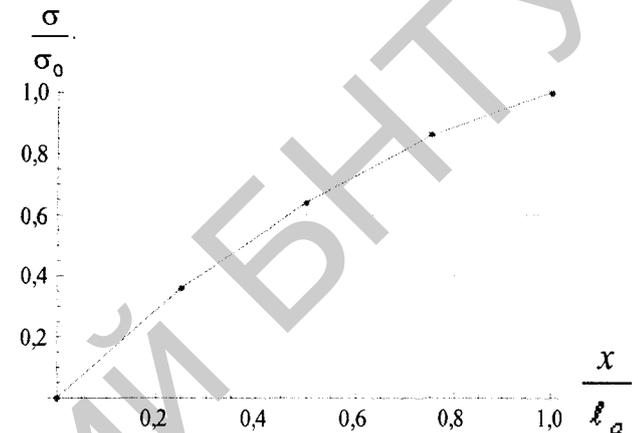


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений в канате по длине зоны анкеровки согласно [1]

В-третьих, как показали дальнейшие расчеты, результаты которых приведены ниже, длина зоны передачи нагрузки на порядок меньше длины балки и, следовательно, закон распределения контактных касательных напряжений несущественно влияет на получаемые значения  $\ell_a$  и  $\delta$ .

**Предпосылка 3.** На рис. 5 и 6 приводятся диаграмма «момент-кривизна» для плиты 2ПТМ72.12.22-6У1770, полученная по результатам испытаний, выполненных в РУП «Институт БелНИИС», и зависимость «сила-удлинение» для каната по данным протокола механических испытаний арматурной пряди группой предприятий Северсталь-метиз [3].

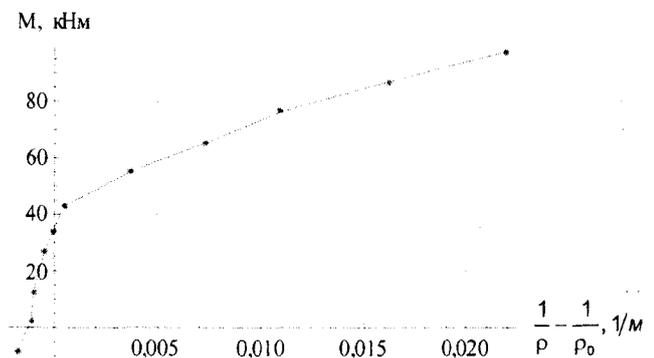


Рис. 5. Диаграмма «момент-кривизна» для плиты 2ПТМ72.12.22-6У1770

Если учесть, что усилие преднапряжения составляет порядка 66,8 кН и соответствующий этому усилию момент преднапряжения без учета собственного веса и разгружающего действия верхней напрягаемой проволоки равен 50 кНм, то справедливость этой предпосылки очевидна.

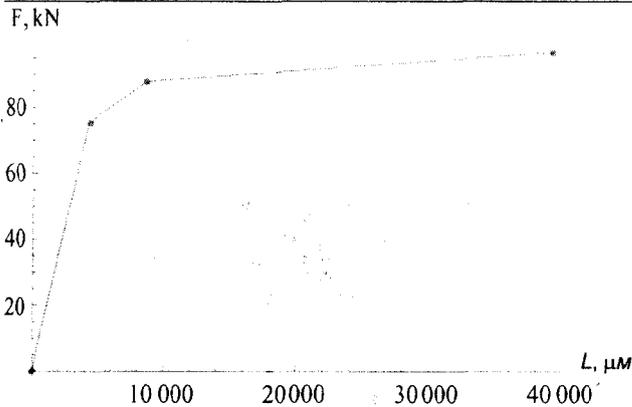


Рис. 6. Зависимость «сила – удлинение» для арматурной пряди Ø 9,3 мм Y1770S7

**3. Определение изменения величины вытягивания напрягающих канатов при передаче усилия обжатия на бетон в процессе эксплуатации плиты безопалубочного формирования**

При решении этой задачи примем предпосылки 1, 3, 5 параграфа 1. Рассмотрим состояние преднапряженной плиты после статического приложения внешней равномерно распределенной нагрузки  $q$  (рис. 7).

