УДК 621.002

Кане М.М.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССОВ ЗУБОНАРЕЗАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЕН КАК СЛУЧАЙНЫХ

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

В статье приведены требования к характеристикам случайных процессов, предъявляемых статистическими методами моделирования этих процессов. Применительно к процессам зубонарезания цилиндрических шестерен дана классификация этих характеристик. Приведены результаты изучения таких характеристик процессов, как законы распределения, стационарность и эргодичность показателей точности зубьев цилиндрических шестерен при их зубофрезеровании червячной фрезой и зубодолблении в различных условиях.

Задачи исследования

При использовании статистических методов для моделирования случайных процессов к экспериментальным данным предъявляются определенные требования [1, 2, 3]:

1. зависимые и независимые переменные являются случайными величинами с нормальным законом распределения*;

2. дисперсия зависимой переменной y не зависит от абсолютных значений y – остается постоянной или однородной при различных наблюдениях y;

3. значения независимых переменных $x_1, x_2 \ldots x_m$ измеряются с пренебрежимо малыми ошибками по сравнению с ошибкой измерения у;

4. переменные $x_1, x_2 \ldots x_m$ линейно независимы;

5. процесс формирования у является стационарным и эргодическим;

6. экспериментальные данные получены из ряда независимых испытаний, наблюдений и образуют случайную выборку из данной генеральной совокупности;

7. результаты наблюдений не содержат резко выделяющихся значений, не принадлежащих к данной генеральной совокупности.

Характеристики экспериментальных данных, определяемых требованиями 1 и 5, являются основными, так как они зависят от физической природы изучаемого процесса. Характеристики экспериментальных данных, определяемых остальными требованиями (2...4, 6, 7), являются дополнительными, так как они зависят от условий получения и измерения экспериментальных данных.

При изучении процессов зубонарезания цилиндрических шестерен зависимыми переменными у обычно являются показатели точности и качества поверхностей зубьев. В данной статье приведены результаты анализа законов распределения, стационарности и эргодичности показателей точности зубьев цилиндрических шестерен согласно ГОСТ 1643-81 после зубофрезерования червячной фрезой и зубодолбления.

Основные условия и результаты исследования

С целью выбора теоретических законов распределения, с помощью которых можно описать эмпирическое распределение различных параметров точности зубчатых колес, отметим общие свойства этих показателей как случайных величин.

---

* независимые переменные могут быть и неслучайными величинами, в частности, в активных экспериментах

1. Все выбранные параметры определяются влиянием большого числа факторов, законы распределения которых неизвестны. Конкретное значение каждого из параметров может рассматриваться как случайная величина, полученная в результате сложения или умножения большого числа небольших ошибок.

2. В основном показатели точности шестерен (за исключением $-E_{a''i}$ и $+E_{a''5}$) являются существенно положительными величинами, так как интерес вызывает обычно абсолютное значение их отклонения от номинала без учета его направления.

3. При оценке точности колеса по названным параметрам (за исключением F_{pr}) в расчет принимается их экстремальное, т.е. максимальное (F''_{ir}, f''_{ir}, $+E_{a''s}$, f_{ptr}, f_{fr}, $F_{\beta r}$, f_{pbr}, F_{rr}) или минимальное ($-E_{a''i}$) значения.

4. Большинство показателей точности зубчатых колес представляет собой разность между наибольшими и наименьшими значениями некоторых измеряемых величин (F''_{ir}, f''_{ir}, F_{vwr}, F_{rr}, f_{ptr}, f_{pbr}), либо расстояние между крайними положениями определенных поверхностей ($F_{\beta r}$, f_{fr}, $+E_{a''s}$, $-E_{a''i}$).

Для описания эмпирических законов распределения показателей точности цилиндрических зубчатых колес при их зубонарезании с учетом описанных выше особенностей их формирования мы выбрали следующие законы распределения.

1. *Нормальное распределение*. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях. Этому закону подчиняются параметры, представляющие собой сумму достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых весьма нежестких ограничений), и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]; \tag{1}$$

$$-\infty < x < \infty, -\infty < m < \infty, \sigma > 0.$$

где σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины *x; m* – математическое ожидание этой величины.

Закон двухпараметрический, так как величина *f(x)* определяется двумя параметрами – m и σ.

2. *Логарифмически нормальное распределение.* Это распределение описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону с параметрами m и σ.

