БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 539.3

МАРТЫНЕНКО
Игнат Михайлович

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Минск, 2013

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель – **Журавков Михаил Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор, Белорусский государственный университет

Официальные оппоненты: **Чигарев Анатолий Власович**,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика», Белорусский национальный технический университет;

Рогозин Сергей Васильевич,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры экономической информатики и математической экономики, Белорусский государственный университет

Оппонирующая организация – УО «Белорусский государственный университет транспорта»

Защита состоится 27.12.2013 г. в 14.00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, 1 корпус, ауд. 202, тел. ученого секретаря (+375 17) 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «__» __________ 2013 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
канд. физ. - мат. наук, доцент В.А. Акимов

ВВЕДЕНИЕ

Исследование напряженно-деформированного состояния в анизотропных телах принадлежит к числу наиболее сложных и важных задач механики деформируемого твердого тела. Актуальность такого класса задач обусловлена постоянно растущей необходимостью использования результатов новых научных исследований в современных отраслях науки и техники, формирования наглядных физических представлений о состоянии полей напряжений и деформаций в анизотропных средах. Это представляется важным, поскольку большинство конструкционных материалов имеют полимерную основу и должны при моделировании и изучении поведения и состояния рассматриваться как анизотропные среды. Последнее обстоятельство тесным образом связано с потребностью сокращения громоздких вычислений и обеспечением более высокой степени точности и адекватности результатов расчетов.

Возможности и средства современной вычислительной техники делают доступным решение новых классов граничных задач механики деформированного твердого тела с использованием современных технологий и подходов. Собственно процедура исследования закономерностей деформирования реальных анизотропных тел к настоящему времени разработана достаточно полно, но, тем не менее, процедуры численной реализации соответствующих гранично-краевых математических задач приводят к мало исследованным и трудно реализуемым расчетным схемам. В этом легко убедиться на примере общей теории кубически анизотропных сред, соответствующая модель которой описана, например, в известной монографии Л.Д. Ландау и И.М. Лифшица, а первое решение задачи о действии сосредоточенной силы в кубически анизотропных телах было предпринято в статье И.М. Лифшица и Л.Н. Розенцвейга.

Настоящая работа посвящена разработке подходов и методик решения задач исследования статического деформирования кубически анизотропных тел на основе применения метода малого параметра.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь с крупными научными программами (проектами) и темами

Диссертационная работа выполнялась в рамках задания «Разработка новых и развитие аналитических и компьютерных методов и подходов исследования механических процессов и решения задач механики сплошных сред», договор №915/21, №ГР20012192, ГКПНИ «Механика»; совместного проекта БФФИ и УкрФФИ «Деформационные процессы разломно-блоковых сред с учетом зон множественного трещинообразования», договор №Х11К–182, №ГР20102175; задания «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники», (Конвергенция 1.8.01), договор №468/21, №ГР20113045, ГПНИ ”Конвергенция“, которые ведутся на кафедре теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.

Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы является разработка, на основе аналитических методов математической физики и теории упругости, подходов к исследованию процессов деформирования кубически анизотропных сред.

Для достижения данной цели были решены следующие задачи:

– получена разрешающая система уравнений теории граничных задач для кубически анизотропных сред, механические свойства которых характеризуются законом Гука с тремя упругими константами;

– построены математические формулы и предложена методика применения метода малого параметра при решении граничных задач кубически анизотропной теории упругости;

– для оценки эффективности разработанного подхода выполнено решение серии модельных задач на основе предложенной методики с использованием компьютерной системы вычислений «*Mathematica»* и пакета FlexPDE, а так же получены решения данных задач на основе построения расчетных схем с применением пакета ANSYS; выполнен анализ и сравнение полученных решений.

Объектом исследования в диссертации являются твердые деформируемые тела, упругие свойства которых характеризуются наличием трех упругих постоянных; математические методы исследования напряженно-деформированного состояния кубически анизотропных упругих тел.

Предмет исследования – напряженно-деформированное состояние анизотропных твердых деформируемых тел.

Положения, выносимые на защиту

Новыми результатами, выносимыми на защиту, являются:

– общие разрешающие системы уравнений теории упругости кубически анизотропных тел и формулы представления решений этих систем через три произвольные функции;

– системы разрешающих уравнений на основе метода малого параметра для решения задач статики кубически анизотропных тел для плоских и пространственных упругих тел;

– методика решения граничных задач кубически анизотропной теории упругости для многосвязанных областей, границами которых является конечное число замкнутых и незамкнутых непересекающихся поверхностей типа Ляпунова. Соответствующие интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода. Асимптотические формулы для распределения собственных чисел и собственных функций задач Дирихле для кубически анизотропных тел;

– подходы и методика построения аналитического решения задач исследования напряженно-деформированного состояния в кубически анизотропных твердых деформируемых телах. Решения граничных задач кубически анизотропной теории упругости для многосвязанных областей на примере решения конкретных граничных задач кубически анизотропной теории упругости. Оценка точности получаемых при этом решений.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты выносимой на защиту работы полученные соискателем лично. Постановка задач принадлежит научному руководителю профессору М.А. Журавкову. Часть результатов опубликована в соавторстве с научным руководителем; в них научному руководителю принадлежит постановка задачи; соавтору Босякову С.М. – часть численного расчета проведенного в первой главе; соавторам Казакевичем В.А. и Скляр О.Н. – оценка достоверности полученных данных.

Апробация результатов диссертации

Результаты исследований, вошедшие в диссертационную работу, докладывались на:

XII Международной научной конференции имени академика М. Кравчука, г.Киев, Украина, 15-17 мая, 2008 г.

VI Международной студенческой научной конференции «Прикладные задачи математики в механике, экономике, экологии», г.Севастополь, Украина, 14-18 апреля 2008 г.

XI Белорусской математической конференции, г.Минск, 5-9 ноября 2012 г.

На заседаниях объединенного научного семинара по механике кафедр теоретической и прикладной механике и нано- и биомеханики механико-математического факультета БГУ, 2007-2013 г.г.

