Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут, Т.Ф. Богинская

Динамическое действие нагрузок. Учет сил инерции при поступательном и вращательном движении

Учебно-методическое пособие

Электронное учебное издание

Минск – 2019

УДК 620.1 (075.8)
ББК 30.121я7
Р 44

Авторы:

Л.Е. Реут, Т.Ф. Богинская

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент *А.М. Авсиевич*

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает один из классов динамических задач – задачи на учет сил инерции при поступательном и вращательном движении. Учитывая, что элементы машиностроительных конструкций в большинстве своем подвергаются действию динамических нагрузок, способных привести к разрушению, расчеты на прочность таких элементов являются важными и актуальными. В пособии рассматривается теоретический аспект данной темы, а также предлагаются практические задачи с методиками решения, анализом и подробным пояснением для широкого класса деталей, подвергающихся в процессе работы действию сил инерции.

Пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел. (017) 292-41-01
E-mail: msf@bntu.by
Регистрационный № **БНТУ/МСФ22–81.2019**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов представляет собой фундаментальную общетехническую дисциплину, изучаемую во всех технических вузах и являющуюся основой технического образования инженера любой специальности. Одним из важных в курсе «Механики материалов» является раздел, посвященный расчетам деталей машин и механизмов, работающих в условиях динамических нагрузок – вибраций, колебаний, ударов, нагрузок, многократно изменяющихся по величине, направлению, скорости приложения и т.д. В этом случае возникают значительные силы инерции, воздействующие на элемент и создающие угрозу его прочности. Расчет деталей, работающих в условиях динамических нагрузок, отличается от статического расчета и требует соответствующих методик и подходов при их проектировании.

Данное учебное пособие представляет собой первую часть цикла электронных пособий, посвященных расчету на прочность и жесткость деталей машин и механизмов при динамическом действии нагрузок. Пособие рассматривает вопросы учета сил инерции при поступательном и вращательном движении и включает в себя краткую теоретическую часть и широкий набор практических инженерных задач с решениями, пояснениями и методическими рекомендациями.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В механике материалов большое количество задач посвящено расчетам элементов конструкций, работающих в условиях статического нагружения.

> ***Нагрузка является статической, если она медленно и плавно прикладывается к телу, возрастая от нуля до конечного значения, а затем на протяжении времени остается неизменной ни по величине, ни по направлению, ни по точке приложения.***

При таком нагружении все внешние силы (включая реакции опор) и внутренние силы успевают уравновеситься. Скорость нарастания деформаций ничтожно мала и ускорения смещения частиц незначительны, поэтому возникающими силами инерции можно пренебречь и рассматривать работу элемента только под действием чисто статической нагрузки.

Однако на практике элементы машин и механизмов редко работают в условиях статического нагружения. В процессе работы конструкции большинство из них находится в движении или подвержены действию деталей, движущихся с скоростями, часто изменяющимися по величине и направлению. В результате этого возникают *динамические нагрузки* – происходит соударение деталей, их вибрация, колебания, деформации развиваются с большой скоростью и ускорениями.

> ***Нагрузка является динамической, если она прикладывается с ускорением.***

Именно наличие ускорения принципиально меняет картину нагружения, поскольку ускорение вызывает появление силы инерции, направленной в сторону, обратную ускорению. И эта сила инерции является дополнительной силой, воздействующей на элемент, вызывая в детали дополнительные напряжения и деформации. Поэтому любая динамическая нагрузка больше статической и является более опасной для прочности элемента.

В зависимости от вида ускорения все задачи динамики в механике материалов делятся на четыре основных класса:

- задачи на учет сил инерции;
- задачи на удар;
- задачи на упругие колебания;
- задачи на циклические нагрузки.

ЗАДАЧИ НА УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ – это класс динамических задач, когда ускорения постоянны по величине и направлению и когда их можно определить по формулам кинематики твердого тела: $a = (V_к - V_0)/t$, $a = 2S/t^2$, $a = \omega^2 R$ и др. И тогда вычисление силы инерции, которая рассматривается как дополнительная нагрузка, возможно по формуле: $F_{ин} = ma$.

Как известно из курса механики материалов, выполнение любого расчета начинается с определения внутренних сил (сил упругого сопротивления), возникающих в элементе от действия внешней нагрузки. Определяются внутренние усилия «методом сечений», согласно которому тело рассекается плоскостью, одна из частей тела отбрасывается, действие отброшенной части на оставшуюся заменяется внутренними силами и для оставшейся части составляются уравнения равновесия, откуда и вычисляются внутренние усилия. Однако такой подход возможен только при статическом нагружении. При динамических нагрузках, когда воздействие на тело происходит с ускорением, а значит, и все частицы при деформировании элемента также перемещаются с ускорениями, рассматривать тело в равновесии и применять к нему уравнения статики уже нельзя.

Чтобы решить этот вопрос и иметь возможность по-прежнему применять статические уравнения равновесия в динамических задачах, используем принцип Даламбера, сформулированный для материальной точки:

> ***Если в любой момент к каждой материальной точке данной системы приложить силу инерции этой точки, то эти силы инерции будут уравновешиваться всеми заданными силами, действующими на систему, включая реакции связей.***

Этот принцип означает, что приложив к точке силу инерции этой точки, мы получаем ее равновесие, однако это равновесие не является постоянным, оно носит *мгновенный* характер, т.е. справедливо в данный момент времени или данное мгновение, поэтому называется *мгновенным равновесием*.

Тогда применительно к реальным элементам конструкций, изучаемым в механике материалов, рассматривая элемент как совокупность материальных точек, принцип Даламбера предполагает, что приложив к телу силу инерции этого тела как дополнительную нагрузку, мы можем рассматривать элемент в равновесии и применять для его расчета уравнения статики твердого тела, не забывая при этом, что речь идет о *мгновенном равновесии*.

1. Учет сил инерции при поступательном движении

Рассмотрим вопрос на примере подъема груза (рис. 1, *а*) и определим в тросе продольную силу N. Для этого рассечем трос (рис. 1, *б*, *в*) и рассмотрим два варианта нагружения: подъем происходит без ускорения и с ускорением.

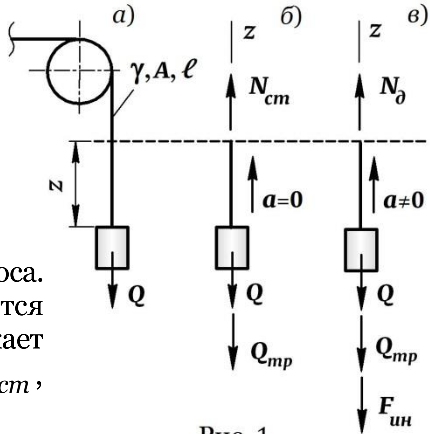


Рис. 1

При подъеме груза с постоянной скоростью, когда $a=0$ (рис. 1, *б*), на трос действуют две нагрузки – вес груза Q и собственный вес части троса длиной z, равный $Q_{тр}=\gamma Az$ где γ – удельный вес его материала; A – площадь поперечного сечения троса. В этом случае трос нагружается статически и в сечении возникает статическая продольная сила $N_{ст}$, равная:

$$N_{ст}=Q+Q_{тр}=Q+\gamma Az. \qquad (1)$$

При подъеме груза с ускорением возникает сила инерции $F_{ин}$ массы груза и массы отсеченной части троса, которая направлена в сторону, обратную ускорению (рис. 1, *в*) и равна:

$$F_{ин}=\boxed{ma=\frac{Q}{g}a}=\frac{Q+Q_{тр}}{g}a=\frac{Q+\gamma Az}{g}a, \qquad (2)$$

где a – ускорение подъема; g – ускорение свободного падения.

В этом случае в сечении троса возникает динамическая продольная сила $N_{д}$, с учетом значений (1) и (2) равная:

$$N_{д}=Q+\gamma Az+F_{ин}=\left(Q+\gamma Az\right)+\frac{\left(Q+\gamma Az\right)}{g}a=N_{ст}\left(1+\frac{a}{g}\right). \qquad (3)$$

Обозначим:

$$\boxed{k_{д}=1+\frac{a}{g}}, \qquad (4)$$

где значение $k_{д}$ называется *динамический коэффициент*.

И теперь, используя динамический коэффициент k_∂ (4) и учитывая закон пропорциональности, принятый в механике материалов, задачи на учет сил инерции при поступательном движении при определении внешних и внутренних сил, а также напряжений и деформаций, можно решать по формулам:

$$Q_\partial = k_\partial Q_{cm}; \quad N_\partial = k_\partial N_{cm};$$
$$\sigma_\partial = \frac{N_\partial}{A} = \frac{k_\partial N_{cm}}{A} = k_\partial \sigma_{cm}; \tag{5}$$
$$\Delta_\partial = \frac{N_\partial \ell}{EA} = \frac{k_\partial N_{cm} \ell}{EA} = k_\partial \Delta_{cm}.$$

Из выражений (5) видно, что при поступательном движении расчеты можно полностью выполнять как статические, мысленно прикладывая статическую силу F_{cm} и определяя значения N_{cm}, σ_{cm}, Δ_{cm} и др., после чего, определив по формуле (4) k_∂ и введя его в расчет, для всех искомых параметров можно получить их динамическое значение. И тогда условие прочности и условие жесткости, используемые при выполнении проверочных расчетов и проектировании детали, принимают соответствующий вид:

$$\sigma_\partial = k_\partial \sigma_{cm} \le [\sigma]; \ \Delta_\partial = k_\partial \Delta_{cm} \le [\Delta]. \tag{6}$$

Из формулы (6) также видно, что иногда динамический расчет можно полностью свести к статическому, понизив значения $[\sigma]$ и $[\Delta]$ на величину k_∂, т.е.

$$\sigma_{cm} = \frac{[\sigma]}{k_\partial}; \ \Delta_{cm} = \frac{[\Delta]}{k_\partial}. \tag{7}$$

2. *Учет сил инерции при вращательном движении*

В инженерных конструкциях машин и механизмов огромное количество деталей работает в условиях вращения, при этом имея, зачастую, большую массу и вращаясь с высокой скоростью, такие элементы создают значительные силы инерции, способные привести к разрушению детали.

Вращательное движение есть частный случай движения тела по кривой. Рассмотрим точку массой m и определим ускорения, возникающие при ее криволинейном движении.

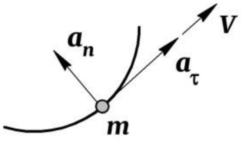


Рис. 2

При движении точки по кривой (рис. 2) со скоростью V, возникают два ускорения:

- a_τ – тангенциальное;
- a_n – радиальное (нормальное).

Тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной к кривой и *характеризует изменение скорости по величине*. При ускоренном движении (период разгона) его направление совпадает с вектором скорости, при замедленном (торможение) – принимает обратное направление. Оно возникает только при неравномерном движении и определяется как:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{V_\text{к} - V_0}{t}. \qquad (8)$$

При равномерном движении, когда скорость точки постоянна ($V = \text{const}$), тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$.

Радиальное ускорение a_n направлено к центру кривизны траектории движения и *характеризует изменение скорости по направлению*. Так как при движении по кривой вектор скорости в каждой точке изменяет направление, значит, при любом криволинейном движении (равномерном или неравномерном) радиальное ускорение всегда будет присутствовать и $a_n \neq 0$. По этой причине любое вращательное движение относится к классу динамических задач и детали, работающие в условиях вращения, испытывают динамические нагрузки.

При движении тела по окружности (вращении) радиальное ускорение может быть определено по формулам:

$$a_n = V^2/R; \; a_n = \omega^2 R, \qquad (9)$$

где R – радиус вращения; ω – угловая скорость, связанная с линейной как $V = \omega R$ и равная $\omega = \pi n/30$, где n – число об/мин.

Возникающие при вращательном движении ускорения приводят к появлению инерционных нагрузок (рис. 3): *инерционного момента* $M_{ин} = F_{ин\,(\tau)} R = m a_\tau R$ и *силы инерции* $F_{ин\,(n)} = m a_n$, вызванных соответственно ускорениями a_τ и a_n и направленных в сторону, обратную ускорениям.

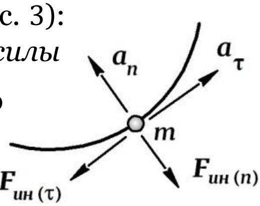


Рис. 3

2.1. Равномерное вращательное движение

Равномерное вращательное движение тела возникает при его вращении с постоянной скоростью ($V = \text{const}$, $\omega = \text{const}$). В этом случае возникают только радиальное ускорение и центробежная сила инерции $F_{ин}$, а тангенциальное ускорение и инерционный момент $M_{ин}$ равны нулю.

Расчет вращающегося стержня

Рассмотрим вращение призматического стержня вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω. В результате вращательного движения на каждую точку будет действовать центробежная сила инерции, направленная от оси вращения и растягивающая стержень (рис. 4). Таким образом, сила инерции (как и вес тела) является объемно-распределенной нагрузкой, а для стержня – линейно-распределенной, причем неравномерно распределенной с различной интенсивностью по длине.

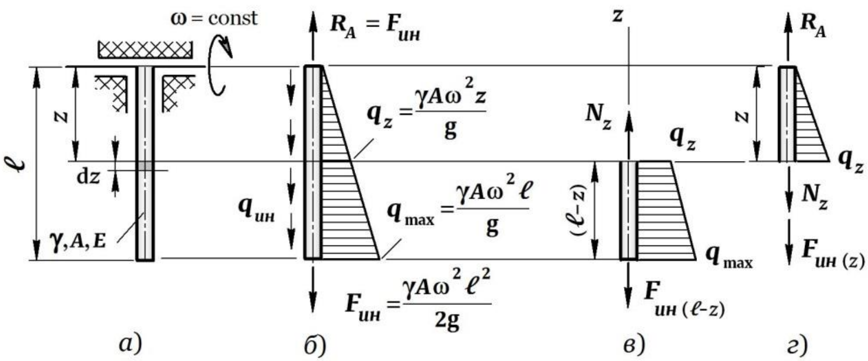


Рис. 4

Установим характер и закон изменения инерционных сил по длине стержня. Для этого на расстоянии z от оси вращения выделим бесконечно малый элемент длиной $\mathrm{d}z$ (рис. 4, *а*) и определим действующую на него силу инерции:

$$\mathrm{d}F_{ин} = \mathrm{d}m \cdot a = \frac{\gamma A \mathrm{d}z}{g}\omega^2 z = \frac{\gamma A \omega^2}{g} z\,\mathrm{d}z\,. \qquad (10)$$

Тогда интенсивность инерционных сил на этом участке равна:

$$q_z = \frac{dF_{ин}}{dz} = \frac{\gamma A \omega^2}{g} z. \qquad (11)$$

Формула (11) выражает закон изменения инерционных сил по длине стержня, который можно представить графически в виде эпюры (рис. 4, *б*) и из которого видно, что

$$\text{при} \quad z = 0 \ \rightarrow \ q_{ин} = 0;$$
$$\text{при} \quad z = \ell \ \rightarrow \ q_{ин} = q_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell}{g}. \qquad (12)$$

Равнодействующая инерционных сил $F_{ин}$, равная из условия равновесия стержня реакции R_A на оси вращения, может быть определена как площадь эпюры интенсивности этих сил, т.е. как площадь треугольника (рис. 4, *б*):

$$F_{ин} = R_A = \frac{q_{\max} \ell}{2} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{2g}. \qquad (13)$$

Определяем продольную силу N_z в сечении и устанавливаем закон ее изменения по длине стержня. Для нижней отсеченной части стержня (рис. 4, *в*) равнодействующую инерционных сил $F_{ин(\ell - z)}$ также можно определить как площадь эпюры на данном участке. И тогда, исходя из условия $-\sum Z = 0$: $N_z = F_{ин(\ell - z)}$ и с учетом значений (11) и (12), получаем закон изменения силы N_z по дине стержня:

$$N_z = F_{ин(\ell - z)} = \frac{q_{\max} + q_z}{2}\left(\ell - z\right) = \frac{\gamma A \omega^2}{2g}\left(\ell^2 - z^2\right). \qquad (14)$$

Равнодействующую инерционных сил верхней отсеченной части стержня (рис. 4, *г*) также определяем как площадь эпюры на данном участке и с учетом значения (11) она равна:

$$F_{ин(z)} = \frac{q_z z}{2} = \frac{\gamma A \omega^2 z^2}{2g}. \qquad (15)$$

Тогда продольная сила N_z в сечении может быть определена из условия равновесия этой части —

$$\sum Z = 0: \ R_A - N_z - F_{ин(z)} = 0 \qquad (16)$$

как $N_z = R_A - F_{ин(z)}$, и на основании формул (13) и (15) будет равна значению (14), полученному выше.

