УДК 517.5

Применение операторов бесконечного дифференцирования в теории разностных схем

Акимов В. А.
Белорусский национальный технический университет

Заменим, встречающийся в теории разностных схем оператор бесконечного дифференцирования (сдвига) e^{ad}, на оператор $sh(ad_x) * f(x) = 0.5(f(x+a) - f(x-a))$ в степени m, т.е. $sh^m(ad_x)$, где a – расстояние между узлами $d_x = \frac{d}{dx}$ производная по переменной x, $f(x)$ произвольная функция. Используя бином Ньютона, а также свойство оператора сдвига, непосредственно получим: $sh^m(ad_x) * f(x) =$

$$\frac{1}{2^m}\Big[f(x+ma) - \frac{m}{1} f(x+ma-2a) + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} f(x+ma-4a) -$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} f(x+ma-6a) + \ldots +$$
$$+(-1)^k \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} f(x+ma-2ka) + \cdots + \tag{1}$$
$$+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} f(x-ma+4a) + (-1)^{m-1}\frac{m}{1} f(x-ma+2a) +$$
$$+(-1)^m f(x-ma)\Big] = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k} C_n^k f(x-ma+2ka)$$

Если в качестве пробной функции, взять используемую в рядах Фурье функцию $f_n(x) = \sin nx$, то можно установить

$$sh^m ad_x * \sin nx = (-1)^m \sin^m na \cdot \cos(nx + m\pi/2) \tag{2}$$

Если теперь в качестве пробной функции взять функцию $f_n^m(x) = x^m \sin nx$ и положить $a = \pi$, то получим:

$$sh^m(ad_x) * \left[x^m \sin nx\right] = (-1)^m m! \pi^m \sin nx \tag{3}$$

Окончательный результат таков: выведены новые формулы (1)-(3), которые можно использовать в теории разностных схем для получения более точных аппроксимаций.