

БИОМЕХАНИКА

УДК 539.3+612.766.1

А.В. ЧИГАРЕВ, доктор физ.-мат. наук
Белорусский национальный технический университет, Минск

А.В. БОРИСОВ, канд. техн. наук
Филиал ГОУВПО «МЭИ (ТУ)», Смоленск, Российская Федерация

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ НАГРУЖЕННОСТИ КОЛЕННОГО СУСТАВА ЧЕЛОВЕКА

Математический расчет коленного сустава с учетом деформаций представляет большой практический интерес с точки зрения медицины и протезостроения. В статье предлагается один из вариантов такого расчета. Исследуются упругие деформации в контакте (задача Герца). Проведены численные расчеты радиуса зоны контакта, глубины проникновения и контактного давления.

Рассмотрим модель коленного сустава человека с учетом деформаций. При контакте в суставе вступают в действие упругие силы. Возникают деформации, которые влияют на механические свойства сустава. Для правильной интерпретации результатов и выбора режима исследования необходимо иметь представление об упругих взаимодействиях.

Такое рассмотрение необходимо для того, чтобы избежать разрушения сустава при нагрузках, так как давление в области контакта может превысить предел прочности;

анализировать силы во время движения, которые непосредственно влияют на деформации и разрушение в суставе.

Исследуем упругие деформации в контакте (задача Герца).

Для начала рассмотрим только силу упругости. Нахождение деформаций при локальном соприкосновении тел при воздействии нагрузки F составляет задачу Герца.

Сделаем несколько упрощающих предположений.

1. Допустим, что материалы, из которых состоят поверхности суставов (гиалиновый хрящ), изотропны, а значит, все их упругие свойства описываются всего двумя парами параметров (в общем случае, разными для взаимодействующих тел) – модулями Юнга E , E' и коэффициентами Пуассона μ , μ' .

2. Считаем, что вблизи точки соприкосновения недеформированному участку поверхности каждого из тел можно приписать два радиуса кривизны r_1 , r_2 (для суставной сумки) и r_1' , r_2' (для головки сустава) во взаимно перпендикулярных плоскостях, ортогональных самой поверхности в данной точке (рисунок 1).

3. Перемещения малы по сравнению с радиусами кривизны поверхностей.

4. Граничные поверхности представляют собой эллиптические параболоиды.

Пусть два твердых тела соприкасаются друг с другом в точке (рисунок 2).

Уравнение поверхности вблизи точки касания:

$$z = k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (1)$$

где α, β – суммирование. Тензор $k_{\alpha\beta}$ характеризует кривизну поверхности, его главные значения $-\frac{r_1}{2}$ и $\frac{r_2}{2}$ (здесь r_1, r_2 – главные радиусы кривизны контактирующих поверхностей в точке O).

Аналогично для второго тела:

$$z' = k'_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta. \quad (2)$$

Предположим, что тела сдавливаются некоторой силой F . В результате они деформируются и сближаются на некоторое малое расстояние h (рисунок 3). Теперь область соприкосновения будет не точка, а участок поверхности площадью S ($\pi_{\alpha\beta}$ для эллипса). Пусть u_z и u'_z – компоненты (соответственно по осям z и z') векторов смещения точек поверхностей обоих тел при сдавливании (см. рисунок 3).

Из рисунка видно, что в точках области соприкосновения имеет место равенство:

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h \quad (3)$$

или

$$(k_{\alpha\beta} + k'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (4)$$

В точках, где поверхности не соприкасаются, выполняется неравенство

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) < h. \quad (5)$$

Выберем направления осей x и y таким образом, чтобы тензор $k_{\alpha\beta} + k'_{\alpha\beta}$ был приведен к главным осям. Обозначая через A и B главные значения этого тензора,