Таким образом, продольная сила N_z, вызванная силами инерции, не является постоянной по длине стержня. Согласно выражению (14), она изменяется по закону квадратичной параболы и в каждом сечении имеет свое значение, равное силе инерции отсеченной части, определяемой массой этой части и радиусом ее вращения вокруг оси. Наибольшее значение сила N_z получает на оси вращения, т.е. при $z = 0$,

$$N_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{2g} . \qquad (17)$$

Это сечение является опасным, здесь возникают наибольшие динамические напряжения, равные

$$\sigma_\partial^{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{2g} \qquad (18)$$

и условие прочности для данного стержня имеет вид:

$$\sigma_\partial^{\max} = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{2g} \le [\sigma] . \qquad (19)$$

Определим удлинение стержня от действия сил инерции, для чего первоначально вычислим удлинение бесконечно малой части стержня длиной dz (рис. 4, *а*). Тогда на основании закона Гука и с учетом выражения (14) получаем:

$$\Delta(dz) = \frac{N_z \ell}{EA} = \frac{\gamma \omega^2}{2gE} \left(\ell^2 - z^2\right) dz , \qquad (20)$$

откуда полное удлинение стержня от действия силы инерции определяем как:

$$\Delta \ell_{полн} = \int_0^\ell \frac{\gamma \omega^2}{2gE} \left(\ell^2 - z^2\right) dz = \frac{\gamma \omega^2 \ell^3}{3gE} . \qquad (21)$$

Аналогично выполняется расчет для стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей посередине его длины (рис. 5).

Сила инерции бесконечно малого элемента длиной dz равна значению (10). Тогда сила инерции отсеченной части стержня длиной $(\ell/2 - z)$, равная продольной силе N_z в сечении, может быть определена интегралом вида:

$$F_{ин(z)} = N_z = \int\limits_z^{\ell/2} \frac{\gamma A \omega^2}{g} z dz = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} \left(\frac{\ell^2}{4} - z^2 \right), \qquad (22)$$

что выражает закон изменения силы N_z по длине стержня.

Как и в примере на рис. 4, наибольшая продольная сила $N_{\max}$ и наибольшие динамические напряжения возникают на оси вращения и для данного стержня равны:

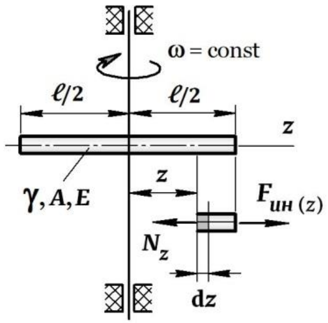


Рис. 5

$$N_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{8g}; \qquad (23)$$

$$\sigma_\partial^{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{8g}. \qquad (24)$$

Условие прочности для данного стержня имеет вид:

$$\sigma_\partial^{\max} = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{8g} \leq [\sigma]. \qquad (25)$$

Полное удлинение стержня от сил инерции определяется как:

$$\Delta(dz) = \frac{N_z \ell}{EA} = \frac{\gamma \omega^2}{2gE} \left(\frac{\ell^2}{4} - z^2 \right) dz; \qquad (26)$$

$$\Delta \ell_{полн} = 2 \times \int\limits_0^{\ell/2} \frac{\gamma \omega^2}{2gE} \left(\frac{\ell^2}{4} - z^2 \right) dz = \frac{\gamma \omega^2 \ell^3}{12gE}. \qquad (27)$$

Расчет вращающегося кольца или тонкостенного барабана

Простейшим примером такой детали является обод маховика. При вращении кольца с большой скоростью каждый его элемент движется с центростремительным ускорением a_n, в результате чего возникают центробежные силы инерции, направленные от центра вращения и радиально растягивающие кольцо (рис. 6, *а*). При постоянном сечении кольца инерционные силы равномерно распределены по его окружности и имеют интенсивность $q_{ин}$.

Определим интенсивность инерционных сил. Для этого кольцо рассмотрим как неподвижную плоскую раму, нагруженную равномерно распределенной радиальной нагрузкой. Методом сечений рассечем кольцо диаметральной плоскостью, одну часть отбросим и действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренними продольными силами N_{∂}. Изгибающие моменты в сечении равны нулю, так как кольцо равномерно вращается вокруг оси и изгибных деформаций здесь не возникает, а только увеличивается его диаметр.

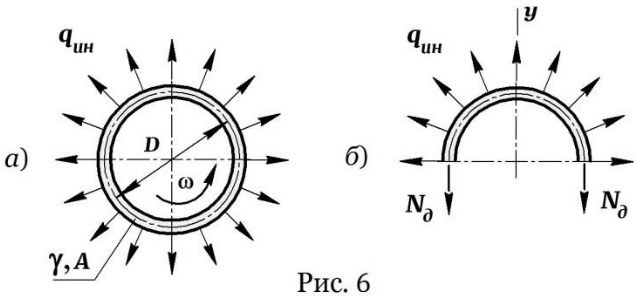


Рис. 6

Составим статическое уравнение равновесия для отсеченной части (рис. 6, *б*):

$$\sum Y = 0: \quad R_{q_{ин}} - 2N_{\partial} = 0, \qquad (28)$$

где $R_{q_{ин}}$ – равнодействующая инерционной распределенной нагрузки, действующей на полукольцо.

Примечание.
Величина равнодействующей равномерно распределенной нагрузки, приложенной к полукольцу, определяется согласно правилу: если к дуге любого очертания приложить распределенную нагрузку, то ее равнодействующая будет равна произведению интенсивности этой нагрузки на длину хорды, стягивающей дугу, и будет проходить посередине хорды, перпендикулярно к ней.

Тогда на основании этого правила —

$$R_{q_{ин}} = q_{ин} D, \qquad (29)$$

а продольная сила в сечении из уравнения (28) будет равна:

$$N_{\partial} = q_{ин}(D/2), \qquad (30)$$

где D – диаметр оси кольца.

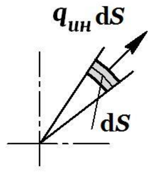


Рис. 7

Рассмотрим бесконечно малый элемент кольца длиной оси dS и определим его силу инерции (рис. 7):

- в силу малости элемента действующая на него сила инерции равна —

$$\mathrm{d}F_{ин} = q_{ин}\,\mathrm{d}S\,; \qquad (31)$$

- но с другой стороны —

$$\mathrm{d}F_{ин} = \mathrm{d}m \cdot a = \frac{\gamma A \mathrm{d}S}{g}\omega^2 \frac{D}{2}\,, \qquad (32)$$

где γ – удельный вес материала; A – площадь поперечного сечения кольца; ω – угловая скорость вращения.

Приравниваем правые части (31) и (32) и получаем величину интенсивности инерционных сил:

$$q_{ин} = \frac{\gamma A \omega^2 D}{2g}\,. \qquad (33)$$

Подставляем значение (33) в формулу (30) и определяем силу N_{∂}, действующую в сечении (рис. 6, *б*):

$$N_{\partial} = \frac{\gamma A \omega^2 D^2}{4g}\,. \qquad (34)$$

Тогда напряжения во вращающемся кольце (тонкостенном барабане) на основании выражения (34) будут равны

$$\sigma_{\partial} = \frac{N_{\partial}}{A} = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g}\,, \qquad (35)$$

а условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\partial} = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g} \le [\sigma]. \qquad (36)$$

2.2. Неравномерное вращательное движение

Неравномерное вращательное движение возникает тогда, когда элемент вращается по окружности с переменной скоростью, что обычно имеет место на стадии разгона или торможения детали. В этом случае возникают два ускорения и соответствующие им инерционные нагрузки (см. рис. 3).

Радиальное ускорение a_n при любом вращательном движении (равномерном или неравномерном) определяются по формуле – $a_n = \omega^2 R = V^2/R$, а возникающая центробежная сила инерции равна $F_{ин(n)} = ma_n$ (см. рис. 3).

Тангенциальное ускорение a_τ, возникающее при вращении с переменной скоростью, приводит к возникновению инерционного момента $M_{ин}$, закручивающего элемент и создающего в нем динамические деформации кручения. Определим эти величины:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \left| V = \omega R \right| = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{\omega_к - \omega_0}{t}, \qquad (37)$$

где $\alpha = d\omega/dt = (\omega_к - \omega_0)/t$ – угловое ускорение $(сек^{-2})$.

И тогда:

$$a_\tau = R\alpha;\ M_{ин} = F_{ин(\tau)}R = ma_\tau R = mR^2\alpha, \qquad (38)$$

где $I_0 = mR^2$ – *момент инерции массы* – мера инертности тела по отношению к вращательному движению.

Окончательно на основании (38) инерционный момент равен:

$$M_{ин} = I_0\alpha. \qquad (39)$$

Инерционный момент (39) создает динамическое закручивание элемента и приводит к возникновению в нем динамических деформаций кручения.

<u>Вывод</u>. При любом вращательном движении тела скорость его точек обязательно изменяется. При равномерном вращательном движении скорость изменяется только по направлению, при неравномерном – и по величине, и по направлению.

Сводная таблица расчетных формул для решения задач на учет сил инерции при поступательном и вращательном движении представлена ниже.

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

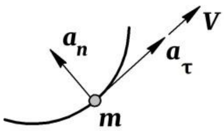
Задачи на учет сил инерции при поступательном движении

$Q_д = k_д Q_{ст}$ $\quad k_д = 1 + \dfrac{a}{g}$ – динамический коэффициент, где

$\sigma_д = k_д \sigma_{ст}$

$\Delta_д = k_д \Delta_{ст}$ $\quad a = (V_к - V_0)/t;\ a = 2H/t^2;\ a = V/t;\ V = \sqrt{2gH}.$

Задачи на учет сил инерции при вращательном движении



$\omega = \dfrac{\pi n}{30}$ – угловая скорость (сек$^{-1}$); n= об/мин;

$V = \omega R$ – линейная скорость (мм/сек);

$a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$ – тангенциальное ускорение (мм/сек^2);

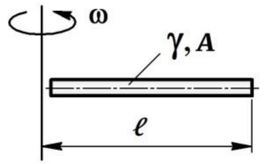
$a_n = \dfrac{V^2}{R} = \omega^2 R$ – радиальное ускорение (мм/сек^2);

R – радиус траектории движения (вращения).

<u>РАВНОМЕРНОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ</u>

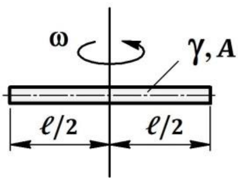
$$\left.\begin{array}{l} V = \text{const} \\ \omega = \text{const} \end{array}\right\} \rightarrow a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0;\quad a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R.$$

<u>Расчет вращающегося стержня</u>



$$F_{ин\,(\max)} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{2g};\quad \sigma_д^{\max} = \frac{\gamma\, \omega^2 \ell^2}{2g};$$

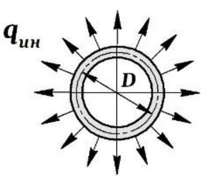
$$\Delta\ell_{полн} = \frac{\gamma\, \omega^2 \ell^2}{3gE}.$$



$$F_{ин\,(\max)} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{8g};\quad \sigma_д^{\max} = \frac{\gamma\, \omega^2 \ell^2}{8g};$$

$$\Delta\ell_{полн} = \frac{\gamma\, \omega^2 \ell^2}{12gE}.$$

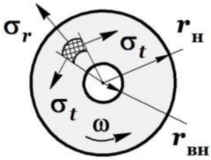
<u>Расчет вращающегося кольца или тонкостенного барабана</u>



$q_{ин} = \dfrac{\gamma A \omega^2 D}{2g}$ – интенсивность инерционных сил ;

$\sigma_д = \dfrac{\gamma\, \omega^2 D^2}{4g}$ – напряжения в кольце (барабане) .