Опубликованность результатов диссертации

Материалы диссертации опубликованы в 10 публикациях, из которых 6 статей в рецензируемых журналах из списка ВАК общим объемом 1 авторский лист, 1 статья в сборнике, 2 тезисов докладов, 1 статья в материалах конференции.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав основного текста, заключения и списка использованных источников. Она изложена на 100 страницах, из которых 92 страницы содержит основной текст с рисунками, список использованных источников из 123 наименований (включая собственные публикации соискателя) содержится на 8 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приведены основные сведения и получены специальные представления формул, описывающих напряженно-деформированное состояние кубически анизотропной среды в перемещениях.

Используя закон Гука для кубически анизотропной среды, характеризующейся наличием трех независимых материальных констант, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= (A_{11} - A_{12})\varepsilon_{ii} + A_{12}\theta \\ \sigma_{ij} &= 2A_{44}\varepsilon_{ij} \end{aligned}, \quad i \neq j = 1,2,3, \tag{1}$$

и соотношения Коши, определяющие связь компонентов тензора деформаций ε_{ij} с компонентами вектора перемещений $\vec{u}_i = (u_1, u_2, u_3)$ в точках упругого тела, в стандартном виде, можно получить такое представление для уравнений статики кубически анизотропной среды в перемещениях:

$$\begin{aligned} &[A_{44}\Delta + (A_{11} - A_{44})\partial_\alpha^2]u_\alpha + (A_{12} + A_{44})(\partial_\alpha\partial_\beta u_\beta + \partial_\alpha\partial_\gamma u_\gamma) + X_\alpha = 0, \\ &[A_{44}\Delta + (A_{11} - A_{44})\partial_\beta^2]u_\beta + (A_{12} + A_{44})(\partial_\beta\partial_\gamma u_\gamma + \partial_\beta\partial_\alpha u_\alpha) + X_\beta = 0, \\ &[A_{44}\Delta + (A_{11} - A_{44})\partial_\gamma^2]u_\gamma + (A_{12} + A_{44})(\partial_\gamma\partial_\beta u_\beta + \partial_\gamma\partial_\alpha u_\alpha) + X_\gamma = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) в случае действия массовых сил записывается в таком матричном виде:

$$Mu = A_{44}\begin{Vmatrix} \Delta + (\varepsilon+\lambda)\partial_\alpha^2 + k^2 & \lambda\partial_\beta\partial_\alpha & \lambda\partial_\gamma\partial_\alpha \\ \lambda\partial_\beta\partial_\alpha & \Delta + (\varepsilon+\lambda)\partial_\beta^2 + k^2 & \lambda\partial_\beta\partial_\gamma \\ \lambda\partial_\gamma\partial_\alpha & \lambda\partial_\beta\partial_\gamma & \Delta + (\varepsilon+\lambda)\partial_\gamma^2 + k^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{Vmatrix} \tag{3}$$

Решение задач статической теории упругости можно получить с помощью матрицы Φ, обратной к матрице M:

$$\Phi(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) = \\ = \begin{Vmatrix} (\Delta^*)^2 + \lambda\Delta^*(\partial_2^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_2^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_3^2\right] & -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_2^2\right] \\ -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_3^2\right] & (\Delta^*)^2 + \lambda\Delta^*(\partial_1^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_1^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_1^2\right] \\ -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_2^2\right] & -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_1^2\right] & (\Delta^*)^2 + \lambda\Delta^*(\partial_1^2 + \partial_2^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_1^2\partial_2^2 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) получаем равенство $M\Phi = FE$, где E – единичная матрица, а оператор F имеет такое представление

$$\begin{aligned} F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) &= (\Delta + k^2)^3 + (\varepsilon + \sigma)f_1(\Delta + k^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2\sigma)f_2(\Delta + k^2) + \\ &+ \varepsilon^2(\varepsilon + 3\sigma)f_3 = \\ &= (\Delta + k^2)^3 + \lambda f_1(\Delta + k^2)^2 + (\lambda^2 - \sigma^2)f_2(\Delta + k^2) + (\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma)f_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Если $\varphi(x)$ является решением уравнения:

$$F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2)\varphi(x) = 0, \tag{6}$$

то решением системы (3) будет являться каждый столбец матрицы $M\Phi$:

$$\Phi\varphi = Eu. \tag{7}$$

Отсюда следуют такие три группы решений

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \left[(\Delta^*)^2 + \lambda\Delta^*(\partial_2^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2)\partial_2^2\partial_3^2\right]\varphi(x) \\ u_2^{(1)} &= -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^* + (\lambda - \sigma)\partial_3^2\right]\varphi(x) \\ u_3^{(1)} &= -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda - \sigma)\partial_2^2\right]\varphi(x) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(2)} &= -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_3^2\right]\varphi(x) \\ u_2^{(2)} &= \left[(\Delta^*)^2 + \lambda\Delta^*(\partial_1^2+\partial_3^2) + (\lambda^2-\sigma^2)\partial_1^2\partial_3^2\right]\varphi(x) \\ u_3^{(2)} &= -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_1^2\right]\varphi(x) \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(3)} &= -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_2^2\right]\varphi(x) \\ u_2^{(3)} &= -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^* + (\lambda-\sigma)\partial_1^2\right]\varphi(x) \\ u_3^{(3)} &= \left[(\Delta^*)^2 + \lambda\Delta^*(\partial_1^2+\partial_2^2) + (\lambda^2-\sigma^2)\partial_1^2\partial_2^2\right]\varphi(x) \end{aligned}\right\}.$$

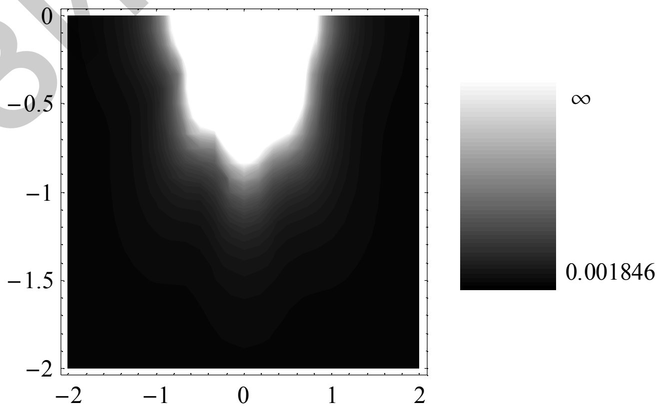
Таким образом, задача свелась к решению уравнения (6). Это уравнение является симметричным относительно своих аргументов, более того оно имеет третий порядок относительно Δ. Это представление общего решения статических задач для кубически анизотропных сред *получено впервые* в настоящей работе.

