ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 4 2010
СЕРЫЯ ФІЗІКА-ТЭХНІЧНЫХ НАВУК

УДК 621.002:519.87

Г. Н. ЗДОР, Е. Р. НОВИЧИХИНА

ПОВЫШЕНИЕ АДЕКВАТНОСТИ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНООБРАБАТЫВАЮЩИХ УЧАСТКОВ И ЛИНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ИХ РАБОТЫ

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 10.04.2010)

Введение. Объектом исследования являются механообрабатывающие участки и линии машино- и приборостроения с серийным типом производства, которые в дальнейшем будем обобщенно называть производственными системами (ПС). Область исследования – прогнозирование с помощью математического моделирования показателей функционирования ПС, таких как выработка, производительность, длительность производственного цикла и использование оборудования.

Для анализа вариантов проектируемых ПС и выбора стратегий оперативного управления действующих ПС широко применяются аналитические модели марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем [1]. Наибольшее распространение получили методы теории систем и сетей массового обслуживания, а также метод, основанный на непосредственном использовании уравнений Колмогорова для марковских процессов [2]. Модификация последнего метода, предназначенная для анализа многокомпонентных систем, получила название метода динамики средних (ДС) [3, 4]. По сравнению с моделями массового обслуживания модели ДС более информативны и позволяют анализировать ПС любой размерности без усложнения самой модели. Моделям ДС и посвящена данная статья.

Применение моделей ПС по методу ДС сопряжено со следующими проблемами. Во-первых, всегда остается открытым вопрос о степени адекватности таких моделей с учетом допущения о простейших (пуассоновских) потоках событий (в частности, о наличии у потоков ПС свойства стационарности). Во-вторых, модели ДС дают решение в явном аналитическом виде только для финальных вероятностей состояний, когда время наблюдения $T \to \infty$. Это так называемый установившийся (стационарный) режим системы. На практике же требуется прогноз показателей функционирования ПС на более короткий и конкретный период (например, на год или месяц). Кроме того, в этом случае речь должна вестись уже не о факте, а о вероятности выполнения или невыполнения планового задания. Средних значений показателей функционирования ПС становится недостаточно и требуется вероятностная интервальная оценка.

Цель исследования – вывод зависимостей, корректирующих результаты марковских моделей ДС для производственных систем в условиях неустановившегося режима их работы и дополняющих эти результаты вероятностными интервальными оценками.

Постановка задач исследования. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи.

1. *Определить, существует ли у ПС рассматриваемого типа установившийся режим работы в общем случае.*

Использование результатов метода ДС, отражающих финальные вероятности, правомерно, если у объекта имеется стационарный режим работы. Условия существования и единственности такого режима строго определены для отдельных разновидностей марковских процессов (эргодические теоремы Фостера, Маркова – Берштейна, Феллера, Мустафы и др.) [5]. Однако процессы ПС в общем случае и в строгом понимании марковскими не являются. В этих условиях общего теоретического ответа на вопрос о наличии у ПС свойства эргодичности и финальных вероятностей нет. Считается, что при представлении ПС замкнутой системой массового обслуживания ответ практически всегда положительный, при разомкнутом же или смешанном представлении вопрос должен решаться в каждом конкретном случае отдельно [6, 7]. В [6] показано, что значения большинства характеристик моделируемой ПС в строгом понимании вообще никогда не устанавливаются, они не стремятся к математическому ожиданию, а продолжают ограниченно колебаться около него при сколь угодно большой продолжительности времени моделирования. Такой режим ПС можно считать установившимся лишь условно. Сообщалось, что для рассматриваемого случая остаточные флуктуации стабилизировались в границах ± (3–5)% математического ожидания.

Предстоит проверить наличие установившегося режима работы у ПС рассматриваемого вида с учетом различных факторов и во всем диапазоне реалистичных исходных данных.

2. *Определить длительность переходного периода до вхождения ПС рассматриваемого вида в условно установившийся режим и диапазон остаточных флуктуаций для него.*

Если будет установлено, что у ПС условно установившийся режим существует, то предстоит определить величину остаточных флуктуаций, которая обусловливает случайную составляющую ошибки ДС. Далее следует определить зависимость длительности переходного периода от различных факторов. Ситуация, когда анализируемый период работы ПС меньше переходного, будет означать, что результаты ДС требуют коррекции.