Плотность распределения случайной величины *x* имеет вид

$$f(x,m,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(\ln x-m)^2\right],\\ x>0, -\infty<m<\infty, \sigma>0,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \qquad (2)$$

Это распределение применяется для описания изменения неотрицательных случайных величин, значения которых получаются в результате умножения большого числа небольших ошибок, аналогично тому, как нормальное распределение имеет место при сложении ошибок.

Закон двухпараметрический. Параметры m и σ.

3. *Распределение типа А (распределение Лапласа-Шарлье).* Это распределение является обобщением нормального распределения и распределения Пуассона. Плотность вероятности для этого распределения определяется по формуле

$$f_A(x)=f(x)+\frac{m_3}{\sigma^3}\frac{f_{(x)}^{(3)}}{6}+\left(\frac{m_4}{\sigma^4}-3\right)\frac{f_{(x)}^{(4)}}{24}. \qquad (3)$$

где $f(x)$ – плотность нормального распределения; $f_{(x)}^{(3)}$ и $f_{(x)}^{(4)}$ – производные функции нормального распределения; m_3 и m_4 – 3-й и 4-й центральные моменты.

Первый член правой части уравнения (3) дает нормальное распределение, второй член отражает влияние косости кривой, а третий – влияние крутости кривой. Распределению типа А подчиняются величины, распределение которых близко к нормальному, но имеет асимметрию и эксцесс, отличные от нуля.

Закон четырехпараметрический. Параметры $\bar{x}$, σ, m_3 , m_4 . Это одно из наиболее универсальных распределений и его можно рекомендовать для оценки точности механической обработки.

4. *Распределение Пирсона типа I.* Это распределение является частным случаем распределений Пирсона (типа I-VII). Уравнение кривой типа I имеет вид

$$f_I(x)=f_{I.0}\left(1+\frac{x}{l_1}\right)^{q_1}\left(1-\frac{x}{l_2}\right)^{q_2}, \qquad (4)$$

где $x=\dfrac{x^1-\hat{x}}{c}=x^1-\bar{x}^1-\dfrac{\sigma r_3}{2}\cdot\dfrac{S+2}{S-2}$;

$$\bar{x}^1=\bar{x}/c;\quad x^1=x/c,$$

где x – текущее значение случайной величины; $\hat{o}$ – мода распределения; c – величина разряда.

$$S=\frac{6(r_4-r_3^2-1)}{3r_3^2-2r_4+6}$$

r_3 , r_4 – 3-й и 4-й основные моменты.

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{(S-2) \pm S(S+2)\frac{r_3}{t}\right.;$$

$$t = \sqrt{r_3^2(S+2)^2 + 16(S+1)};$$

$$l_1 = \frac{q_1 l}{S-2}\ ;\ l_2 = \frac{q_2 l}{S-2};$$

$$f_{I,0} = \frac{l_1^{q_1} \cdot l_2^{q_2}}{l^{q_1+q_2+1}} \cdot \frac{\Gamma(q_1+q_2+2)}{\Gamma(q_1+1)\cdot\Gamma(q_1+1)}.$$

здесь Г – гамма функция.

Распределение Пирсона типа I является распределением экстремальных значений. Оно применяется для описания изменения экстремальных характеристик различных явлений и объектов. Это распределение двухпараметрическое. Параметрами являются $\hat{x}$ и S.

5. *Распределение Рэлея.* Это распределение (известно также как *распределение Максвелла, распределение эксцентриситета*) называется распределением положительной случайной величины с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{k^2} e^{-\frac{x^2}{2k^2}} \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

где k – числовой параметр ($k > 0$).

Закон однопараметрический. Параметр k .

Этот закон применяется для описания распределения отклонений эксцентриситета осей, биения поверхностей деталей, непараллельности или неперпендикулярности двух плоскостей или оси и плоскости и других непрерывных положительных случайных величин.

6. *Закон модуля разности*. Функция плотности

$$f(\rho) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}[l^{\frac{-(\rho-\rho_0)^2}{2}} + l^{\frac{-(\rho+\rho_0)^2}{2}}]. \tag{6}$$

Если $r = |x_1 - x_2|$, где x_1 и x_2 распределены по нормальному закону с параметрами $Mx_1=a_1$, $Mx_2=a_2$, $M(x_1–x_2)=a_0$ и дисперсией $(x_1–x_2)$ равной σ_0^2, то $\rho_0 = a_0/\sigma_0$; $\rho = r/\sigma_0$.

Закон двухпараметрический. Параметры ρ , ρ_0.