В главе рассмотрен пример применения разработанного в диссертации подхода к определению упругих перемещений точек кубически анизотропных твердых деформируемых тел при действии на границе полупространства $x_3 \le 0$ нормально приложенной сосредоточенной силы *P*. При расчетах величина силы принималась равной 50 Н. Решения выполнены для таких кубически анизотропных твердых тел, как вольфрам и кварц со следующими упругими характеристиками:

вольфрам : $A_{11} = 50.110^{10}, A_{12} = 19.810^{10}, A_{44} = 15.1410^{10}, \rho = 18600.$

кварц : $A_{11} = 7.8510^{10}, A_{12} = 1.6110^{10}, A_{44} = 3.1210^{10}, \rho = 2070.$

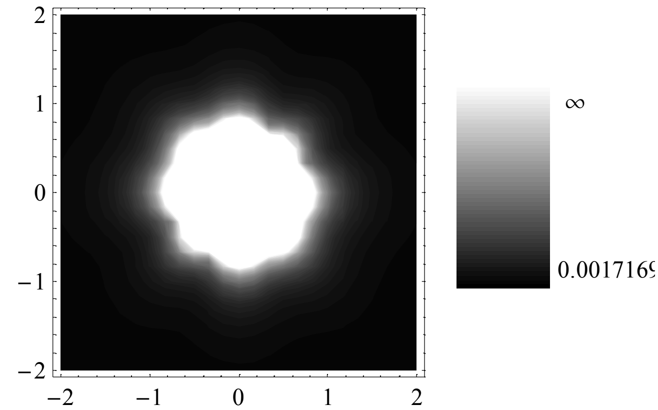
Для проведения численных расчетов использовались функциональные возможности компьютерной системы *Mathematica.* Некоторые результаты вычислений представлены на рисунках 1 – 4.



а б

а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей x2, x3; б – численные значения вектора перемещения

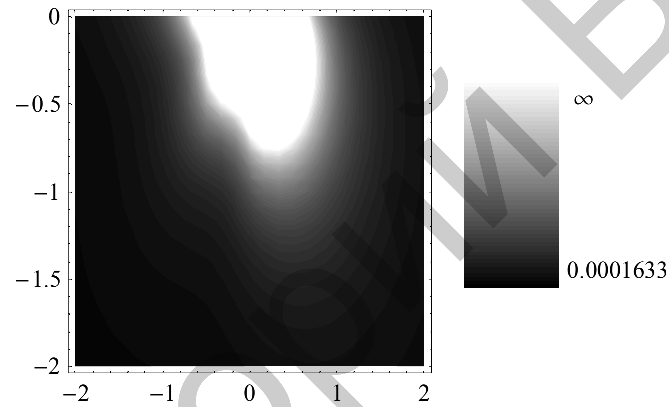
Рисунок 1 – Материал вольфрам



а б

а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей x1, x2; б – численные значения вектора перемещения

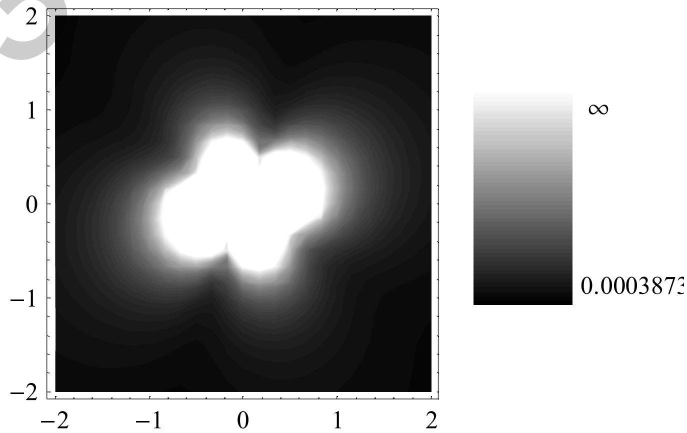
Рисунок 2 – Материал вольфрам



а б

а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей x2, x3; б – численные значения вектора перемещения

Рисунок 3 – Материал кварц



а б

а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей x1, x2; б – численные значения вектора перемещения

Рисунок 4 – Материал кварц

Аналогичная задача о действии нормально приложенной сосредоточенной силы $P = 50H$ на полупространство $x_3 \le 0$ была рассмотрена в пакете ANSYS для материалов вольфрам и кварц. Результаты расчетов представлены на рисунках 5 – 8.

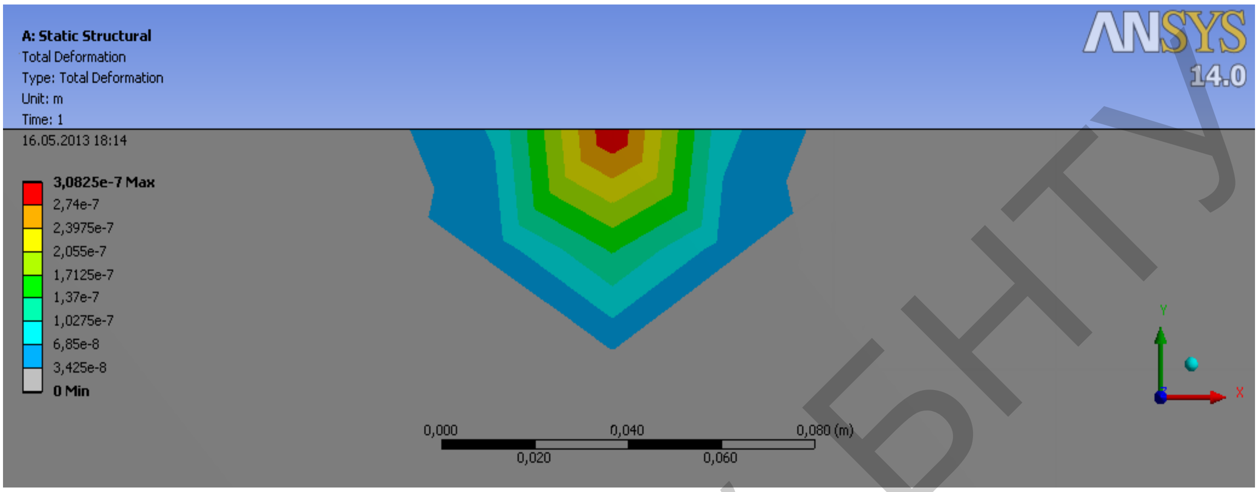


Рисунок 5 – Материал вольфрам распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси X, Y