Проблема здесь может заключаться в медленной статистической сходимости выборочных средних значений [8] и их повышенной чувствительности к начальному состоянию [9]. Период вхождения ПС в условно стационарный режим для примеров, приведенных в [6], соответствовал приблизительно $1{,}5 \cdot 10^3$ выполненных заявок для замкнутой системы и $5 \cdot 10^4$ – для разомкнутой системы. Предварительные исследования показывают, что при более детальном представлении процесса ПС переходный период во много раз превосходит указанные значения. Характер изменения длительности переходного периода в самом общем виде можно представить, обратившись к теореме [5]: если множество состояний S стохастически непрерывной цепи Маркова с непрерывным временем конечно и существует состояние, достижимое из любого состояния, то цепь Маркова эргодична и имеет единственное стационарное распределение, совпадающее с эргодическим, при этом скорость сходимости к эргодическому распределению выражается неравенством

$$\sum_{j \in S} \left| P_j(t) - \pi_j \right| \le a e^{-bt}, \ t \ge 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$ – некоторые постоянные, t – время, π_j – финальные вероятности, $P_j(t)$ – текущие вероятности.

Понятно, что a и b являются постоянными только для конкретных условий. Численные значения этих постоянных применительно к ПС и их зависимость от различных факторов предстоит выяснить.

3. *Получить зависимости, корректирующие и дополняющие результаты моделей ДС для условий, когда анализируемый период работы ПС меньше периода вхождения в установившийся режим.*

Погрешность марковских моделей ПС может составлять в зависимости от условий 20–30% [5, 10]. Различие имитационных значений для переходного процесса от аналитических значений для стационарного процесса в ПС может достигать 60% [6]. Для большинства задач анализа ПС такая погрешность является неприемлемой. С одной стороны, аналитические модели более точных результатов дать не могут, так как в силу своих принципиальных допущений и ограничений не позволяют учесть многие особенности ПС. На это способно только имитационное моделирование [1, 9]. С другой стороны, было бы неразумно отказываться и от известных преимуществ аналитических моделей – универсальности, малой трудоемкости создания и использования, лучшей приспособленности к теоретическому анализу и оптимизации. Желательно, объединить достоинства обоих методов моделирования ПС. Те факторы, к которым нечувствителен метод ДС, можно единожды исследовать в имитационном эксперименте, по его результатам вывести регрессионные формулы и использовать их в дальнейшем в комплекте с формулами ДС. При этом на имитацию должен возлагаться учет следующих факторов в динамике: неординарность потоков деталей, взаимозависимость событий, отличие распределения исходных случайных величин от экспоненциального, дисперсия результатов. В итоге получим готовую к применению уточненную, по сути, аналитически-имитационную модель ПС в формульном виде.

В такой постановке применительно к ПС задача ранее не решалась.

Методика исследования. В работе используется аналитическое моделирование методом ДС, имитационное моделирование (ИМ) дискретно-событийного типа, статистическое моделирование (метод Монте-Карло), методы теории планирования эксперимента и регрессионного анализа.

Для оценки адекватности марковских моделей используется общепринятый способ сравнения их результатов с результатами заведомо более адекватных имитационных моделей.

Объектом моделирования по методу ДС является так называемый средний элемент системы, в нашем случае – средняя рабочая позиция (РП) в ПС. Выделим состав возможных состояний такой средней РП для общего случая [1]. Он будет соответствовать компонентам структуры фонда времени РП, представленной на рис. 1.

На рис. 1 приняты следующие обозначения: $T_з$ – время загрузки оборудования работой (наличия заказов); $T_{о.\ р}$ – время отсутствия работы; $T_{шт.\ к}$ – время штучно-калькуляционное; $T_п$ – время потерь по организационно-техническим причинам; $T_{шт}$ – время штучное; $T_{п.\ з}$ – время подготовительно-заключительное (подготовка операции и наладка); $T_{оп}$ – время оперативное; $T_{об}$ – время обслуживания; $T_о$ – время основное (технологическое); $T_в$ – время вспомогательное, не перекрываемое основным; $T_{р.\ х}$ – время рабочих ходов; $T_{х.\ х}$ – время холостых ходов (вспомогательные перемещения); $T_{прх}$ – время переходов (смена инструментов, переключение режимов, пуск и пр.); $T_{у\text{-}с}$ – время установки, снятия и закрепления детали (загрузка-выгрузка); $T_{изм}$ – время измерений; $T_{нак}$ – время приемки-выдачи локального накопителя; $T_{тр}$ – время простоя при транспортном обслуживании; $T_{снх}$ – время простоя из-за неполной синхронизации со смежными операциями (голодание, блокировка); $T_{т.\ о}$ – время технического обслуживания в процессе обработки; $T_{о.\ о}$ – время организационного обслуживания в течение смены; $T_{отд}$ – время на отдых и естественные надобности; $T_{пер}$ – время переналадки; $T_{рем}$ – время ремонта; $T_{орг}$ – время организационных и прочих простоев; $T_{ож.\ з}$ – время ожидания плановых заказов, обусловленное неритмичностью их поступления; $T_{от.\ з}$ – время отсутствия заказов; $T_{маш}$ – время машинное (работы по управляющей программе); $T_{пр}$ – время простоев по различным причинам при наличии работы. Все обозначения означают суммарное время нахождения РП в соответствующих состояниях за рассматриваемый период.