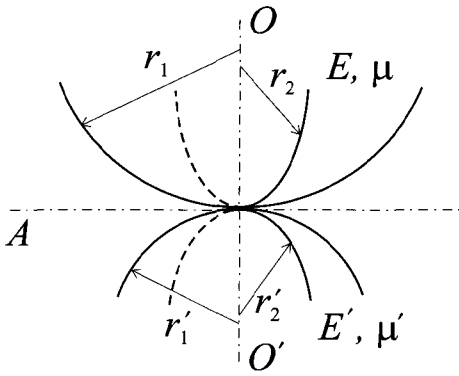


Рисунок 1 — Постановка задачи Герца

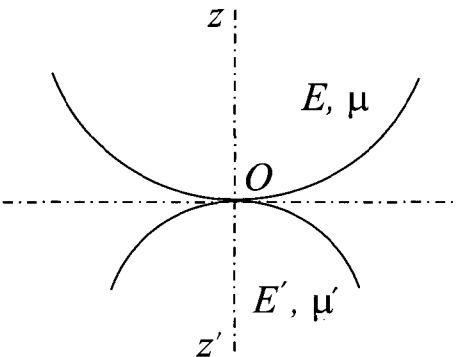


Рисунок 2 — Соприкосновение двух тел до деформации

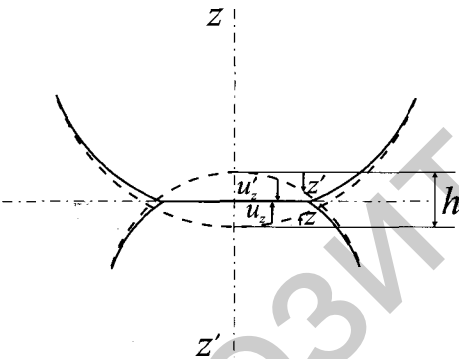


Рисунок 3 — Соприкосновение двух тел после деформации. Пунктиром изображены поверхности до деформации, а сплошной линией — поверхности сдавленных тел. Буквы z и z' обозначают расстояния вдоль оси z z', определяемые равенствами (1) и (2)

перепишем (4):

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (6)$$

Величины A и B связаны с радиусами кривизны r_1, r_2 и r'_1, r'_2 обеих поверхностей следующими формулами, которые приведем без вывода:

$$2(A+B) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2};$$

$$4(A+B)^2 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2}\right)^2 + 2\cos 2\varphi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2}\right), \quad (7)$$

где φ — угол между нормальными сечениями поверхностей, в которых радиусы кривизны $-r_1$ и r'_1 . Знаки радиусов кривизны положительны, если соответствующие центры кривизны расположены внутри соответствующего тела, и отрицательны — в обратном случае.

Обозначим через $P_z(x, y)$ давление между сдавлен-

ными телами в точках их соприкосновения. Вне области соприкосновения, очевидно, $P_z = 0$. Смещение u_z под влиянием нормальных сил $P_z(x, y)$ определяется выражением (поверхности считаем плоскими):

$$u_z = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy',$$

$$u'_z = \frac{1-\mu'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy'. \quad (8)$$

Заметим, что из (8) следует, что отношение $\frac{u_z}{u'_z}$ постоянно и равно:

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1-\mu^2)E'}{(1-\mu'^2)E} = \text{const}. \quad (9)$$

Соотношения (7) и (9) непосредственно определяют распределение деформации u_z и u'_z по области соприкосновения. Подставим выражения (8) в (7):

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1-\mu^2}{E} + \frac{1-\mu'^2}{E'} \right) \iint \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy' = h - Ax^2 - By^2. \quad (10)$$

Это интегральное уравнение определяет распределение давления $P_z(x, y)$ по области соприкосновения. Решение его находится методом теории потенциала, по аналогии с электростатикой.

Пусть по объему трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (11)$$

равномерно распределен заряд (с объёмной плотностью ρ). Тогда потенциал поля внутри эллипсоида определяется выражением:

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right\} \times$$

$$\times \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}}. \quad (12)$$

В предельном случае предельно уплощенного эллипсоида (в направлении оси z), когда $c \rightarrow 0$:

$$\varphi(x, y) = \text{prabc} \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \varepsilon} - \frac{y^2}{b^2 + \varepsilon} \right\} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(a^2 + \varepsilon)(b^2 + \varepsilon)\varepsilon}}. \quad (13)$$

(координаты z внутри эллипсоида полагаются равными нулю).