Зададимся уравнением прогибов плиты от изогнутого исходного состояния в виде синусоиды

$$y_1(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (8)$$

На перемещениях  $y_1$  положительную работу совершают силы собственного веса плиты и внешней нагрузки

$$A_1 = (q_{с.в.} + \frac{q}{2}) \int_0^{\ell} y_1(x) dx = (q_{с.в.} + \frac{q}{2}) \frac{2a_1 \ell}{\pi} \quad (9)$$

Работу также совершает внутренний изгибающий момент на деформациях изгиба плиты, вызванный прогибом по форме (7)

$$A_2 = \frac{B}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{B}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 B}{4 \ell^3} (-2f_0 a_1 + a_1^2) \quad (10)$$

и продольные силы в плите

$$A_3 = \frac{(N_{S1} + \Delta N_{S1})^2 (\ell - \frac{4}{3} l_a)}{2E_b A_b} - \frac{N_{S1}^2 (\ell - \frac{4}{3} l_a)}{2E_b A_b} \quad (11)$$

Отрицательную работу совершают силы преднапряжения в канатах вследствие горизонтальных перемещений нижних волокон плиты из-за поворота сечений (рис. 7). Так как при этом поменялась длина зоны анкеровки, то эту работу посчитаем как разность потенциальных энергий продольных деформаций от сил преднапряжения канатов в рассматриваемых двух состояниях. Используя правило перемножения эпюр [4], получаем:

$$A_4 = - \left[ \frac{1}{2} (N_{S1} + \Delta N_{S1}) l_{a2} \frac{2}{3} (N_{S1} + \Delta N_{S1}) \frac{2}{2E_s A_s} + \frac{(N_{S1} + \Delta N_{S1})^2 (\ell - 2l_{a2})}{2E_s A_s} - \frac{1}{2} (N_{S1} + \Delta N_{S1}) l_{a1} \frac{2}{3} (N_{S1} + \Delta N_{S1}) \frac{2}{2E_s A_s} - \frac{(N_{S1} + \Delta N_{S1})^2 (\ell - 2l_{a1})}{2E_s A_s} \right] \quad (12)$$

где  $l_{a1}$ ,  $l_{a2}$  – длины зоны передачи напряжений до и после приложения нагрузки;

$\Delta N_{S1}$  – приращение сил преднапряжения, вызванное внешней нагрузкой.

Также учтем увеличение длины хорды вследствие уменьшения выгиба (рис. 7). Эта величина определится разностью

$$\int_0^{l_2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 (f_0 - a_1)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l_2}}{l_2^2}} dx - \int_0^{l_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 f_0^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l_1}}{l_1^2}} dx \quad (13)$$

Раскладывая полученную разность эллиптических интегралов (13) в степенной ряд по степеням множителей при косинусах и ограничиваясь двумя членами ряда, получим

$$l_2 = l_1 \left( 1 + \frac{2\pi^2 f_0 a_1}{l_1^2} - \frac{\pi^2 a_1^2}{l_1^2} \right), \quad a_1 < f_0 \quad (14)$$

В итоге приращение сил преднапряжения определится выражением

$$\Delta N_{S1} = \frac{E_s A_s}{\ell} \left[ \frac{\pi^2}{\ell} a_1 (2f_0 - a_1) \frac{\ell - l_{a1}}{\ell} + 2 \frac{e}{\ell} \left( f_0 \cos \frac{2\pi l_{a1}}{3\ell} - a_1 \cos \frac{2\pi l_{a1}}{3\ell} \right) \right] \quad (15)$$

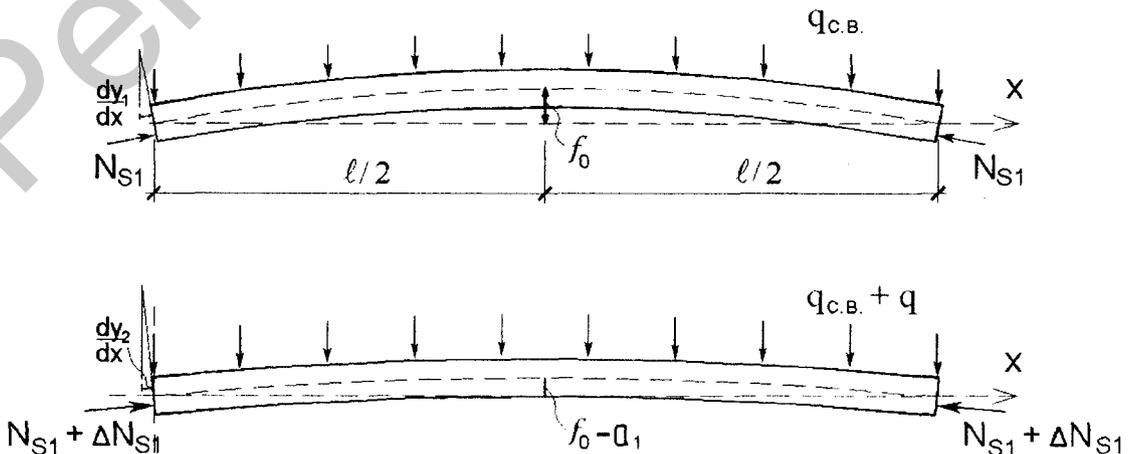


Рис. 7. Два состояния нагруженной преднапряженной плиты

Составляя выражение баланса работ при  $a_1 < f_0$

$$A_1 = A_2 + A_3 + A_4 \quad (16)$$

получаем нелинейное уравнение относительно  $\ell_{a2}$  – длины зоны передачи напряжений после приложения статической нагрузки  $q$ . Численно решив его, находим новую величину втягивания канатов перемножением единичной эпюры продольных сил на окончательную эпюру [4]

$$\delta_1 = \frac{3N_{s1} + 4\Delta N_{s1}}{6E_s A_s} \quad (17)$$

В таблице 2 приведены значения длин зоны передачи напряжений  $\ell_a$  и втягивания каната в зависимости от значения приложенной внешней нагрузки  $q$  для плиты 2ПТМ 72.12.22-6S1400.