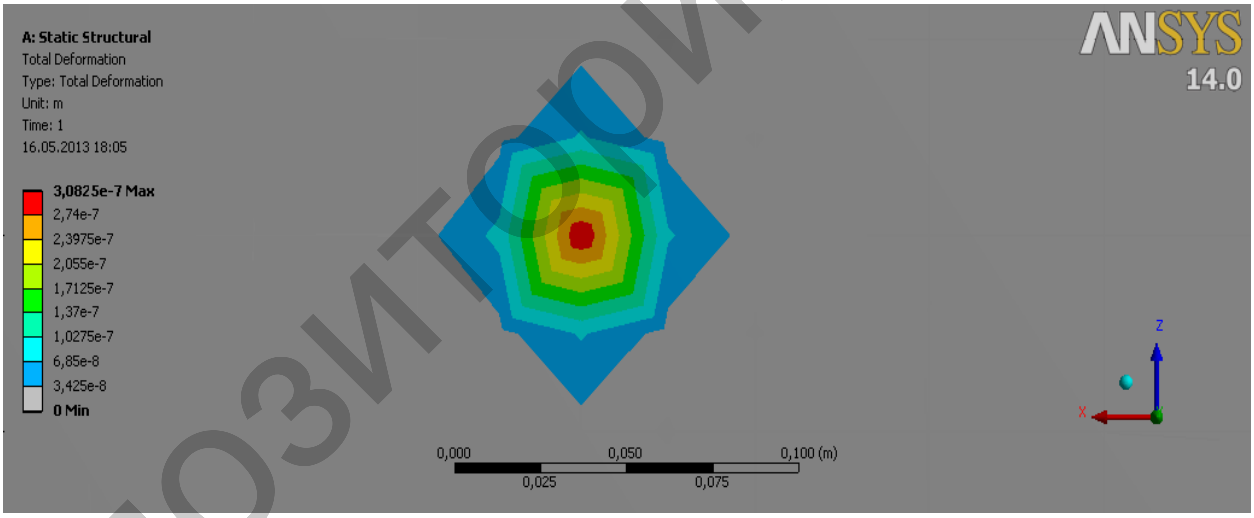


Рисунок 6 – Материал вольфрам распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси Z, X

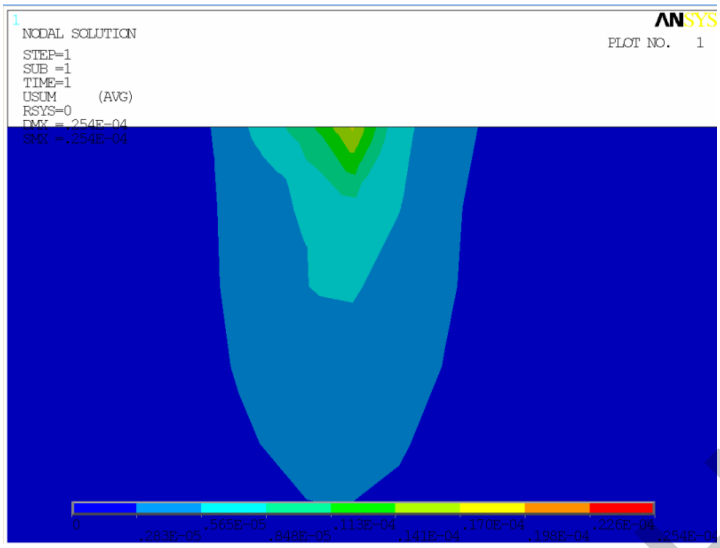


Рисунок 7 – Материал вольфрам распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси Y, Z

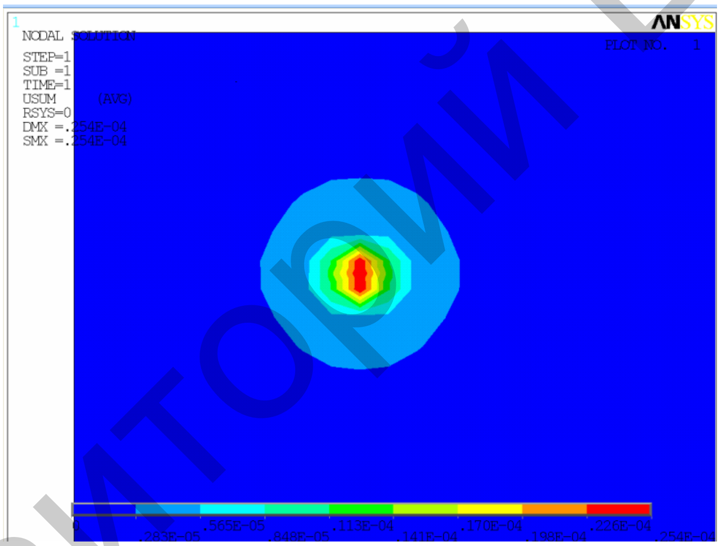


Рисунок 8 – Материал кварц распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси X, Y

Из результатов численных экспериментов видно, что качественное поле перемещений и количественные значения перемещений, рассчитанные с применением пакета ANSYS и на основании выведенных соотношений (8) хорошо коррелируют между собой. Максимальная разность результатов составила менее 10%.