Согласно методу ДС, процесс работы РП описывается системой дифференциальных уравнений Колмогорова, неизвестными в которых являются вероятности нахождения РП в каждом из возможных состояний во времени. Вид уравнений

$$\frac{dP_i}{dt} = \sum_{j=1}^{J} \lambda_{ji}\ P_j - \sum_{l=1}^{L} \lambda_{il}\ P_i\ , (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (1)$$

где i – номер рассматриваемого состояния; N – общее количество состояний; J, j – количество и номер состояний, предшествующих i-му; L, l – количество и номер состояний, следующих за i-м; P_i, P_j – вероятности пребывания объекта в i-м и j-м состояниях; $\lambda_{j\,i}$, $\lambda_{i\,l}$ – интенсивности переходов из j-го состояния в i-е и из i-го состояния в l-е.

Для стационарного режима работы ПС левые части уравнений (1) обращаются в 0 и они из дифференциальных превращаются в алгебраические. Для

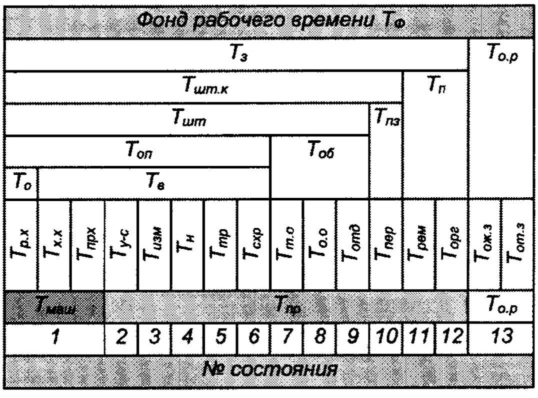

Рис. 1. Структура фонда времени РП и ее состояния

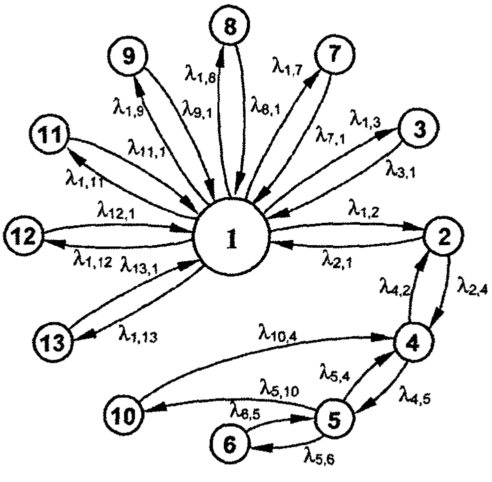

Рис. 2. Граф состояний «средней РП» в ПС

возможности аналитического решения такой системы уравнений одно из них заменяется очевидным нормировочным условием

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1 . \qquad (2)$$

По найденным значениям P_i прямым счетом находятся интересующие нас показатели функционирования ПС. В нашем случае количество уравнений составляет 13 по числу состояний, и система решалась методом LU-разложения.

Для выписывания уравнений Колмогорова используется связный, ориентированный, размеченный и взвешенный граф состояний РП, пример которого для наших исследований представлен на рис. 2.

Не переделывая исходный граф, можно учитывать и другие состояния, объединяя их с уже имеющимися и близкими по смыслу. При этом следует пересчитать значения интенсивностей, согласно свойству суперпозиции простейших потоков событий

$$\lambda = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k ,$$

где k и K – номер и количество объединяемых состояний.

Изменение последовательности переходов в графе того же состава состояний влечет изменение результатов в абсолютном выражении. В данной работе используются относительные показатели различия аналитических и имитационных результатов. Как показали предварительные исследования, эти показатели от последовательности переходов в графе уже не зависят. Таким образом, общность результатов исследования не теряется и для других конфигураций графа.

Базой для оценки адекватности результатов ДС служат результаты ИМ. Объектом ИМ является та же средняя РП, с теми же состояниями и теми же исходными данными, однако процесс представляется более реалистично (рис. 3). Так в ИМ учитываются следующие специфичные особенности ПС: групповые заявки; зависимость событий и величин; обратные связи и блокировки (пунктирные «сдерживающие дуги» в терминах модифицированных сетей Петри с управлением); смещение и усечение распределения случайных величин; детерминированный характер величин для транзактов одного ансамбля и пр. Например, машинное время обработки ($t_{маш}$) в модели меняется от партии к партии случайным образом, но для всех деталей одной партии

