УДК 51(077)

Аддитивные нули высоких порядков

Новиков А. А
Белорусский национальный технический университет

Исходное появление в математике абстрактного числа - ноль связано с расширением множества натуральных чисел (естественных количественных характеристик порождаемых унарной операцией счета - измерения) до абстрактного множества целых чисел. Числовой ноль описывает результат бинарной операции вычитания одинаковых чисел. Числовой ноль исходно: не характеризуется порядком $0=5\text{-}5=0\text{-}0=4\cdot 0=0\cdot 0$ и не определяет результат деления $0/0$. Без нуля операция сложения утрачивает свойства ассоциативности и коммутативности.

Пополнение множества чисел до плотного Q и введение числовых функций (неких вычислительных действий над числами – аргументами) позволили предельным переходом, в ряде случаев, реализовать неопределенность деления $0/0$. В результате появилось новое понятие – функциональный ноль, или привычные – «бесконечно малые функции», которые по свое сути являются неким промежуточным объектом между числами и функциями. Функциональные нули, в отличие от числовых, наделены свойством порядка. Причем, как ни странно, это понятие может быть связано не только с «перемножением собственно самих нулей», что привычно отражается в используемом термине, но и как предельный результат симметричных разностей ненулевых числовых выражений.

Стандартная операция дифференцирования $f(x)$ по функции x (привычно, но некорректно, именуемая дифференцированием по аргументу), это предельное деление ноля на функциональный ноль первого порядка $\frac{df(x)}{dx}=\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$. В обобщающем случае, бинарная операция равномерного (дающего непрерывную производную) дифференцирования функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ $\frac{df(x)}{d\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{\varphi(x)-\varphi(y)}$.

Стандартная же операция повторного дифференцирования $f(x)$ по x является результатом предельного перехода при делении аддитивно получаемых нулей второго порядка для дифференцирующей функции x^2 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}=2\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{f(x-\delta)-2f(x)+f(x+\delta)}{(x-\delta)^2-2(x)^2+(x+\delta)^2}$. Для старших производных $f(x)$ по $\varphi(x)$

$$\frac{d^nf(x)}{d\varphi(x)^n}=n!\lim_{\delta\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i f\left(x+\delta(i-n)\right)}{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \varphi\left(x+\delta(i-n)\right)}$$