Потенциал можно записать и по-другому:

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad (14)$$

где интегрирование производится по объёму эллипса. Теперь перейдем к пределу $c \rightarrow 0$, при этом положим под корнем $z = z' = 0$; производя интегрирование по dz' в

пределах между $\pm c \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. Получим:

$$\varphi(x, y) = 2\rho c \iint \frac{dx' dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$$

$$\left(r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right), \quad (15)$$

где интегрирование производится по площади внутри

эллипса $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

Приравняв оба выражения для $\phi(x, y)$, получим:

$$\iint \frac{dx'dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} \quad (16)$$

Сравним интегральное уравнение (16) с уравнением (10). Видим, что в их правых частях стоят квадратичные функции от x и y одинакового вида, а в левых — интегралы одинакового типа. Поэтому можно сразу сказать, что область соприкосновения тел (она же — область интегрирования в интеграле (10)) ограничена эллипсом вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (17)$$

и что функция $P_z(x, y)$ должна быть вида:

$$P_z(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (18)$$

Выберем const таким образом, чтобы интеграл $\iint P_z dx dy$ по области соприкосновения был равен силе F , с которой сдвигаются тела. Получим:

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (19)$$

Эта формула определяет закон распределения давления по площади области соприкосновения. Заметим, что давление в центре в полтора раза превышает среднее давление $\frac{F}{\pi ab}$.

Подставим (19) в (10) и заменим получающийся интеграл его выражением согласно (16):

$$\frac{F}{\pi K} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}} d\xi = h - Ax^2 - By^2, \quad (20)$$

где K — эффективный модуль Юнга:

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \mu^2}{E} + \frac{1 - \mu'^2}{E'} \right). \quad (21)$$

Приравняем коэффициенты при x^2 и y^2 и свободные члены с обеих сторон:

$$h = \frac{F}{\pi K} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (22)$$

$$A = \frac{F}{\pi K} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}, \quad (23)$$

$$B = \frac{F}{\pi K} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi)\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}. \quad (24)$$

Уравнения (22), (23) определяют полуоси a и b области соприкосновения при заданной силе F (A и B — известные для данных тел величины). После этого с помощью соотношения (22) можно определить зависимость между силой F и вызываемым ею сближением тел h . Интегралы в правых частях уравнений эллиптические.

Применим полученные формулы к соприкосновению двух шаров с радиусами r и r' . В этом случае:

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right). \quad (25)$$

Из соображений симметрии ясно, что $a = b$, т.е. областью соприкосновения является круг. Из (23), (24) получим для радиуса области соприкосновения:

$$a = F^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{K} \cdot \frac{rr'}{r+r'} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (26)$$

h в данном случае — это разность между суммой $r + r'$ и расстоянием между центрами шаров. Из (25) получим соотношение между F и h :

$$h = F^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{K} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (27)$$

Зависимость вида $h = \text{const } F^{\frac{2}{3}}$, $\alpha^{\frac{3}{2}}$ имеет место не только для шаров, но и для других тел конечных размеров. В этом легко убедиться из соображений подобия.

Если провести замену $a^2 \rightarrow \alpha a^2$, $b^2 \rightarrow \alpha b^2$, $F \rightarrow \alpha^{\frac{3}{2}} F$, где α — произвольная постоянная, то уравнения (23), (24) останутся неизменными. В уравнении же (22) правая часть умножится на α , и для того, чтобы оно оставалось неизменным, надо изменить h на αh . Отсюда следует, что F должно быть пропорционально $h^{\frac{3}{2}}$.

Таким образом, получено решение задачи Герца в общем виде, однако ответ записывается в неявной форме. В [6] рассмотрен общий случай контакта двух тел из одинакового материала, сжимаемых силой в вертикальном направлении, при радиусах кривизны r_1 и r_2 для первого тела, r_1' и r_2' для второго.

Выпишем, после подстановки в явном виде, получающиеся приближенные формулы [6] для двух сферических тел:

А) размеры площадки контакта

$$a = b = 0,9086 \sqrt[3]{F \frac{rr'}{r+r'} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (28)$$

В) глубина проникновения (сближение соприкасающихся тел)

$$h = 0,8255 \sqrt[3]{F^2 \frac{r+r'}{rr'} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}. \quad (29)$$

С) наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = 0,5784 \sqrt[3]{F \frac{r+r'}{rr'} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}. \quad (30)$$

Приближенную оценку характерной величины давления в контакте проведем на основе формулы (28).