Вторая глава диссертации посвящена рассмотрению подходов применения метода малого параметра для решения статических задач кубически анизотропной теории упругости в плоской и пространственной постановках. Предполагается, что материальные константы удовлетворяют условию $A_{44} < A_{11}, A_{12}$. Вследствие этого в качестве малого параметра можно взять отношение $\varepsilon = \left(A_{44} / A_{11}\right) << 1$. Тогда исходная система (2) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + q\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} = 0,\\
&\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + q\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + q\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} = 0,\\
&\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + q\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} + q\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $\dfrac{\left(A_{12} + A_{44}\right)}{A_{11}} = q\varepsilon$. Для интегрирования этой системы вводятся следующие три группы преобразований координат и искомых функций:

$$\xi_1 = \varepsilon^{1/2}x,\ \eta_1 = y,\ \varsigma_1 = z,\ u = U^{(1)},\ v = \varepsilon^{3/2}V^{(1)},\ w = \varepsilon^{3/2}W^{(1)} \tag{10}$$

$$\xi_2 = x,\ \eta_2 = \varepsilon^{1/2}y,\ \varsigma_2 = z,\ u = \varepsilon^{3/2}U^{(2)},\ v = V^{(2)},\ w = \varepsilon^{3/2}W^{(2)}, \tag{11}$$

$$\xi_3 = x,\ \eta_3 = y,\ \varsigma_3 = \varepsilon^{1/2}z,\ u = \varepsilon^{3/2}U^{(3)},\ v = \varepsilon^{3/2}V^{(3)},\ w = W^{(3)}. \tag{12}$$

Искомые функции раскладываем в ряды вида:

$$U^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}\varepsilon^{m+\frac{j}{2}}U^{n,2m+j},\ V^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}\varepsilon^{m+\frac{j}{2}}V^{n,2m+j},\ W^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}\varepsilon^{m+\frac{j}{2}}W^{n,2m+j}, \tag{13}$$

где $(n = 1,2,3)$.

Внося формулы (10), (13) в систему (9), получим для нахождения U^1, V^1, W^1 следующие системы уравнений:

$$\varepsilon^0 : \Delta U^{1,0} = 0$$

$$\varepsilon^{1/2} : \Delta U^{1,1} = 0$$

$$\varepsilon^1 : \Delta U^{1,2} = 0$$

$$\varepsilon^{3/2} : \Delta U^{1,3} = 0$$

$$\varepsilon^2 : \Delta U^{1,4} + q\left(V^{1,0}_{\xi\eta} + W^{1,0}_{\xi\varsigma}\right) = 0$$

$$\varepsilon^0 : V^{1,0}_{\eta\eta} + qU^{1,0}_{\xi\eta} = 0$$

$$\varepsilon^{1/2} : V^{1,1}_{\eta\eta} + qU^{1,1}_{\xi\eta} = 0$$

$$\varepsilon^1 : V^{1,2}_{\eta\eta} + qU^{1,2}_{\xi\eta} + V^{1,0}_{\varsigma\varsigma} + qW^{1,0}_{\eta\varsigma} = 0$$

$$\varepsilon^{3/2} : V^{1,3}_{\eta\eta} + qU^{1,3}_{\xi\eta} + V^{1,1}_{\varsigma\varsigma} + qW^{1,1}_{\eta\varsigma} = 0$$

$$\varepsilon^2 : V^{1,4}_{\eta\eta} + qU^{1,4}_{\xi\eta} + V^{1,2}_{\varsigma\varsigma} + qW^{1,2}_{\eta\varsigma} + V^{1,0}_{\xi\xi} = 0$$

$$\varepsilon^{0}: W^{1,0}_{\varsigma\varsigma} + qU^{1,0}_{\xi\varsigma} = 0$$

$$\varepsilon^{1/2}: W^{1,1}_{\varsigma\varsigma} + qU^{1,1}_{\xi\varsigma} = 0$$

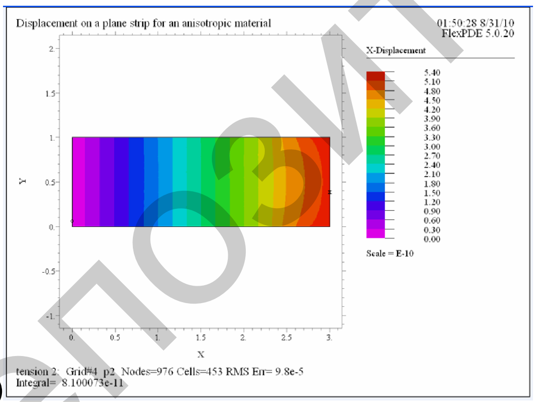
$$\varepsilon^{1}: W^{1,2}_{\varsigma\varsigma} + qU^{1,2}_{\xi\varsigma} + W^{1,0}_{\eta\eta} + qV^{1,0}_{\eta\varsigma} = 0$$

$$\varepsilon^{3/2}: W^{1,3}_{\varsigma\varsigma} + qU^{1,3}_{\xi\varsigma} + W^{1,1}_{\eta\eta} + qV^{1,1}_{\eta\varsigma} = 0$$

$$\varepsilon^{2}: W^{1,4}_{\varsigma\varsigma} + qU^{1,4}_{\xi\varsigma} + W^{1,2}_{\eta\eta} + qV^{1,2}_{\eta\varsigma} + W^{1,0}_{\xi\xi} = 0$$

При известных компонентах U^n, V^n, W^n искомые векторы перемещений представляются в виде суперпозиции решений всех трех типов: $u = U^1 + U^2 + U^3$, $v = V^1 + V^2 + V^3$, $w = W^1 + W^2 + W^3$. Аналогичные формулы выписываются в плоском случае.

Рассмотрен пример, демонстрирующий применение изложенной во второй главе теории к расчету вектора перемещения в таком кубически анизотропном материале, как алмаз. Задача решалась в перемещениях. Компоненты вектора перемещений *U* и *V*, подлежащие определению, на левой границе области равны нулю, внутри области удовлетворяют уравнениям выведенным в диссертационной работе, и непрерывно дифференцируемы внутри области вплоть до границы. Вдоль правой границы области задается перемещение $u = 15 \cdot 10^{-12}$. В ходе вычислений определялось распределение вектора перемещений внутри и на границах области. Расчеты выполнялись двумя способами: на основе предложенной методики с составлением расчетной схемы в пакете FlexPDE (рисунки 9, 10, а) и с использованием возможностей пакета ANSYS (рисунки 9, 10, б).