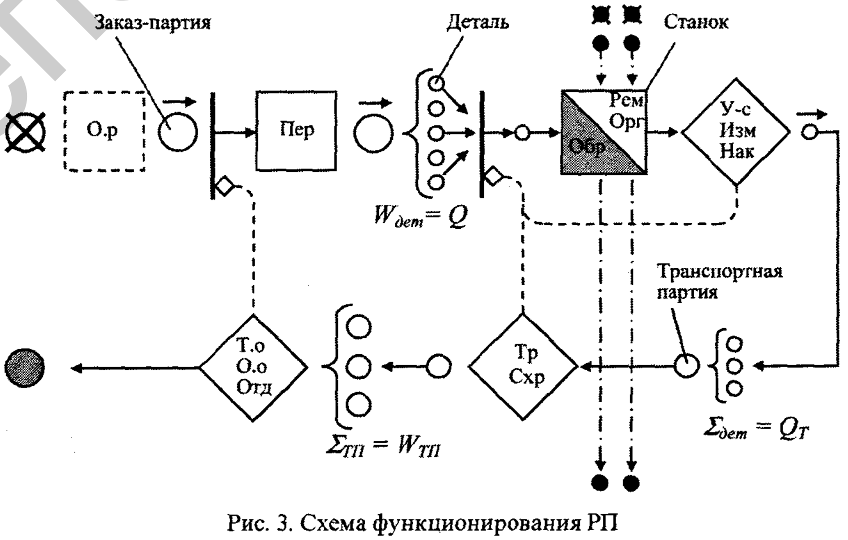

Рис. 3. Схема функционирования РП

остается одинаковым, так как однозначно регламентировано технологическим процессом и физически определяется постоянной длительностью данной управляющей программы ЧПУ.

Анализируемые параметры. Из возможных показателей использования оборудования ПС [11] для анализа выбран коэффициент использования по машинному времени $K_{маш}$ как наиболее универсальный, информативный и сопоставимый для любых ПС. В модели ДС значению $K_{маш}$ соответствует вероятность P_1. Имея $K_{маш}$, можно уже после моделирования прямым счетом определить средние производительность ПС, выработку и длительность производственного цикла выполнения заказа:

$$U = 60\ W_{РП}\ K_{маш} / t_{маш} / W_{оп}\ (\text{шт./ч}), \tag{3}$$

$$N = U\ T_ф\ (\text{шт.}), \tag{4}$$

$$T_ц = t_{маш}\ Q\ W_{оп} / (60\ K_{маш}\ W_{дубл}\ K_ц)\ (\text{ч}), \tag{5}$$

где $W_{РП}$ – количество обрабатывающих РП в ПС; $W_{оп}$ – среднее количество операций в технологическом маршруте; $T_ф$ – средний фонд рабочего времени оборудования для анализируемого периода (ч); Q – средний размер партии запуска; $W_{дубл}$ – средняя кратность дублирования РП при диспетчировании; $K_ц$ – средняя доля продуктивной составляющей в производственном цикле заказа. Модель ИМ дает значения $K_{маш}$, U, N и $T_ц$ без дополнительных расчетов.

Условия имитационного эксперимента. Для унификации исходных данных и обобщения анализа в исследовании вводится понятие «нормальных условий» для РП. Результаты, полученные для нормальных условий, при помощи соответствующих поправочных коэффициентов могут быть приведены для условий конкретной ПС. Параметры нормальных условий: тип производства – среднесерийный; анализируемый период – 1 мес работы в 2 смены (время моделирования $T_{мод} = 2{\cdot}10^4$ мин); загрузка работой $\rho = 2/3 = 0{,}66667$; средний размер партии запуска $Q = 200$; размер транспортной партии $Q_т = 20$; время обработки машинное (по управляющей программе) $t_{маш} = 1$ мин; коэффициент относительных простоев $C_{пр} = \Sigma t_{пр(i)} / t_{маш} = 1$, где $t_{пр(i)}$ – среднее время простоя по i-й причине, приходящееся на одну деталь; закон распределения случайных величин (Q и t) экспоненциальный; коэффициент относительного смещения минимального значения случайных величин от нуля $C = X_{min} / X_{ср} = 2 / 3 = 0{,}66667$ (кроме промежутков времени между поступлениями заказов, отказами и организационными простоями, для которых принимается $C = 0$).

Физический смысл $C_{пр}$ – среднее суммарное время простоев по всем причинам, кроме отсутствия работы, приходящееся на 1 мин времени машинного. Коэффициент $C_{пр}$ определяется на этапе подготовки исходных данных для моделирования по формуле объемного временного баланса оборудования.

Исходные данные для «нормальных условий» подобраны таким образом, что модель ДС выдает значения коэффициентов использования по машинному времени, простоев и ожидания работы в следующем соотношении: $K_{маш} = K_{пр} = K_{о.\,р} = 1/3$. Выравнивание значений этих трех коэффициентов в модели ИМ должно означать достижение стационарного режима.

Для получения регрессионных зависимостей использовался симметричный полный факторный имитационный эксперимент. На стратегическом уровне планирования эксперимента были приняты следующие решения.

