УДК 519

Аксиоматическое определение рейтинга

Романчак В. М.
Белорусский национальный технический университет

Пусть задано множество объектов $\Omega=\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$. Пусть Ψ — множество подмножеств Ω (алгебра). Для множества Ψ можно аксиоматически ввести неаддитивную меру, которую будем называть рейтингом.

Определение. Рейтинг (Ω,Ψ) – это числовая функция r, определенная на множествах из Ψ и обладающая следующими свойствами:

Для любых множеств A, B для которых $A\subseteq B$, выполнятся

A_1. Если $A\neq B$, то $r(B\backslash A)>0$.

A_2. $r(A\backslash B)= r(B) - r(A)$.

Определение. Величина Q для объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ меняется равномерно, если они упорядочены и $r(A_1/A_2)=r(A_2/A_3)= \ldots = r(A_{n-1}/A_n)>0$.

Пример 1. Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ и $\omega_1\cdot\omega_2=\varnothing$, тогда

$$\Psi=\{A_0, A_1, A_2, A_{12}\},$$

где $A_0=\varnothing$, $A_1=\omega_1$, $A_2=\omega_2$, $A_{1,2}=\omega_1+\omega_2$. Можно выделить два упорядоченных подмножества Ψ: $\{A_0, A_1, A_{12}\}$ и $\{A_0, A_2, A_{12}\}$.

Пусть эксперт считает, что величина Q для объектов первого подмножества меняется равномерно, тогда $r(A_1\backslash A_0)=h$, $r(A_{12}\backslash A_1)=h$, где h – неизвестная положительная постоянная. Следовательно, выполняются равенства $r(A_1)-r(A_0)=h$, $r(A_{12})-r(A_1)=h$. Тогда $r(A_1)=h+r(\varnothing)$, где $h=(r(\Omega)-r(\varnothing))/2$, причем $r(\Omega)$, $r(\varnothing)$ - любые числа, для которых выполняется неравенство $r(\Omega)>r(\varnothing)$. Если, например, $r(\Omega)=1$ и $r(\varnothing)=0$, то получим вероятностную меру с вероятностями $r(\omega_1)=1/2$ и $r(\omega_2)= r(A_{12}\backslash A_1)=r(\Omega)-r(A_1)=1/2$.

Пример 2. *Функции полезности*. В этом случае поставим каждой альтернативе A_i в соответствие множество Q_i, мера которого тем больше, чем больше полезность альтернативы, так что если $A_i\prec A_j$, то $Q_i\subseteq Q_j$ и $r(Q_i/Q_j)=r(Q_i)-r(Q_j)$. Так, если “полезность” альтернатив $A_1, A_2, \ldots, A_n$ меняется равномерно, то и мера множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ меняется равномерно. Например, если A_1, A_2, A_3 - три альтернативы, тогда выполняется

$$r(Q_2\backslash Q_1)=r(Q_3\backslash Q_2) \text{ и } r(Q_2)-r(Q_1)=h,\ r(Q_3)-(Q_2)=h.$$