Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика»

Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по высшей математике со студентами экономических специальностей по теме «Ряды»

Минск 2019

УДК 51(075.4)

ББК 22.1я7

М 54

Составитель: Н.А. Шавель

Рецензенты:

В каждом разделе настоящего пособия содержатся краткие теоретические сведения, а также примеры подробного решения типовых задач, иллюстрирующие основные приёмы, применяемые при исследовании сходимости рядов. В заключение каждого раздела приводятся варианты задач для решения в аудитории на практическом занятии, а также задачи для самостоятельного решения различных уровней сложности. Издание предназначено для студентов экономических специальностей, а также для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу.

Содержание

Раздел 1. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости. Знакопостоянные ряды. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Числовые ряды. Необходимый признак сходимости.

Пусть дана числовая последовательность $\{u_n\}$. Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называют членами ряда, u_n – общий член ряда.

Сумму n первых членов ряда называют $n-$ ой частичной суммой ряда и обозначают

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i .$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называют сходящимся, а число S называют его суммой. Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела при $n \to \infty$, то говорят что ряд расходится.

Свойства рядов

1. Сходимость или расходимость ряда не изменится, если добавить, отбросить или изменить конечное число его членов.
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна числу S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$, где c – любое число, тоже сходится, и его сумма равна $c \cdot S$. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится и число $c \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ тоже расходится.
3. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, а их суммы равны S_1, S_2, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ тоже сходится, а его сумма равна $S_1 + S_2$.

Для выяснения сходимости рядов применяют специальные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Стандартный пример – ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, называемый в теории рядов гармоническим рядом. Данный ряд расходится, несмотря на выполнение условия $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости). Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n+4}$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{5}{3} \neq 0.$$

Согласно следствию из необходимого признака ряд расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2} = (1^{\infty}) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}-1\right)\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{2n^2+1}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2n^2+1}\right)^{-\frac{2n^2+1}{4}}\right]^{-\frac{4n^2}{2n^2+1}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2+1}} = e^{-2} \neq 0.$$

Согласно следствию из необходимого признака ряд расходится.

Знакопостоянные ряды. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Числовой ряд называется знакоположительным (знакоотрицательным), если его члены $u_n \geq 0$ $(u_n \leq 0)$, $n \in N$. Знакоположительные и знакоотрицательные ряды называют знакопостоянными. Так как знакоотрицательные ряды легко перевести в знакоположительные путём умножения на (-1), что не влияет на их сходимость, то все нижеследующие признаки формулируются для знакоположительных рядов.

1. Признак Даламбера.

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. При $l=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^2}{(2n+1)!}$

Решение.

Применим признак Даламбера

$$u_n = \frac{3^n \cdot n^2}{(2n+1)!},\ u_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)^2}{(2(n+1)+1)!} = \frac{3^{n+1}(n+1)^2}{(2n+3)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)^2 \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot 3^n \cdot n^2} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$

Решение.

Применим признак Даламбера

$$u_n = \frac{5^n \cdot n!}{n^n},\ u_{n+1} = \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n!} = 5\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{e} > 1$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

2. Радикальный признак Коши.

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. При $l=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n-1}{3n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{7n-1}{3n+5}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{7n-1}{3n+5}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{7n-1}{3n+5}}=\sqrt{\frac{7}{3}}>1.$$

По радикальному признаку Коши ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+3}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{подгонка под второй}\\ \textit{замечательный предел}\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{-1}{n+3}\right)^{-(n+3)}\right\}^{-\frac{n}{n+3}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}}=e^{-1}<1.$$

По радикальному признаку Коши ряд расходится.

Замечание. Если при использовании признака Даламбера или радикального признака Коши получено значение предела $l>1$, то в этой ситуации всегда нарушен необходимый признак сходимости, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$.

2. Интегральный признак Коши.