Отклики: $D_K = (K_{ИМ} - K_{ДС}) / K_{ДС}$ – коэффициент смещения среднего значения $K_{маш}$ по результатам ИМ относительно результата ДС (финальной вероятности P_1); $V_K = \sigma_{ИМ} / K_{ИМ}$ – коэффициент вариации $K_{ИМ}$, где $\sigma_{ИМ}$ – стандартное отклонение.

Факторы и уровни: $\rho = \{0{,}05;\ 0{,}33333;\ 0{,}66667;\ 1\}$ – планируемый коэффициент загрузки оборудования ПС; $Q = \{1;\ 20;\ 200;\ 2000\}$ – средний размер партии запуска; $C = X_{min} / X_{ср} = \{0;\ 0{,}33333;\ 0{,}66667;\ 1\}$ – коэффициент относительного смещения минимального значения случайных величин от нуля.

Условия окончания моделирования: достижение заданного периода функционирования T или выполнение заданной программы выпуска [N]. В обоих случаях долевые коэффициенты рассчитываются относительно времени T.

Количество опытов для «нормальных условий»: $W_{\text{оп}} = q^{k} = 64$, где k – число факторов, q – число уровней.

На тактическом уровне планирования эксперимента были приняты следующие решения. Меры по уменьшению влияния начального состояния: это состояние отражает типичную ситуацию (работа есть, заказ уже выставлен, РП свободна и исправна, никаких других сдерживающих причин нет, начинается переналадка); в начальный момент РП уже выбрала ½ ресурса времени до каждого из своих возможных простоев; начальные значения баз всех 14 генераторов случайных чисел рандомизированы.

Объем выборки (число повторений каждого опыта) составлял $n = 20–84$ и определялся по известной зависимости $n = (\sigma Z_{\alpha/2} / \varepsilon)^2$, где $Z_{\alpha/2}$ – аргумент функции Лапласа для заданного уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}015$ – принятая допустимая ошибка оценки среднего значения $K_{\text{маш}}$, σ – стандартное отклонение для данных условий, определяемое по результатам предварительных прогонов.

Адекватность регрессионных зависимостей проверялась по критерию Фишера и по коэффициенту детерминации $[R^2] \geq 0{,}75$.

Результаты исследования и их обсуждение. На рис. 4 представлено изменение результатов имитационного моделирования РП с увеличением времени моделирования при «нормальных условиях» и $n = 100$. Начиная приблизительно с $T_{\text{мод}} = 10^7$ мин выборочное среднее значение $K_{\text{маш}}$ сравнивается с финальной вероятностью $P_1 = 0{,}33\ldots$ метода ДС с точностью до остаточных флуктуаций, которые стабилизировались на уровне $d_K = K_{\text{маш}} - P_1 \approx \pm\, 0{,}001$ при выражении $K_{\text{маш}}$ и P_1 в долях от единицы или $\pm$ 3% от P_1. Подобным же образом ведут себя $K_{\text{пр}}$ и $K_{\text{о. р}}$, но с несколько большими значениями d. Очевидно, что значение $T_{\text{мод}} = 10^7$ мин можно считать периодом вхождения в условно установившийся режим $T_{\text{уст}}$ по критерию $d_K \leq 0{,}001$. Для «нормальных условий» с другими значениями критерия экспериментально установлена следующая зависимость:

$$T_{\text{уст}} = -\,1{,}346 \ln d_K \cdot 10^6 \text{ (мин)},$$

которая справедлива для d_K в диапазоне $[5 \cdot 10^{-5}; 5 \cdot 10^{-2}]$. При этом скорость сходимости составит

$$\left|K_{\text{маш}}(t) - P_1\right| \leq 0{,}0053 + 0{,}0802\, e^{-0{,}000005\, t}.$$

Факт наличия стационарного режима был установлен также для всех других значений $t_{\text{маш}}$, ρ, Q, $C_{\text{пр}}$ и C в любых сочетаниях. Для общего случая эмпирическая зависимость выглядит следующим образом:

$$T_{\text{уст}} = [(Q - 269 \ln d_K)(1 - C)\, t_{\text{маш}}\, C_{\text{пр}}\, \rho^{-1} + 0{,}2] \cdot 10^4 \text{ (мин)}. \qquad (6)$$

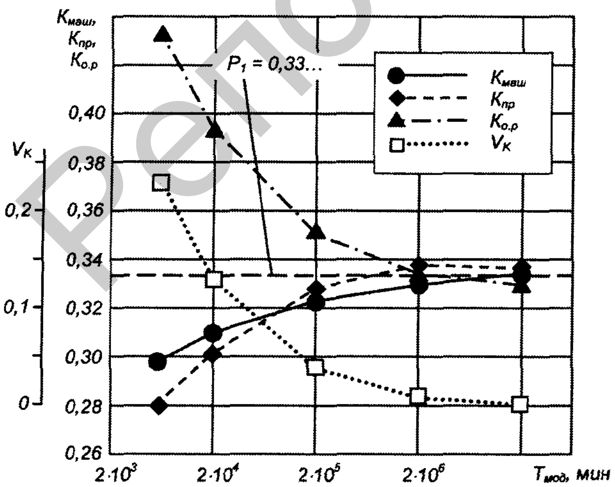

Рис. 4. Зависимость среднего значения долевых коэффициентов и коэффициента вариации $K_{\text{маш}}$ от времени имитационного моделирования