Расчет диска постоянной толщины с центральным отверстием



$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_н{}^2\left[1+\frac{r_{вн}{}^2}{r_н{}^2}\left(1+\frac{r_н{}^2}{r^2}\right)-\frac{1+3\mu}{3+\mu}\cdot\frac{r^2}{r_н{}^2}\right];$$

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_н{}^2\left[1+\frac{r_{вн}{}^2}{r_н{}^2}\left(1-\frac{r_н{}^2}{r^2}\right)-\frac{r^2}{r_н{}^2}\right];$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{r\,/\,r=r_н}&=0\\ \sigma_{r\,/\,r=r_{вн}}&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\ \sigma_{r\,(\max)\,/\,r=\sqrt{r_н r_{вн}}}=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_н{}^2\left(1-\frac{r_{вн}}{r_н}\right)^2;$$

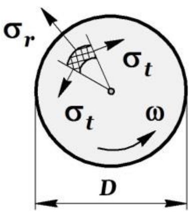
$$\sigma_t\neq 0;\quad \sigma_{t(\max)\,/\,r=r_{вн}}=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_н{}^2\left[2+\frac{r_{вн}{}^2}{r_н{}^2}\left(1-\frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right];$$

$$\sigma_{t(\max)\,/(r_{вн}\ll r_н)}=\frac{3+\mu}{4g}\gamma\omega^2 r_н{}^2\,.$$

$\sigma_{t(\max)} \gg \sigma_{r\,(\max)}$ $\rightarrow$ поэтому условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{t(\max)}=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_н{}^2\left[2+\frac{r_{вн}{}^2}{r_н{}^2}\left(1-\frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right]\le[\sigma].$$

Расчет сплошного диска постоянной толщины



$$\sigma_r=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2\left(\frac{D}{2}\right)^2\left[1-\frac{r^2}{(D/2)^2}\right];$$

$$\sigma_t=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2\left(\frac{D}{2}\right)^2\left[1-\frac{1+3\mu}{3+\mu}\cdot\frac{r^2}{(D/2)^2}\right];$$

В центре диска при $r=0$ $\rightarrow$

$$\sigma_{r\,(\max)}=\sigma_{t\,(\max)}=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2\left(\frac{D}{2}\right)^2\le[\sigma].$$

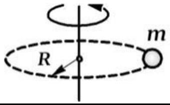
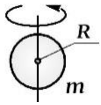
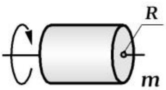
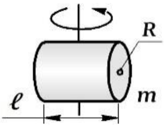
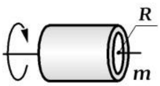
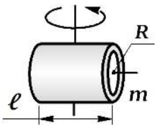
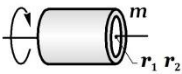
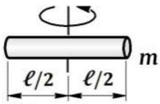
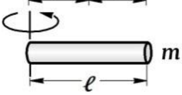
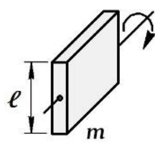
НЕРАВНОМЕРНОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

$$V=\omega R\neq\text{const}\ \rightarrow\ a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R=\alpha R\neq 0;\quad a_n=\frac{V^2}{R}=\omega^2 R;$$

$\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{\omega_к-\omega_0}{t}$ – угловое ускорение (1/сек^2);

$M_{ин} = I_0 \alpha$ – инерционный момент (Н · мм);

I_0 – момент инерции массы (Нмм · сек^2), равный:

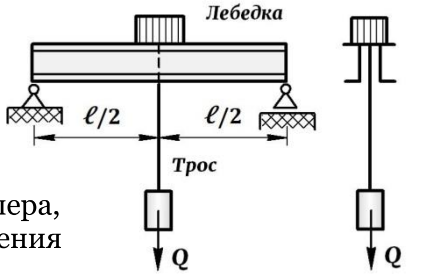
	Материальная точка массой m	mR^2
	Сплошной шар	$2mR^2/5$
	Тонкостенная сфера	$2mR^2/3$
	Сплошной цилиндр или диск	$\frac{mR^2}{2}$
	Сплошной цилиндр или диск (для диска принять $\ell = 0$)	$\frac{mR^2}{4} + \frac{m\ell^2}{12}$
	Тонкостенный цилиндр или кольцо	mR^2
	Тонкостенный цилиндр или кольцо (для кольца принять $\ell = 0$)	$\frac{mR^2}{2} + \frac{m\ell^2}{12}$
	Толстостенный цилиндр с внешним r_2 и внутренним r_1 радиусами	$\frac{m\left(r_2^2 + r_1^2\right)}{2}$
	Прямой тонкий стержень	$\frac{m\ell^2}{12}$
		$\frac{m\ell^2}{3}$
	Четырехугольная пластина	$\frac{m\ell^2}{12}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ЗАДАЧИ НА УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Задача 1

На двух балках швеллерового профиля № 20 ($W_x = 152$ см^3, $q = 18{,}4$ кГ/м $= 0{,}184$ кН / м – *вес погонного метра*, длина $\ell = 3$ м) установлена лебедка весом $P = 8$ кН, поднимающая с помощью стального троса груз $Q = 30$ кН. Площадь поперечного сечения троса равна $A = 5$ см^2. Подъем груза происходит с ускорением $a = 4$ м/сек^2. Учитывая вес груза, лебедки и собственный вес швеллера, определить динамические напряжения в балках и тросе.



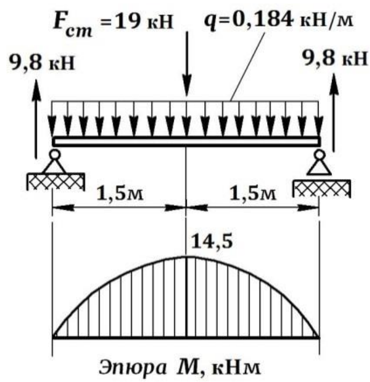
РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Рассмотрим условия работы конструкции при неподвижно висящем грузе или при его подъеме с постоянной скоростью. В этом случае трос и балка нагружены *статически*: трос растягивается грузом Q, а балка изгибается под действием собственного веса, а также веса лебедки и груза, которые поровну распределяются на каждый швеллер и воздействуют силой

$$F_{cm} = \frac{P+Q}{2} = \frac{8+30}{2} = 19 \text{ кН},$$

приложенной посередине его длины.



② Определяем статические напряжения в элементах конструкции:

$$a) \text{ в тросе } \rightarrow \quad \sigma^{\max}_{cm\,(\text{трос})} = \frac{Q}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 60 \text{ МПа}.$$

б) в балке $\rightarrow$ $\sigma^{\max}_{ст\,(\text{балка})} = \dfrac{M_{\max}}{W_x} = \dfrac{14{,}5\cdot 10^6}{152\cdot 10^3} = 95{,}4$ МПа.

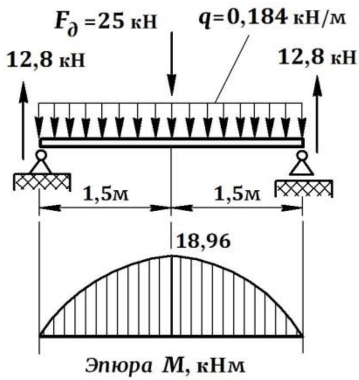
II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$k_\partial = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{4}{9{,}8} = 1{,}4.$$

② Определяем динамическое значение груза Q_∂. При поднятии груза с ускорением возникает сила инерции груза, направленная в сторону, обратную ускорению, т.е. вниз, которая «утяжеляет» груз и он принимает значение:

$$Q_\partial = k_\partial\, Q = 1{,}4\cdot 30 = 42 \text{ кН}.$$



Теперь на каждый швеллер действует сила: $F_\partial = \dfrac{P + Q_\partial}{2} = \dfrac{8 + 42}{2} = 25$ кН, при этом вес швеллера и вес лебедки остаются неизменными, так как эти величины от способа поднятия груза не зависят.

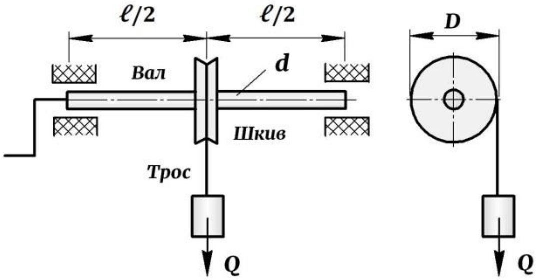
③ Динамические напряжения в тросе и балке равны:

$$\sigma^{\max}_{\partial\,(\text{трос})} = k_\partial\, \sigma^{\max}_{ст\;(\text{трос})} = 1{,}4\cdot 60 = 84 \text{ МПа}.$$

$$\sigma^{\max}_{\partial\,(\text{балка})} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{18{,}96\cdot 10^6}{152\cdot 10^3} = 125 \text{ МПа}.$$

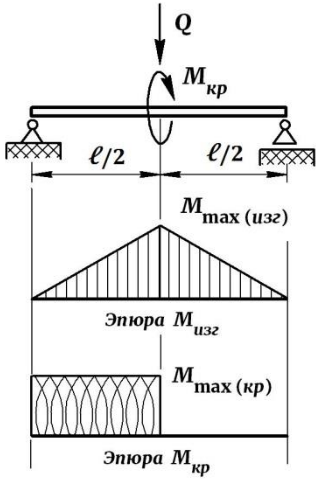
Задача 2

Груз весом $Q = 6$ кН равноускорено поднимается на тросе, навернутом на шкив. Шкив расположен посередине пролета вала, имеющего длину $\ell = 0{,}6$ м. Диаметр шкива $D = 0{,}5$ м, площадь сечения троса — $A = 1$ см^2. Подъем груза происходит с постоянным ускорением $a = 2$ м/сек. Определить динамические напряжения в тросе и, используя III–ю теорию прочности, подобрать диаметр вала d, если для вала $[\sigma]=160$ МПа. Весом вала и шкива пренебречь.



<u>*РЕШЕНИЕ:*</u>

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ



① Рассмотрим условия работы вала при неподвижно висящем грузе или при его подъеме с постоянной скоростью. В этом случае трос и вал нагружены *статически*: трос растягивается грузом Q, а вал от груза Q испытывает изгиб и кручение.

② Статические напряжения в тросе:

$$\sigma_{ст\ (\text{трос})}^{\max}=\frac{Q}{A}=\frac{6\cdot10^3}{1\cdot10^2}=60 \text{ МПа}.$$

③ Статические значения изгибающего и крутящего моментов в опасном сечении:

$$M_{\text{изг}\,(ст)}^{\max}=\frac{Q\ell}{4}=\frac{6\cdot0,6}{4}=0,9 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{кр}\,(ст)}^{\max}=Q\,\frac{D}{2}=\frac{6\cdot0,5}{2}=1,5 \text{ кНм}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial}=1+\frac{a}{g}=1+\frac{2}{9,8}=1,2.$$

② Определяем динамические напряжения в тросе:

$$\sigma^{\max}_{\partial\,(\text{трос})} = k_{\partial}\,\sigma^{\max}_{cm\,(\text{трос})} = 1{,}2\cdot 60 = 72\ \text{МПа}.$$

③ Определяем в опасном сечении вала динамические значения изгибающего и крутящего моментов:

$$M^{\max}_{\text{изг}\,(\partial)} = k_{\partial}\,M^{\max}_{\text{изг}\,(cm)} = 1{,}2\cdot 0{,}9 = 1{,}08\ \text{кНм};$$

$$M^{\max}_{\text{кр}\,(\partial)} = k_{\partial}\,M^{\max}_{\text{кр}\,(cm)} = 1{,}2\cdot 1{,}5 = 1{,}8\ \text{кНм}.$$

④ Определяем расчетный момент по III-ей теории прочности:

$$M^{\text{III}}_{\text{расч}\,(\partial)} = \sqrt{{M_{\text{изг}(\partial)}}^2 + {M_{\text{кр}(\partial)}}^2} = \sqrt{1{,}08^2 + 1{,}8^2} = 2{,}1\ \text{кНм}.$$

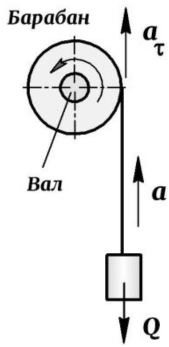
⑤ Подбираем диаметр вала из условия прочности:

$$\sigma^{\max}_{\partial} = \frac{M^{\text{III}}_{\text{расч}\,(\partial)}}{W_x} = \frac{W^{\text{III}}_{\text{расч}\,(\partial)}}{\pi d^3/32} \le \left[\sigma\right],\ \text{откуда}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,M^{\text{III}}_{\text{расч}\,(\partial)}}{\pi\left[\sigma\right]}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 2{,}1\cdot 10^6}{3{,}14\cdot 160}} = 50\ \text{мм}.$$

Задача 3

Груз $Q = 16$ кН с помощью троса, перекинутого через барабан, равноускорено поднимается вверх с ускорением $a = 5$ м/сек^2. Барабан, имеющий вес $Q_{\text{бараб}} = 4$ кН и диаметр $D = 0{,}8$ м, укреплен на валу. Подобрать диаметр троса $d_{\text{трос}}$ и диаметр вала $d_{\text{вал}}$, если для материала троса $\left[\sigma\right] = 80$ МПа, а вала $\left[\tau\right] = 50$ МПа. Изгибом вала пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

① **ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ для троса**:

а) Определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{5}{9{,}8} = 1{,}5. \tag{1}$$

б) Определяем динамическое значение груза:

$$Q_\partial = k_\partial Q = 1{,}5 \cdot 16 = 24 \text{ кН}. \quad (2)$$

в) Из условия прочности троса подбираем его диаметр:

$$\sigma^{\max}_{\partial\,(\text{трос})} = \frac{Q_\partial}{A_{\text{трос}}} = \frac{Q_\partial}{\pi d^2_{\text{трос}}/4} \le [\sigma], \text{ откуда}$$

$$d_{\text{трос}} = \sqrt{\frac{4Q_\partial}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 24 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 80}} = 19{,}55 \text{ мм} = 20 \text{ мм}.$$

② **ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ для вала**:

Примечание.

При проектировании валов предварительный подбор диаметра производится только на кручение, т.е. по известному крутящему моменту. Изгибающие моменты на данном этапе проектирования не учитываются и определяются позже, после полной разработки конструкции вала, когда согласно чертежу устанавливается его длина. Поэтому проектный расчет выполняется только на кручение, при этом влияние изгиба на прочность вала, характера нагрузки, а также концентрации напряжений (наличие галтелей, шпоночных канавок, вырезов, отверстий и т.д.) компенсируется тем, что в предварительном расчете используется пониженное значение $[\tau]$.