а) 

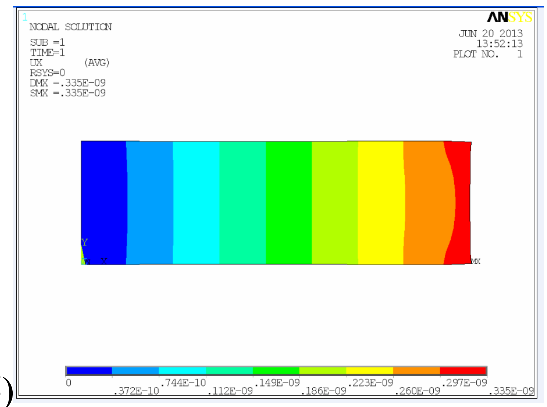
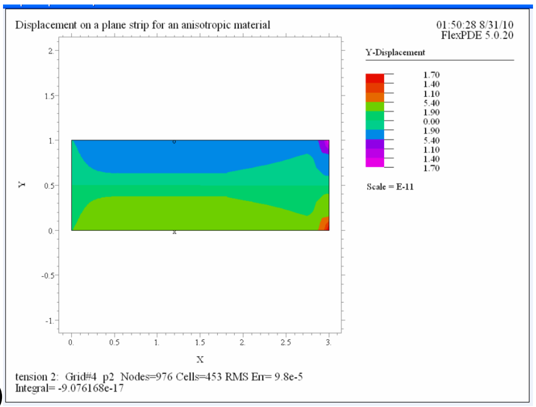
б) 

Рисунок 9 – Перемещения по оси OX

а) 

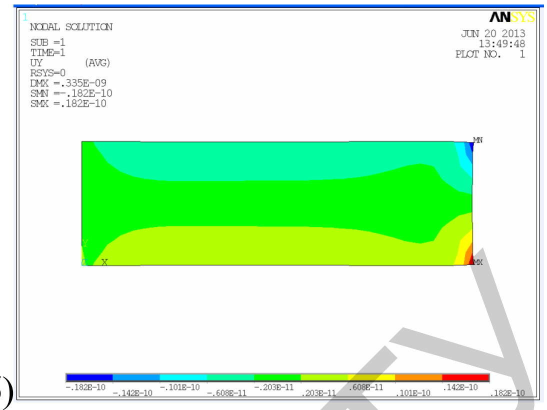
б) 

Рисунок 10 – Перемещения по оси OY

Анализ выполненных численных экспериментов показал, что как качественные картины распределения полей перемещений, так и количественные значения перемещений в точках тела, полученные на основании решения задачи с применением пакета ANSYS и с использованием соотношений, выведенных в диссертации и построением вычислительного алгоритма в пакете FlexPDE, практически не отличаются друг от друга. Максимальная разность конечно-элементного расчета на основе ANSYS по сравнению с результатами расчетов, выполненных на базе разработанного подхода, составляет менее 10%.

В третьей и четвертой главах диссертации рассмотрены вопросы применения асимптотического метода для нахождения собственных значений и собственных функций уравнения Ламе, уравнения Лапласа, а также уравнений статики кубически анизотропных тел, ограниченных конечным числом гладких замкнутых и незамкнутых непересекающихся поверхностей типа Ляпунова. Новизна результатов этой главы заключается в рассмотрении областей с конечным числом непересекающихся незамкнутых поверхностей, именуемых щелями. Предполагается также, что щели ограничены гладкими кривыми. Основным результатом этой главы является доказательство гипотезы Г. Вейля, согласно которой асимптотика собственных значений и собственных функций не зависит от формы границы, а зависит только от занимаемого ею объема. Доказательство этого факта опирается на метод Г. Вейля эластопотенциалов, который приводит искомую задачу к решению симметричных интегральных уравнений со слабой особенностью.

Алгоритм предложенного подхода проиллюстрирован, в частности, на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве со щелью, т.е. для задачи

$$\Delta v - \lambda v = -\varphi(P), \text{ при } P \in D_n,\ v\big|_S = 0. \qquad (14)$$

Рассматриваются области D, границами которых является конечное число замкнутых и незамкнутых непересекающихся поверхностей Ляпунова $S = \Sigma \cup \sigma$, где $\Sigma -$ конечное число замкнутых поверхностей $\Sigma = \bigcup\limits_k \Sigma_k$,

$k \in \overline{0,K}$, $\sigma = \bigcup\limits_n \sigma_n$, $n = \overline{1,N}$, где σ – конечное число незамкнутых поверхностей. При этом предполагается, что σ_n – двухсторонние поверхности, ограниченные гладкими кривыми Γ_n, а Σ_k, σ_n содержатся внутри Σ_0 для $n \in \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,K}$. Поверхности σ_n называем щелями.

Решение этой задачи сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$v(P) = -\lambda \iiint\limits_{D_n} G(P,Q) v(Q) d_Q \tau + \iiint\limits_{D_n} G(P,Q) \varphi(Q) d_Q \tau , \tag{15}$$

где $G(P,Q)$ – классическая функция Грина для пространства со щелью σ_n, определяемая следующим образом: она определена и непрерывна всюду в области $E_3 \setminus \sigma_n$ при $P \neq Q$ и как функция точки P является решением уравнения Лапласа, которое обращается в нуль на бесконечности и при $P \in \sigma_n$; при $P = Q$ она имеет точечную особенность вида $\dfrac{1}{4\pi R}$, $R = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$ – расстояние между точками P и Q. Поэтому $G(P,Q)$ вне σ_n представима в виде: $G(P,Q) = \dfrac{1}{4\pi R} + g_n(P,Q) = \omega_n(P,Q) + g_n'(P,Q)$. Здесь $\omega_n(P,Q)$ – функция Грина двухлистного Риманова пространства с гладкой линией ветвления Γ_n.

Это интегральное уравнение имеет единственное решение, если функция $\varphi(P)$ непрерывно дифференцируема в области D_n и непрерывна вплоть до границы D_n.