Закону модуля разности могут подчиняться такие случайные величины (без учета знака направления), как непараллельность осей цилиндрических поверхностей в фиксированной плоскости, непараллельность плоскостей, которые в номинале должны быть параллельны, или оси и плоскости; погрешность формы, рассматриваемая как разность между максимальными и минимальными величинами, и другие случайные величины, представляющие собой абсолютное значение разности некоторых случайных величин, изменяющихся по нормальному закону.

7. *Распределение размахов*. Функция плотности выражается формулой

$$\varphi_n(x,a) = \frac{n(n-1)}{a^n 4\pi^2} e^{-\frac{x^2}{4n^2}} \quad (7)$$

Закон двухпараметрический. Параметры *n, a*. Закон характеризует распределение разностей между большим и меньшим значениями случайной величины в выборке. Ему могут подчиняться те же величины, что и в двух предыдущих пунктах.

Анализ законов распределения указанных показателей точности производился для следующих условий зубообработки:

1) при зубофрезеровании (установка заготовки на жесткую оправку и торец): а) в производственных условиях; б) в лабораторных условиях.

2) при зубодолблении (установка заготовки на жесткую (неразжимную) оправку и торец) в производственных условиях.

В производственных условиях исследования выполнялись в основном на Минском заводе шестерен. Использовались оборудование и оснастка, соответствующие требованиям нормативно-технических документов. В лабораторных условиях исследования проводились на ОАО «Вистан» при испытаниях новых зубофрезерных станков, изготовленных на этом предприятии.

Для сбора экспериментальных данных была обработана 21 партия зубчатых колес различных типоразмеров в производственных условиях и 9 партий зубчатых колес в лабораторных условиях. Размер партии находился в пределах 50-100 шт. Обработка каждой партии производилась на одном станке, при постоянной настройке инструмента. Подвергшиеся исследованию зубчатые колеса имели следующие основные характеристики: модуль m=2-6 мм, наружный диаметр $D_н$=70-300 мм, степень точности 7-9 по ГОСТ 1643-81.

Вывод о законе распределения каждого из указанных показателей точности для каждого из названных условий зубообработки делался на основании анализа 5-10 партий зубчатых колес.

Установление вида функции плотности вероятности, в наилучшей степени описывающей фактическое распределение исследуемых показателей точности, производилось в следующей последовательности:

1) по опытным данным определялись параметры эмпирического распределения (среднее арифметическое $\bar{x}$, среднее квадратическое отклонение σ, асимметрия α, эксцесс τ, эмпирические частоты $\rho_{iэ}$ для найденных середин интервалов x_i);

2) выравнивали эмпирическую кривую по каждому из названных выше законов распределения, т.е. рассчитывали теоретические частости ρ_{iT}, соответствующие определенным серединам интервалов;

3) проводили сравнение каждой из теоретических кривых плотности вероятностей с эмпирической по критериям Пирсона и Колмогорова;

4) на основании анализа указанных критериев согласия выбирали закон распределения, не противоречащий эмпирическому.

Построение теоретических кривых распределения и расчет критериев согласия производился на ПК с использованием стандартных и специальных программ.

В таблице приведены полученные результаты. Эмпирическое распределение считалось не противоречащим теоретическому при значениях критериев Пирсона $P(\chi 2) > 0{,}05$ и Колмогорова $P(\chi) > 0{,}3$. Имеющиеся в таблице прочерки указывают на то, что для данных условий и показателей точности исследования не проводились.

Стационарным в широком смысле называется процесс, для которого математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$, т.е.

$$m_x(t) = m_x = \text{const}, \tag{8}$$

$$D_x(t) = D_x = \text{const}, \tag{9}$$

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau). \tag{10}$$

С учетом сказанного анализ стационарности процессов зубофрезерования для названных параметров точности прямозубых цилиндрических зубчатых колес и условий обработки производился в следующей последовательности.

1. Производилась обработка партии деталей при соблюдении указанных выше условий.