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Если функция $f(x)$ непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[a\,;+\infty)$, $a>0$, и $f(u)=u_n$ для любых $n\geq n_0\in N$, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n}$**.**

Решение. Применим интегральный признак Коши. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ – непрерывная, монотонно убывающая на промежутке $[2\,;+\infty)$ функция, $f(n)=$ $=\dfrac{1}{n\ln n}=u_n$, $n\geq 2$, т. е. для $f(x)$ выполнены все условия интегрального признака Коши. Вычислим

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_{2}^{+\infty} \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\ln x\Big|_{2}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln\ln x - \ln\ln 2 = \infty,$$

т.е. несобственный интеграл расходится. Следовательно, исходный ряд также расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\cdot\ln^2(3n-1)}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Пусть $f(x) = \frac{1}{(3x-1)\ln^2(3x-1)}$ – непрерывная, монотонно убывающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция, $f(n) = \frac{1}{(3n-1)\ln^2(3n-1)} = u_n$, $n \in N$, т. е. для функции $f(x)$ выполнены все условия интегрального признака Коши . Вычислим

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(3x-1)\ln^2(3x-1)} = \frac{1}{3}\int_{2}^{+\infty} \frac{d\ln(3x-1)}{\ln^2(3x-1)} = -\frac{1}{3\ln(3x-1)}\Bigg|_{1}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(3x-1)} - \frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{3}\cdot\left(0 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{3\ln 2}$$

т.е. несобственный интеграл сходится. Следовательно, исходный ряд тоже сходится.

4. Признаки сравнения.

Простой признак сравнения**.** Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $u_n \le v_n$ для любых $n \ge n_0 \in N$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Предельный признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = C, \text{ где } 0 < C < \infty,$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. При использовании признаков сравнения в качестве рядов, с которыми проводится сравнение исходного ряда, часто используются следующие:

а) ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n, b \neq 0$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;

б) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$.

Используем простой признак сравнения. Так как $u_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n = v_n,\ n \in N$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q = \frac{1}{3} < 1$, то исходный ряд также сходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$.

Используем предельный признак сравнения. Здесь $u_n = \frac{2n-1}{3n^2+5}$. Для сравнения возьмем гармонический ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)n}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{3n^2+5} = \frac{2}{3},$$

т.е. предел конечен и отличен от нуля. Так как гармонический ряд расходится, то исходный ряд также расходится.

Задания для решения в аудитории.

Задание 1.1. Используя необходимый признак сходимости, исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{5n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{2n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2^n+3^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{5n}$ (Все ряды расходятся.)

Задание 1.2. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{e^n\sqrt{n}}$ (Ряд расходится.)

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}+2}{(0{,}3)^n(n+1)!}$ (Ряд сходится.)

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^n}}{n!}$ (Ряд сходится.)

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{n!}$ (Ряд расходится.)

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (Ряд расходится.)

Задание 1.3. Используя радикальный признак Коши, исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{9n+1}\right)^{2n}$ (Ряд сходится.)

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{3n+1}\right)^{n/3}$ (Ряд расходится.)

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{n^2}$ (Ряд сходится.)

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (Ряд расходится.)

5. $\sum_{n=1}^{\infty}n^n\cdot\left(arctg\frac{\pi}{n}\right)^n$ (Ряд расходится.)

Задание 1.4. Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$ (Ряд сходится.)

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot\sqrt{\ln(2n+1)}}$ (Ряд расходится.)

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$ (Ряд расходится.)

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ (Ряд сходится.)

Задание 1.5. Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{2n^5+7}$ (Ряд сходится.)

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt[3]{3n^4-2}}$ (Ряд расходится.)

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n+n}$ (Ряд сходится.)

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$ (Ряд сходится.)

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(5^{1/n}-1)$ (Ряд расходится.)

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^2}$ (Ряд сходится.)

Задания для самостоятельного решения.

Исследовать на сходимость ряды

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot\sqrt{n}}{(2n-1)!}$ (Ряд сходится.)

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n^2-3}{4n^2+1}\right)^{n^2}$ (Ряд расходится.)

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-3}{3n^2+1}\right)^{n^2}$ (Ряд расходится.)

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{n^2}$ (Ряд сходится.)

5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln n-1}}$ (Ряд расходится.)

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot\ln^5(2n+1)}$ (Ряд сходится.)

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln\frac{n+1}{n-1}$ (Ряд сходится.)

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (Ряд сходится.)

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt[3]{3n^4+n}}$ (Ряд расходится)

10. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{n^3}$ (Ряд расходится.)

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ (Ряд расходится)

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (Ряд сходится. Указание. Использовать свойство логарифмов $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$)

Раздел 2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется знакопеременным, если он содержит положительные и отрицательные члены.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится.