Данные сведены в таблицу, в строках которой вписаны численные значения площади соприкосновения и давления в месте контакта при разных модулях Юнга (упругости) исследуемого материала. Данные приведены для коленного сустава с радиусом кривизны 20 мм и на миллиметр большей суставной сумкой, при двух зна-

Таблица — Сравнительный анализ контактных деформаций, возникающих при обычных и предельных нагрузках в модели коленного сустава человека с различными значениями упругости поверхностей сустава

Модуль упругости, Па	Радиус области контакта a , м		Сближение за счет деформации h , м		Давление в контакте P , Па	
	10^7	0.0111	0.0239	0.0120	0.0558	8.4178×10^5
10^8	0.0052	0.0111	0.0026	0.0120	3.9072×10^6	8.4178×10^6
10^9	0.0024	0.0052	0.0006	0.0026	1.8136×10^7	3.9072×10^7
при величине силы нагрузки F , кН						
	1	10	1	10	1	10

чениях сжимающей силы $F = 1 \cdot 10^3$ Н и $F = 1 \cdot 10^4$ Н, коэффициентом Пуассона равным 0,332 [7].

Построим графики зависимости размеров площадки и глубины соприкосновения от силы, сжимающей тела. Видно, что для более жестких образцов значение контактного давления больше. Так же видно, что если из костей вымываются вещества, обеспечивающие их твердость, то для них значение деформаций будет велико даже при средних нагрузках, что показано в предложенной модели. Это соответствует реальности и наблюдается в медицинской практике.

Другое ограничение (условие 1) состоит в рассмотрении соприкасающихся тел в рамках модели сплошной среды с изотропными характеристиками. Понятно, что на микроуровне молекулярная структура уже играет существенную роль, поэтому подобное приближение довольно условно. В связи с этим решение задачи Герца с более точными геометрическими характеристиками соприкасающихся поверхностей (в отличие от рассмотренного случая) лишено смысла, так как условие 1 само по себе является весьма грубым приближением.

Выводы

При постановке задачи Герца используется модель сплошной упругой однородной среды и предположение малости деформаций.

В месте соприкосновения сустава с суставной сумкой образуется контактная площадка.

Решение задачи Герца позволяет найти радиус контактной площадки и величину прогиба в зависимости от приложенной нагрузки.

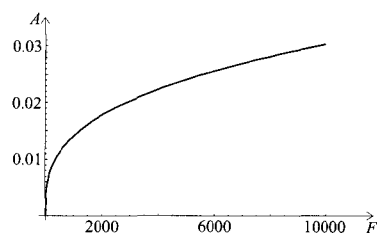


Рисунок 4 — Зависимости размеров площадки от силы, сжимающей тела для модели тазобедренного сустава

Типичные значения:

радиус зоны контакта от 0,011 м до 0,005 м;
глубина проникновения от 0,012 м до 0,003 м;
контактное давление от $8,4178 \times 10^5$ до $3,9072 \times 10^7$ Па.

Очевидно, предельные значения соответствуют не реализуемым в реальности ситуациям для тканей человека.

Предельное значение прочности коленного сустава человека на сжатие равно $1,7 \times 10^8$ Па [2], а максимальное давление, полученное нами для предельных нагрузок практически не превышает этого значения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента Российской Федерации, номер МК-2524.2008.1.

Список литературы

1. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. — М.: Наука, 1987. — 246 с.
2. Дружинин, Г.В. Учет свойств человека в моделях технологий / Г.В. Дружинин. — М.: Наука, 2000. — 327 с.
3. Циглер, Ф. Механика твердых тел и жидкостей / Ф. Циглер. — М.; Ижевск: РХД, 2002. — 912 с.
4. Чигарев, А.В. Биомеханика / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев. — Минск: Технопринт, 2004. — 306 с.
5. Чигарев, А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев. — Минск: Технопринт, 2000. — 425 с.
6. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. — Киев: Наук. думка, 1988. — 736 с.
7. Проблемы прочности в биомеханике / под ред. И.Ф. Образцова. — М.: Высш. шк., 1988. — 311 с.

Chigarev A.V., Borisov A.V.

Mathematical deformation model of human knee and numerical evaluation of its deformations

The mathematical calculation of the knee joint, with consideration of deformations introduces large practical concern from the point of view of medicine and artificial limb industry. In the article one of versions of such calculation is offered. The elastic deformations in contact (the problem of Hertz) are investigated. The numerical calculations of the radius of the zone of contact, of the depth of penetration and of contact pressure are conducted.

Поступила в редакцию 15.12.2008