Величина $T_{\text{уст}}$ оказывается весьма значительной. Для ГПС-обработки деталей типа тел вращения с типичными характеристиками ($Q = 200$; $t_{\text{маш}} = 3$ мин; $\rho = 0{,}85$; $C_{\text{пр}} = 1$; $C = 0{,}5$) по формуле (6) имеем $T_{\text{уст}} = 3{,}6 \cdot 10^7$ мин. Для типичной ГПС-обработки призматических деталей ($Q = 20$; $t_{\text{маш}} = 30$ мин; $\rho = 0{,}85$; $C_{\text{пр}} = 2$; $C = 0{,}5$) $T_{\text{уст}} = 6{,}6 \cdot 10^8$ мин. Это соответствует приблизительно 150 и 2760 годам эксплуатации ГПС в 2 смены, что несопоставимо со сроком их службы. Можно констатировать, что хотя установившийся режим у всех ПС существует, достигнуть его в реальных условиях ПС не успевают. В связи с этим результаты моделей ДС, полученные для финальных вероятностей, требуют коррекции для приведения к конкретному периоду.

На графике $K_{маш} = f(T_{мод})$ рис. 4 четко прослеживается монотонный тренд. Смещение $K_{маш}$ от P_1 для «нормальных условий» составляет $\Delta_K = -0{,}023$. Отрицательное значение смещения сохраняется и при всех других исходных условиях, что объясняется наличием одностороннего ограничения выработки N величиной заданной программы выпуска $[N]$.

Среднее значение $K_{маш}$ для произвольного периода определяется выражением:

$$K_{маш} = P_1 + \Delta_{K(T)} = P_1\,(1 + D_{K(T)}), \tag{7}$$

где $\Delta_{K(T)}$ и $D_{K(T)}$ – соответственно абсолютное и относительное смещение $K_{маш}$ от P_1.

Для «нормальных» значений $t_{маш} = 1$ мин и $T_{мод} = 2{\cdot}10^4$ мин коэффициент смещения среднего значения $K_{маш}$ и его коэффициент вариации определяются следующими регрессионными зависимостями:

$$\begin{aligned} D_K = {} & 0{,}004892 - 0{,}0016Q + 0{,}151\rho + 0{,}03182C + 6{,}549{\cdot}10^{-6}Q^2 - \\ & - 0{,}1985\rho^2 - 0{,}06174C^2 - 2{,}89{\cdot}10^{-9}Q^3, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} V_K = {} & 0{,}3898 + 0{,}0014Q - 0{,}7535\rho - 0{,}4277C - 5{,}904{\cdot}10^{-7}Q^2 + \\ & + 0{,}4449\rho^2 + 0{,}198C^2 + 1{,}2609{\cdot}10^{-11}Q^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Если по формуле (9) оказывается $V_K < 0{,}05$, то следует принимать $V_K = 0{,}05$ нормативно.

Распространение результатов при «нормальных условиях» для общего случая осуществляется следующим образом:

$$D_{K(T)} = D_K\, k_T\, k_{пр}, \tag{10}$$

$$V_{K(T)} = V_K\, k_T\, k_{пр}\, k_t, \tag{11}$$

где $k_T = (T_{н.\,у} / T)^{1/2}$ – коэффициент приведения по анализируемому периоду T; $T_{н.\,у} = 2{\cdot}10^4$ мин – значение периода для «нормальных условий»; $k_{пр} = 0{,}9 + 0{,}1C_{пр}$ – коэффициент приведения по номинальным простоям; $k_t = (t_{маш} / t_{н.\,у})^{1/3}$ – коэффициент приведения по трудоемкости; $t_{н.\,у} = 1$ мин – значение машинного времени обработки для «нормальных условий»; $T \geq 4{,}8{\cdot}10^2$ мин (не менее 1 нед работы в 2 смены); $t_{маш} \geq 0{,}2$ мин; $C_{пр} \geq 0{,}2$.

Величина $D_{K(T)}$ отражает систематическую составляющую ошибки ДС. Отметим, что так как $D_{K(T)}$ величина относительная, то время обработки $t_{маш}$ на нее уже не влияет.