При исследовании ряда на абсолютную сходимость составляют ряд из модулей и применяют к нему подходящий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов или необходимый признак сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$

Решение. Имеем знакопеременный ряд. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$. Применим к данному знакоположительному ряду простой признак сравнения. Для сравнения выберем обобщённый гармонический ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, для которого показатель степени знаменателя $\alpha = 2 > 1$, т. е. данный ряд сходится. Так как $\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $n \in N$, то согласно простому признаку сравнения ряд из модулей тоже сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}\cdot\frac{2n-1}{3n+5}$

Решение. Имеем знакопеременный ряд. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+5}$. Для него нарушен необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{2}{3} \ne 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| \ne 0$, очевидно, следует $\lim\limits_{n\to\infty}u_n \ne 0$, т.е. необходимый признак нарушен и для исходного ряда. Исходный ряд расходится.

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Частным случаем знакопеременных рядов являются знакочередующиеся ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots, \text{ где } u_n > 0 \text{ для } n \in N.$$

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов). Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ удовлетворяют условиям:

1) $u_n \ge u_{n+1}$ для любых $n \ge n_0 \in N$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится, причём его сумма $0 \le S < u_1$.

Пример. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n-1}{7n+5}\right)^{2n}$.

Решение. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+5}\right)^{2n}$. Применим к нему радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3n-1}{7n+5}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+5}\right)^{2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{7n+5}\right)^{2}=\left(\frac{3}{7}\right)^{2}<1$$

Согласно радикальному признаку Коши ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{3n-2}}$.

Решение. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-2}}$. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ по предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{3n-2}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\neq 0.$$

Следовательно, ряды ведут себя одинаково. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ является частным случаем обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=\frac{1}{3}<1$, т.е. он расходится. Значит, ряд из модулей также расходится, т. е. абсолютной сходимости у исходного ряда нет.

Исследуем исходный ряд на условную сходимость. Это знакочередующийся ряд. Применим признак Лейбница:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3n-2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}=u_{n+1},\ n\in N;$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-2}}=0.$$

Условия признака Лейбница выполнены, значит, ряд сходится. Так как абсолютной сходимости нет, то исходный ряд сходится условно.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Для сравнения по простому признаку сравнения выберем обобщённый гармонический ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится, так как степень знаменателя $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Имеем $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 2$. Согласно простому признаку сравнения ряд из модулей тоже расходится. Абсолютной сходимости у исходного ряда нет.

Проверим, есть ли у исходного ряда условная сходимость. Применим признак Лейбница.

Проверим условие 1) признака Лейбница.

$$u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}},\ u_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Соотношение между u_n и u_{n+1} в данном примере неочевидно, поэтому введём функцию $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$, для которой имеет место условие $f(n) = u_n$, $n \in N$. Вычислим производную

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}} < 0 \text{ при } x > e^2.$$

Следовательно, начиная с номера $n_0 = 8 > e^2$, члены последовательности $\{u_n\}$ заведомо убывают и условие 1) выполнено.

Проверим условие 2) признака Лейбница.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{matrix} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

(Чтобы воспользоваться правилом Лопиталя, перешли в пределе к непрерывному аргументу, заменяя переменную n на x.)

Таким образом, условие 2) тоже выполнено и, согласно признаку Лейбница, исходный ряд сходится. Так как абсолютной сходимости нет, то он сходится условно.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}$.

Решение. Составим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$. Применим к нему признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^2} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{2x+1}}{x+1} = \left| \begin{matrix} \textit{правило} \\ \textit{Лопиталя} \end{matrix} \right| = \lim_{x\to\infty} 2^{2x+1} \cdot \ln 2 \cdot 2 = \infty > 1$$

(Чтобы воспользоваться правилом Лопиталя, перешли в пределе к непрерывному аргументу, заменяя n на x.)

По признаку Даламбера ряд из модулей расходится. Кроме того, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$, то для ряда из модулей нарушен необходимый признак сходимости, а, значит, он нарушен и для исходного ряда. Исходный ряд расходится.

Задания для решения в аудитории.

Задание 2.1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакопеременные ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\cdot 2^n}{n!}$ (Ряд сходится абсолютно.)
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\sin n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$ (Ряд сходится абсолютно.)
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-2\cos n\right)\cdot(\ln 2)^n$ (Ряд сходится абсолютно.)
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\dfrac{\pi n}{4}$ (Ряд расходится.)