а) Рассмотрим **ДИНАМИЧЕСКИЕ** условия работы вала и установим влияние ускорения на возникающие в валу деформации. Барабан, работающий от электропривода и преобразующий вращательное движение в поступательное движение груза, вращается с тангенциальным ускорением a_τ и, обладая инерционностью, закручивает вал динамическим крутящим инерционным моментом $M^{\text{бараб}}_{\text{кр}\,(\partial)}$, равным:

$$M^{\text{бараб}}_{\text{кр}\,(\partial)} = \alpha I_0, \quad (3)$$

где I_0 – момент инерции массы барабана; α – угловое ускорение, соответственно определяемые как —

$$I_0 = mR^2 = \frac{Q_{\text{бараб}}}{g}\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{Q_{\text{бараб}} D^2}{4g}; \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left| \omega = \frac{V}{R} \right| = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left| \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = a_\tau \right| = \frac{a_\tau}{R} = \frac{a_\tau}{D/2} . \qquad (5)$$

Тогда на основании выражений (4) и (5), учитывая, что ускорение вращения барабана a_τ определяет ускорение a, с которым поднимается груз, т.е. $a_\tau = a$, динамический крутящий инерционный момент (3) равен:

$$M_{\text{кр}\,(\partial)}^{\text{бараб}} = \frac{a}{D/2} \cdot \frac{Q_{\text{бараб}}\, D^2}{4\mathrm{g}} = \frac{Q_{\text{бараб}}\, Da}{2\mathrm{g}} = \frac{4 \cdot 0{,}8 \cdot 5}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}8 \text{ кНм}. \quad (6)$$

б) Груз, поднимаемый с ускорением, равным $a = a_\tau$, в силу возникающей силы инерции массы «утяжеляется» и оказывает соответствующее воздействие на вал, закручивая его в том же направлении моментом $M_{\text{кр}\,(\partial)}^{Q}$ (*изгибом пренебрегаем*):

$$M_{\text{кр}\,(\partial)}^{Q} = Q_\partial \left(D/2 \right), \qquad (7)$$

где Q_∂ равно значению (2). И тогда на основании выражения (7) получаем:

$$M_{\text{кр}\,(\partial)}^{Q} = Q_\partial \left(D/2 \right) = 24\left(0{,}8/2 \right) = 9{,}6 \text{ кНм}. \qquad (8)$$

в) Суммарный крутящий момент, действующий на вал, согласно значениям (6) и (8) равен:

$$M_{\text{кр}\,(\partial)} = M_{\text{кр}\,(\partial)}^{\text{бараб}} + M_{\text{кр}\,(\partial)}^{Q} = 0{,}8 + 9{,}6 = 10{,}4 \text{ кНм}.$$

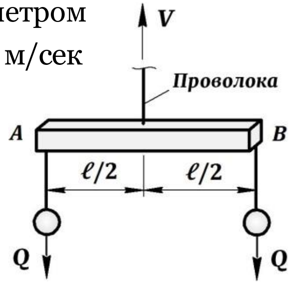
г) Из условия прочности на кручение подбираем диаметр вала:

$$\tau_\partial^{\max} = \frac{M_{\text{кр}\,(\partial)}}{W_\rho} = \frac{M_{\text{кр}(\partial)}}{\pi d^3/16} \le \left[\tau \right], \quad \text{откуда}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\, M_{\text{кр}\,(\partial)}}{\pi \left[\tau \right]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10{,}4 \cdot 10^6}{3{,}14 \cdot 50}} = 100 \text{ мм}.$$

Задача 4

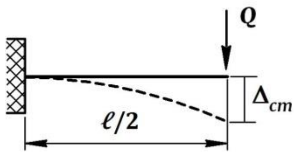
Стальной стержень AB ($E = 2\times10^5$ МПа) квадратного сечения $b\times b = 1\times1$ см^2 и длиной $\ell = 0,4$ м, несущий на концах грузы $Q = 80$ Н, поднимается на проволоке диаметром $d = 2$ мм с постоянной скоростью $V = 2,4$ м/сек Определить прогибы концов стержня и максимальные динамические напряжения в нем, а также напряжения в проволоке, если скорость поднятия в течение времени $t = 0,5$ сек. равномерно увеличилась в 2 раза. Весом стержня пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Рассмотрим условия работы конструкции при неподвижном состоянии стержня или при равномерном движении вверх.



① Определяем статические напряжения в стержне и прогибы его концов:

$$\sigma_{cm\,(AB)}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Q\,(\ell/2)}{b^3/6} = \frac{80\left(0,4/2\right)\cdot10^3}{10^3/6} = 96 \text{ МПа}.$$

$$\Delta_{cm\,(AB)}^{\max} = \frac{Q\,(\ell/2)^3}{3EI_x} = \frac{Q\,(\ell/2)^3}{3Eb^4/12} = \frac{80\left[\left(0,4/2\right)\cdot10^3\right]^3}{3\cdot2\cdot10^5\cdot10^4/12} = 1,28 \text{ мм}.$$

② Определяем статические напряжения в проволоке:

$$\sigma_{cm\,(\text{провол})} = \frac{2Q}{A} = \frac{2Q}{\pi d^2/4} = \frac{2\cdot80}{3,14\cdot2^2/4} = 51 \text{ МПа}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем ускорение, с которым производится подъем:

$$\left.\begin{aligned} &V_0 = 2,4 \text{ м/сек} \\ &V_к = 2V_0 = 4,8 \text{ м/сек} \\ &t = 0,5 \text{ сек} \end{aligned}\right\} \rightarrow a = \frac{V_к - V_0}{t} = \frac{4,8-2,4}{0,5} = 4,8 \text{ м/сек}^2.$$

② Определяем динамический коэффициент:

$$k_\partial = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{4,8}{9,8} = 1,5.$$

③ Определяем динамические напряжения и динамический прогиб в стержне:

$$\sigma_{\partial\,(AB)}^{\max} = k_\partial\,\sigma_{cm\,(AB)}^{\max} = 1,5 \cdot 96 = 144 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\partial\,(AB)}^{\max} = k_\partial\,\Delta_{cm\,(AB)}^{\max} = 1,5 \cdot 1,28 = 1,92 \text{ мм}.$$

④ Определяем динамические напряжения в проволоке:

$$\sigma_{\partial\,(\text{провол})} = k_\partial\,\sigma_{cm\,(\text{провол})} = 1,5 \cdot 51 \text{ МПа} = 76,5 \text{ МПа}.$$

Задача 5

Груз $Q = 30$ кН с помощью стального троса длиной $\ell = 28$ м и площадью поперечного сечения $A = 5$ см^2 поднимается вверх с постоянным ускорением $a = 2$ м/сек^2. Удельный вес материала троса $\gamma = 7,2 \times 10^{-5}$ Н/мм^3. Учитывая собственный вес троса, определить возникающие в нем динамические напряжения.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Рассмотрим условия работы конструкции при неподвижном состоянии или при равномерном движении вверх.

① Суммарная статическая нагрузка F_{cm}, растягивающая трос, определяется весом груза и собственным весом троса:

$$F_{cm} = Q + Q_{\text{трос}} = Q + \gamma \ell A = 30 \cdot 10^3 + 7,2 \cdot 10^{-5} \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^2 = 31 \text{ кН}.$$

② Определяем статические напряжения в тросе:

$$\sigma_{cm} = \frac{F_{cm}}{A} = \frac{31 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 62 \text{ МПа}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$k_\partial = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{2}{9{,}8} = 1{,}2.$$

② Определяем динамические напряжения в тросе:

$$\sigma_\partial = k_\partial\, \sigma_{cm} = 1{,}2 \cdot 62 = 74{,}4 \text{ МПа}.$$

Задача 6

Груз $Q = 80$ кН с помощью стального каната длиной $\ell = 60$ м поднимается вверх с постоянным ускорением $a = 2$ м/сек^2. Удельный вес материала каната равен $\gamma = 7{,}5 \times 10^{-5}$ Н/мм^3, допускаемые напряжения для него $[\sigma] = 90$ МПа Определить диаметр каната с учетом его собственного веса.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Рассмотрим условия работы конструкции при равномерном движении вверх с постоянной скоростью. В этом случае канат растягивается статической нагрузкой F_{cm}, определяемой весом груза Q и собственным весом, и в нем возникают статические напряжения, равные:

$$\sigma_{cm} = \frac{F_{cm}}{A} = \frac{Q + Q_{\text{канат}}}{A} = \frac{Q + \gamma A \ell}{A} = \frac{Q}{A} + \gamma \ell.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

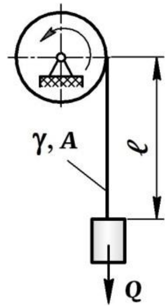
$$k_\partial = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{2}{9{,}8} = 1{,}2.$$

② Из условия прочности подбираем диаметр каната:

$$\sigma_\partial = k_\partial \sigma_{cm} = k_\partial \left(\frac{Q}{A} + \gamma \ell \right) = k_\partial \left(\frac{Q}{\pi d^2/4} + \gamma \ell \right) \le [\sigma], \quad \text{откуда}$$

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \left(\frac{[\sigma]}{k_\partial} - \gamma \ell \right)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 80 \cdot 10^3}{3{,}14 \left(\frac{90}{1{,}2} - 7{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 60 \cdot 10^3 \right)}} = 38 \text{ мм}.$$

Задача 7



Груз Q с помощью стального троса длиной $\ell = 50$ м и площадью поперечного сечения $A = 5$ см^2 равноускорено поднимается вверх, причем за время $t = 2,4$ сек он поднимается на высоту $H = 6$ м. Удельный вес материала троса $\gamma = 7,2 \times 10^{-5}$ Н/мм^3. Учитывая собственный вес троса, определить, какой наибольший груз он способен поднять при заданных условиях подъема, если для троса $[\sigma] = 90$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

При подъеме груза с постоянной скоростью или при неподвижном состоянии трос растягивается нагрузкой F_{cm}, определяемой грузом Q и собственным весом, в результате чего в нем возникают статические напряжения, равные:

$$\sigma_{cm} = \frac{F_{cm}}{A} = \frac{Q + Q_{\text{трос}}}{A} = \frac{Q + \gamma A \ell}{A} = \frac{Q}{A} + \gamma \ell. \qquad (1)$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем ускорение, с которым производится подъем груза:

$$\boxed{H = \frac{at^2}{2}} \quad \rightarrow \quad a = \frac{2H}{t^2} = \frac{2 \cdot 6}{2,4^2} = 2,1 \text{ м/сек}^2.$$

② Определяем динамический коэффициент:

$$k_\partial = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{2,1}{9,8} = 1,2.$$

③ Условие прочности троса при динамическом нагружении, т.е. с учетом возникающей силы инерции груза и массы троса, имеет вид:

$$\sigma_\partial = k_\partial \sigma_{cm} \le [\sigma], \text{ откуда } \sigma_{cm} = \frac{[\sigma]}{k_\partial}. \qquad (2)$$

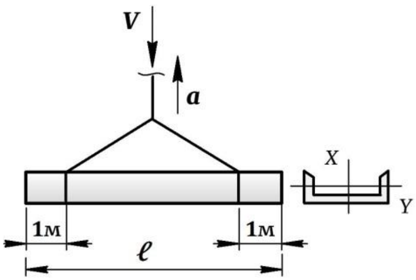
④ Приравниваем значения (1) и (2) и определяем наибольшую допускаемую величину груза $[Q]$:

$$\frac{Q}{A}+\gamma\ell=\frac{[\sigma]}{k_\partial}, \text{ откуда}$$

$$[Q]=\left(\frac{[\sigma]}{k_\partial}-\gamma\ell\right)A=\left(\frac{90}{1,2}-7,2\cdot10^{-5}\cdot50\cdot10^{3}\right)5\cdot10^{2}=35,7 \text{ кН}.$$

Задача 8

Швеллер № 24 длиной $\ell=10$ м, горизонтально закрепленный на тросе, опускается с постоянной скоростью $V=2{,}7$ м/сек



Определить наибольший прогиб и максимальные динамические напряжения в швеллере, если в течение времени $t=0,6$ сек скорость опускания равномерно уменьшилась в 3 раза.

Принять для швеллера № 24 ГОСТ 8240-97: $E=2\times10^{5}$ МПа; $I_y=248$ см^4; $W_y=39,5$ см^3; $q=0,24$ кН/м (вес погонного метра).

РЕШЕНИЕ:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Рассмотрим швеллер в неподвижном подвешенном состоянии. Под действием собственного веса он прогибается и в опасном сечении (см. эпюру ниже) – $M_{\max}=1,8$ кНм.

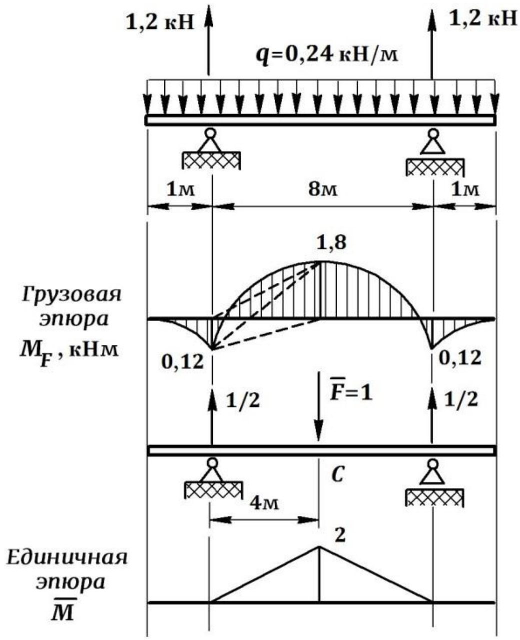
② Статические напряжения в опасном сечении швеллера:

$$\sigma_{cm}^{\max}=\frac{M_{\max}}{W_{\text{н.о.}}}=\frac{M_{\max}}{W_y}=\frac{1,8\cdot10^{6}}{39,5\cdot10^{3}}=45,6 \text{ МПа}.$$

③ Наибольший прогиб швеллера от собственного веса возникает посередине длины. Определяем прогиб методом Верещагина:

$$\Delta_{ст}^{\max}=\frac{1}{EI_y}\left(M_F\bar{M}\right)=\frac{1}{EI_y}2\times\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{0,24\cdot4^2}{8}\cdot4\cdot\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1,8\cdot4\cdot\frac{2}{3}\cdot2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot0,12\cdot4\cdot\frac{1}{3}\cdot2\right)=\frac{1}{EI_y}2\times(1,28+4,8-0,16)=\frac{11,84\cdot10^{12}}{2\cdot10^5\cdot248\cdot10^4}=24\text{ мм.}$$



II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем ускорение, с которым опускается швеллер:

$$\left.\begin{array}{l} V_0=2,7\text{ м/сек}\\ V_к=V_0/3=0,9\text{ м/сек}\\ t=0,6\text{ сек}\end{array}\right\}\rightarrow\ a=\frac{V_к-V_0}{t}=\frac{0,9-2,7}{0,6}=-3\text{ м/сек}^2.$$

<u>*Примечание*</u>.

- *Знак «минус» указывает, что это равнозамедленное опускание, и, следовательно, вектор ускорения направлен в сторону, обратную вектору скорости, т.е. вверх. А значит, сила инерции будет направлена вниз, дополнительно нагружая швеллер и создавая в нем бо́льшие напряжения и деформации. Это следует учитывать при определении динамического коэффициента, куда значение ускорения* *следует подставлять по модулю, т.к. динамический коэффициент при таком варианте нагружения должен быть больше единицы.*

- *Следует помнить, что <u>силы инерции являются распределенной нагрузкой</u>, которая может иметь различную интенсивность по длине или объему элемента. Для швеллера поперечные инерционные силы имеют линейно-распределенный характер, однако вследствие возникающего изгиба его точки перемещаются с различными ускорениями, и значит, силы инерции в общем случае распределены по длине швеллера неравномерно. Однако при решении задач на поперечную инерционную нагрузку, принимая жесткость балки при изгибе значительной, влиянием деформаций на величину ускорений пренебрегают и считают, что силы инерции имеют постоянную интенсивность по длине элемента, т.е. являются равномерно распределенной линейной нагрузкой.*

2 Определяем динамический коэффициент:

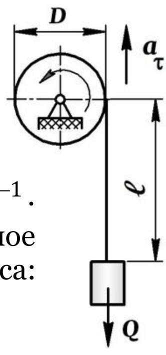
$$k_\partial = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{|-3|}{9{,}8} = 1{,}3.$$

3 Определяем динамические напряжения и прогиб в швеллере:

$$\sigma_\partial^{\max} = k_\partial \sigma_{ст}^{\max} = 1{,}3 \cdot 45{,}6 = 59{,}3 \text{ МПа};$$

$$\Delta_\partial^{\max} = k_\partial \Delta_{ст}^{\max} = 1{,}3 \cdot 24 = 31{,}2 \text{ мм}.$$

<u>Задача 9</u>



Груз $Q = 15$ кН подвешен на стальном тросе длиной $\ell = 5$ м, состоящем из $n = 600$ проволок диаметром $d = 0{,}5$ мм каждая. Трос наворачивается на барабан диаметром $D = 60$ см, который вращается против часовой стрелки с угловым ускорением $\alpha = 10$ сек$^{-1}$. Определить напряжения в тросе и его абсолютное удлинение. Весом троса пренебречь. Принять для троса: $E = 1{,}9 \times 10^5$ МПа.