Через $G_1(P,Q,\lambda)$ обозначается функция Грина задачи Дирихле для уравнения $\Delta v - \lambda v = 0$ в области D. Тогда

$$G_1(P,Q,\lambda) = \frac{\exp(-\sqrt{\lambda} r)}{4\pi r} + g_1(P,Q,\lambda),\; g_1(P,Q,\lambda)\Big|_S = -\left.\frac{\exp(-\sqrt{\lambda} r)}{4\pi r}\right|_S . \tag{16}$$

Решение уравнения (14), обращающееся в нуль на S, можно представить в таком виде:

$$v(P) = \iiint\limits_D G_1(P,Q,\lambda) \varphi(Q) d_Q \tau . \tag{17}$$

Отсюда следует, что функция Грина $G_1(P,Q,\lambda)$ является резольвентой интегрального уравнения (15). Это приводит к следующему равенству:

$$G_1(P,Q,\lambda) = G(P,Q) - \lambda \iiint\limits_D G(P,Q') G_1(Q',Q,\lambda) d_{Q'} \tau . \tag{18}$$

Поэтому из представления резольвенты для симметричного интегрального уравнения имеем:

$$G_1(P,Q,\lambda) = G(P,Q) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(P) v_k(Q)}{\lambda_k (\lambda_k + \lambda)} . \tag{19}$$

Здесь λ_k и $v_k(P)$ – собственные значения и собственные функции ядра $G(P,Q)$, т.е. уравнения $\Delta v - \lambda v = 0$ в области D при граничном условии $v\big|_S = 0$. Поэтому

$$\iiint_D G(P,Q')G_1(Q',Q,\lambda)d_{Q'}\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(P)v_k(Q)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)}. \qquad (20)$$

Отсюда вытекает следующее представление для λ_k:

$$k = \frac{v}{6\pi^2}\lambda_k^{3/2} + \varepsilon_k\lambda_k^{3/2},\ \lambda_k = \left(\frac{6\pi^2 k}{v}\right)^{3/2} + \varepsilon_n k^{3/2},$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, v – объем области D, граница которой содержит гладкие замкнутые поверхности S_k, $k=\overline{0,N}$, и гладкие незамкнутые поверхности (щели σ_m, $m=\overline{1,M}$), ограниченные гладкими кривыми Γ_m.

Новизна этих результатов состоит в том, что они впервые получены для областей со щелями.

Из выполненных исследований следует, что использование метода Вейля опирается на редукцию исходной краевой задачи к симметричному интегральному уравнению со слабой особенностью.

Выкладки, аналогичные приведенным, справедливы и для кубически анизотропных сред в областях со щелями. В результате приходим к таким асимптотическим формулам:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[u_k(x)\right]^2 \sim \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{a(x,\alpha)<1} d\alpha\lambda_n^{3/2},\ n \sim \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_D\left\{\iiint_{a(x,\alpha)<1} d\alpha\right\}dx\lambda_n^{3/2}.$$

Аналогичная оценка имеет место и для второго уравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертационной работы

Научная новизна диссертационного исследования заключается в разработке подхода и методики построения аналитического решения задач исследования напряженно-деформированного состояния в кубически анизотропных твердых деформируемых телах, а именно:

1. Впервые выведены общие разрешающие системы уравнений теории упругости кубически анизотропных тел и получены формулы представления решений этих систем через три произвольные функции, что позволяет решать конкретные прикладные задачи механики деформируемого твердого тела (расчет вектора перемещения под действием нагрузки для кубически анизотропных материалов) [1, 10].

2. Построены системы разрешающих уравнений на основе метода малого параметра для решения задач статики кубически анизотропных тел для плоских и пространственных упругих тел при некоторых

предположениях относительно выбора малого параметра ($\varepsilon = \left(A_{44} / A_{11} \right) << 1$) [6, 8, 9].

3. Предложена методика решения граничных задач кубически анизотропной теории упругости для многосвязанных областей, границами которых является конечное число замкнутых и незамкнутых непересекающихся поверхностей типа Ляпунова. Выведены соответствующие интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода. На их основе получены асимптотические формулы для распределения собственных чисел и собственных функций задач Дирихле для кубически анизотропных тел [2, 3, 4, 5].

4. Показана эффективность применения разработанной методики решения граничных задач кубически анизотропной теории упругости для многосвязанных областей на примере решения конкретных граничных задач кубически анизотропной теории упругости, что было сделано впервые. Проведеный анализ полученных результатов, показал, что расчет с использованием пакетов FlexPDE и *Mathematica,* и с использованием функциональных возможностей пакета ANSYS хорошо коррелируют между собой. Максимальная разность результатов составила менее 10% [7].

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Полученные результаты могут быть использованы при изучении НДС в плоских и пространственных твердых деформируемых телах с различной формой граничных поверхностей типа Ляпунова (как замкнутых, так и незамкнутых), и обладающих свойствами кубической анизотропии.

Результаты могут быть использованы в практике работы проектно-конструкторских и научно-исследовательских организаций для более корректного и точного анализа НДС реальных тел и конструкций.

Они так же могут быть применены в ВУЗах в учебном процессе при подготовке специалистов в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики.

В теоретическом плане результаты, полученные в диссертации, расширяют возможности использования точных аналитических методов при оценке прочностных свойств реальных конструкций на основании менее затратных и более точных вычислений.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных журналах

1. Мартыненко, И.М. Волновые движения в кубически анизотропных телах / И.М. Мартыненко // Теоретическая и прикладная механика. – 2004. – Вып. 17. – С. 99–102.
2. Мартыненко, И.М. Асимптотика собственных значений и собственных функций в кубически анизотропных средах / И.М. Мартыненко // Теоретическая и прикладная механика. – 2007. – Вып. 22. – С. 270–278.
3. Мартыненко, И.М. Асимптотика собственных значений для уравнения Лапласа в областях со щелями / И.М. Мартыненко // Инженерно–физический журнал. – 2008. – Т. 81. – № 3. – С. 577–582.
4. Мартыненко, И.М. Асимптотика собственных значений и собственных функций в кубически анизотропных термоупругих телах со щелями / И.М. Мартыненко // Инженерно–физический журнал. – 2008. – Т. 81. – № 5. – С. 1010–1015.
5. Мартыненко, И.М. Асимптотика собственных значений системы Ламе в пространственных областях со щелями / И.М. Мартыненко, М.А. Журавков // Вести НАН Беларуси. Сер. физ–тех. наук. – 2008. – № 2. – С. 54–59.
6. Кубически анизотропные НДС и их нахождение методом малого параметра / И.М Мартыненко, М.А. Журавков, В.А. Казакевич, О.Н. Скляр // Инженерно–физический журнал. – 2009. – Т. 82. – № 3. – С. 586–589.
7. Журавков, М.А. Применение метода малого параметра для расчета плоской задачи статики кубически анизотропных тел / М.А. Журавков, С.М. Босяков, И.М. Мартыненко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2013. – № 3. – С. 64–68.