Задание 2.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующиеся ряды.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{2n+1}$ (Ряд расходится.)
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ (Ряд сходится абсолютно.)
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$ (Ряд сходится условно.)
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{10^n}$ (Ряд расходится.)
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)}{3n^2+5}$ (Ряд сходится условно.)
6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\ln^3 n}$ (Ряд сходится абсолютно.)
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n^2}$ (Ряд расходится.)
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ (Ряд сходится условно.)
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n}$ (Ряд сходится абсолютно.)

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3n+5}{\sqrt{n^3}}$ (Ряд сходится условно.)

Задания для самостоятельного решения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot e^n}{(3n)!}$ (Ряд сходится абсолютно.)
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{\ln(n+2)}$ (Ряд расходится.)
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+n}}$ (Ряд сходится условно.)
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(\ln 2)^n$ (Ряд сходится абсолютно.)
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{5n^2+2}$ (Ряд сходится условно.)
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n$ (Ряд расходится.)
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{n^2}$ (Ряд сходится абсолютно.)
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2}$ (Ряд расходится.)
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ (Ряд сходится условно.)
10. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\lg(1+0,5^n)\cdot e^n$ (Ряд расходится.)
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot tg\dfrac{\pi}{n^3}$ (Ряд сходится абсолютно.)
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (Ряд сходится условно.)

Раздел 3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

В предыдущих разделах рассматривались ряды, членами которых являлись числа, то есть числовые ряды. Перейдём к рассмотрению рядов, членами которых являются функции, а именно, степенные функции.

Степенными называются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...,$$

где $a_n \in R$ – коэффициенты степенного ряда, точка $x_0 \in R$ – центр ряда.

Подставим в степенной ряд произвольное значение $x \in R$. Если полученный при этом числовой ряд сходится, то x называют точкой сходимости степенного ряда, если расходится, то x называют точкой расходимости степенного ряда. Множество всех точек сходимости образует область сходимости D степенного ряда. Отметим, что множество D всегда непустое, так как центр ряда x_0 всегда содержится в D.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при $x = x_2$, то он расходится при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$.

Из теоремы Абеля следует, что для каждого степенного ряда существует число $0 \le R \le +\infty$, называемое радиусом сходимости, такое, что при $x \in (x_0 - R;\, x_0 + R)$ этот ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty\,;\, x_0 - R) \cup (x_0 + R\,;\, +\infty)$ расходится. Интервал $(x_0 - R\,;\, x_0 + R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда. Вопрос о сходимости ряда на концах интервала, т.е. в точках $x_0 \pm R$ решается в каждом конкретном случае отдельных исследованием.

Для определения радиуса сходимости R можно использовать формулы, следующие из признаков Даламбера и Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

если в правых частях равенств существуют конечные или бесконечные пределы.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$.

Решение. Это степенной ряд с коэффициентами $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$, центром ряда $x_0 = -2$. Определим радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot 3^n\cdot(-1)^{n+1}}\right| = 3\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} == 3\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 3.$$

Следовательно, ряд сходится в интервале $(-5\,;\,1)$ и расходится при $x \in (-\infty\,;\,-5) \cup (1\,;\,+\infty)$. Проведем исследование на концах интервала сходимости.

При $x=-5$ получаем обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\alpha=\frac{1}{2}<1$ и, следовательно, ряд расходится. Точку $x=-5$ не включаем в область сходимости.
При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, который сходится условно по признаку Лейбница. Точку $x=1$ включаем в область сходимости.
Область сходимости $D=(-5\,;1]$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n\cdot x^n$.

Решение. Это степенной ряд с коэффициентами $a_n=\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$, центром ряда $x_0=0$. Определим радиус сходимости.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+2}=2.$$

Следовательно, ряд сходится в интервале $(-2\,;\,2)$ и расходится при $x\in(-\infty\,;-2)\cup(2\,;+\infty)$. Проведем исследование на концах интервала сходимости.

При $x=2$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n\cdot 2^n$, для которого

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n\cdot 2^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^n=(1^{\infty})=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2n+4}{2n-1}-1\right)\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n-1}\right)^n==\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{5}}\right]^{\frac{5n}{2n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n-1}}=e^{\frac{5}{2}}\neq 0,$$

т. е. нарушен необходимый признак сходимости.

При $x=-2$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n\cdot(-2)^n$, для которого аналогично

$$\lim_{n\to\infty}u_n=e^{\frac{5}{2}}\lim_{n\to\infty}(-1)^n\neq 0.$$

Следовательно, точки $x=\pm 2$ не включаем в область сходимости.