Помимо среднего значения и дисперсии случайной величины практический интерес представляет и вид закона распределения. На рис. 5 приведены графики плотности распределения вероятностей $K_{маш}$ для «нормальных условий» и различных значений смещения C исходных временных случайных величин. Отметим, что при $C = 1$ величина $K_{маш}$ остается случайной, так как C не затрагивает случайную периодичность поступления заказов, возникновения отказов и организационных простоев. Аналогичная картина наблюдалась и для других условий. Для граничных значений эксперимента ($C \geq 0{,}95$, $\rho \leq 0{,}05$) закон распределения всегда отличался от нормального. По физическому смыслу $K_{маш}$ является случайной долей с фиксированным ограничением [0, 1], поэтому для него уместным выглядит бета-распределение [9]. Вместе с тем для условий, отличных от граничных, нулевая гипотеза о нормальности подтверждалась приблизительно в 80% опытов по критерию Колмого-

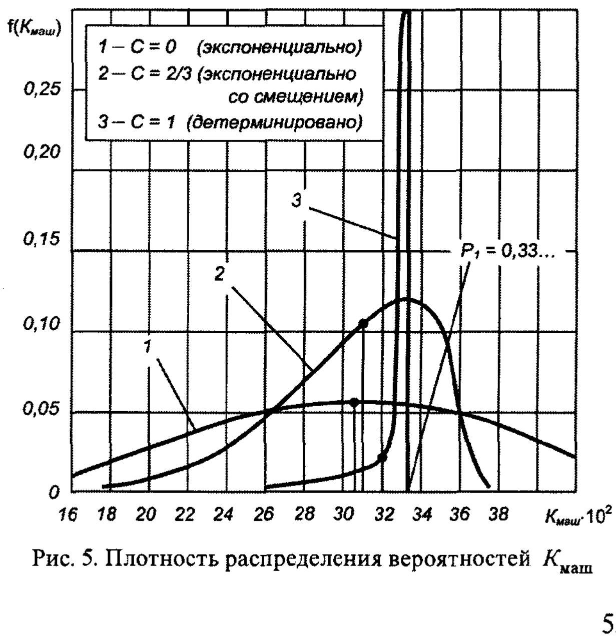

Рис. 5. Плотность распределения вероятностей $K_{маш}$

рова, приблизительно в 70% – по критерию «хи-квадрат» и приблизительно в 50% – по критерию «омега-квадрат». При этом с возрастанием T распределение $K_{\text{маш}}$ по внешнему виду и критериям согласия все больше приближается к нормальному, что и следовало ожидать согласно центральной предельной теореме Ляпунова. Учитывая то, что граничные условия в реальных ПС практически не встречаются, можно считать распределение близким к нормальному с условием его двухстороннего усечения. Заметим, что без принятия этого предположения число прогонов для каждого опыта составило бы, согласно неравенству Чебышева, $n = 80–440$.

Пример практического использования результатов. Требуется определить средние показатели функционирования ГПС-обработки деталей типа тел вращения и оценить вероятность выполнения ею квартального плана по выработке $[N] = 14000$ деталей.

Исходные данные по ГПС: $T_{\text{ф}} = 1000$ ч $= 6{\cdot}10^4$ мин; $W_{\text{РП}} = 5$; $Q = 100$; $Q_{\text{т}} = 25$; $W_{\text{оп}} = 3$; $W_{\text{дубл}} = 1{,}2$; $K_{\text{ц}} = 0{,}2$; нормативный коэффициент загрузки оборудования $[K_{\text{з}}] = \rho = 0{,}85$; коэффициент готовности по надежности $K_{\text{г}} = 0{,}9$; $C = 0{,}5$; средние значения времен t_i в состояниях РП (таблица).

Средние значения времен t_i в состояниях РП

№ состояния (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Обозначение	маш	у-с	изм	нак	тр	снх	т. о	о. о	отд	пер	рем	орг	о. р
Время t_i (мин)	3	0,12	0,06	0,06	3,75	1	0,12	0,3	0,15	120	33,33*	7,67	99*

* Приведено к одной партии с сохранением $K_{\text{г}}$ и ρ

Р е ш е н и е.

1. Определяем, потребуется ли коррекция результатов ДС. Для этого по формуле (6) находим длительность периода вхождения ПС в установившийся режим $T_{\text{уст}} = 3{\cdot}10^7$ мин и сравниваем его с анализируемым периодом $T_{\text{ф}} = 6{\cdot}10^4$ мин. Заключение: коррекция потребуется, так как $T_{\text{уст}} > T_{\text{ф}}$.

2. Определяем $K_{\text{маш}}$ и коэффициенты простоев методом ДС. Для этого с помощью графа рис. 1 и формул (1), (2) составляем и решаем систему из 13 уравнений Колмогорова: $P_1 = K_{\text{маш(ДС)}} = 0{,}45455$; $\Sigma P_{(2–12)} = 0{,}39545$. Находим $C_{пр} = \Sigma P_{(2–12)} \,/\, P_1 = 0{,}87$. По формулам (3), (4) определяем квартальную выработку ПС для случая, если бы значение $K_{\text{маш}}$ для данного периода действительно совпадало бы с финальной вероятностью P_1: $N = 15\ 151$ шт. Отмечаем, что $N > [N]$ и ПС номинально должна справляться с заданием.