Таблица 2

Нагрузка $q$ , кН/м <sup>2</sup>	Прогиб в центре, мм	Приращение усилия в канатах, кН	$\ell_a$ , м	$\delta$ , мм
0	-6,38	0	0,4010	1,02
2,12	-4,00	+2,582	0,4149	1,06
3,52	-2,54	+4,061	0,4154	1,07
4,5	0	+6,448	0,4459	1,15

Анализ данных таблицы 2 показывает, что в рассматриваемом диапазоне изменения внешних нагрузок фактически не меняются величины зоны передачи напряжений и втягивания каната. Разницу в значениях можно объяснить также неточностью приближенного решения вследствие принятых предположений. Также очевидно, что если усилие преднапряжения растягивает канат примерно на 40 мм, то изменение его длины вследствие изгиба на 1–2 мм несущественно повлияет на величины зоны передачи напряжений и втягивания каната.

Теоретические результаты таблиц 1, 2 подтверждаются данными натурных испытаний плиты 2ПТМ 72.12.22-9Y1770S7-1 на действие поперечной силы. У второй опоры плиты при пролете среза  $c = 2,8d$  и нагрузке  $Q = 160$  кН произошло хрупкое разрушение по наклонному сечению (рис. 8), которое сопровождалось втягиванием канатной арматуры на  $\delta = 0,73$  мм по сравнению с его первоначальным положением.

Длина проекции критической наклонной трещины на продольную ось плиты составила 400 мм. Величина поперечной силы, вызвавшей образование трещины, достигла значения 150,98 кН, что

практически равно значению поперечной силы 149,5 кН, при которой произошло образование вертикальной трещины под силой на расстоянии 0,465 м от противоположной опоры. Следует предположить, что на такой вид разрушения повлияло приложение сосредоточенной нагрузки на плиту в пределах длины зоны передачи напряжений с канатной арматуры на бетон.

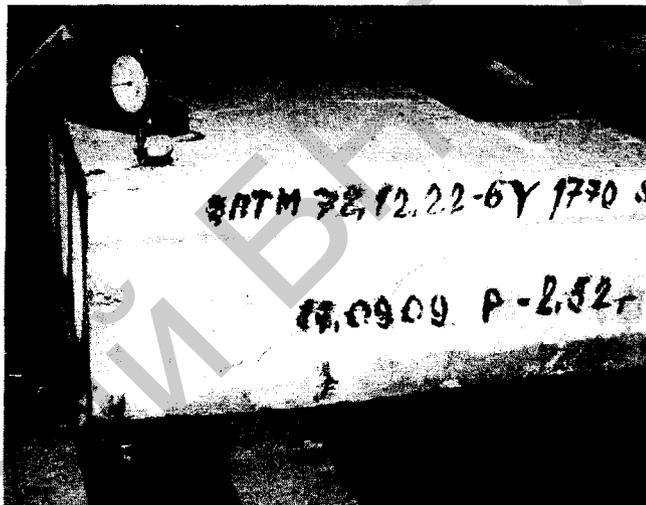


Рис. 8. Разрушение эталонной плиты 2ПТМ72.12.22-9Y1770S7-1 по наклонному сечению при пролете среза  $c = 2,8d$

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тур, В.В. О нормировании величины втягивания канатов при изготовлении плит пустотного настила по технологии безопалубочного формирования / В.В. Тур, Т.М. Пецольт // Проблемы современного бетона и железобетона: сборник трудов: в 2 ч. / М.Ф. Марковский (гл. ред.) [и др.] – Минск: Стринко, 2007. – Ч. 1. – С. 531–550.
2. Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 480 с.
3. Протокол механических испытаний арматурной пряди от 01.04.2009г. Испытательный центр ОТК группы предприятий «Северсталь-метиз».
4. Ржаницын, А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1990. – 438 с.

Материал поступил в редакцию 23.11.09

**BOSAKOV S.V., BELEVICH V.N., SHETKO N.S. Definition of size втягивания ropes in bent preliminary pressure ferro-concrete plates with-  
outsheathing forming**

In work the materials of theoretical researches by definition of length of a zone of transfer of pressure reinforcing of ropes in plates withoutsheathing forming and size втягивания of ropes are stated. With use of the power approach the formulas reflecting influence of physical parameters and technology of manufacturing of plates on size draw of ropes are received.

The comparison of results of account on offered by the authors to the formulas with results carried out on location of tests of a plate is executed.