Область сходимости $D=(-2\,;\,2)$.

Задания для решения в аудитории.

Найти область сходимости D степенного ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{5^n\cdot n^2}$ (Область сходимости $D=\left[-4;6\right]$)

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^n}{n\cdot\ln n}$ (Область сходимости $D=\left(-2;0\right]$)

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$ (Область сходимости $D=(-1;1)$)

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\sqrt{n^n}}(x+2)^n$ (Область сходимости $D=\left\{-2\right\}$)

5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot\ln n}$ (Область сходимости $D=\left[2;4\right)$)

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-1)^n}{n!}$ (Область сходимости $D=\mathbb{R}$)

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(3^{\frac{1}{n}}-1)x^n$ (Область сходимости $D=\left[-1;1\right)$)

8. $\sum_{n=2}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{n^2}\cdot(x+1)^n$ (Область сходимости $D=\left[-2;0\right]$)

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{n!}(x-4)^n$ (Область сходимости $D=\left\{4\right\}$)

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+2}{n!}\cdot(x-2)^n$ (Область сходимости $D=\mathbb{R}$)

Задания для самостоятельного решения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (Область сходимости $D=\left[-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$)

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(-e)^n\cdot\sqrt{2n+3}}$ (Область сходимости $D=\left(-e;e\right]$)

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+3)^n}{n\cdot\ln^2 n}$ (Область сходимости $D=\left[-4;-2\right]$)

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(x+5)^n$ (Область сходимости $D=(-6;-4)$)

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n\cdot(x-2)^n$ (Область сходимости $D=(-1;5)$)

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{2^n\cdot arctgn}$ (Область сходимости $D=(5;9)$)

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^n}}{n!}\cdot(x+4)^n$ (Область сходимости $D=\mathbb{R}$)

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}\cdot(x-3)^n$ (Область сходимости $D=\{3\}$)

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot(x+3)^n$ (Область сходимости $D=[-4;-2)$)

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(5^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\cdot(x+2)^n$ (Область сходимости $D=[-3;-1)$)

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot x^n}{\ln(1+0,5^n)}$ (Область сходимости $D=(-\frac{1}{4};\frac{1}{4})$)

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\sin n)\cdot x^n}{n^2}$ (Область сходимости $D=[-1;1)$)

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 5^n}{(2n+1)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{5n-3}\right)^{5n}$ в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{2\ln n-1}}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n-2}{4n+3}\right)^{\frac{n}{5}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-3}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n(x-1)^n}{\sqrt[5]{2n+1}}$$

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2n^3}{\sqrt{9n^7-2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{e^n\cdot\sqrt{n}}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{9n-4}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(3n-1)}{2n^3+7}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{4^n\cdot\sqrt{5n-2}}$$

Вариант 3

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+5}\right)^n$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(3\ln n-1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot n^{10}}{(2n)!}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{3n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{8n-3}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(x+1)^n}{7n-5}$$

Вариант 4

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+7}\right)^{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^{10}(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{3^n\cdot\sqrt[3]{n}}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, arctgn$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n+1)}{3n^3+n+1}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0,5)^n(x+3)^n}{\sqrt[3]{7n+1}}$$

Вариант 5

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n^5}{(2n+3)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{3n+5}\right)^{3n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt[3]{2n^4-n}}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2\cdot\ln n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{3n+4}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}\cdot(x+2)^n$$

Вариант 6

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n^2}{\sqrt{4n^5+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^{n^3}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2-1}{3n^2+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^9+3}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-1)\cdot x^n$$

Вариант 7

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7\cdot 7^n}{(3n)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-2}\right)^{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-4}{3n+7}\right)^{\sqrt{n}}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{6n-1}{7n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-3}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lg(1+0{,}1^n)\cdot(x+3)^n$$

Вариант 8

1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot\sqrt[4]{\ln(n+2)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{n^2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{99n+3}$

2. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-3}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n\cdot\sqrt{n}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot x^n$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.- Москва: Наука, 1986.
2. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике./ Т.А. Сухая, В.Ф.Бубнов/. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.
3. Индивидуальные задания по высшей математике./ Под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 3.
4. Высшая математика для экономистов./ Под редакцией Н. Ш. Кремера.- Москва: Юнити Дана, 2010.
5. Руководство к решению задач по высшей математике./ Под ред. Е.И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 2.