<u>РЕШЕНИЕ</u>:

I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Рассмотрим условия работы троса при неподвижно висящем грузе или при его подъеме с постоянной скоростью. В этом случае вес груза является статической нагрузкой.

① Статические напряжения в тросе:

$$\sigma_{cm}=\frac{Q}{A_{\text{трос}}}=\frac{Q}{n\left(\pi d^2/4\right)}=\frac{15\cdot10^3\cdot4}{600\cdot3{,}14\cdot0{,}5^2}=127{,}4\ \text{МПа}.$$

② Статическое удлинение троса:

$$\Delta\ell_{cm}=\frac{Q\ell}{EA_{\text{трос}}}=\frac{Q\ell}{En\left(\pi d^2/4\right)}=\frac{4\cdot15\cdot10^3\cdot5\cdot10^3}{1{,}9\cdot10^5\cdot600\cdot3{,}14\cdot0{,}5^2}=3{,}35\ \text{мм}.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем ускорение поднятия груза. Это ускорение равно тангенциальному ускорению вращающегося барабана:

$$a=a_\tau=\alpha R=\alpha\frac{D}{2}=10\cdot\frac{0{,}6}{2}=3\ \text{м/сек}^2.$$

② Определяем динамический коэффициент:

$$k_\partial=1+\frac{a}{g}=1+\frac{3}{9{,}8}=1{,}3.$$

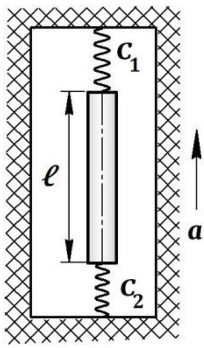
③ Определяем динамические напряжения и удлинение троса:

$$\sigma_\partial=k_\partial\,\sigma_{cm}=1{,}3\cdot127{,}4=165{,}6\ \text{МПа};$$

$$\Delta\ell_\partial=k_\partial\,\Delta\ell_{cm}=1{,}3\cdot3{,}35=4{,}4\ \text{мм}.$$

Задача 10

Стальной стержень, закрепленный между двумя пружинами, равномерно поднимается вверх с постоянным ускорением $a=50g$. Стержень имеет длину $\ell=1$ м и жесткость нижней пружины в два раза больше жесткости верхней пружины, т.е. $C_2=2C_1$. Построить эпюру продольных сил и определить максимальные динамические напряжения в стержне. Принять для стали: $\gamma=7{,}85\times10^{-5}$ Н/мм^3.



РЕШЕНИЕ:

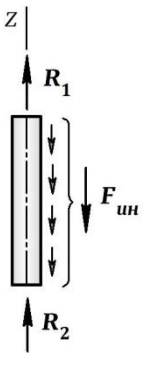
① При неподвижном положении стержня или при движении с постоянной скоростью на пружины действует только вес стержня $Q=\gamma\ell A$. Однако при подъеме стержня с ускорением возникает сила инерции $F_{ин}=ma=(Q/\text{g})a$, которая направлена вниз и которая создает дополнительное воздействие на опорные пружины. Учитывая, что $a=50\text{g}$, сила инерции значительно (в 50 раз) превышает вес стержня, поэтому при решении задачи действием веса стержня на пружины можно пренебречь и в расчете рассматривать только действующую силу инерции:

$$F_{ин}=\frac{\gamma\ell A a}{\text{g}}. \qquad (1)$$

Примечание.
Следует помнить, что силы инерции являются распределенной нагрузкой и выражение (1) – это равнодействующая этих сил. При этом интенсивность инерционных сил в общем случае переменна по длине стержня, так как в результате возникающих деформаций различные точки при подъеме перемещаются с различными ускорениями. Однако при решении динамических задач, учитывая значительную жесткость элемента, влиянием деформаций на величину ускорений и возникающих сил инерции пренебрегают и считают, что интенсивность инерционных сил постоянна по длине элемента.

② Рассмотрим конструкцию под действие силы инерции, которая, воздействуя на пружины, вызывает появление двух реакций опор. Задача является *статически неопределимой*.

Раскрываем статическую неопределимость:



Статическая сторона $\rightarrow$

$$\sum Z=0: \quad R_1+R_2-F_{ин}=0. \qquad (а)$$

Геометрическая сторона $\rightarrow$

Геометрическим условием является равенство деформаций пружин:

$$\lambda_1=\lambda_2. \qquad (б)$$

Физическая сторона $\rightarrow$

$$\lambda_1=\frac{R_1}{C_1}; \quad \lambda_2=\frac{R_2}{C_2}=\left|C_2=2C_1\right|=\frac{R_2}{2C_1}. \qquad (в)$$

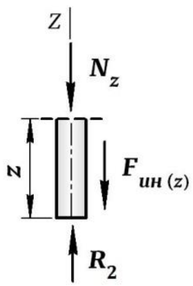
Подставляем ($в$) в ($б$) $\rightarrow$ $\dfrac{R_1}{C_1}=\dfrac{R_2}{2C_1}$, откуда $R_2=2R_1$. ($г$)

Подставляем ($г$) в ($а$) и с учетом выражения (1) получаем:

$$R_1=F_{ин}/3=\gamma\ell A\,a/3g;$$
$$R_2=2F_{ин}/3=2\gamma\ell A\,a/3g. \qquad (2)$$

Реакции R_1 и R_2 получились положительными, значит, их направление, заданное в начале решения, является верным.

③ Методом сечений определяем в сечении z продольную силу N_z и устанавливаем закон ее изменения по длине:



$$\sum Z=0: \quad R_2-N_z-F_{ин(z)}=0.$$

Принимая на основании выражений (1) и (2) значения $-F_{ин(z)}=\gamma zAa/g$ и $R_2=2\gamma\ell Aa/3g$, получаем величину N_z в сечении:

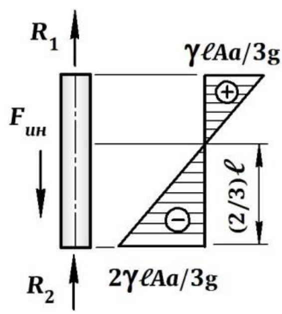
$$N_z=R_2-F_{ин(z)}=\frac{\gamma A\,a}{g}\left(\frac{2}{3}\ell-z\right). \qquad (3)$$

Формула (3) выражает закон изменения продольной силы по длине стержня, согласно которому:

– при $z=0$ $\rightarrow$ $N_z=2\gamma\ell A\,a/3g=R_2$;

– при $z=\ell$ $\rightarrow$ $N_z=-\gamma\ell A\,a/3g=-R_1$.

По результатам расчетов строим эпюру продольных сил.



Примечание.

Анализ выражения (3) показывает, что на длине стержня от нуля до $(2/3)\,\ell$ *продольная сила* N_z *положительна, т.е. ее направление, показанное на рисунке, задано правильно. На этом участке она сжимающая и на нижней границе* $N_z=R_2$. *На длине от* $(2/3)\,\ell$ *до* ℓ *сила* N_z *отрицательна, значит, ее направление будет обратное заданному и она является растягивающей, принимая на верхней границе значение* $N_z=R_1$. *В сечении* $z=(2/3)\,\ell \rightarrow N_z=0$.

④ Определяем максимальные напряжения, которые возникают в наиболее нагруженном (нижнем) сечении. Учитывая, что $a = 50\text{g}$, получаем:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = \frac{N_{z/z=0}}{A} = \frac{R_2}{A} = \frac{2\gamma \ell a}{3\text{g}} = \frac{2 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 50}{3} = 2{,}6 \text{ МПа}.$$

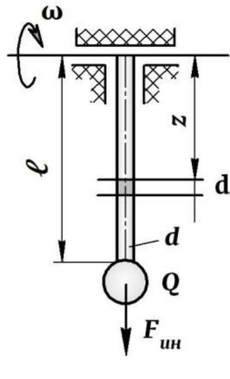
2. *Задачи на учет сил инерции при вращательном движении*

2.1. Расчет элементов стержневого типа

<u>Задача 11</u>

Чугунный стержень круглого поперечного сечения диаметром $d = 20$ мм и длиной $\ell = 60$ см, несущий на конце груз Q, вращается вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 120$ сек$^{-1}$ (≈ 1150 об/мин). Определить величину груза Q, при которой произойдет разрыв стержня, если для чугуна предел прочности на растяжение равен $\sigma_{\text{в}} = 160$ МПа. Принять для чугуна: $\gamma = 7{,}2 \times 10^{-5}$ Н/мм^3.

<u>РЕШЕНИЕ</u>:



При вращении чугунного стержня с грузом Q на конце возникает сила инерции груза и сила инерции собственной массы стержня, которые приводят к возникновению в сечениях продольных растягивающих сил, создающих опасность его разрыва.

① Продольная сила $N_{\text{груз}}$ от силы инерции груза равна:

$$N_{\text{груз}} = F_{ин\,(\text{груз})} = ma = \frac{Q}{\text{g}}\,\omega^2 \ell = \frac{Q \cdot 120^2 \cdot 600}{9800} = 882Q \text{ (Н)}. \qquad (1)$$

② Сила инерции стержня не является постоянной по его длине и изменяется от нуля на конце стержня до максимального значения на оси вращения. Возникающая в сечениях стержня продольная сила N_z, равная силе инерции отсеченной части, также переменна, и чтобы установить характер ее изменения, определим силу инерции элемента бесконечно малой длины $\mathrm{d}z$ вырезанного на расстоянии z от оси вращения:

$$\mathrm{d}F_{ин} = \mathrm{d}m \cdot a = \frac{\gamma A\,\mathrm{d}z}{\mathrm{g}}\;\omega^2 z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{\mathrm{g}}\;z\,\mathrm{d}z, \tag{2}$$

где $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3{,}14 \cdot 20^2}{4} = 314$ мм^2 – площадь сечения стержня.

Интегрируем выражение (2) на участке стержня от z до ℓ

$$N_z = F_{ин} = \int\limits_z^{\ell} \frac{\gamma A\,\omega^2}{\mathrm{g}}\;z\,\mathrm{d}z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{2\mathrm{g}}\left(\ell^2 - z^2\right) \tag{3}$$

и получаем закон изменения продольной силы по его длине, откуда видно, что в опасном сечении на оси вращения при $z = 0$ эта сила принимает наибольшее значение, равное:

$$N_{\max} = \frac{\gamma A\,\omega^2\,\ell^2}{2\mathrm{g}} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 314 \cdot 120^2 \cdot 600^2}{2 \cdot 9800} = 6000 \text{ Н}. \tag{4}$$

③ Суммарная продольная сила, растягивающая стержень, на основании значений (1) и (4) равна:

$$N_{\text{сумм}} = N_{\text{груз}} + N_{\max} = 882Q + 6000 \text{ (Н)}.$$

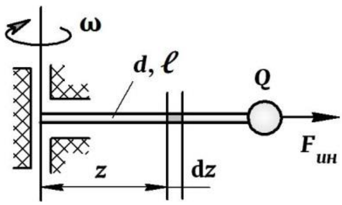
Примечание.
В данной задаче растяжение чугунного стержня рассматривается только под действием сил инерции груза и самого стержня. Однако следует помнить, что при вращении в вертикальной плоскости воздействие на элементы будет оказывать также их собственный вес, всегда направленный вниз, и наиболее опасным для них является крайнее нижнее положение, когда вес и силы инерции направлены в одну сторону. В большинстве конструкций, работающих в таких условиях, в том числе и в нашей задаче, вес элементов по сравнению с возникающими силами инерции незначителен и им можно пренебречь. Однако если вес и силы инерции соизмеримы по величине, расчет следует производить с учетом обоих факторов.

④ Разрыв чугунного стержня произойдет при условии, когда максимальные динамические напряжения в опасном сечении станут равны пределу прочности материала на растяжение:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = \frac{N_{\text{сумм}}}{A} = \sigma_{\text{в}} \quad \to \quad \sigma_{\partial}^{\max} = \frac{882Q + 6000}{314} = 160,$$

откуда $Q = \dfrac{314 \cdot 160 - 6000}{882} = 50$ Н.

Задача 12



Стальная проволока диаметром $d = 2$ мм и длиной $\ell = 80$ см, несущая на конце груз $Q = 20$ Н, равномерно вращается вокруг оси. Определить, при каком числе оборотов в минуту произойдет разрыв проволоки, если для материала предел прочности на разрыв равен $\sigma_{\text{в}} = 800$ МПа. Принять для стали: $\gamma = 7{,}85 \times 10^{-5}$ Н/мм^3.

РЕШЕНИЕ:

Решение задачи выполняем по алгоритму ***Задачи 11***. При вращении проволоки с грузом Q происходит ее растяжение силой инерции этого груза и ее собственной силой инерции.

① Продольная сила $N_{\text{груз}}$ от силы инерции груза равна:

$$N_{\text{груз}} = F_{ин\,(\text{груз})} = ma = \frac{Q}{g}\,\omega^2\,\ell. \tag{1}$$

② Продольная сила, возникающая от силы инерции проволоки определяется как:

$$\mathrm{d}F_{ин} = \mathrm{d}m \cdot a = \frac{\gamma A\,\mathrm{d}z}{g}\,\omega^2 z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{g}\,z\,\mathrm{d}z;$$

$$N_z = F_{ин} = \int_z^{\ell} \frac{\gamma A\,\omega^2}{g}\,z\,\mathrm{d}z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{2g}\left(\ell^2 - z^2\right);$$

$$N_{\max} = \frac{\gamma A\,\omega^2\,\ell^2}{2g}. \tag{2}$$

③ Суммарная сила, растягивающая проволоку, на основании значений (1) и (2) определяется как

$$N_{\text{сумм}} = N_{\text{груз}} + N_{\max} = \frac{Q}{g}\,\omega^2\,\ell + \frac{\gamma A\,\omega^2\,\ell^2}{2g}, \qquad (3)$$

а динамические напряжения в ней с учетом (3) равны:

$$\sigma_{\partial} = \frac{N_{\text{сумм}}}{A} = \frac{Q\omega^2\,\ell}{gA} + \frac{\gamma\omega^2\,\ell^2}{2g} = \frac{\omega^2\ell}{2g}\left(\frac{2Q}{A} + \gamma\ell\right), \qquad (4)$$

где $A = \pi d^2/4 = 3{,}14$ мм^2 – площадь поперечного сечения.