3. Определяем $K_{\text{маш}}$ и его стандартное отклонение с учетом неустановившегося режима. По формулам (8), (9) находим: $D_K = -\ 0{,}10710$; $V_K = 0{,}04064$. Согласно комментариям к (9), следует принять $V_K = 0{,}05$. По формулам (10), (11) находим: $D_{K(T)} = -\ 0{,}06103$; $V_{K(T)} = 0{,}04109$. По формуле (7) находим $K_{\text{маш}} = 0{,}4268$. Вычисляем стандартное отклонение: $\sigma = V_{K(T)}\, K_{\text{маш}} = 0{,}01754$.

4. Определяем показатели функционирования ПС с учетом неустановившегося режима. По формулам (3)–(5) находим: $U = 14{,}227$ (шт./ч); $N = 14\ 227$ шт.; $T_{\text{ц}} = 146{,}4$ ч.

5. Определяем вероятность выполнения плана. Строим 95%-ный доверительный интервал для $K_{\text{маш}}$ и определяем соответствующий ему интервал для N: $0{,}3924 < K_{\text{маш}} < 0{,}4612$ и $13079 < N < 15372$. Отмечаем, что часть интервала не обеспечивает требуемое значение $[N] = 14000$ и соответствующее ему критическое значение $[K_{\text{маш}}] = 0{,}420$. Констатируем, что плановое задание не может быть выполнено с принятой доверительной вероятностью $p = 0{,}95$. Приняв критическое значение за нижнюю границу нового одностороннего доверительного интервала, получим вероятность выполнения плана $p = 0{,}651$.

Задача решена. Для сравнения приведем результаты ИМ при выборке $n = 100$: $K_{\text{маш}} = 0{,}4244$; $p = 0{,}58$.

Выводы

1. Для ПС условно установившийся режим работы существует во всем диапазоне исходных данных. Период вхождения в этот режим определяется эмпирической зависимостью (6) и больше всего зависит от среднего машинного времени обработки $t_{\text{маш}}$ и доли случайной составляющей в нем.

2. В реальных условиях ПС не успевают достигнуть установившегося режима за весь срок службы, следовательно, результаты моделей ДС, полученные для финальных вероятностей, всегда нуждаются в коррекции.

3. Модели ДС дают более оптимистические результаты показателей функционирования ПС ($K_{маш}$, U, N, $T_{ц}$) в сравнении с заведомо более адекватными имитационными моделями. Погрешность систематически изменяется в зависимости анализируемого периода. Среднее значение $K_{маш}$ по результатам ДС должно быть уменьшено на величину, определяемую регрессионными зависимостями (8), (10).

4. Для наиболее часто встречающихся в практике ПС диапазонов исходных данных распределение случайной величины $K_{маш}$ можно считать приближенно нормальным со средним значением и коэффициентом вариации, определяемыми регрессионными зависимостями (7)–(11).

Литература

1. Новичихин Р. В., Новичихина Е. Р. Моделирование производственных систем обработки деталей в машино- и приборостроении. Мн., 2010.
2. Колмогоров А. Н. Избр. тр. М., 2005. Т.2.
3. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби: Пер. с англ. М., 1981. Т.1.
4. Вентцель Е. С. Исследование операций. М., 1972.
5. Маталыцкий М. А., Тихоненко О. М., Паньков А. В. Теория массового обслуживания и ее применения. Гродно, 2008.
6. Ратмиров В. А. Управление станками гибких производственных систем. М., 1987.
7. Катковник В. Я., Хлудова М. В., Ганин Н. М. Математическое моделирование материальных потоков в ГПС. М., 1987.
8. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. М., 2007.
9. Лоу А., Кельтон В. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. / Пер. с англ. СПб., 2004.
10. Справочник по промышленной робототехнике. / Под ред. Ш. Нофа: Пер. с англ. М., 1990. Кн.2.
11. Лищинский Л. Ю., Рабинович В. И. // Станки и инструмент. 1983. № 11. С. 11–13.

G. N. ZDOR, E. R. NOVICHIKHINA

ADEQUACY INCREASE OF MARKOV'S MODELS OF MACHINING WORKSHOPS AND LINES AT THE CONDITIONS OF THEIR NON-STATIONARY WORKING MODE

Summary

Markov's models of machining systems, based on Kolmogorov's equations and intended to determine tool utilization are considered. It is shown that the deflection of Markov's model results from simulation models results has systematic forming, which depends on the following factors: analyzed period, utilized capacity, amount of parts in a set, processing time and idle time, offset and shorting in the meanings of random quantities. Formulas, which define the value of regular component of the error, are given. The formulas are offered to use together with system of Kolmogorov's equations. In this case the error of Markov's models decreases 3–6 times depending on conditions.