

Отображение единичной сферы в n -мерный эллипсоид

Воронова Н. П.

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим прямоугольную матрицу A размерности $m \times n$. Сингулярное разложение этой матрицы представляется в виде $A=USV$, где U – ортогональная матрица размерности $m \times m$; V – ортогональная матрица размерности $n \times n$; S – прямоугольная диагональная матрица размерности $m \times n$ вида

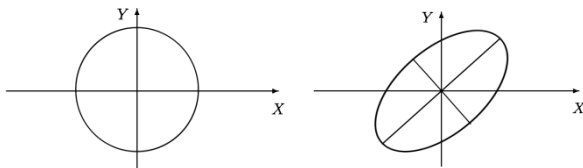
$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \sigma_k & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & & \cdot \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

с невозрастающими неотрицательными элементами на главной диагонали, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ – сингулярные числа матрицы A . Если $m > n$ и ранг матрицы $r = n$, то число обусловленности матрицы A можно найти по формуле

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}},$$

где σ_{\max} , σ_{\min} – наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы A .

Матрица A в сингулярном виде отображает единичную сферу (множество векторов с нормой, равной единице) в множество векторов различной длины, которое представляет собой r -мерный эллипсоид.



Случай $m = n = r = 2$ изображен на рисунке.

Величины σ_{\max} и σ_{\min} соответственно длины большой и малой осей эллипса – образа круга. Число обусловленности связано с эксцентриситетом эллипса и плохая обусловленность отвечает сильно вытянутым эллипсам.