④ Разрыв проволоки произойдет тогда, когда динамические напряжения в ней достигнут значения $\sigma_{\text{в}} = 800$ МПа. Условие разрыва с учетом значения (4) имеет вид:

$\sigma_{\partial} = \dfrac{\omega^2\ell}{2g}\left(\dfrac{2Q}{A} + \gamma\ell\right) = \sigma_{\text{в}}$, откуда

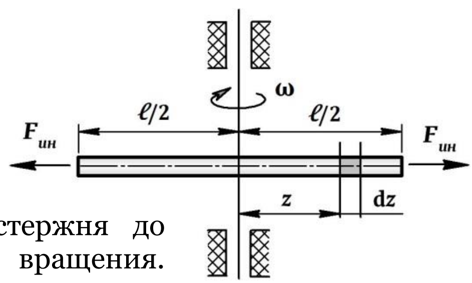
$$\omega = \sqrt{\frac{2\sigma_{\text{в}}\,g}{\ell\left(\dfrac{2Q}{A} + \gamma\ell\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 800\cdot 9800}{800\left(\dfrac{2\cdot 20}{3{,}14} + 7{,}85\cdot 10^{-5}\cdot 800\right)}} = 39\ \text{сек}^{-1}.$$

Так как $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$, отсюда $n = \dfrac{30\omega}{\pi} = \dfrac{30\cdot 39}{3{,}14} = 375$ об/мин.

Задача 13

Стальной стержень равномерно вращается со скоростью $n = 1800$ об/мин вокруг вертикальной оси. Какую наибольшую длину ℓ может иметь стержень, если для материала стержня $[\sigma] = 80$ МПа? Принять для стали: $\gamma = 7{,}85\times 10^{-5}$ Н/мм^3.

РЕШЕНИЕ:



① При вращательном движении стержень растягивается силой инерции собственной массы. Эта сила не постоянна по длине и изменяется от нуля на конце стержня до максимального значения на оси вращения. Возникающая в сечениях стержня продольная сила N_z, равная силе инерции отсеченной части, также переменна, и чтобы установить характер ее изменения, определим силу инерции элемента бесконечно малой длины $\mathrm{d}z$ вырезанного от оси вращения на расстоянии z :

$$\mathrm{d}F_{ин} = \mathrm{d}m \cdot a = \frac{\gamma A\,\mathrm{d}z}{\mathrm{g}}\,\omega^2 z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{\mathrm{g}}\,z\,\mathrm{d}z,$$

где $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1800}{30} = 188,4\ \text{сек}^{-1}$ – угловая скорость .

Интегрируем это значение на участке стержня от z до $\ell/2$

$$N_z = F_{ин} = \int_{z}^{\ell/2} \frac{\gamma A\,\omega^2}{\mathrm{g}}\,z\,\mathrm{d}z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{8\mathrm{g}}\left(\ell^2 - 4z^2\right)$$

и получаем закон изменения продольной силы по его длине, из которого видно, что в сечении на оси вращения при $z = 0$ сила N_z принимает наибольшее значение, равное:

$$N_{\max} = \gamma A\,\omega^2\,\ell^2/8\mathrm{g}.$$

② Определяем длину стержня из условия его прочности:

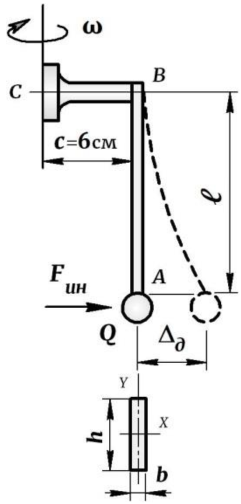
$$\sigma_{\partial}^{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{\gamma\,\omega^2\,\ell^2}{8\mathrm{g}} \le [\sigma], \quad \text{откуда}$$

$$\ell = \sqrt{\frac{8\mathrm{g}\,[\sigma]}{\gamma\,\omega^2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9800 \cdot 80}{7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 188,4^2}} = 1500\ \text{мм} = 1,5\ \text{м}.$$

Задача 14

Регулятор ABC, состоящий из гибкого стального стержня AB ($E = 2 \times 10^5$ МПа) и жесткого стержня BC длиной $c = 6$ см, вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $n = 150$ об/мин. Стержень AB, имеющий длину $\ell = 30$ см и прямоугольное сечение $b \times h = 3 \times 35$ мм, прикреплен к стержню BC и несет на конце груз $Q = 15$ Н. Определить максимальные динамические напряжения в стержне AB, а также горизонтальное смещение груза Q. Массой стержня AB пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

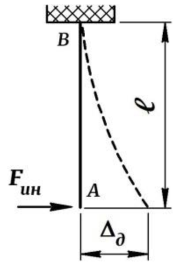


При вращении регулятора возникает сила инерции груза Q, которая изгибает гибкий стержень AB и горизонтально перемещает груз на расстояние Δ_∂. Определим эту силу и величину перемещения.

① Сила инерции груза равна:

$$F_{ин} = ma = \frac{Q}{g}\,\omega^2 R = \frac{Q}{g}\,\omega^2\left(c+\Delta_\partial\right), \qquad (1)$$

где $R = \left(c+\Delta_\partial\right)$ – полный радиус вращения груза относительно оси с учетом отклонения; ω – угловая скорость вращения, равная $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{3{,}14\cdot 150}{30} = 15{,}7\ \text{сек}^{-1}$.



② Так как сила инерции $F_{ин}$ приложена на конце стержня AB, то для данной расчетной схемы изгиба прогиб в точке приложения силы можно определить как:

$$\Delta_\partial = \frac{F_{ин}\,\ell^3}{3EI_{н.о.}} = \frac{F_{ин}\,\ell^3}{3EI_y},$$

где $I_y = \dfrac{hb^3}{12} = \dfrac{35\cdot 3^3}{12} = 78{,}75\ \text{мм}^4$ – момент инерции сечения стержня AB относительно нейтральной оси (здесь $н.о.$– ось Y).

Отсюда выражаем:

$$F_{ин} = \frac{3EI_y\Delta_\partial}{\ell^3}. \qquad (2)$$

③ Приравниваем величины (1) и (2) и получаем значение Δ_∂:

$$\frac{Q}{g}\,\omega^2\left(c+\Delta_\partial\right) = \frac{3EI_y\Delta_\partial}{\ell^3}, \text{ откуда}$$

$$\Delta_\partial = \frac{Qc\omega^2\,\ell^3}{3gEI_y - Q\omega^2\ell^3} = \frac{15\cdot 60\cdot 15{,}7^2\cdot 300^3}{3\cdot 9800\cdot 2\cdot 10^5\cdot 78{,}75 - 15\cdot 15{,}7^2\cdot 300^3} = 16{,}5\ \text{мм}.$$

④ Из выражения (2) определяем силу инерции $F_{ин}$:

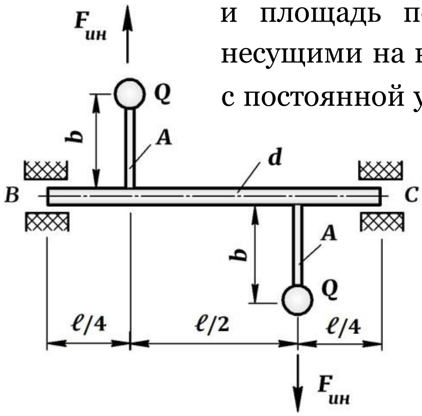
$$F_{ин} = \frac{3EI_y\Delta_\partial}{\ell^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 78{,}75 \cdot 16{,}5}{300^3} = 28{,}84\ \text{Н}.$$

⑤ Определяем $\sigma_\partial^{\max}$ в стержне AB:

$$\sigma_\partial^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{F_{ин}\ell}{hb^2/6} = \frac{28{,}84 \cdot 300}{35 \cdot 3^2/6} = 164{,}8\ \text{МПа}.$$

Задача 15

Вал BC диаметром $d = 24$ мм и длиной $\ell = 1{,}6$ м, жестко соединенный с двумя стержнями, имеющими длину $b = 0{,}4$ м и площадь поперечного сечения $A = 50$ мм^2, несущими на концах грузы $Q = 40$ Н, вращается с постоянной угловой скоростью $n = 210$ об/мин $\left(\omega = \frac{\pi n}{30} = 22\ \text{сек}^{-1}\right)$. Определить динамические напряжения в стержнях и на валу, вызванные силами инерции. Собственным весом элементов пренебречь.



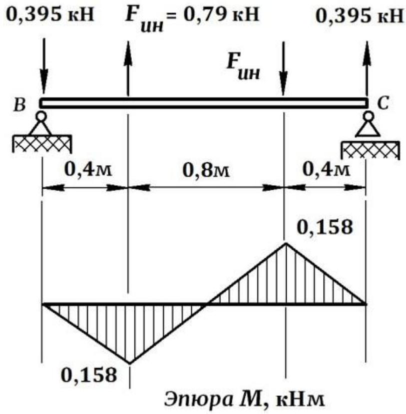
РЕШЕНИЕ:

① Определяем силы инерции, создаваемые грузами Q :

$$F_{ин} = ma = \frac{Q}{g}\omega^2 b = \frac{40 \cdot 22^2 \cdot 400}{9800} = 790\ \text{Н} = 0{,}79\ \text{кН}.$$

Примечание.
Как видно из расчета, вес груза Q значительно ниже силы инерции, которую он создает, поэтому влиянием веса на элементы можно пренебречь и считать, что напряжения в них возникают только от действия сил инерции.

② Определяем динамические напряжения в стержнях, несущих грузы Q. Пренебрегая собственным весом стержней, считаем, что силу инерции создает только груз и стержни работают на растяжение под действием этой силы:



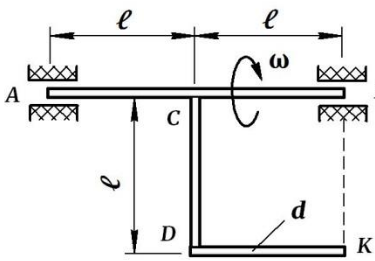
$$\sigma_{\partial} = \frac{F_{ин}}{A} = \frac{0,79 \cdot 10^3}{50} = 15,8 \text{ МПа}.$$

③ Вал BC под действием тех же сил инерции изгибается. Строим эпюру изгибающих моментов и для опасного сечения, где изгибающий момент максимальный, определяем напряжения:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{\pi d^3/32} == \frac{32 \cdot 0,158 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 24^3} = 116,5 \text{ МПа}.$$

Задача 16

Ломаный стальной стержень диаметром $d = 20$ мм и длиной участков $\ell = 0,2$ м вращается вокруг оси AB с постоянной скоростью $n = 800$ об/мин $(\omega = \pi n/30 = 83,7 \text{ сек}^{-1})$. Установить вид нагружения и вычислить напряжения на каждом участке, а также определить коэффициент запаса прочности стержня, если для материала предел текучести равен $\sigma_т = 240$ МПа. Принять для стали: $\gamma = 7,85 \times 10^{-5}$ Н/мм^3.



РЕШЕНИЕ:

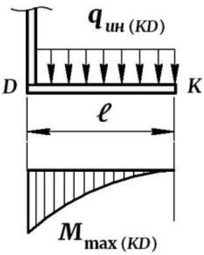
① Для удобства расчетов определим для стержня геометрические характеристики, применяемые в формулах для вычисления напряжений:

$$A = \pi d^2/4 = 314 \text{ мм}^2;$$
$$W_x = \pi d^3/32 = 785 \text{ мм}^3.$$

② При вращении ломаного стержня относительно оси AB возникает сила инерции его участков, которая воздействует и на сами участки, и на соседние, соединенные с ними. Рассмотрим условия работы каждого участка, установим вид нагружения и определим на каждом участке максимальные динамические напряжения:

Участок KD

Участок лежит параллельно оси AB, поэтому все точки имеют одинаковый радиус вращения и несут одинаковую инерционную нагрузку $q_{ин\,(KD)}$, равномерно распределенную по длине участка. Равнодействующая этих сил и интенсивность их распределения соответственно равны:



$$F_{ин\,(KD)} = ma = \frac{\gamma A \ell}{g} \omega^2 \ell =$$

$$= \frac{7{,}85 \cdot 10^{-5} \cdot 314 \cdot 83{,}7^2 \cdot (0{,}2 \cdot 10^3)^2}{9800} = 0{,}7 \text{ кН};$$

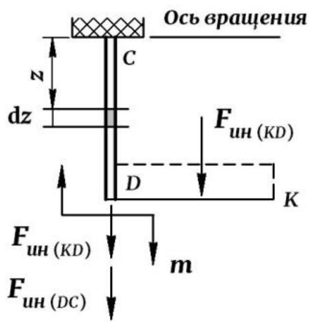
$$q_{ин\,(KD)} = \frac{F_{ин\,(KD)}}{\ell} = \frac{0{,}7}{0{,}2} = 3{,}5 \text{ кН/м}.$$

Под действием инерционных сил участок работает на изгиб. Опасным является сечение D и максимальные напряжения здесь равны:

$$M_{\max(KD)} = \frac{q_{ин\,(KD)}\,\ell^2}{2} = \frac{3{,}5 \cdot 0{,}2^2}{2} = 0{,}07 \text{ кНм};$$

$$\sigma_{\max(KD)} = \frac{M_{\max(KD)}}{W_x} = \frac{0{,}07 \cdot 10^6}{785} = 89{,}2 \text{ МПа}.$$

Участок DC



На этот участок действует сила инерции его собственной массы и сила инерции участка KD:

а) Сила инерции участка KD вызывает на участке DC растяжение силой $F_{ин\,(KD)}$ и изгиб моментом m, равными:

$F_{ин\,(KD)} = 0{,}7$ кН;

$m = M_{изг\,(DC)} = F_{ин\,(KD)}\left(\ell/2\right) = 0{,}07$ кНм.

