УДК 517.5

О полунепрерывности наилучших приближений постоянными

Катковская И. Н.[1], Кротов В. Г.[2]
[1] Белорусский национальный технический университет
[2] Белорусский государственный университет

Пусть (X,d,μ)–ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ. Будем обозначать открыты шар и сферу центром в точке $x\in X$ радиуса $r>0$ соответственно как

$B(x,r)=\{y\in X : d(x,r)<r\}, C(x,r)=\{y\in X : d(x,r)=r\}$.

Если $p>0$ и функция $f\in L^p(X)$, то для любого шара $B\subset X$ существует такое число $I_B^{(p)} f\in R,$ что

$$\inf_{I\in R}\int_B \left|f(y)-I\right|^p d\mu(y)=\int_B \left|f(y)-I_B^{(p)}\right|^p d\mu(y).$$

При $p>1$такое число $I_B^{(p)} f$ единственно. Если же $0<p\le 1$это не так. Множество таких числе ограничено и замкнуто, поэтому определены следующие величины:

$$m_B^{(p)} f=\inf I_B^{(p)} f, M_B^{(p)} f=\sup I_B^{(p)} f.$$

Из общих теорем многозначного анализа нетрудно вывести измеримость этих наилучших приближений, как функций центра шара. В следующих двух теоремах рассматриваются их свойства полунеперывности.

Теорема 1. *Если* $p>0$, *то для любого шара* $B\subset X$ *1) функция* $f\mapsto m_B^{(p)} f, f\in L^p(B),$ *полунепрерывна снизу на* $L^p(B)$ *;2) функция* $f\mapsto M_B^{(p)} f, f\in L^p(B),$ *полунепрерывна сверху на* $L^p(B)$.

В следующей теореме предполагается выполненным условие удвоение: существует акая постоянная $\alpha_\mu\ge 1$, что

$$\mu(B(x,2r))\le a_\mu \mu(B(x,r)), x\in X, r>0.$$

Теорема 2. *Пусть* $p>0$, $x_0\in X, r>0$ *и*

$$\mu(C(x_0,r))=0. \qquad (1)$$

Тогда 1) функция $f\mapsto m_{B(x,r)}^{(p)} f, x\in X,$ *полунепрерывна снизу в точке* x_0 *;2) функция* $x\mapsto M_{B(x,r)}^{(p)} f, x\in X,$ *полунепрерывна сверху в точке* x_0.

Условие (1) в теореме 2 существенно, без него она теряет силу.