УДК 372.851

Подходы к решению нестандартных задач с обратными тригонометрическими функциями

Чернявская С. В., Якимович В. С.
Белорусский национальный технический университет

Представленные задачи показывают, как применить школьные знания об обратных тригонометрических функциях в нестандартных ситуациях.

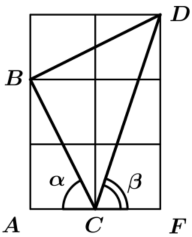
Задача 1. Доказать, что $\arcsin(|\sin x|) = \arccos(|\cos x|)$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

Решение. $f(x) = \arcsin(|\sin x|)$, $g(x) = \arccos(|\cos x|)$.

Функции f и g определены при всех $x \in \mathbf{R}$, являются четными и периодическими с периодом $T = \pi$ (в частности, для первой функции: $f(x + \pi) = \arcsin(|\sin(x + \pi)|) = \arcsin(|-\sin x|) = \arcsin(|\sin x|) = f(x)$).

В силу четности и периодичности функций, достаточно доказать исходное равенство только для $x \in [0; \pi/2]$, тогда для $x \in [-\pi/2; 0]$ и для $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ оно тоже будет справедливо. Так как длина последнего отрезка равна π, то равенство $f(x) = g(x)$ будет выполняться при всех $x \in \mathbf{R}$. Так как $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$ при $x \in [0; \pi/2]$, то $|\sin x| = \sin x$ и $|\cos x| = \cos x$. Так как $[0; \pi/2] \in [-\pi/2; \pi/2]$, то $\arcsin(\sin x) = x$. Так как $[0; \pi/2] \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$ при $x \in [0; \pi/2]$.

Значит, $f(x) = \arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin x) = x$ и $g(x) = \arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos x) = x$. Следовательно, $f(x) = g(x)$ при $x \in [0; \pi/2]$, и тогда в силу четности и π-периодичности этих функций равенство $f(x) = g(x)$ выполнено для всех $x \in \mathbf{R}$.



Задача 2. Вычислить значение выражения $\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3$.

Решение. Пусть $\mathrm{arctg}2 = \alpha$, $\mathrm{arctg}3 = \beta$.

Тогда $\mathrm{tg}\alpha = 2$, $\mathrm{tg}\beta = 3$; $\alpha, \beta \in (0; \pi/2)$. Построим прямоугольник с соотношением сторон 3 : 2 (см. рис.).

Из треугольника ABC следует, что $\angle ACB = \alpha$, из треугольника DFC следует, что $\angle FCD = \beta$.

Легко вычислить, что $BC = BD = \sqrt{5}$, $DC = \sqrt{10}$. Поэтому треугольник DCB прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $\angle DCB = 45^{\circ} = \mathrm{arctg}1$.

Поэтому $\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}2 + \mathrm{arctg}3 = 45^{\circ} + \alpha + \beta = \angle ACF = 180^{\circ}$.

В предложенных решениях используются определение и свойства обратных тригонометрических функций.