2. Полученную реализацию из N измерений разбивали на K (5...10) отрезков по n измерений в каждом и для каждого из отрезков определяли значения $\bar{x}_i$ и $\sigma^2_{x_i}$, а также $\bar{x}$, $\bar{\sigma}^2_x$ и σ^2_x.

$$\bar{x} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i \ , \tag{11}$$

$$\sigma^2_x = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i \sigma^2_{x_i}}{f} \ , \tag{12}$$

$$f = \sum_{i=1}^{K} f_i = K(n-1), \tag{13}$$

$$\bar{\sigma}^2_x = \frac{n}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \ . \tag{14}$$

3. С помощью критерия Кохрэна определяли, являются ли значения $\sigma^2_{x_i}$ оценками одной и той же генеральной дисперсии

$$g = \frac{\max \sigma^2_{x_i}}{\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} + \ldots + \sigma^2_{x_k}} \ . \tag{15}$$

Если найденной значение g окажется меньше, чем $g_{1-p(K,f)}$ (здесь $1-p$ – выбранный уровень значимости, $f = n-1$ – число степеней свободы), то нулевую гипотезу следует принять и расхождение между дисперсиями считать незначимым. 4. С помощь F-критерия Фишера проверяли гипотезу о том, являются ли значения $\bar{x}_i$ оценками одной и той же генеральной средней

$$F = \bar{\sigma}^2_x \big/ \sigma^2_x \tag{16}$$

Если $F \le F1\text{-}p_{(k-1,N-K)}$, то нулевая гипотеза о равенстве всех генеральных средних в совокупности справедлива.

В производственных условиях принимали N=100, K=10, $g_{0,05(10,9)}$=0,244, $F_{0,05(9,90)}$=2,1. В лабораторных условиях N=50, K=5, $g_{0,05(5,9)}$=0,424, $F_{0,05(4,45)}$=2,6.

Полученные результаты указывают на то, что процесс зубофрезерования цилиндрических шестерен для рассмотренных показателей точности зубьев и условий реализации является стационарным.

Стационарная случайная функция обладает *эргодическим свойством*, если ее характеристики (математическое ожидание m_x , корреляционная функция $K_{xx}(\tau)$ и дисперсия $Д_x$) могут быть рассчитаны как соответствующие средние по времени для одной реализации большой продолжительности. Иными словами, эргодичность определяет способность процесса к воспроизведению своих характеристик в различных реализациях. Достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции (по математическому ожиданию) является

$$\lim_{\tau \to \infty} K_{xx}(\tau) = 0 \qquad (17)$$

Это условие справедливо и для нормированной корреляционной функции $R_{xx}(\tau)$.

Кроме того, условием эргодичности процесса является постоянство в статистическом смысле значений m_x и $Д_x$ для различных реализаций:

$$m_x(j) = m_x = const \qquad (18)$$

$$D_x(j) = D_x = const \qquad (19)$$

где j – номер реализации.

Таблица

Результаты анализа законов распределения показателей точности зубьев цилиндрических зубчатых колес после зубофрезерования и зубодолбления

№№ пп	Показатели точности зубчатого венца	Вид и условия зубообработки		
		Зубофрезерование		Зубодолбление
		Лабораторные условия	Производственные условия	Производственные условия
1	F'_{ir}	–	$\frac{Н, Л, П, М_р, Р_х}{А}$	–
2	F_{pr}	$\frac{А, Н, Р, П}{Л}$	$\frac{Л, Н, П, Р}{А}$	–
3	F''_{ir}	$\frac{А, Н, П}{Л}$	$\frac{Н, Л, П}{А}$	$\frac{Н, Л, П}{А}$
4	F_{rr}	$\frac{Л, Н, Р_х, П, Р}{А}$	$\frac{Н, Л, П, М_р, Р, Р_х}{А}$	–
5	F_{vwr}	$\frac{А, П, Н, Р, Р_х}{Л}$	$\frac{Л, Н, П, Р, Р_х}{А}$	–
6	f'_{ir}	–	$\frac{Н, А, П, Р, Р_х}{Л}$	–
7	f_{ptr}	$\frac{Н, А, П, Р_х}{Л}$	$\frac{Л, Н, П, Р_х}{А}$	–

Окончание таблицы

№№ пп	Показатели точности зубчатого венца	Вид и условия зубообработки		
		Зубофрезерование		Зубодолбление
		Лабораторные условия	Производственные условия	Производственные условия
8	$f_{ir}^{''}$	$\frac{А,Н,П,Р_х}{Л}$	$\frac{Л,Н,П,Р_х}{А}$	$\frac{А,Н,Р_х}{Л}$
9	f_{fr}	$\frac{Н,Л,П}{А}$	$\frac{Н,Л,П,М_р}{А}$	–
10	f_{pbr}	$\frac{П,Н,Л}{А}$	$\frac{А,Л,Н,М_р}{П}$	–
11	$F_{\beta r}$	$\frac{Н,П,А,Р,Р_х}{Л}$	$\frac{А,Н,Р,П,Р_х}{Л}$	$\frac{П,А,Н,Р_х,Р}{Л}$
12	$+E_{a''s}$	$\frac{Л,Н,П,Р}{А}$	$\frac{Л,Н,П,Р}{А}$	$\frac{Н,Л,П,Р}{А}$
13	$-E_{a''i}$	$\frac{Л,А,П,Р}{Н}$	$\frac{Н,П,Л,Р}{А}$	$\frac{А,Л,Р,Н}{Н}$