б) Кроме растяжения под действием силы $F_{ин\,(KD)}$ участок DC растягивается также силой инерции собственной массы $F_{ин\,(DC)}$, которая непостоянна по его длине и изменяется от нуля на нижнем конце участка до максимального значения на оси вращения. Для определения равнодействующей инерционных сил, действующих на участке, найдем сначала силу инерции бесконечно малого элемента длиной $\mathrm{d}z$, вырезанного на расстоянии z от оси вращения, а затем, интегрируя полученное значение, определим $F_{ин\,(DC)}$:

$$\mathrm{d}F_{ин(DC)} = \mathrm{d}m \cdot a = \frac{\gamma A\,\mathrm{d}z}{\mathrm{g}}\omega^2 z = \frac{\gamma A\,\omega^2}{\mathrm{g}} z\,\mathrm{d}z \;\rightarrow\; F_{ин\,(DC)} = \int_0^{\ell} \frac{\gamma A\,\omega^2}{\mathrm{g}}\, z\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\gamma A\,\omega^2\,\ell^2}{2\mathrm{g}} = \frac{7{,}85 \cdot 10^{-5} \cdot 314 \cdot 83{,}7^2 \cdot (0{,}2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 9800} = 0{,}35 \text{ кН}.$$

в) Суммарная сила, растягивающая участок DC, равна:

$$F_{раст\,(DC)} = F_{ин\,(KD)} + F_{ин\,(DC)} = 0{,}7 + 0{,}35 = 1{,}05 \text{ кН}.$$

г) Таким образом, на участке DC возникает растяжение с изгибом. Определяем здесь максимальные напряжения:

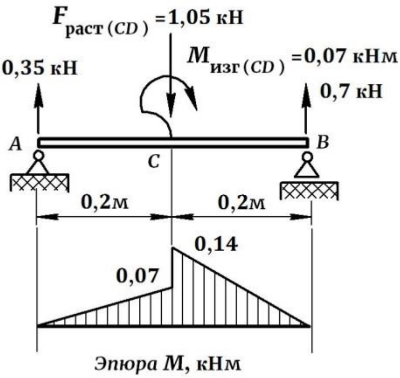
$$\sigma_{\max\,(DC)} = \sigma_{раст} + \sigma_{изг} = \frac{F_{раст\,(DC)}}{A} + \frac{M_{изг\,(DC)}}{W_x} =$$

$$= \frac{1{,}05 \cdot 10^3}{314} + \frac{0{,}07 \cdot 10^6}{785} = 92{,}5 \text{ МПа}.$$

Участок AB

Чтобы установить действие участков KD и DC на участок AB, переносим сюда инерционную нагрузку $F_{ин\,(KD)}$, $F_{ин\,(DC)}$ и момент $M_{изг\,(DC)}$. Участок AB работает на изгиб. Определяем максимальные напряжения в опасном сечении C:

$$\sigma_{\max\,(AB)} = \frac{M_{\max(AB)}}{W_x} = \frac{0{,}14 \cdot 10^6}{785} = 178 \text{ МПа}.$$

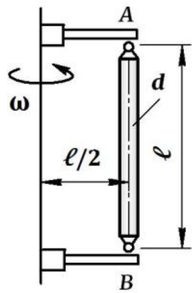


Это напряжение — наибольшее из всех, возникающее в сечениях ломаного стержня $ABCDK$.

③ Коэффициент запаса прочности стержня равен:

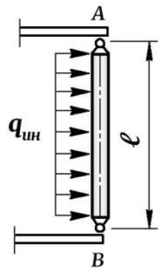
$$n = \frac{\sigma_т}{\sigma_{\max\,(AB)}} = \frac{240}{178} = 1{,}34.$$

Задача 17



Стальной стержень AB диаметром d и длиной $\ell = 0{,}8$ м вращается вокруг оси с постоянной скоростью $n = 300$ об/мин $(\omega = \pi n/30 = 31{,}4\text{ сек}^{-1})$. Определить диаметр стержня, если для материала $\gamma = 7{,}85 \times 10^{-5}$ Н/мм^3 и $[\sigma] = 100$ МПа.

РЕШЕНИЕ:



При вращении стержня возникает сила инерции его массы, которая направлена от оси вращения и действует на каждую точку стержня, вызывая его изгиб. Поскольку все точки стержня имеют одинаковый радиус вращения $R = \ell/2$, поперечная инерционная нагрузка равномерно распределена по его длине и имеет интенсивность $q_{ин}$.

① Определяем равнодействующую инерционных сил $F_{ин}$:

$$F_{ин} = ma = \frac{Q}{g}\,\omega^2 R = \frac{\gamma A \ell}{g}\,\omega^2 (\ell/2) = \frac{\gamma A \ell^2 \omega^2}{2g},$$

где $Q = \gamma A \ell$ – вес стержня.

② Интенсивность инерционных сил равна:

$$q_{ин} = \frac{F_{ин}}{\ell} = \frac{\gamma A \ell \omega^2}{2g}.$$

③ Максимальный изгибающий момент возникает посередине стержня и для данной расчетной схемы равен:

$$M_{\max} = \frac{q_{ин}\ell^2}{8} = \frac{\gamma A \ell^3 \omega^2}{16g} = \frac{\gamma\left(\pi d^2/4\right)\ell^3\omega^2}{16g} = \frac{\gamma\pi d^2\ell^3\omega^2}{64g}.$$

④ Записываем условие прочности для опасного сечения и определяем диаметр стержня:

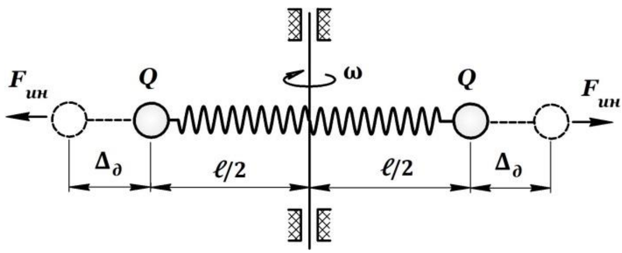
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{\gamma\pi d^2\ell^3\omega^2}{64g\left(\pi d^3/32\right)} = \frac{\gamma\ell^3\omega^2}{2gd} \le \left[\sigma\right], \text{ откуда}$$

$$d = \frac{\gamma\ell^3\omega^2}{2g\left[\sigma\right]} = \frac{7{,}85\cdot10^{-5}\cdot\left(0{,}8\cdot10^3\right)^3\cdot31{,}4^2}{2\cdot9800\cdot100} = 20 \text{ мм}.$$

2.2. Расчет цилиндрических винтовых пружин

Задача 18

Цилиндрическая пружина с грузиками $Q = 10$ Н на концах вращается относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Пружина имеет следующие параметры: длина $\ell = 30$ см, диаметр $D = 6$ см, диаметр прутка $d = 5$ мм, число витков $n = 30$, материал $G = 8\times10^4$ МПа. Определить, при какой скорости вращения удлинение каждой половины пружины будет равно $\Delta_\partial = 5$ см. Определить в пружине максимальные динамические напряжения $\tau_\partial^{\max}$. Массой пружины пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

Определяем скорость вращения пружины, при которой возникает заданное удлинение Δ_∂ каждой ее половины.

① Растяжение пружины происходит под действием сил инерции $F_{ин}$, которые создают грузы Q, прикрепленные на ее концах. Полное удлинение пружины составляет $\lambda_{\partial} = 2\Delta_{\partial} = 10$ см и согласно закону Гука определяется по формуле:

$$\lambda_{\partial} = \frac{8F_{ин}D^3 n}{Gd^4}, \qquad (1)$$

откуда $$F_{ин} = \frac{\lambda_{\partial} G d^4}{8D^3 n} = \frac{100 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 5^4}{8 \cdot 60^3 \cdot 30} = 96{,}5 \text{ Н}. \qquad (2)$$

② С другой стороны, силу инерции $F_{ин}$, создаваемую каждым грузом, можно определить как:

$$F_{ин} = ma = \frac{Q}{g}\,\omega^2 R = \frac{Q}{g}\,\omega^2\left(\ell/2 + \Delta_{\partial}\right), \qquad (3)$$

где $R = \left(\ell/2 + \Delta_{\partial}\right)$ – радиус вращения груза относительно оси с учетом его отклонения.

③ Подставляем значение (2) в выражение (3) и получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{ин}\, g}{Q\left(\ell/2 + \Delta_{\partial}\right)}} = \sqrt{\frac{96{,}5 \cdot 9800}{10 \cdot (300/2 + 50)}} = 21{,}7 \text{ сек}^{-1},$$

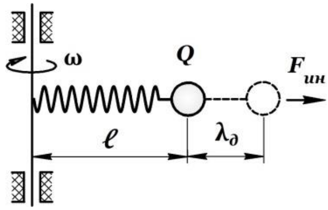
где $\omega = \frac{\pi n}{30}$, откуда $n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 21{,}7}{3{,}14} = 207$ об/мин .

④ Определяем динамические напряжения в пружине:

$$\tau_{\partial}^{\max} = \frac{8F_{ин}D}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 96{,}5 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 5^3} = 118 \text{ МПа}.$$

Задача 19

Винтовая пружина с грузом $Q = 10$ Н на конце вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Пружина имеет параметры: диаметр $D = 8$ см, диаметр прутка $d = 6$ мм, число



витков $n=30$, материал пружины $G=8\times10^4$ МПа. Определить критическую скорость вращения пружины $\omega_{кр}$ ($n_{кр}$), при которой ее удлинение бесконечно возрастает. Массой пружины пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

① Удлинение пружины под действием силы инерции согласно закону Гука определяется по формуле:

$$\lambda_{\partial}=\frac{8F_{ин}D^3 n}{Gd^4}, \quad \text{откуда} \quad F_{ин}=\frac{\lambda_{\partial}Gd^4}{8D^3 n}. \qquad (1)$$

② С другой стороны, силу инерции $F_{ин}$, создаваемую грузом Q, можно определить как

$$F_{ин}=ma=\frac{Q}{g}\,\omega^2 R=\frac{Q}{g}\,\omega^2\left(\ell+\lambda_{\partial}\right), \qquad (2)$$

где $R=\left(\ell+\lambda_{\partial}\right)$ – полный радиус вращения груза относительно оси с учетом его отклонения.

③ Приравниваем значения (1) и (2) и выражаем из полученного уравнения величину удлинения пружины:

$$\frac{\lambda_{\partial}Gd^4}{8D^3 n}=\frac{Q}{g}\,\omega^2\left(\ell+\lambda_{\partial}\right), \text{ отсюда } \lambda_{\partial}=\frac{\ell}{\dfrac{gGd^4}{8QD^3 n\omega^2}-1}. \qquad (3)$$

④ Определяем скорость вращения $\omega_{кр}$, при которой удлинение пружины бесконечно возрастает. Значение $\lambda_{\partial}=\infty$ возможно при условии, когда знаменатель формулы (3) будет равен нулю:

$$\frac{gGd^4}{8QD^3 n\omega_{кр}{}^2}-1=0. \quad \text{Отсюда}$$

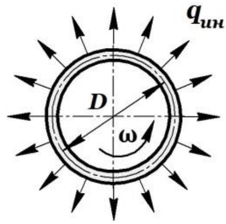
$$\omega_{кр}=\sqrt{\frac{gGd^4}{8QD^3 n}}=\sqrt{\frac{9800\cdot8\cdot10^4\cdot6^4}{8\cdot10\cdot80^3\cdot30}}=28{,}8\ \text{сек}^{-1},$$

где $\omega_{кр}=\dfrac{\pi n_{кр}}{30}$, откуда $n_{кр}=\dfrac{30\,\omega_{кр}}{\pi}=\dfrac{30\cdot28{,}8}{3{,}14}=275$ об/мин.

2.3. Расчет вращающегося кольца или тонкостенного барабана

Задача 20

Длинный стальной тонкостенный барабан диаметром $D = 2$ м укрепленный на оси вращения, вращается с постоянной скоростью $n = 750$ об/мин $(\omega = \pi n/30 = 78{,}5\ \text{сек}^{-1})$. Определить динамические напряжения в барабане. Какую максимальную скорость вращения может иметь барабан, если для материала $[\sigma] = 80$ МПа? Принять для стали: $\gamma = 7{,}85\times 10^{-5}$ Н/мм^3.



РЕШЕНИЕ:

① Вращающийся барабан работает в условиях радиальной инерционной нагрузки, равномерно распределенной по его окружности и имеющей интенсивность, определяемую как:

$$q_{ин} = \frac{\gamma A \omega^2 D}{2g}.$$

② В результате, в сечении барабана возникает растягивающая динамическая сила, равная:

$$N_\partial = F_{ин} = q_{ин}\frac{D}{2} = \frac{\gamma A \omega^2 D^2}{4g}.$$

③ Определяем динамические напряжения в барабане для заданной скорости вращения:

$$\sigma_\partial = \frac{N_\partial}{A} = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g} = \frac{7{,}85\cdot 10^{-5}\cdot 78{,}5^2\cdot\left(2\cdot 10^3\right)^2}{4\cdot 9800} = 49{,}4\ \text{МПа}.$$

④ Из условия прочности барабана определяем максимальную допустимую скорость его вращения:

$$\sigma_\partial = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \left|\omega = \frac{\pi n}{30}\right| = \frac{\gamma \pi^2 n^2 D^2}{30^2\cdot 4g} \le [\sigma], \quad \text{откуда}$$

$$n = \sqrt{\frac{4g[\sigma]\cdot 30^2}{\gamma\pi^2 D^2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 9800\cdot 80\cdot 30^2}{7{,}85\cdot 10^{-5}\cdot 3{,}14^2\cdot\left(2\cdot 10^3\right)^2}} = 955\ \text{об/мин}.$$

Задача 21

Наибольшая безопасная окружная скорость для чугунных маховиков принимается равной $V = 25$ м/сек Определить максимальные напряжения в маховике, принимая для чугуна $\gamma = 7,4 \times 10^{-5}$ Н/мм^3.

РЕШЕНИЕ:

① Окружная (линейная) и угловая скорости при вращательном движении связаны соотношением:

$$V = \omega R, \quad \text{откуда} \quad \omega = \frac{V}{R} = \frac{V}{D/2} = \frac{2V}{D}.$$

② Определяем динамические напряжения в маховике:

$$\sigma_\partial = \frac{\gamma \omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma \left(\dfrac{2V}{D}\right)^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma V^2}{g} = \frac{7,4 \cdot 10^{-5} \left(25 \cdot 10^3\right)^2}{9800} = 4,7 \text{ МПа}.$$

Задача 22

Чугунный маховик, насаженный на вал и вращающийся со скоростью $n_0 = 300$ об/мин, за время $t = 0,1$ сек равномерно снижает скорость до $n_к = 290$ об/мин. Обод маховика имеет диаметр $D = 100$ см, вес равен $Q = 12$ кН. Определить величину инерционного крутящего момента $M_{кр}$, возникающего на валу вследствие изменения скорости вращения маховика, и подобрать диаметр вала, если для материала $\left[\tau\right] = 60$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем начальное и конечное значения угловой скорости вращения маховика:

$$\omega_0 = \pi n_0 / 30 = 3,14 \cdot 300 / 30 = 31,4 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_к = \pi n_к / 30 = 3,14 \cdot 290 / 30 = 30,35 \text{ сек}^{-1}.$$

② Определяем угловое ускорение:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_к - \omega_0}{t} = \frac{30{,}35 - 31{,}4}{0{,}1} = -10{,}5\ сек^{-2}.$$

Примечание.
Знак «минус» говорит о том, что это равнозамедленное движение, однако в дальнейших расчетах знак не учитывается и значение углового ускорения принимается по модулю.

③ Определяем крутящий момент $M_{кр}$, возникающий на валу вследствие изменения скорости вращения маховика:

$$M_{кр} = \alpha I_0 = \left| I_0 = mR^2 = \frac{Q}{g}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \right| = \frac{\alpha Q D^2}{4g} = \frac{10{,}5 \cdot 12 \cdot 1}{4 \cdot 9{,}8} = 3{,}2\ кНм,$$

где I_0 – момент инерции массы обода маховика.

④ Пренебрегая изгибом вала, подбираем диаметр вала из условия прочности на кручение:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{M_{кр}}{\pi d^3/16} = \frac{16 M_{кр}}{\pi d^3} \le [\tau],\ откуда$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3{,}2 \cdot 10^6}{3{,}14 \cdot 60}} = 65\ мм.$$

Задача 23

На вал диаметром $d = 70$ мм насажен маховик весом $Q = 25$ кН и диаметром $D = 97$ см. Скорость вращения вала $n_0 = 400$ об/мин, но в определенный момент включается тормоз и через 20 оборотов маховик останавливается. Определить наибольшие касательные напряжения в вале, возникающие вследствие торможения и остановки вращения маховика.

РЕШЕНИЕ:

① Определяем время, в течение которого происходит остановка вращения маховика:

$$400\ об/мин \rightarrow \begin{cases} 400\ об\ -\ 60\ сек \\ 20\ об\ -\ t\ сек \end{cases} \rightarrow t = \frac{20 \cdot 60}{400} = 3\ сек.$$

② Определяем угловое ускорение:

$$\begin{cases} \omega_0 = \pi n_0/30 = 3{,}14 \cdot 400 / 30 = 42 \text{ сек}^{-1} \\ \omega_к = \pi n_к /30 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_к - \omega_0}{t} = \frac{0-42}{3} = -14 \text{ сек}^{-2},$$

где знак «минус» означает, что вращение является замедленным и в дальнейших расчетах не учитывается.

③ Определяем крутящий момент $M_{кр}$, возникающий на валу вследствие остановки маховика:

$$M_{кр} = \alpha I_0 = \left| I_0 = mR^2 = \frac{Q}{g}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \right| = \frac{\alpha Q D^2}{4g} = \frac{14 \cdot 25 \cdot 0{,}97^2}{4 \cdot 9{,}8} = 8{,}4 \text{ кНм},$$

где I_0 – момент инерции массы обода маховика.

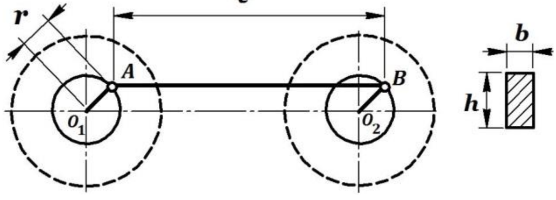
④ Определяем динамические напряжения в вале:

$$\tau_\partial = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{M_{кр}}{\pi d^3/16} = \frac{16\ M_{кр}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 8{,}4 \cdot 10^6}{3{,}14 \cdot 70^3} = 124{,}8 \text{ МПа}.$$

2.4. Расчет спарника локомотива

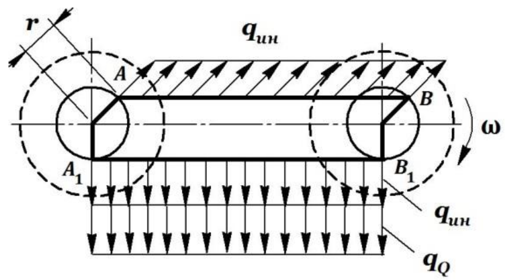
Задача 24

Стальной спарник AB ($\gamma = 7{,}85 \cdot 10^{-5}$ Н/мм^3) длиной $\ell = 2$ м, имеющий прямоугольное поперечное сечение $b \times h$ ($h = 5{,}6$ см), при помощи цилиндрических шарниров прикреплен к колесам локомотива на расстоянии $r = 0{,}25$ м. Определить наибольшие напряжения в спарнике при вращении колес с постоянной скоростью $n = 300$ об/мин ($\omega = \pi n/30 = 31{,}4$ сек$^{-1}$).



РЕШЕНИЕ:

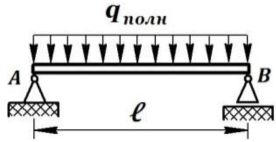
① Рассмотрим условия работы спарника. Назначение спарника («сцепное дышло») заключается в передаче принудительного движения от одного колеса локомотива к другому. В этом случае в спарнике возникают продольные усилия (как растягивающие, так и сжимающие), а также изгиб от собственного веса и возникающих сил инерции. При движении локомотива с постоянной скоростью силы инерции не возникают, однако в спарнике они будут возникать в результате его движения относительно локомотива: каждая точка спарника выполняет круговые поступательные движения и движется по окружности радиусом r со скоростью вращения колеса ω. В этом случае, как и при любом вращательном движении, возникают центробежные силы инерции, действующие на каждую точку спарника и направленные по радиусу к центру окружности.



② Наиболее опасным для спарника является его *крайнее нижнее положение* A_1B_1, когда и его вес Q, и силы инерции $F_{ин}$ направлены в одну сторону. В этом случае спарник работает на изгиб как шарнирно-опертая балка под действием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью, равной сумме интенсивностей инерционных сил $q_{ин}$ и собственного веса q_Q:

$$q_{ин} = \frac{F_{ин}}{\ell} = \frac{ma}{\ell} = \left| \begin{array}{l} m = \dfrac{Q}{g} = \dfrac{\gamma A \ell}{g} \\ a = \omega^2 r \end{array} \right| = \frac{\gamma A \ell}{g}\,\omega^2 r \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\gamma A \omega^2 r}{g};$$

$$q_Q = \frac{Q}{\ell} = \frac{\gamma A \ell}{\ell} = \gamma A.$$



Тогда полная изгибающая нагрузка равна:

$$q_{полн} = q_{ин} + q_Q = \frac{\gamma A\,\omega^2 r}{g} + \gamma A = \gamma A\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right).$$

③ Определяем максимальный изгибающий момент, который для данной расчетной схемы возникает в середине спарника:

$$M_{\max} = \frac{q_{полн}\,\ell^2}{8} = \frac{\gamma A\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)\ell^2}{8}.$$

④ Определяем наибольшие напряжения в спарнике, вызванные изгибом от указанных нагрузок:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{\gamma A\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)\ell^2}{8W_x} = \left|\begin{array}{l} A = b\times h \\ W_x = bh^2/6 \end{array}\right| = \frac{3\gamma\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)\ell^2}{4h} =$$

$$= \frac{3\cdot 7{,}85\cdot 10^{-5}\left(\frac{31{,}4^2\cdot 0{,}25\cdot 10^3}{9800} + 1\right)\cdot\left(2\cdot 10^3\right)^2}{4\cdot 56} = 110\ \text{МПа}.$$

Примечание.

Следует помнить, что спарник помимо изгиба подвергается также действию продольных сил и в нижнем положении A_1B_1 он будет сжат, поэтому в общем случае здесь имеет место продольно-поперечный изгиб, требующий соответствующих расчетов на прочность. Кроме того, спарник, подвергаемый действию сжимающих сил, должен обязательно поверяться на устойчивость: в вертикальной плоскости его следует рассматривать как стержень с шарнирными опорами, а в горизонтальной – как стержень с защемленными концами. При этом для оценки гибкости в расчет следует вводить значение радиуса инерции – в первом случае $i_{\max}$, во втором – $i_{\min}$.

Задача 25

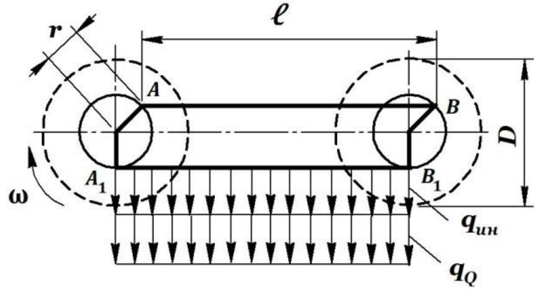
Спарник локомотива AB, движущегося с постоянной скоростью $V = 150$ км/час, имеет прямоугольное сечение $b\times h = 80\times 150$ мм, длину $\ell = 1{,}6$ м и выполнен из материала $\gamma = 7{,}85\times 10^{-5}$ Н/мм^3. Диаметр колеса локомотива $D = 1{,}8$ м, радиус вращения точек спарника $r = 0,6$ м. В результате работы спарник подвергается действию инерционных сил, собственного веса, а также продольного сжимающего усилия $F = 240$ кН. Определить наибольшие напряжения в спарнике.

<u>*РЕШЕНИЕ*</u>:

① Определяем угловую скорость вращения спарника:

$$V = \omega R = \omega \frac{D}{2}, \text{ откуда } \omega = \frac{2V}{D} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^6}{3600 \cdot 1,8 \cdot 10^3} = 46,3 \text{ сек}^{-1}.$$

② Определяем в спарнике максимальные напряжения $\sigma_{изг}^{max}$ от изгиба инерционными силами и собственным весом в момент его нахождения в крайнем нижнем положении:



а) Интенсивности инерционных сил $q_{ин}$ и собственного веса q_Q соответственно равны:

$$q_{ин} = \frac{F_{ин}}{\ell} = \frac{ma}{\ell} = \left| m = \frac{Q}{g} = \frac{\gamma A \ell}{g};\ a = \omega^2 r \right| = \frac{\gamma A \ell}{g} \omega^2 r \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\gamma A \omega^2 r}{g} =$$

$$= \frac{7,85 \cdot 10^{-5} \cdot (80 \times 150) \cdot 46,3^2 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{9800} = 123,6 \text{ кН / м};$$

$$q_Q = \frac{Q}{\ell} = \frac{\gamma A \ell}{\ell} = \gamma A = 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 80 \cdot 150 = 0,9 \text{ кН / м}.$$

б) Суммарная изгибающая нагрузка:

$$q_{полн} = q_{ин} + q_Q = 123,6 + 0,9 = 124,5 \text{ кН/м}.$$

в) Максимальный изгибающий момент в середине спарника:

$$M_{\max} = \frac{q_{полн}\ell^2}{8} = \frac{124{,}5\cdot\left(1{,}6\cdot 10^3\right)^2}{8} = 39{,}84 \text{ кНм}.$$

г) Максимальные изгибающие напряжения:

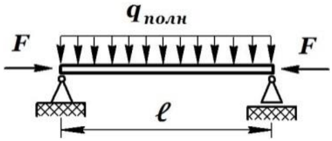
$$\sigma_{изг}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{bh^2/6} = \frac{39{,}84\cdot 10^6}{80\cdot 150^2/6} = 132{,}8 \text{ МПа}.$$

③ Определяем в спарнике $\sigma_{сж}$ от продольной силы F:

$$\sigma_{сж} = \frac{F}{A} = \frac{240\cdot 10^3}{80\times 150} = 20 \text{ МПа}.$$

④ Полные напряжения в спарнике:

$$\sigma = \sigma_{изг}^{\max} + \sigma_{сж} = 132{,}8 + 20 = 152{,}8 \text{ МПа}.$$



2.5. Расчет вращающихся дисков

Задача 26

Стальной сплошной диск одинаковой толщины вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 260 \text{ сек}^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной его срединной плоскости. Диаметр диска $D = 80$ см, материал $\gamma = 7{,}85\times 10^{-5}$ Н/мм^3, $\mu = 0{,}3$. Определить максимальные динамические напряжения $\sigma_{изг}^{\max}$ в диске.

РЕШЕНИЕ:

При вращении сплошного диска максимальные динамические напряжения возникают на оси вращения и равны:

$$\sigma_{\partial/r=0}^{\max} = \sigma_r^{\max} = \sigma_t^{\max} = = \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2\left(\frac{D}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{3+0{,}3}{8\cdot 9800}\cdot 7{,}85\cdot 10^{-5}\cdot 260^2\left(\frac{800}{2}\right)^2 = 35{,}7 \text{ МПа}.$$

Задача 27

Стальной диск ($\gamma = 7,85 \times 10^{-5}$ Н/мм^3, $\mu = 0,3$) постоянной толщины диаметром $D_{\text{н}} = 80$ см имеет центральное отверстие диаметром $d_{\text{вн}} = 10$ см и вращается вокруг центральной оси, перпендикулярной его срединной плоскости. Определить наибольшее допускаемое число оборотов диска, при котором максимальные динамические напряжения в нем не превышали бы $\left[\sigma\right] = 120$ МПа.

РЕШЕНИЕ:

① Для диска с отверстием радиальные и тангенциальные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8g}\,\gamma\,\omega^2 r_{\text{н}}^2 \left[1 + \frac{r_{\text{вн}}^2}{r_{\text{н}}^2}\left(1 - \frac{r_{\text{н}}^2}{r^2}\right) - \frac{r^2}{r_{\text{н}}^2}\right];$$

$$\sigma_t = \frac{3+\mu}{8g}\,\gamma\,\omega^2 r_{\text{н}}^2 \left[1 + \frac{r_{\text{вн}}^2}{r_{\text{н}}^2}\left(1 + \frac{r_{\text{н}}^2}{r^2}\right) - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\cdot\frac{r^2}{r_{\text{н}}^2}\right].$$

② Наибольшей величины напряжения достигают у внутреннего края диска, т.е. на границе внутреннего отверстия при $r = r_{\text{вн}}$. На этой границе, как видно из формул выше, $\sigma_{r/r=r_{\text{вн}}} = 0$, а напряжения σ_t принимают максимальное значение и равны:

$$\sigma_{t/r=r_{\text{вн}}}^{\max} = \frac{3+\mu}{8g}\,\gamma\,\omega^2 r_{\text{н}}^2 \left[2 + \frac{r_{\text{вн}}^2}{r_{\text{н}}^2}\left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right].$$

③ Записываем для диска условие прочности

$$\sigma_{t/r=r_{\text{вн}}}^{\max} = \frac{3+\mu}{8g}\,\gamma\,\omega^2 r_{\text{н}}^2 \left[2 + \frac{r_{\text{вн}}^2}{r_{\text{н}}^2}\left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right] \le \left[\sigma\right],$$

откуда, подставляя сюда $r_{\text{н}} = D_{\text{н}}/2 = 40$ см и $r_{\text{вн}} = d_{\text{вн}}/2 = 5$ см, определяем угловую скорость вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{8g\left[\sigma\right]}{\gamma(3+\mu)r_{\text{н}}^2\left[2 + \frac{r_{\text{вн}}^2}{r_{\text{н}}^2}\left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\right)\right]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8\cdot 9800\cdot 120}{7{,}85\cdot 10^{-5}\left(3+0{,}3\right)400^2\left[2+\frac{50^2}{400^2}\left(1-\frac{1+3\cdot 0{,}3}{3+0{,}3}\right)\right]}} = 336{,}3\ \text{сек}^{-1}$$

Из формулы $\omega = \frac{\pi n}{30}$ определяем допускаемое по прочности число оборотов для диска:

$$n = 30\omega/\pi = \left(30\cdot 336{,}3\right)/3{,}14 \approx 3200\ \text{об/мин}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. .– М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск:Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.
8. Реут, Л.Е. Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение-сжатие: Учебно-методическое пособие. / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2011. – 147 с.
9. Реут, Л.Е. Плоский поперечный изгиб: Пособие по учебной дисциплине «Механика материалов». / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2016. – 263 с.