Материалы конференции

8. Мартыненко, И.М. Метод малого параметра в плоских задачах статики кубически анизотропных тел / И.М. Мартыненко, В.А. Казакевич, О.Н. Скляр // Прикладные задачи математики в механике, экономике, экологии: Материалы VI Междунар. студ. науч. конф., г. Севастополь, 14–18 апреля 2008. – С. 64–66

Тезисы докладов

9. Мартыненко, И.М. Метод малого параметра в кубически анизотропных твердых деформируемых телах / И.М Мартыненко, М.А. Журавков, В.А. Казакевич // XII Международная научная конференция им. академика М.Кравчука, 15–17 мая, 2008 г., / Киев. – К: ТОВ «Задруга», 2008. – С. 257.

10. Журавков, М.А. Применение методов математической физики к решению задач кубически анизотропной теории упругости / М.А. Журавков, И.М. Мартыненко // XI Белорусская математическая конференция: Тез. Докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г.: в 3 частях. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2012. – Ч. 3. – С. 64.

РЭЗЮМЭ

Мартыненка Ігнат Міхайлавіч

Ужыванне аналітычных метадаў для даследавання працэсаў дэфармавання кубічных анізатропных крышталічных тэл

Ключавыя словы: кубічная анізатрапія, замкнёныя і незамкнёныя паверхні (шчыліны) тыпу Ляпунова, дэфармаваны стан, малы параметр, асімптатычныя метады, закон Гука, эластапатэнцыялы.

Аб'ект даследавання: цвёрдыя дэфармаваныя кубічна анізатропныя целы, матэматычныя метады даследавання напружанага стану кубічна анізатропных пругкіх тэл; прадмет даследаванні трохмерныя напружана дэфармаваныя станы пругкіх цел, саслабелых шчылінамі.

Мэта работы: распрацоўка матэматычных метадаў даследавання НДС кубічна анізатропнага цэла, з ужываннем асімптатычнага інтэгравання раўнанняў статыкі, вывад адрознівальных сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў для азначэння каэфіцыентаў асімптатычных шэрагаў, доказ гіпотэзы Г. Вейля.

Выведзены асноўныя формулы для рашэння задач статыкі кубічна анізатропных цел, падане агульных формул для рашэння межавых задач праз тры функцыі – рашэнні раўнанняў у прыватных вытворных другога парадку.

Уведзены малы параметр і дадзена яго ўжыванне да рашэння двухмерных і трохмерных статычных задач для кубічна анізатропнага цела.

Дадзена развіццё метаду эластапатэнцыялаў для азначэння НДС кубічна анізатропных цвёрдых цел са шчылінамі. Атрыманыя яўныя асімптатычныя формулы для ўласных лікаў і ўласных функцый, пацверджаная гіпотэза Г. Вейля аб незалежнасці гэтых характарысатык НДС ад формы меж пругкіх цел.

РЕЗЮМЕ

Мартыненко Игнат Михайлович

Применение аналитических методов для исследования процессов деформирования кубически анизотропных кристаллических тел

Ключевые слова: кубическая анизотропия, напряженно-деформированное состояние, закон Гука, замкнутые и незамкнутые поверхности (щели) типа Ляпунова, малый параметр, асимптотические методы, эластопотенциалы.

Объектом исследования: твердые деформируемые тела, упругие свойства которых характеризуются наличием трех упругих постоянных; математические методы исследования напряженно-деформированного состояния кубически анизотропных упругих тел.

Предмет исследования – напряженно-деформированное состояние анизотропных твердых деформируемых тел.

Цель работы: разработка математических методов исследования НДС кубически анизотропного тела, с применением асимптотического интегрирования уравнений статики, вывод разрешающих систем дифференциальных уравнений для определения коэффициентов асимптотических рядов, доказательство гипотезы Г. Вейля.

Выведены основные формулы для решения задач статики кубически анизотропных упругих тел, получены представления общих формул для решения граничных задач через три функции – решения уравнений в частных производных второго порядка.

Введен малый параметр и дано его применение к решению двухмерных и трехмерных статических задач для кубически анизотропного тела.

Дано развитие метода эластопотенциалов для определения НДС кубически анизотропных твердых тел со щелями. Получены явные асимптотические формулы для собственных чисел и собственных функций, подтверждена гипотеза Г. Вейля о независимости таких характеристик НДС от формы границ упругих анизотропных тел.

SUMMARY

Martynenko Ignat Mihailovich

The use of analytical methods for the study of processes of deformation of anisotropic cubic crystalline solids

Keywords: the cubic anisotropy, the closed and not closed surfaces (crack) of type of Lyapunov, a deformable condition, small parametre, asymptotic's methods, law Hooke, elasticity potential.

Object of research: rigid deformed cubic anisotropic bodies, mathematical methods of research of an intense condition cubic anisotropic elastic bodies; *an object of research* three-dimensional tensely deformable conditions of the elastic bodies weakened by cracks.

The work purpose: working out of mathematical methods of research of the stress deformable state cubic anisotropic body, with application of asymptotic's integration of the equations of a statics, a conclusion of resolving systems of the differential equations for definition of factors of asymptotic's numbers, the proof of of G.Weil's hypothesis.

Basic formulas for the decision of problems of a statics cubic anisotropic bodies, representation of the general formulas for the decision of boundary problems through three functions – decisions of the equations in private derivatives of the second order are deduced.

The small parametre is entered and its application to the decision of two-dimensional and three-dimensional static problems for cubic anisotropic body is given.

Method solution elasticity potential for stress deformable state definition cubic anisotropic rigid bodies with cracks is given. Are received obvious asymptotic's formulas for own numbers and own functions, G.Weil's hypothesis about independence of these characteristics of the stress deformable state of the form of borders of elastic bodies is confirmed.