Примечания: 1. Приняты следующие обозначения: Н – нормальн. распределение; Л – логарифмич. нормальное; Р – распределение Релея (Максвелла, эксцентриситета); А – типа А (Грамма-Шарлье), П – Пирсона тип 1, $Р_х$ – размахов, $М_р$ – модуля разности.

2. В знаменателе дроби для каждого показателя качества приведен индекс закона распределения в наилучшей степени описывающего его фактическое распределение; в числителе дроби – индекса законов распределения (в порядке уменьшения их соответствия эмпирическому распределению) также пригодных, хотя и с меньшей степенью точности, для описания распределения данного показателя.

Анализ эргодичности процесса зубофрезерования цилиндрических шестерен в производственных и лабораторных условиях был выполнен для названных выше показателей точности зубьев, условий обработки и типоразмеров шестерен.

Данный анализ производился в такой последовательности:

1. На одном и том же станке при соблюдении указанных выше ограничений обрабатывалось К (3-5) партий зубчатых колес по 50...100 деталей различными инструментами.

2. По результатам измерений деталей производилось построение полученных реализаций случайных последовательностей каждого из рассматриваемых параметров точности венца в порядке обработки. Анализ совокупностей этих реализаций графическим способом позволяет предварительно оценить эргодичность процесса.

3. Для каждой из К реализаций определялись значения $\bar{x}_j$, $\sigma^2_{x_j}$, $R_{xx}(\tau)$, а для всей совокупности значений рассматриваемого параметра в К партиях зубчатых колес рассчитывались значения $\bar{x}$, $\bar{\sigma}^2_x$ и σ^2_x по формулам (11)...(14).

4. Затем с помощью критериев Кохрэна и Фишера (см. формулы (15) и (16)) проверяли соблюдение условий (18) и (19) для различных реализаций процесса.

Полученные результаты подтвердили, что процесс зубофрезерования цилиндрических шестерен в рассмотренных условиях для изученных показателей точности зубьев обладает эргодическим свойством.

Выводы.

1. В наилучшей степени распределение рассмотренных 13 показателей точности зубьев при зубофрезеровании и зубодолблении описывается распределением типа А и логарифмически нормальным распределением.

2. Для описания распределений всех рассмотренных показателей точности зубьев шестерен в изучаемых условиях обработки может быть использован также закон нормального распределения.

3. Процесс зубофрезерования цилиндрических шестерен червячной фрезой для основных показателей точности зубьев является стационарным и обладает эргодическим свойством.

4. Имеются предпосылки получения надежной модели влияния различных факторов на основные показатели точности зубьев цилиндрических шестерен статистическими методами при их зубофрезеровании червячной фрезой и зубодолблении по одной реализации достаточно большой продолжительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента: пер. с анг. / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М. : Мир, 1981. – 520 с.

2. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное издание / С.А. Айвазян, Е.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

3. Кане М.М. Предпосылки эффективности применения статистических методов для моделирования технологических процессов / М.М. Кане: сб. научн. ст. Машиностроение, вып. 30.– Минск: БНТУ, 2017.

УДК 6.21.81:658

Косолапов И.Ю., Беляева Г.И.

РАЗМЕРНЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ ВАЛА ПО ЛИНЕЙНЫМ РАЗМЕРАМ

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Размерный анализ технологических процессов позволяет еще на стадии технологического проектирования решить важнейшие задачи, приводящие к значительной экономии материальных затрат на производство с улучшением качества проектируемых технологических процессов и изделия в целом. В работе приведен расчет технологических размерных цепей с использованием теории графов.

Главная задача размерного анализа технологического процесса – правильное и обоснованное определение промежуточных и окончательных размеров и допусков на них для обрабатываемой детали. Особенно важно это для линейных размеров, связывающих неоднократно обрабатываемые противолежащие поверхности. Определение припусков на такие поверхности расчетно-аналитическим или табличным методами значительно затрудняет определение промежуточных технологических размеров и их отклонений.

Последовательный размерный анализ технологического процесса состоит из трех этапов: