

Б31
Т33

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Минск 2008

23

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

**Межведомственный сборник
научно-методических статей**

Основан в 1975 году

Выпуск 23

**Минск
2008**

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК ~~22.21я43~~

~~30.12я43~~

Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

П.А. Витязь, М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталев

Международный совет редакции:

Ј. Аwтејсеwicz (Польша), Благодарный (Словакия), Г.Я. Беляев (Беларусь), Ј. Grabski (Польша), G. Gudehus (Германия), Д.Д. Ивлев (Россия), В.В. Лобода (Украина), Н.Ф. Морозов (Россия), Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь), С. Пытко (Польша), Ф.А. Романюк (Беларусь), К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия), Е.И. Шемякин (Россия), Г.П. Черепанов (США), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко
М.А. Журавков, М.Г. Ботогова (уч. секретарь), А.Е. Крушевский,
И.С. Куликов, А.Т. Скойбеда, А.В. Чигарев (председатель), А.М. Якимович
Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков
Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов
Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский
Механика машин: В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег,
Приборы точной механики: И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 299 92 52
E-mail: theormech@rambler.ru

В сборнике содержатся научные и методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на республиканском научно-методическом семинаре с международным участием «Научно-методические основы применения информационных технологий в преподавании механики и научных исследованиях».

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин». Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей вузов, научно-инженерных работников, аспирантов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

¹ Президиум Национальной академии наук Беларуси, ² Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси,
³ Межведомственная лаборатория «ТРИБОФАТИКА», г. Гомель, Беларусь

ОБ ОБЪЕКТАХ, ИЗУЧАЕМЫХ В МЕХАНИКЕ

П. А. Витязь¹, М. С. Высоцкий², Л. А. Сосновский³

Всякая научная дисциплина призвана и имеет своей целью понять и описать те или иные закономерности и особенности развития определенных явлений, ситуаций, событий, обусловленных существованием некоторых реальных или мыслимых объектов, которые обнаруживают специфические свойства.

Исходя из того соображения, что изучение нового объекта, как правило, порождает новую научную дисциплину, применительно к механике можно построить иерархию объектов, ею исследуемых; на рис. 1 представлена ее упрощенная схема (достаточно сказать, что здесь отсутствуют жидкая и газообразная среды и мн. др.).

Когда некий материальный объект был мысленно представлен в виде безразмерной и бесструктурной *точки*, наделенной лишь способностью двигаться в пространстве и во времени по любой траектории и в любом направлении, – потребовалось рождение *теоретической механики*, чтобы понять и описать все многообразие движения такого физически нереального объекта. Представление о «масштабе точки» сделало теоретическую механику полезной наукой: стал возможным правильный анализ движения, например, точек-планет или точек-электронов, т. е. и огромных объектов Вселенной, и невообразимо малых объектов микромира. Если «большие точки» наделить массой, удастся установить, например, законы взаимодействия небесных тел в процессе их движения и т. д. *Механика космического полета, механика механизмов и машин* – все, что движется, подвластно анализу методами теоретической механики.

НЕКОТОРЫЕ ОБЪЕКТЫ МЕХАНИКИ: ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ

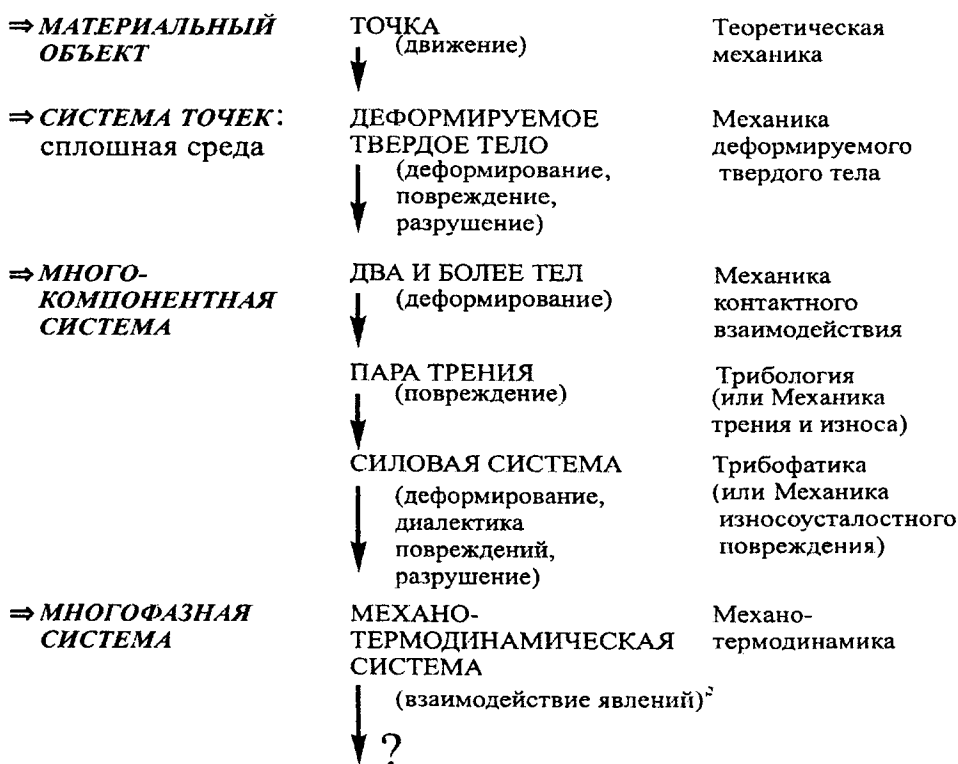


Рис. 1. Упрощенная иерархическая структура некоторых объектов, изучаемых в механике

Совокупность точек, связанных между собой определенным образом, есть *сплошная среда*; одним из частных ее видов является *твердое тело*, которое обладает особыми (специфическими) свойствами: *жесткостью* и *прочностью*. Когда было обнаружено, что под воздействием многообразных нагрузок точки твердого тела способны двигаться, или смещаться друг относительно друга, появилось представление о новом объекте – *деформируемом твердом теле*. Естественно, что потребовалось создание *механики деформируемого твердого тела*, чтобы научиться исследовать его напряженно-деформированное состояние в любой точке и, в конечном счете, понять и описать закономерности и особенности изменения размеров и искажения формы тела как целого. Деформируемое твердое тело стали называть просто *материалом*, или *образцом*, или *элементом конструкции* – в зависимости от конкретных целей исследования. И специфические свойства подобных объектов изучают в таких разделах, как *механика материалов, конструкций, композитов, грунтов* и т. д.; *механика повреждений и разрушения* (под воздействием разнообразных нагрузок); *мезомеханика, микромеханика* и др. При этом познают закономерности, особенности и последствия обратимого (*теория упругости*) и необратимого (*теория пластичности*) движения точек деформируемых тел; последние наделяются и многообразными специфическими свойствами, например, *вязкоупругости, упруговязкопластичности* и др. Механика деформируемого твердого тела стала, таким образом, одним из мощнейших инструментов исследования поведения реальных объектов в различных условиях эксплуатации или испытаний. Применение ПЭВМ и развитие методов компьютерного моделирования привело к резкому повышению эффективности расчетов – и сформировалась *компьютерная механика*.

Деформируемое твердое тело – лишь один из компонентов многочисленных и разнообразных *механических систем*. Уже простейший случай *сжатия двух неподвижных твердых тел* вызвал развитие нового подхода в теории упругости – его назвали *контактной задачей*. Она стала началом *механики контактного взаимодействия тел* (компонентов) при статическом, ударном, циклическом и других нагружениях. Очередной объект – *пара трения*, главной особенностью которой является *относительное движение двух твердых тел*, находящихся под действием контактной нагрузки. И появилась специальная научная дисциплина – *трибология*, основной задачей которой стало изучение закономерностей и особенностей трения и поверхностного повреждения различных материалов при скольжении, качении, проскользывании, ударе и т. д. По существу, любая пара трения – *многокомпонентная система*: в ней неизбежно организуется так называемое *третье тело*, формируемое в области подвижного контакта за счет смазочного материала и/или продуктов трибодеструкции тонких поверхностных слоев контактирующих тел.

Более сложным, чем пара трения, является своеобразный объект – *силовая система*, представление о которой введено совсем недавно (в конце XX века). Так называют всякую механическую систему, которая *воспринимает и транзитно передает рабочую циклическую нагрузку и в которой одновременно реализуется процесс трения в любом его проявлении*. Другими словами, силовая система – это пара трения, хотя бы один из элементов которой подвергается объемному повторно-переменному деформированию. Для таких систем характерно *комплексное – износоусталостное повреждение*; оно обусловлено *кинетическим взаимодействием явлений* усталости, трения, изнашивания, эрозии, коррозии и др. Естественно, что обнаружение нового и специфического объекта привело к возникновению очередной научной дисциплины, которая получила краткое название *трибофатика*. Другое (более длинное) ее название – *механика износоусталостных повреждений*.

Трибофатика создавалась на базе нескольких фундаментальных дисциплин (рис. 2). С одной стороны, *теории трения, изнашивания, смазки* были объединены в единую научную дисциплину – *трибологию* (Т). Это естественно, потому что в парах трения реально сочетаются и взаимодействуют процессы трения и изнашивания, в том числе и со смазкой.

С другой стороны, среди общих *проблем динамики, прочности и устойчивости* вычленилась *механика усталостного разрушения* (F) как дисциплина, имеющая особое практиче-

ское значение для современного машиностроения. Чтобы эффективно решать *комплексные задачи надежности (R)* наиболее ответственных – силовых систем машин и оборудования по важнейшим критериям работоспособности, потребовалось создать трибофатику (TF).

Таким образом, *трибофатика – это наука о комплексном – износоусталостном повреждении и разрушении силовых систем* (ГОСТ 30638–99). Поскольку речь идет о механике износоусталостного повреждения, то термин «трибофатика» вполне, хотя и очень кратко, отражает ее содержание: от греч. *tribos* – трение, что символизирует современную трибологию, в том числе и трибологическую надежность; от франц. *fatigue* – усталость, что символизирует современную механику усталостного разрушения, в том числе и прочностную надежность. Как видно, термин «трибофатика» состоит из двух слов (понятий), которые совершенно равноправны. Если же говорить о физико-механических процессах, определяемых указанными понятиями, то следует принять во внимание их *диалектическое взаимодействие и взаимовлияние*: трение (и изнашивание) \leftrightarrow усталость = трибофатика (friction (and wear) \leftrightarrow fatigue = tribo-fatigue). Поскольку трибофатика – это новый раздел механики, ее можно определить и как *механику силовых систем*.

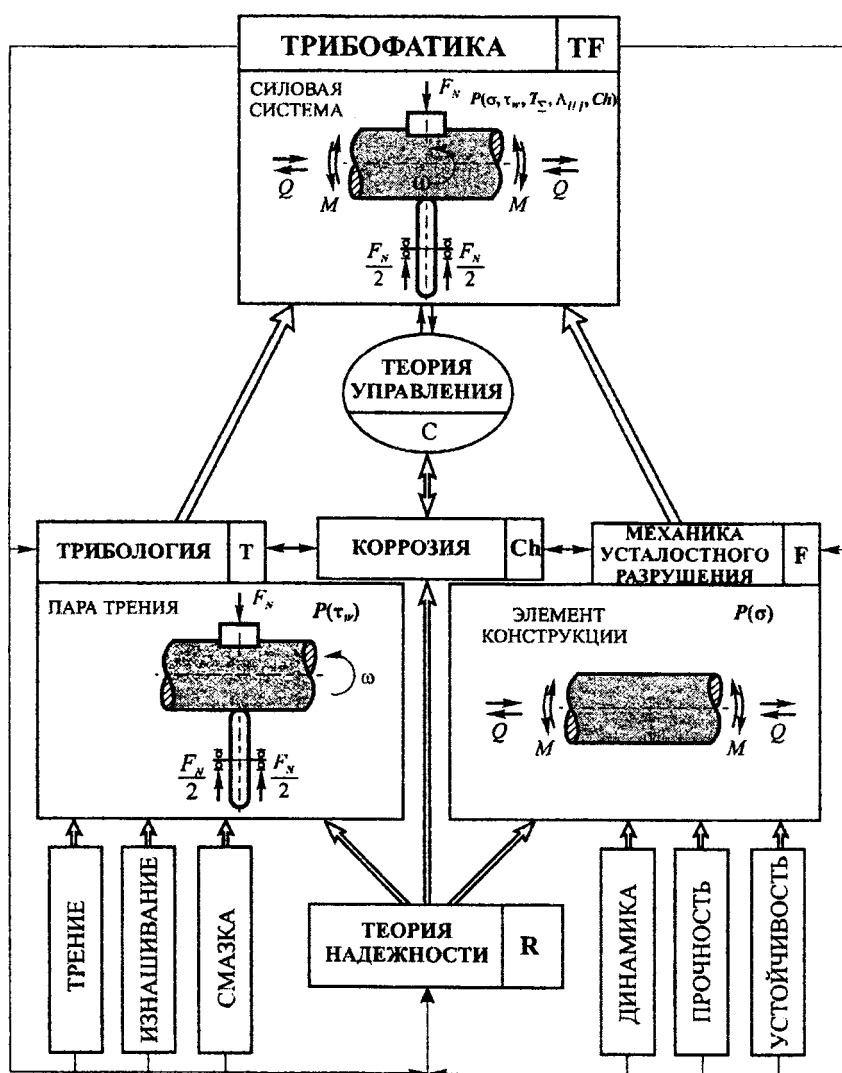


Рис. 2. Трибофатика как комплексная научная дисциплина

В таблице 1 дан сравнительный анализ методов исследования и расчета объектов, изучаемых в трибологии, механике усталостного разрушения и трибофатике.

А в приложении к данной статье перечислены основные этапы развития трибофатики; здесь указаны, главным образом, только значимые события, о которых, по- существу, можно сказать, что они состоялись впервые. Нетрудно видеть: хотя первый двадцатилетний период становления и развития трибофатики определился работами ученых и инженеров четырех стран, но именно Беларусь была колыбелью нового и перспективного раздела механики, и белорусские ученые продолжают удерживать лидирующие позиции в этой области знания.

Таблица 1

Методы исследования объектов

Дисциплина	Объект для изучения	Основные методы исследования		Масштаб повреждения
		экспериментальные	теоретические	
Т (трибология)	Пара трения	Испытания на трение	Механика контактного взаимодействия	Поверхностное повреждение (износ, питтинг и др.)
Ф (механика усталостного разрушения)	Элемент конструкции	Испытания на усталость	Механика деформирования и разрушения	Объемное (усталостное) разрушение
ТФ (трибофатика)	Силовая система	Износоусталостные испытания	Механика износоусталостного повреждения	Комплексное поверхностное повреждение и объемное разрушение

Последовательными стрелками на рис. 1 показано усложнение объектов, изучаемых механикой. По нашему мнению, очередным новым объектом может стать многофазная – *механотермодинамическая система*. Для ее изучения недостаточны методы только механики – как недостаточны и методы только термодинамики. Опираясь на некоторые результаты трибофатики, оказалось возможным сформулировать начала новой дисциплины – *механотермодинамики*.

Наиболее сложный объект для термодинамики – открытые системы. Для такой системы изменение dU внутренней энергии U представляется [1] в виде

$$dU = dQ + dA + dU_{sub} = TdS - pdV + \sum_1^n \mu_k dN_k, \quad (1)$$

где dQ – количество тепла; dA – количество механической энергии; dU_{sub} – количество вещества, которым система обменялась с окружающей средой за интервал времени dt ; p – давление; μ_k – химические потенциалы, так что изменение энтропии

$$(dS)_T = \frac{dU + pdV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu_k dN_k. \quad (2)$$

Таким образом, в термодинамике энтропия S – это мера необратимого рассеяния энергии, которая характеризует состояние системы с точки зрения ее внутренней упорядоченности, или структуры.

В (1) и (2) не принимаются во внимание многие процессы, например, изменение внутренней энергии при повреждении движущихся и деформируемых твердых тел и силовых систем. Поэтому возникает задача об оценке изменения энтропии в связи с развитием многообразных явлений повреждаемости.

Поскольку внутренние необратимые повреждения ω_Σ термомеханической природы возникают вследствие изменения эффективной энергии U_Σ^{eff} [2] в опасном объеме W_{Py} [3] системы, то в общем случае

$$dU_\Sigma^{eff} = \omega_\Sigma dW_{Py}. \quad (3)$$

И тогда, в соответствии с (1) – (3), можно ввести представление о трибофатической энтропии, изменение которой [4]

$$(d_i S)_{TF} = \frac{\gamma_1^{(w)}}{T_\Sigma} \omega_\Sigma dW_{Py}. \quad (4)$$

Таким образом, трибофатическая энтропия служит мерой необратимого поглощения энергии U_Σ^{eff} в опасном объеме W_{Py} силовой системы.

Теперь рассмотрим открытую термодинамическую систему, содержащую повреждаемое твердое тело; это – механотермодинамическая система. Полное изменение энтропии в такой системе, очевидно, определяется суммой (2) и (4)

$$(dS)_T + (d_i S)_{TF} = \frac{dU + \Delta p dV}{T} - \frac{1}{T} \sum_1^n \mu_k dN_k + \frac{\gamma_1^{(w)}}{T_\Sigma} \omega_\Sigma dW_{Py}. \quad (5)$$

Сравнительный анализ эволюции термодинамической и механотермодинамической систем дан на рис. 3.

С одной стороны, траектория механотермодинамического состояния $(S_T + S_{TF})$ не может совпадать с траекторией термодинамического состояния (S_T) , поскольку в первом случае появляется ненулевая добавка трибофатической энтропии $(S_{TF} > 0)$. Это обуславливает количественные различия в траекториях сравниваемых систем. С другой стороны, обнаруживается и принципиальное различие в их поведении: когда энтропия термодинамической системы достигает, например, локального максимума (равновесное состояние – штрихпунктирные линии на рис. 3), механотермодинамическая система может не иметь такого – и она будет находиться в неравновесном состоянии.

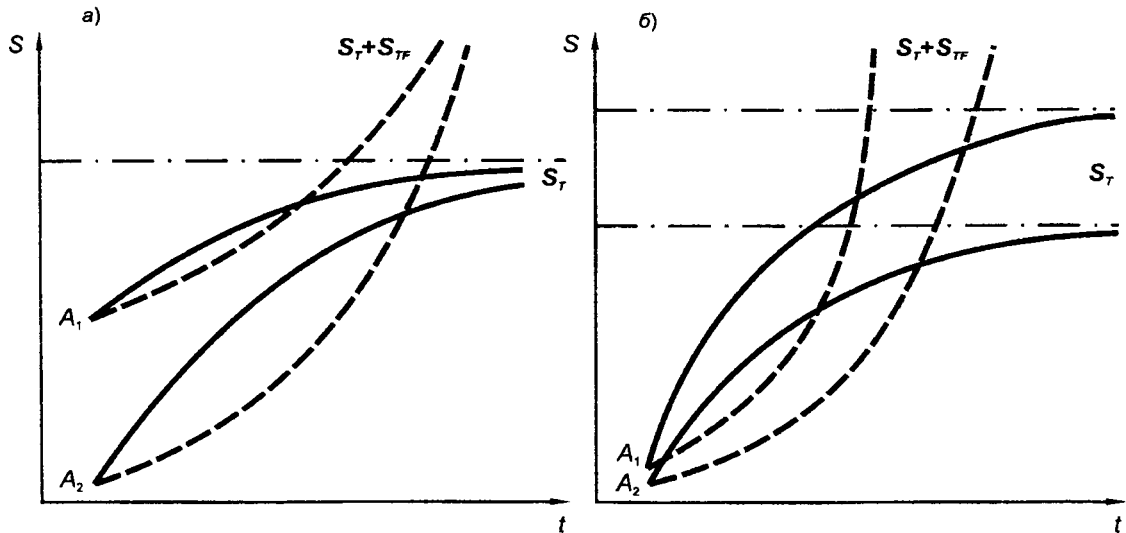


Рис. 3. Эволюция термодинамического (S_T) либо механотермодинамического ($S_T + S_{TF}$) состояния системы (A_1, A_2): а) сходящиеся процессы; б) расходящиеся процессы

В работах [4, 5] обоснованы и сформулированы два начала механотермодинамики. Первое гласит: повреждаемость всего сущего – не имеет мыслимых границ:

$$\bar{\omega}_\Sigma = \bar{\omega}_\Sigma(U_\Sigma^{eff}) \stackrel{!}{\rightarrow} \infty. \quad (6)$$

Второе: потоки эффективной энергии (энтропии), обусловленные источниками разной природы, при необратимых изменениях в механотермодинамической системе взаимодействуют сложным образом:

$$\begin{aligned} U_{\Sigma}^{eff} &= U_{\Sigma}^{eff}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, U_1^{eff}, \dots, U_n^{eff}), \quad m < n, \quad \Lambda \geq 1, \\ S_i &= S_i(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, S_i^{(1)}, \dots, S_i^{(n)}) \quad m < n, \quad \Lambda \geq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

В литературе [2, 4, 5] можно найти анализ (3)–(7); там же обсуждаются некоторые общие закономерности эволюции механотермодинамических систем.

Рисунок 1 завершает стрелка с вопросом: что за объект будет там, за механотермодинамической системой? Очевидный и конечный ответ: *реальный мир*, окружающий нас. Ныне его интенсивно изучают многие и разнообразные науки – от химии и биологии... через механику и термодинамику... и до философии; со всех точек зрения. Но из рисунка 1 понятно, что за механотермодинамической системой должен следовать объект чуть посложнее (однако много проще реальной системы!), например, механотермодинамическая система с некоторыми биологическими «элементами».

Введем представление о *четырех* принципиально возможных *типах повреждения любой системы*. И будем говорить о *состояниях ее необратимой поврежденности*.

1 *Термодинамическим повреждением* назовем всякое необратимое изменение структурной организации системы; обобщенно его может характеризовать параметр $S_{\Sigma} > 0$.

2 *Термомеханическим повреждением* назовем всякое необратимое изменение объема, формы, состава, строения и физико-механических свойств твердых тел, составляющих систему. Похоже, что интегрально его может характеризовать параметр $\omega_{\Sigma} > 0$.

3 Для органических систем дополнительно введем представление о *биохимическом повреждении* – всяком необратимом изменении химического состава и биологических функций. Предположим, что его можно характеризовать некоторым комплексным параметром $B_{\Sigma} > 0$.

4 Наконец, для живых и разумных систем дополнительно введем представление об *интеллектуальном повреждении* – всяком необратимом умственном и психофизическом расстройстве. Вообразим, что его можно характеризовать некоторым комплексным параметром $J_{\Sigma} > 0$.

Опираясь на методологию изучения взаимодействия необратимых повреждений [2, 4], получим *совокупное повреждение*

$$\text{Pr}_{\Sigma} = \Lambda_{org \setminus nonorg} [\Lambda_{S \setminus \omega} (S, \omega_{\Sigma}), \Lambda_{B \setminus J} (B_{\Sigma}, J_{\Sigma})]. \quad (8)$$

и общее производство повреждений в любой системе

$$d \text{Pr}_{\Sigma} = d \{ \Lambda_{org \setminus nonorg} [\Lambda_{S \setminus \omega} (S, \omega_{\Sigma}), \Lambda_{B \setminus J} (B_{\Sigma}, J_{\Sigma})] \}. \quad (9)$$

В случае, если

$$\text{Pr}_{\Sigma} = \Lambda_{org \setminus nonorg} [\Lambda_{S \setminus \omega} (S + \omega_{\Sigma}) + \Lambda_{B \setminus J} (B_{\Sigma} + J_{\Sigma})], \quad (10)$$

где Λ – постоянные коэффициенты, являющиеся частным случаем соответствующих функций взаимодействия необратимых повреждений различной природы, то

$$d \text{Pr}_{\Sigma} = \Lambda_{org \setminus nonorg} [\Lambda_{S \setminus \omega} (dS, d\omega_{\Sigma}), \Lambda_{B \setminus J} (dB_{\Sigma}, dJ_{\Sigma})]. \quad (11)$$

В книгах [2, 4] изложены некоторые сведения, относящиеся лишь к повреждениям S_{Σ} и ω_{Σ} . В работе [6] можно найти попытку понять (в первом приближении, конечно) содержательный смысл повреждений J_{Σ} и B_{Σ} . Мы не будем здесь развивать эту попытку (или обращаться к подобным попыткам других исследователей); сейчас мы укажем лишь на возможность поиска связи общей функции (8) с *разумом*. Такой поиск в принципе возмо-

жен на базе фундаментального представления о *качестве информации*; оно, по имеющимся сведениям, еще не разработано, однако, например, в книге [7] можно найти некоторые исходные предложения по данному вопросу.

Теперь представляется возможным в первом приближении взглянуть – с самых общих позиций – на *реальную систему* (рис. 4).

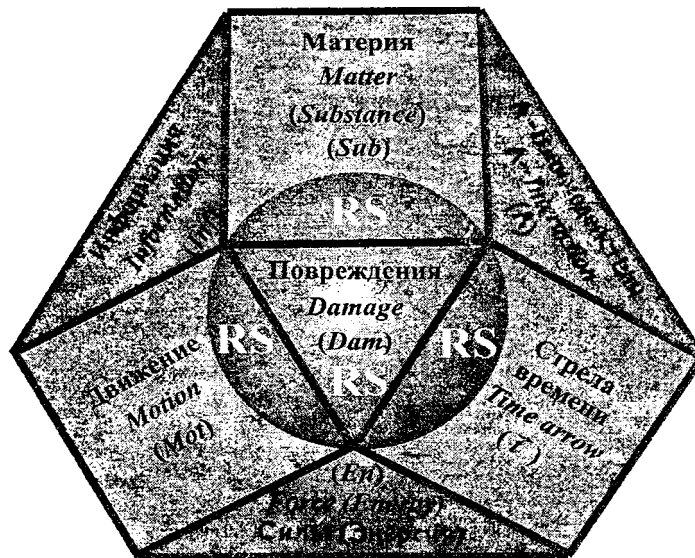


Рис. 4. К реальной системе (RS)

Если б найти ее *функцию существования (бытия)*

$$\Phi_s = \Phi_1(Sub, Mot, \bar{t}), \quad (12)$$

функцию организации (управления)

$$\Phi_A = \Phi_2(Inf, \Lambda, \bar{t}) \quad (13)$$

и *функцию состояний*

$$\Phi_L = \Phi_3(En, Dam, \bar{t}), \quad (14)$$

то, вероятно, мы пришли бы к *модели*

$$\Phi_\Sigma(Sub, Mot, En, Inf, \bar{\omega}_\Sigma, \Lambda, V(x, y, z), \bar{t}) = 0, \quad (15)$$

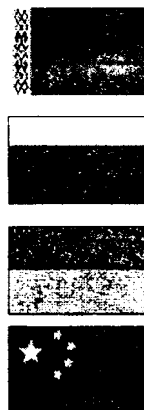
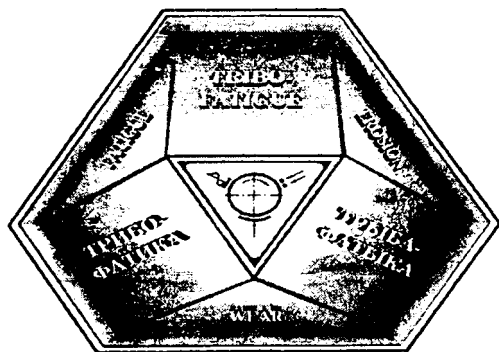
которая в самых существенных чертах отражала бы рождение, жизнь и гибель некоторой *реальной системы*.

Разве это невозможно?

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондепуди, Д. Современная термодинамика (От тепловых двигателей до диссипативных структур) / Д. Кондепуди, И. Пригожин. – М., 2002. – 461 с.
2. Sosnovskiy, L. A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics). – Springer, 2004. – 424 p.
3. Сосновский, Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. – Минск: Наука и техника, 1987. – 288 с.
4. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
5. Сосновский, Л. А. Сюрпризы трибофатиги / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Гомель: УО «БелГУТ», 2005. – 194 с.
6. Сосновский, Л. А. Трибофатика: о диалектике жизни / Л. А. Сосновский. – Гомель, 1999. – 116 с.
7. Сосновский, Л. А. Риск (Механотермодинамика необратимых повреждений) / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 317 с.

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ
РАЗВИТИЯ ТРИБОФАТИКИ



1984 29 сентября	Предложен термин <i>трибофатика</i> (в письме Л.А. Сосновского к К. В. Фролову)	
1986	Впервые опубликован термин « <i>трибофатика</i> » (Сосновский Л. А. О комплексной оценке надежности силовых систем // Пути повышения технического уровня и надежности машин (Тезисы докладов Республиканской научно-технической конференции, Минск, 20–21 ноября 1986 г.). – Минск: ИНДМАШ АН БССР, 1986. – С. 29.)	
1986/87 уч. год	Впервые несколько лекций по трибофатике прочитаны (Л. А. Сосновским) для студентов Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта (БелиИЖТ) в рамках курса по надежности железнодорожного пути (по инициативе В. И. Матвеева)	
1988	Опубликованы первые методические указания по изучению трибофатике (Л. А. Сосновский. Комплексная оценка надежности силовых систем по критериям сопротивления усталости и износостойкости (основы трибофатике). – Гомель: БелиИЖТ, 1988. – 56 с)	
1989 28 ноября	Первая награда по трибофатике (Л. А. Сосновский награжден серебряной медалью ВДНХ СССР «За разработку методологических и теоретических основ трибофатике»)	
1990 5 сентября	Состоялось первое Всесоюзное заседание ученых и специалистов за круглым столом «Проблемы трибофатике» (Гомель; председатели Н. А. Махутов и Л. А. Сосновский)	
1990	Опубликован первый научно-программный документ по трибофатике (К. В. Фролов, Л. А. Сосновский, Н. А. Махутов, Ю. Н. Дроздов. Трибофатика: новые идеи в перспективном направлении. – Гомель, 1990. – 7 с.)	
1992	В Республике Беларусь впервые утвержден отдельный научно-технический проект «Трибофатика»	
1992 август	Создано общество с ограниченной ответственностью «ТРИБОФАТИКА», преобразованное в 1994 г. в научно-производственное объединение (НПО «ТРИБОФАТИКА»)	
1993 14-17 сентября	Состоялся (первый) Международный симпозиум по трибофатике (Гомель, Беларусь). Первая пресс-конференция (К. В. Фролова и Л. А. Сосновского) по трибофатике (14.09)	
1994	В НПО «ТРИБОФАТИКА» создан опытный образец универсальной машины СИ для износоусталостных испытаний материалов и моделей силовых систем – первый представитель нового класса испытательного оборудования, предложенного в рамках трибофатике	

1995 июнь	Академиями наук России, Беларуси и Украины утвержден первый «План Международного комплекса НИОКР по трибофатике»
1995 30 сентября	БелСТАНДАРТОм утвержден первый государственный стандарт по трибофатике: СТБ 994-95 «Трибофатика. Термины и определения»
1995 декабрь	Впервые организована Лаборатория трибофатики двойного подчинения – НЦ ПММ НАН Беларуси и ГСКБ ПО «Гомсельмаш» (приказ подписали М. С. Высоцкий и В. А. Шуринов)
1996	Опубликованы: первый выпуск ежегодника «Трибофатика» (Трибофатика-95: Ежегодник. Под общей ред. Л. А. Сосновского // Вып.1: Машины серии СИ для износоусталостных испытаний. Под ред. М. С. Высоцкого. – Гомель: НПО "Трибофатика", 1996. –80 с.); первый четырехязычный терминологический словарь по трибофатике (Трибофатика. Трыбафатыка. Ttibo-fatigue. Tribo-ermudung. Под ред. Л. А. Сосновского. – Минск-Гомель: НПО "ТРИБОФАТИКА", 1996. – 138 с.); эссе о трибофатике, которые написали 17 известных ученых и организаторов науки (Слово о трибофатике. Ред.-составитель А. В. Богданович. – Гомель-Минск-Москва-Киев: Remika, 1996. – 132 с.)
	В учебные планы механического факультета Белорусского государственного университета транспорта (БелГУТ) впервые включен курс «Основы трибофатики» (по предложению и при поддержке В.И. Сенько и Э.И. Старовойтова)
1996 15-17 октября	Состоялся второй Международный симпозиум по трибофатике (Москва, Россия)
1996 20 декабря	Академиями наук России, Беларуси и Украины утвержден Международный координационный совет по трибофатике (сопредседатели: Н. А. Махутов, Л. А. Сосновский, В. Т. Трощенко, с 1999 г. Гао Ванчжен)
1997	Впервые группе украинских и белорусскому ученым (научный руководитель В. Т. Трощенко) присуждена Государственная премия Украины в области науки и техники (вклад Л. А. Сосновского – работы по трибофатике)
1998 14 мая	Первый визит Чрезвычайного и Полномочного Посла КНР в Беларуси У Сяоцю в НПО «ТРИБОФАТИКА», послуживший началом научно-технического сотрудничества между КНР и РБ в области трибофатики
1998	В учебный план Гомельского государственного технического университета им. П. О. Сухого включен курс «Основы трибофатики» (по инициативе А. С. Шагиняна)
1999	Утвержден первый межгосударственный стандарт по трибофатике: ГОСТ 30638-99 «Трибофатика. Термины и определения»
	Опубликована монография, в которой методология трибофатики впервые использована для анализа жизни как особого способа накопления повреждений (Сосновский Л. А. Трибофатика: о диалектике жизни. Гомель, 1999. – 116 с.)
	Организована первая заводская лаборатория по трибофатике: «Лаборатория износоусталостных испытаний» ЦЗЛ ПО «Госсельмаш» (приказ подписал В. А. Жмайлик)
2000 22-26 октября	Состоялся третий Международный симпозиум по трибофатике (Пекин, Китай)
2001	Ученые Беларуси, России, Украины и Китая опубликовали первую международную монографию по трибофатике (Л. А. Сосновский, В. Т. Трощенко, Н. А. Махутов, Гао Ванчжен, А. В. Богданович, С. С. Щербаков. Износоусталостные повреждения и их прогнозирование (трибофатика). Гомель, Москва, Киев, Ухань, 2001. – 171 с.)
2002	Первая публикация о трибофатике в энциклопедии (Трыбафатыка. – Мн.: Беларуская энцыклапедыя, 2002. – Т. 15. – С. 542).

2002 23-27 сентября	Состоялся четвертый Международный симпозиум по трибофатике (Тернополь, Украина)
2003	Издано первое учебное пособие по трибофатике, утвержденное Министерством образования РБ для студентов технических высших учебных заведений (Сосновский Л. А. Основы трибофатики. Гомель: БелГУТ, 2003. Ч. I. – 246 с.; Ч. II. – 235с.)
2003 апрель	По предложению Н. И. Юрчука и М. А. Журавкова в Белорусском государственном университете (БГУ) впервые прочитан (Л. А. Сосновским) специальный курс лекций по трибофатике для студентов механико-математического факультета
2004	По предложению П. А. Витязя (Президиум НАН Беларуси), Л. Г. Красневского (ИМИНМАШ НАН Беларуси), В. А. Жмайлика (ПО «Гомсельмаш») и В. И. Сенько (БелГУТ) принято решение о создании первой Межведомственной лаборатории «ТРИБОФАТИКА» (Протокол подписали президент НАН Беларуси М. В. Мясникович, Министр промышленности РБ А. М. Русецкий, Министр образования РБ А. М. Радков и Председатель Государственного комитета по науке и технологиям РБ Ю. М. Плескачевский)
	Опубликована монография, в которой методология трибофатики впервые использована для построения механотермодинамики необратимых повреждений (Сосновский Л. А. L-риск. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 317 с.)
2005	Издана первая на английском языке монография по трибофатике – L. A. Sosnovskiy. Tribo-Fatigue (Wear-Fatigue Damage and its Prediction). Series: Foundations of Engineering Mechanics. – Springer, 2005. – 424 p.)
	Защищена первая докторская диссертация по трибофатике (Богданович А. В. Научные основы прогнозирования предельных состояний силовых систем. – Минск: ИМИНМАШ НАН Беларуси)
2005 28 июля	Два академических учреждения – ИМИНМАШ и НИРУП «Белавтотракторостроение» НАН Беларуси провели научный семинар «О трибофатике» (председатель М. С. Высоцкий), посвященный 20-летию развития исследований в области трибофатики и 70-летию профессора Л. А. Сосновского
2005 12-16 сентября	Состоялся Мировой трибологический конгресс WTCIII (Вашингтон, США). На нем впервые представлено 8 докладов по трибофатике
2005 3-7 ок- тября	Состоялся пятый Международный симпозиум по трибофатике (Иркутск, Россия), посвященный 20-летию развития исследований по трибофатике и 30-летию Иркутского государственного университета путей сообщения (ректор А. П. Хоменко)
2006 август	На IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике в Нижнем Новгороде впервые представлен пленарный доклад по трибофатике (Н. А. Махутов, Л. А. Сосновский, К. В. Фролов. Основы механики износоусталостных повреждений). Л. А. Сосновский избран членом Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике.
2007	Опубликована монография, в которой дано обобщение двадцатилетних исследований по трибофатике; в ней впервые изложены основы механотермодинамики (Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.).
	По представлению А. В. Богдановича и В. И. Драгана принято решение о введении курса «Основы трибофатики» (для механических специальностей) в Брестском государственном техническом университете (ректор П. С. Пойта) и Гродненском государственном университете им. Я. Купалы (ректор Е. А. Ровба).

Из доклада А.В. Кухарева «К истории трибофатики: первые 20 лет» на 5-м Международном симпозиуме по трибофатике (с некоторыми дополнениями)

UWZGLĘDNIENIE OPORU POWIETRZA W ANALIZIE RUCHU RZUCANEJ MONETY

Grabski J., Strzałko J., Kapitaniak T.

Numerical analysis of three dimensional coin tossing is presented. Coin model includes air resistance. It is assumed that the air resistance force is proportional to the velocity. Comparison of results with and without the air resistance shows that the air friction may be nonnegligible.

Wprowadzenie

W pracy analizowany jest przestrzenny ruch monety przy uwzględnieniu wpływu oporu powietrza na przebieg ruchu.

Badaniom ruchu rzuconej monety poświęconych jest wiele prac – począwszy od Kellera [3], Vulovica [4], poprzez Mizuguchi i Suwashita [6], aż do ostatnio opublikowanej pracy Diakonisa, Holmes i Montgomery'ego [1].

Celem tej pracy jest numeryczna analiza dynamiki trójwymiarowego modelu monety. Taki sposób rozwiązania zadania umożliwia zbadanie wpływu oporu powietrza na przebieg ruchu rzuconej monety. Przedstawiona praca stanowi kontynuację badań omówionych w [2].

Równania dynamiki ciała swobodnego

Równania dynamiki ciała swobodnego poruszającego się ruchem ogólnym można przedstawić w zapisie macierzowym w formie dwu równań:

– równania opisującego przyspieszenie środka masy ciała o postaci

$$M\mathbf{a}_c = \mathbf{f}, \quad (1)$$

– równania opisującego zmiany przestrzennej orientacji ciała (jego obroty)

$$J_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} J_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m}_C. \quad (2)$$

W podanych równaniach \mathbf{M} jest macierzą mas ciała sztywnego ($\mathbf{M} = \text{diag} [m \ m \ m]$), \mathbf{a}_c jest wektorem bezwzględnego przyspieszenia środka masy ciała (punktu C), \mathbf{f} zawiera składowe wektora głównego sił działających na ciało sztywne, J_C jest macierzą bezwładności ciała względem osi centralnych, $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\Omega}$ oznaczają wektor prędkości kątowej ciała oraz antysymetryczną macierz tych prędkości, a \mathbf{m}_C jest wektorem momentu sił zewnętrznych względem środka masy C .

Wektory \mathbf{a}_c i \mathbf{f} są wyrażone poprzez składowe określone w nieruchomym układzie współrzędnych (xyz) : $\mathbf{a}_c = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T$, $\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$, natomiast wielkości występujące w równaniu (2) – opisującym obroty – wygodnie jest przedstawić w ruchomym układzie współrzędnych, związanym z poruszającym się ciałem $(\xi\eta\zeta)$.

Równania (1) i (2) są ogólnymi równaniami dynamiki i opisują ruch ciała sztywnego o dowolnej geometrii i dowolnym rozłożeniu masy. Układy równań (1) i (2) w przypadku, gdy siły \mathbf{f} nie zależą od składowych wektora prędkości kątowej ciała, a momenty \mathbf{m}_C są niezależne od wektora przyspieszeń środka masy, co ma miejsce wówczas, gdy opory powietrza nie są uwzględniane, są równaniami niesprzężonymi.

W przypadku monety wykonanej z jednorodnego materiału i o kształcie osiowosymetrycznego walca (lub modelowanej jako walec) jej środek masy (punkt C) leży w środku geometrycznym walca (w punkcie B). Osie układu współrzędnych $(B\xi\eta\zeta)$ sztywno związanego z ciałem są osiami głównymi i centralnymi, a J_C jest macierzą diagonalną.

Przy analizie ruchu monety o kształcie odbiegającym od walca lub wykonanej z niejednorodnego materiału (z defektem lub skazą), punkty B i C nie pokrywają się. W takim przypadku wygodniejsze w obliczeniach mogą być równania dynamiki ciała zapisane w postaci:

$$M(\mathbf{a}_B + \dot{\Omega} \mathbf{r}_C + \Omega \Omega \mathbf{r}_C) = \mathbf{f}, \quad (3)$$

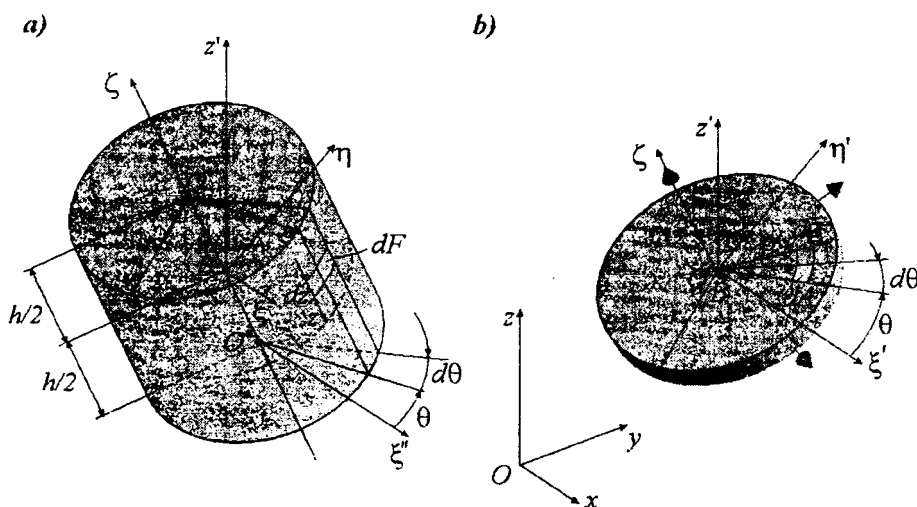
$$\mathbf{J}_B \dot{\omega} + \Omega \mathbf{J}_B \omega + M \mathbf{R}_C \mathbf{a}_B = \mathbf{m}_B, \quad (4)$$

przy czym \mathbf{a}_B jest wektorem bezwzględego przyspieszenia punktu B , \mathbf{r}_C i \mathbf{R}_C zawierają składowe wektora \mathbf{r}_C , określającego położenie punktu C względem B , \mathbf{J}_B jest macierzą bezwładności ciała w układzie osi $(B\xi\eta\zeta)$, a \mathbf{m}_B jest wektorem momentów sił zewnętrznych względem punktu B . Macierz \mathbf{J}_B dla monety niesymetrycznej w ogólnym przypadku nie będzie macierzą diagonalną, gdyż osie $B\xi$, $B\eta$, $B\zeta$ nie będą osiami głównymi (poza przekątną w \mathbf{J}_B wystąpią różne od zera momenty dewiacyjne).

W przeciwieństwie do równań (1)–(2) równania (3) i (4) są równaniami sprzężonymi nawet wtedy, gdy rozpatrywany jest swobodny rzut ciała i opory powietrza są pomijane.

Uwzględnienie oporu powietrza

Dla określenia prawych stron równań (1)–(2) oraz (3)–(4) należy wyznaczyć składowe sił działających na ciało i momenty tych sił względem osi układu $(B\xi\eta\zeta)$.



Rys. 1. Oznaczenia wielkości wykorzystywanych przy wyznaczaniu sił oporu:
a) na powierzchni walcowej, b) na płaszczyznach

Rozpatrywany jest model monety o kształcie walca o promieniu podstawy r i wysokości h (rys. 1), poruszający się ruchem ogólnym. Na podstawie zależności kinematycznych dla ciała sztywnego określany jest rozkład prędkości na zewnętrznych powierzchniach walca. Przyjęto, że opór powietrza występuje tylko na tej części powierzchni walca, na której wektory prędkości jej punktów mają zwrot zgodny z wektorem normalnym do tej powierzchni i skierowanym za zewnątrz ciała.

Wektor sił oporu powietrza \mathbf{f}_r wyznaczany jest jako suma oporów na obu płaszczyznach podstawy walca (\mathbf{f}_1 i \mathbf{f}_2) oraz oporów na bocznej powierzchni (\mathbf{f}_3)

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \quad (5)$$

przy czym:

$$\mathbf{f}_1 = -\lambda \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}_{A+}|^b \mathbf{v}_{A+} \rho d\theta \right) d\rho, \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_2 = -\lambda \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}_{A-}|^b \mathbf{v}_{A-} \rho d\theta \right) d\rho, \quad (7)$$

gdzie: r oznacza promień monety, \mathbf{v}_{A+} jest wektorem zawierającym składowe prędkości punktu leżącego na płaszczyźnie monety $\zeta = \frac{h}{2}$, a \mathbf{v}_{A-} odnosi się do składowych prędkości punktu leżącego na płaszczyźnie monety $\zeta = -\frac{h}{2}$, $|\mathbf{v}_{A+}|$ i $|\mathbf{v}_{A-}|$ oznaczają wartości wektorów prędkości, λ jest współczynnikiem oporu, a b liczbą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ (dla $b=0$ opór powietrza jest liniowo zależny od prędkości, a dla $b=1$ siły oporu zależą od kwadratu prędkości). Prędkości \mathbf{v}_{A+} i \mathbf{v}_{A-} są wyznaczane z zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{A+} &= \mathbf{v}_B + \Omega_0 \mathbf{r}_{BA+}, & \mathbf{v}_{A-} &= \mathbf{v}_B + \Omega_0 \mathbf{r}_{BA-}, \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_C + \Omega_0 \mathbf{r}_{CB}, & \mathbf{v}_C &= [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{BA+} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & \frac{h}{2} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_{BA-} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & -\frac{h}{2} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie Ω_0 jest macierzą zawierającą składowe prędkości kątowej o kierunkach osi układu xyz .

Siła oporów powietrza powstająca na bocznej powierzchni walca (\mathbf{f}_3) jest wyznaczana jako

$$\mathbf{f}_3 = -\lambda \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}|^b \mathbf{v} r d\theta \right) dz. \quad (9)$$

Symbolem \mathbf{v} została oznaczona prędkość punktu na bocznej powierzchni walca, a ρ_3 jest wektorem określającym położenie tego punktu, przy czym

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \Omega_0 \rho_3, \quad (10)$$

$$\rho_3 = [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad z]^T.$$

Równania dynamiki monety (1), opisujące przyspieszenie środka masy przy spadku z uwzględnieniem oporu powietrza, mają postać:

$$m\ddot{x} = f_x, \quad m\ddot{y} = f_y, \quad m\ddot{z} = f_z - mg. \quad (11)$$

Moment względem punktu B wywołany siłami oporu powietrza został opisany zależnością

$$\mathbf{m}_{rB} = -\lambda \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}_A|^b \mathbf{R}_{BA} \mathbf{v}_A \rho d\theta \right) d\rho, \quad (12)$$

przy czym:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \Omega_0 \mathbf{r}_{CA}, \quad \mathbf{v}_C = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_{CA} = \mathbf{r}_{CO} + \mathbf{r}_{OA} = [r_{Ox} + \rho \cos \theta \quad r_{Oy} + \rho \sin \theta \quad 0]^T,$$

gdzie Ω_0 jest macierzą zawierającą składowe prędkości kątowej o kierunkach xyz , \mathbf{R}_{BA} jest antysymetryczną macierzą zawierającą składowe wektora \mathbf{r}_{BA} ($\mathbf{R}_{BA} = \tilde{\mathbf{r}}_{BA}$), natomiast \mathbf{r}_{CA} jest wektorem położenia punktu A względem C .

Model uproszczony – dwuwymiarowy (cienka moneta)

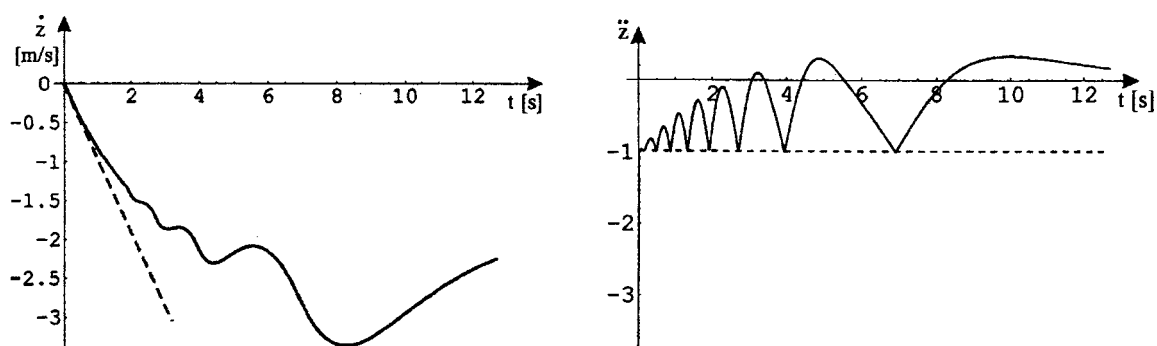
W przypadku symetrycznej i cienkiej monety (rys. 1b) i przy założeniu, że punkty B i C pokrywają się, po scałkowaniu równania (20) otrzymuje się

$$\mathbf{m}_{rB} = \left[-\frac{1}{4} \pi r^4 \lambda \omega_\xi \quad -\frac{1}{4} \pi r^4 \lambda \omega_\eta \quad -\frac{1}{2} \pi r^4 \lambda \omega_\zeta \right]^T. \quad (14)$$

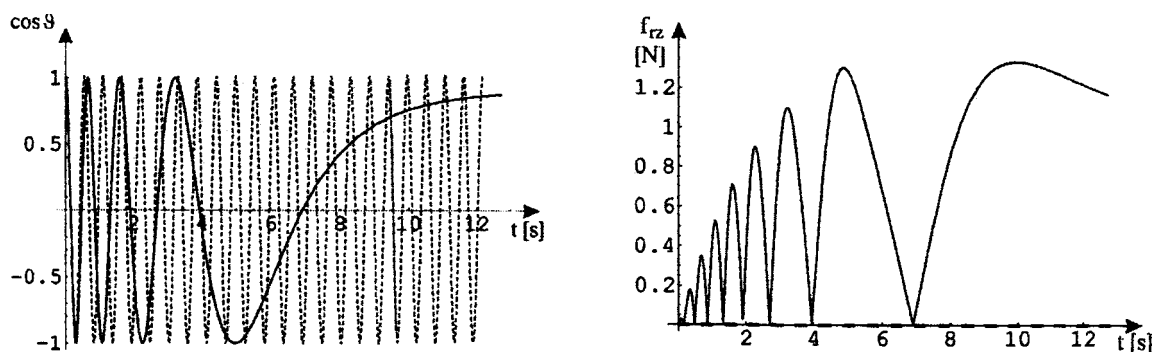
Na rysunku 2 jest pokazany przykładowy przebieg zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznej monety przy uwzględnieniu oporu powietrza, a na rys. 3 jest przedstawiony przebieg zmian kąta obrotu oraz pionowa składowa siły oporu. Obliczenia zostały przeprowadzone dla takich danych dla modelu monety, jakie były przyjęte w pracy [6] (to jest: $r=1$ m, $m=1$ kg, $g=1$ m/s²). Rozpatrywany był identyczny przypadek rzutu – spadek monety z zadanej wysokości z_0 z zerową prędkością początkową środka masy i zadaną początkową prędkością kątową. Wartości składowych siły oporu (5) – dla pionowego rzutu monetą (i dla $b=0$) – są określone jako

$$\mathbf{f}_r = \left[0 \quad 0 \quad -\pi r^2 \lambda \dot{z} |\cos \vartheta| \right]^T, \quad (15)$$

gdzie ϑ oznacza kąt odchylenia osi ζ monety od osi z .



Rys. 2. Przebiegi zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznej monety: linia ciągła oznacza wyniki z uwzględnieniem oporu powietrza, linia przerywana – bez oporu powietrza (wyniki dla $\lambda=0.188$)



Rys. 3. Przebiegi zmian cosinusa kąta nachylenia monety ϑ i składowej pionowej siły oporu f_{rz} (wyniki dla $\lambda=0.188$)

Z porównania przebiegów poszczególnych wielkości przy uwzględnieniu oporu powietrza i przy pominięciu tych sił oporu wynika, że wpływ oporu może być znaczący (tak jest dla $\lambda=0.188$). Prędkość i przyspieszenie środka masy nie są liniami prostymi – jak przy pominięciu oporu – lecz mają charakter oscylacyjny (podobnie jest z siłą f_{rz}). Częstość tych oscylacji maleje w miarę zmniejszania się prędkości kątowej monety. Przebieg zmian funkcji $\cos \vartheta$ wskazuje, że zmiany kąta ϑ zachodzą coraz wolniej, a przy dostatecznie długim czasie spadania ϑ osiąga ustaloną wartość.

Jednowymiarowy model monety

Dla monety, która podczas ruchu obraca się wokół poziomej osi – o stałym kierunku, do analizy dynamiki może być użyty jednowymiarowy model ciała. W takim przypadku moneta jest traktowana tak jak pręt poruszający się ruchem płaskim w płaszczyźnie yz (rys. 4).

Siłę oporu powietrza \mathbf{f}_r i jej moment \mathbf{m}_{rB} wyznacza się – podobnie jak dla modelu trójwymiarowego – jako:

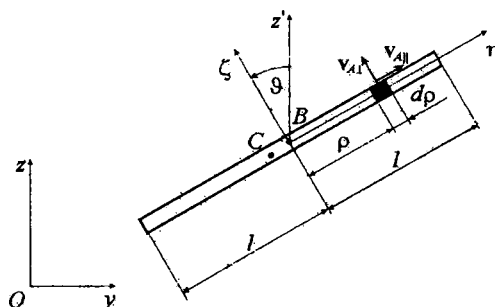
$$\mathbf{f}_r = -\lambda_1 \int_{-l}^l |\mathbf{v}_{A\perp}|^b \mathbf{v}_{A\perp} d\rho - \lambda_2 \int_{-l}^l |\mathbf{v}_{A\parallel}|^b \mathbf{v}_{A\parallel} d\rho, \quad (16)$$

$$\mathbf{m}_{rB} = -\lambda_1 \int_{-l}^l |\mathbf{v}_{A\perp}|^b \mathbf{R}_{BA} \mathbf{v}_{A\perp} \rho d\rho, \quad (17)$$

gdzie: l oznacza połowę długości pręta, \mathbf{v}_A jest wektorem zawierającym składowe prędkości punktu (A), leżącego w odległości ρ od jego środka (B), $\mathbf{v}_{A\perp}$ i $\mathbf{v}_{A\parallel}$ są składowymi wektora \mathbf{v}_A o kierunku prostopadłym i równoległym do powierzchni monety, λ_1 i λ_2 są współczynnikami oporu w kierunku prostopadłym i równoległym do powierzchni, a b liczbą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Wektory występujące w równaniach (16) i (17) wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \Omega_O \mathbf{r}_{BA}, & \mathbf{v}_B &= [0 \ \dot{y} \ \dot{z}]^T, \\ \mathbf{r}_{BA} &= [0 \ r_{By} + \rho \cos \vartheta \ r_{Bz} + \rho \sin \vartheta]^T. \end{aligned} \quad (18)$$



Rys. 4. Jednowymiarowy model monety – oznaczenia

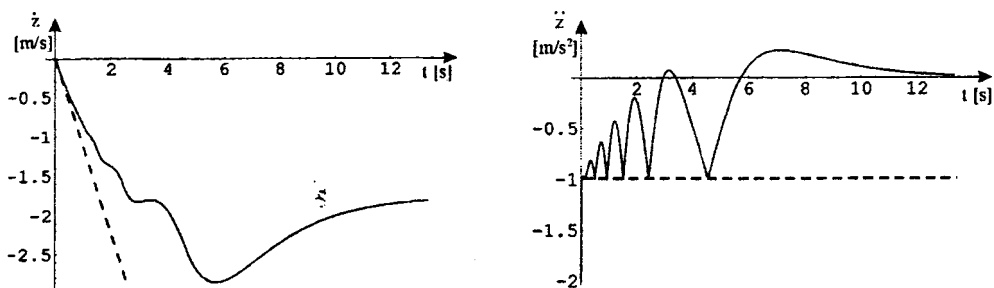
Wartości składowych siły oporu ($\mathbf{f}_r = [f_{rx} \ f_{ry} \ f_{rz}]^T$) – dla $b=0$ i $\lambda_2=0$ – są określone jako

$$\mathbf{f}_r = [0 \ -2l\lambda_1\dot{y}|\sin \vartheta| \ -2l\lambda_1\dot{z}|\cos \vartheta|]^T. \quad (19)$$

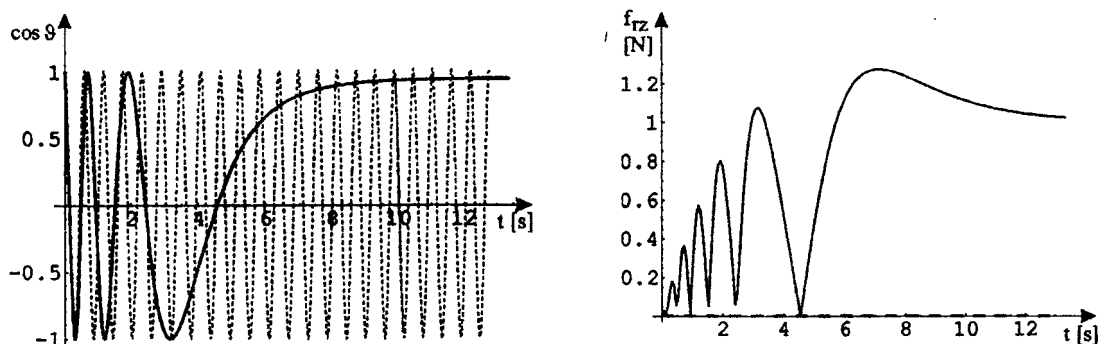
W przypadku symetrycznej monety (punkty B i C pokrywają się) po scałkowaniu równania (17) otrzymuje się

$$\mathbf{m}_{rB} = \left[-\frac{2}{3} l^3 \lambda_1 \dot{\vartheta} \ 0 \ 0 \right]^T. \quad (20)$$

Na rysunku 5 jest pokazany przykładowy przebieg zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznego pręta przy uwzględnieniu oporu powietrza, a na rys. 6 jest przedstawiony przebieg zmian kąta obrotu oraz pionowa składowa siły oporu. (Wartości liczbowe z pracy [6]: $r=1 \text{ m}$, $m=1 \text{ kg}$, $g=1 \text{ m/s}^2$).



Rys. 5. Przebieg zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznego pręta (wyniki dla $\lambda_1=0.296$)



Rys. 6. Przebieg zmian cosinusa kąta nachylenia pręta ϑ i składowej pionowej siły oporu f_{rz} (wyniki dla $\lambda_1=0.296$)

Rezultaty przeprowadzonych obliczeń (rys. 2, 3, 5, 6) pokazują zgodność wyników dla modelu jedno- i dwu- wymiarowego, w przypadku odpowiednio dobranych współczynników oporu λ i λ_1 .

Zatem jednowymiarowy model monety może być wykorzystywany do analizy jej dynamiki nawet wówczas, gdy opór powietrza ma być uwzględniony. Symulacja rzutu monetą przeprowadzona dla jednowymiarowego modelu jest jednak ograniczona do takich przypadków, w których wektor prędkości kątowej monety jest poziomy i ma stały kierunek ($\omega = \dot{\vartheta}$).

Równania dynamiki monety sformułowane dla kątów Eulera

W pracy [2] zostały przedstawione równania dynamiki monety wyrażone poprzez parametry Eulera. W zamieszczonych niżej równaniach jako współrzędne użyte zostały kąty Eulera. Antysymetryczna macierz prędkości kątowej Ω dla klasycznych kątów Eulera ($\zeta-\xi-\zeta$) ma postać

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\varphi} \cos \vartheta & \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ 0 & -\dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta & \\ \text{asym.} & & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

a wektor prędkości kątowej ciała ω , o składowych określonych w układzie współrzędnych xyz , jest równy

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Wektor prędkości kątowej ciała ω_ξ w układzie współrzędnych $\xi\eta\zeta$ – związanych z poruszającym się ciałem – ma postać

$$\omega_{\xi} = \begin{bmatrix} \omega_{\xi} \\ \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Równania dynamiki monety są przedstawione w dwóch grupach:

- równania opisujące przyspieszenie środka masy są podane wzorami (11),
- równania opisujące zmiany przestrzennej orientacji monety, wyrażone poprzez kąty Eulera, są określone następującymi równaniami (zostały tu podane uproszczone równania dla przypadku, gdy $J_{\xi} = J_{\eta} = \frac{J_{\zeta}}{2}$ oraz $J_{\xi\eta} = J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\xi} = 0$):

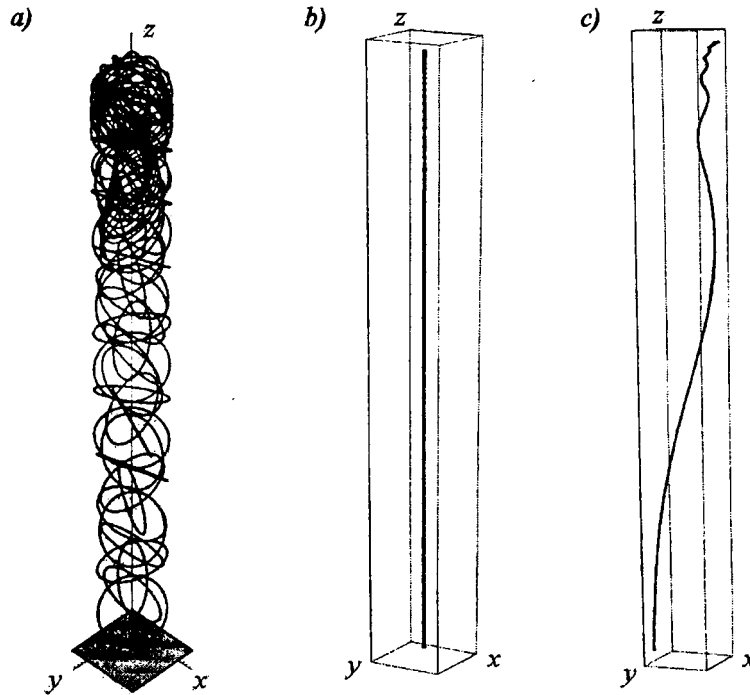
$$\ddot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \ddot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \cos \psi \sin \vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \psi \sin \vartheta - 2\dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \psi = \frac{2m_{\xi}}{J_{\zeta}}, \quad (24)$$

$$\ddot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \ddot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \sin \psi \sin \vartheta - 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi \sin \vartheta - 2\dot{\vartheta}\dot{\psi} \cos \psi = \frac{2m_{\eta}}{J_{\zeta}}, \quad (25)$$

$$\ddot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta = \frac{m_{\zeta}}{J_{\zeta}}. \quad (26)$$

Symulacja ruchu monety

Przykładowe wyniki symulacji ruchu monety są przedstawione na rys. 7. Są na nich pokazane rezultaty otrzymane w przypadku swobodnego spadku monety (z pominięciem oporu powietrza) oraz przy uwzględnieniu oporu powietrza i przesunięciu środka masy poza środek geometryczny.



Rys. 6. Symulacja pionowego rzutu monety (a) i tor środka jej masy: b) dla monety symetrycznej bez uwzględnienia oporu powietrza, c) przy uwzględnieniu oporu powietrza i braku symetrii monety

Uwzględnienie oporu powietrza powoduje, że tor środka masy monety nie jest linią prostą. Zmienia się również czas ruchu (w tym przypadku czas spadania z zadanej wysokości) oraz konfiguracja monety w położeniu końcowym (inny kąt ϑ_k niż przy pominięciu sił oporu).

Podsumowanie

Porównanie wyników otrzymanych dla jedno- dwu- i trój- wymiarowego modelu monety pozytywnie weryfikuje model trójwymiarowy. Użycie trójwymiarowego modelu monety pozwala na analizowanie takich przypadków, dla których modele jedno i dwu-wymiarowe są niewystarczające.

Przyjęty sposób opisu ruchu ciała może być użyty do sporządzenia map przedstawiających wynik rzutu monetą ("orzeł" lub "reszka") w przypadku jej przestrzennego ruchu. Tego rodzaju prace są obecnie wykonywane.

LITERATURA

1. Diaconis, P., Holmes, S., Montgomery, R.: Dynamical Bias in the Coin Toss. (2004).
2. Grabski J., Strzałko J., Perlikowski P., Kapitaniak T.: Wykorzystanie kwaternionów do opisu dynamiki ciała. Analiza ruchu rzuconej monety. Materiały Kongresu Mechaniki Polskiej, 2007.
3. Keller J.B.: The probability of heads. *American Math. Monthly*, 93, pp. 191–197, 1986.
4. Mizuguchi T., Suwashita M.: Dynamics of Coin Tossing. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, :274–277, 2006.
5. Nejmark J.I., Fufajev N.A.: *Dynamika układów nieholonomicznych*. PWN, Wrocław, 1971.
6. Vulović V.Ž., Prange R.E.: Randomness of true coin toss. *Physical Review A*, /1:576–582, 1986.

STATISTICAL-MECHANICAL DESCRIPTION OF ORIENTATIONAL ORDER TENSOR FLUCTUATION BY MEANS OF FOKKER-PLANCK EQUATION

Nemtsov V.B.

This article is devoted to derivation the evolution equation for the distribution function of fluctuations of tensor order parameter on bases of solving of the Liouville equation by Zubarev method.

The problem, which we pose, is an investigation of fluctuations in orientational order systems. This systems are included, for example, the liquid crystals, liquid crystalline polymers, liquid crystal elastomers, the ordered phases of DNA molecules. For description the orientation order we use the traceless second order tensor \hat{D}_{ij} . This tensor is defined as

$$\hat{D}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N (3c_i^\nu c_j^\nu - \delta_{ij}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\nu), \quad (1)$$

where c_i^ν is projection of unit vector directed along the axis of the rigid fragment of molecule numbered ν , \mathbf{x}^ν is the radius vector of the center of mass of molecule fragment, N is the number of fragment.

Therefore it is important to obtain the equation which describes the time evolution of fluctuation of the tensor of orientational order.

Macromolecules in the above mentioned systems have the rigid fragments and due to this circumstance the considered materials possesses the orientation order.

We suppose that the nonequilibrium state our system can be described by the distribution function of discrete set of dynamical variables $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_6$. This variables represent the components of the tensor the orientational order:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \hat{D}_{11}, \hat{a}_2 = \hat{D}_{12}, \hat{a}_3 = \hat{D}_{13}, \hat{a}_4 = \hat{D}_{22}, \\ \hat{a}_5 &= \hat{D}_{23}, \hat{a}_6 = \hat{D}_{33}, \end{aligned}$$

which obeys to relation ($\hat{D}_{ij} = 0$, or $\hat{a}_1 + \hat{a}_4 + \hat{a}_6 = 0$).

The nonequilibrium distribution function $f(a, t)$ defined as

$$f(a, t) = \langle \delta(\hat{a} - a) \rangle = Tr [\delta(\hat{a} - a) \rho(t)] \quad (2)$$

where a is the vector with components

$$a_1 = D_{11}, a_2 = D_{12}, a_3 = D_{13}, a_4 = D_{22}, a_5 = D_{23}, a_6 = D_{33} \quad (D_{ij} = 0).$$

Here a_i are the given numerical values, but \hat{a}_i are functions of phase variables, $\rho(t)$ is the nonequilibrium distribution function which obeys to the Liouville equation. The multidimensional δ -function is given by

$$\hat{n}(a) = \delta(\hat{a} - a) = \Pi \delta(\hat{a}_i - a_i). \quad (3)$$

We note this for description orientation order may be introduced 5-vector without constraint the due $D_{ij} = 0$, for example, if we use the Doi-Edwards [1] microscopic stress tensor as the tensor parameter order.

Our goal is derivation the evolution equation for the function $f(a, t)$ on the bases of statistical-mechanical theory by Zubarev method. We start with Liouville equation for nonequilibrium phase distribution function with an infinitesimal source selecting the solution of required form,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL\right)\rho(t) = -\varepsilon(\rho(t) - \rho_q(t)), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (4)$$

where L is the Liouville operator, $\rho_q(t)$ is quasiequilibrium distribution function or the relevant distribution function. The function $\rho_q(t)$ is determined from the principle of the Shannon information entropy maximum and therefore has the form

$$\rho_q(t) = \exp\left(-\Phi(t) - \beta\hat{H} - \int da F(a, t)\hat{n}(a)\right). \quad (5)$$

Here $\beta = (k_B T)^{-1}$, \hat{H} is Hamilton function for our system. The Massieu-Planck function $\Phi(t)$ is introduced for normalization function $\rho_q(t)$ to unit. The function $F(a, t)$ is the thermodynamical parameter conjugate to $\langle \hat{n} \rangle$, $da = da_1 da_2 \dots da_g$.

Taking into account the presence δ -function in the quantity \hat{n} (see (3)), we can represent $\rho_q(t)$ in other forms

$$\rho_q(t) = \exp(-\Phi(t) - \beta H - F(\hat{a}, t)), \quad (6)$$

$$\rho_q(t) = \int \exp(-\Phi(t) - \beta H - F(a, t))\hat{n}(a) da. \quad (7)$$

For finding the $F(\hat{a}, t)$ we will use the important self-consistency condition,

$$\langle \hat{n} \rangle_q = \langle \hat{n} \rangle, \quad (8)$$

where we keep in mind that

$$\langle \hat{n} \rangle_q = Tr(\rho_q \hat{n}(a)) = n(a, t), \quad \langle \hat{n} \rangle = Tr(\rho, \hat{n}(a)). \quad (9)$$

In the classical case the symbol Tr denote the integration over are the phase variables. After the calculation $n(a, t)$ with help (9) and (6) we obtain

$$n(a, t) = Tr\left\{\exp(-\Phi - \beta\hat{H} - F(a, t))\hat{n}(a)\right\}, \quad (10)$$

or, taking into account the presence δ -function in $\hat{n}(a)$,

$$n(a, t) = \exp(-\Phi + \Phi_0 - F(a, t)) Tr[\exp(-\Phi_0 - \beta H)\hat{n}(a)], \quad (11)$$

where Φ_0 is the normalized quantity for canonical Gibbs distribution

$$\rho_0 = \exp(-\Phi_0 - \beta\hat{H}). \quad (12)$$

Introducing the quantity W as

$$W(a) = Tr(\rho_0 \hat{n}(a)), \quad (13)$$

one rewrite (11) in the form

$$n(a,t) = \exp(+\Phi_0 - \Phi(t) - F(\hat{a},t))W(a). \quad (14)$$

Then we eliminate the Φ and F from the expressions for ρ_q . In the first place from (14) we find $\exp(-\Phi - F(a,t)) = \exp(\Phi_0)n(a,t)W^{-1}(a)$, secondly the equation (7) we represent in final form

$$\rho_q = \int \rho_0 f(a,t) \hat{n}(a) W^{-1}(a) da, \quad (15)$$

where $f(a,t) = n(a,t) = \text{Tr}(\rho \hat{n})$.

In obtaining the evolution equation for $f(a,t)$ we must use the Liouville equation. Following to Zubarev, we apply the Liouville equation in the form (4). For the function $\Delta\rho = \rho - \rho_q$ equation (4) may be rewritten as follow

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL + \varepsilon \right) \Delta\rho = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + iL \right) \rho_q. \quad (16)$$

Differentiating the ρ_q (15) with respect to the time we obtain

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = - \int \rho_0 \frac{\hat{n}(a)}{W(a)} \text{Tr}(\hat{n} iL \Delta\rho) da - \int \int \rho_0 \frac{\hat{n}(a)}{W(a)} \text{Tr}(\hat{n} iL \rho_q) da. \quad (17)$$

The right-hand side of this relation may be rewritten as result of the action the projection operator P_q defined as

$$P_q \hat{A} = \int \rho_0 w^{-1}(a) \text{Tr}(\hat{A} \hat{n}) \hat{n}(a) da. \quad (18)$$

Then the derivative $\frac{\partial \rho_q}{\partial t}$ is defined by

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = -P_q(iL\rho(t) - P_q(iL\rho_q)). \quad (19)$$

It is very important that the projection operator arises naturally as the result of the evaluation $\frac{\partial \rho_q}{\partial t}$ in contrast to many works where the such operators introduce by «hand» without the clearing up of the necessity and the sense of their introducing. Then we calculate the quantity $iL\rho_q$ with the next result

$$iL\rho_q = \int da \rho_0 \hat{n} iL \hat{a}_j \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{n(a,t)}{w(a)} \right). \quad (20)$$

After above simple algebra the Liouville equation (16) is transformed into

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1 - P_q) iL + \varepsilon \right) \Delta\rho = - \int da \rho_0 x_j(a) \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{f(a,t)}{w(r)} \right), \quad (21)$$

where

$$x_j(a) = (1 - P_q) \hat{n}(a) iL a_j, \quad (22)$$

is the generalized force corresponding to the random force of the Mori theory.

By integrating the equation (21) we obtain the formal solution of the Liouville equation in the next form:

$$\rho(t) = \rho_q(t) - \int da \int dt' \exp[(t'-t)((1-P_q)iL + \varepsilon)] x_j(a) \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{f(a,t)}{w(a)} \right). \quad (23)$$

The function $\rho(t)$ depends from time via the function $f(a,t)$ in the past times. To establish the evolution equation for $f(a,t) = n(a,t)$ it is necessary to average the quantity $\dot{\hat{n}}(a) = iL\hat{n}(a)$ with help of the nonequilibrium distribution function $\rho(t)$ from equation (23).

To this end we write the mean value as

$$\frac{\partial n(a,t)}{\partial t} = \langle \dot{\hat{n}}(a) \rangle = \langle \dot{\hat{n}} \rangle_q + \langle (1-P_q)iL\hat{n} \rangle, \quad (24)$$

or

$$\frac{\partial n(a,t)}{\partial t} = Tr(\rho_q \dot{\hat{n}}(a)) + Tr \rho((1-P_q)iL\hat{n}). \quad (25)$$

The quality $\langle \hat{B} \rangle = \langle (1-P_q)iL\hat{n} \rangle$ is flux for quantity $n(a,t)$. At the evaluation this flux we use expression for $iL\hat{n}(a)$ and the solution the Liouville equation (23). In result we obtain mean flux as

$$\langle B \rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_j} \int da' \int_{-\infty}^t dt' \exp(\varepsilon(t-t')) K_{ji}(a, a', t-t') \frac{\partial}{\partial a'_i} \frac{f(a',t')}{w(a')}, \quad (26)$$

because $\langle B \rangle_q = 0$.

In equation (26) the integral kernels K_{ji} defined as

$$K_{ij}(a, a', t-t') = Tr \left\{ x_j(a) \exp[(t-t')(1-P_q)iL] x_i(a') \right\}. \quad (27)$$

The operator $(1-P_q)iL$ in (27) is so-called reduced evolution operator.

After evaluation the quantity $\langle \dot{\hat{n}} \rangle_q = Tr(\rho_q iL\hat{n}(a))$ we find

$$\langle \dot{\hat{n}} \rangle_q = - \frac{\partial}{\partial a_j} v_j(a) f(a,t), \quad (28)$$

where $v_j(a)$ are represent the average fluxes in the state with fixed values of relevant variables. They forms the drift term. Using expression for $\langle \dot{\hat{n}} \rangle_q$ (28) and for $\langle B \rangle$ (26) we obtain the generalized Fokker-Planck equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a,t)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_j(a)}{\partial a_j} f(a,t) &= \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial a_j} \int da' \int_{-\infty}^t \exp(\varepsilon(t-t')) K_{ji}(a, a', t-t') \frac{\partial}{\partial a'_i} \frac{f(a',t')}{w(a')} dt'. \end{aligned} \quad (29)$$

The equation (28) is the integro-differential equation, which is nonlocal in space and non-Markovian in time.

If the space and the time variations of the function $f(a, t)$ are slow on the scales of microscopic processes the right-side term in equation (28) may be represented in the Markovian approximation and then we obtain the traditional form of the Fokker-Planck equation that is

$$\frac{\partial f(a, t)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} v_j(a) f(a, t) = \sum_{j,i} \frac{\partial}{\partial a_j} D_{ji}(a) W(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{f(a, t)}{W(a)} \right), \quad (29)$$

where

$$D_{ji}(a) = W^{-1}(a) \int_{-\infty}^t da' \int_{-\infty}^t \exp[\varepsilon(t' - t) K_{ji}(a, a')(t - t')] dt' \quad (30)$$

is the kinetic coefficients.

The expression $W(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{f(a, t)}{W(a)} \right)$ may be represent by next manner

$$W(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{f(a, t)}{W(a)} \right) = \frac{f(a, t)}{\partial a_i} - f(a, t) - f(a, t) \frac{\partial \ln W(a)}{\partial a_i}.$$

If $W(a) = \exp[ba_i \hat{a}_i]$ (b is some constant) the last member have the from $-f(a, t) \frac{\partial \ln W(a)}{\partial a_i} = -f(a, t) b \hat{a}_i$.

It is important that the kinetic coefficients in (31) and kernels in (27) are defined in the framework of the statistical theory of nonequilibrium processes.

In conclusion we note that description Fokker-Plank equation from Liouville equation is not meet with to Ito-Stratanovich problem.

REFERENCES

1. M. Doi and S.F. Edwards. Theory of Polymer dynamics. Clarendon Press-Oxford, 1986.
2. M. Warner and E.M. Terentjev. Liquid Crystal Elastomers. Clarendon Press-Oxford, 2006.
3. D. Zubarev, V. Morozov, G. Röpke. Statistical mechanics of Nonequilibrium Processes, Vol. 2, 1997. Akad. Verlag.
4. R. Zwanzig. Nonequilibrium statistical mechanics. Oxford-Univer. Press, 2001.
5. V.B. Nemtsov. Nonequilibrium statistical mechanics of system with orientational order. Minsk, Tekhnologia, 1997 (in Russian).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СВОБODНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

A rigid, perfectly-plastic model of solids is applied to study the dynamic behavior of simply supported or clamped, arbitrarily shaped plates with an internal, free, arbitrarily shaped hole. Governing equations for dynamic behavior are obtained. Operating conditions of possible mechanisms of deformation are analyzed. Analytical expressions for the ultimate loads are obtained.

Изучение динамического поведения элементов конструкций под действием взрывных нагрузок имеет большое значение для оценки степени их повреждаемости. В работе предложена общая методика, которая на основе модели жесткопластического тела позволяет рассчитывать динамическое поведение произвольной криволинейной пластины с произвольным свободным внутренним отверстием. Показано, что пластина может деформироваться по трем схемам. Для каждой схемы получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации в зависимости от уровня нагрузки и геометрических параметров пластины. Методика может быть применена в различных инженерных расчетах.

1. Рассмотрим пластину из идеального жесткопластического материала с произвольным кусочно-гладким выпуклым контуром L_1 , шарнирно опертым или защемленным (рис. 1). В центральной части пластина имеет свободное отверстие с произвольным контуром L_2 . Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки высокой интенсивности $P(t)$. Будем рассматривать нагрузки взрывного типа, которые характеризуются мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(t_0)$ в начальный момент времени t_0 с последующим быстрым их уменьшением. Пластина покоится на вязком основании с коэффициентом сопротивления k . Известные в литературе решения задачи изгиба пластических пластин со свободным отверстием касаются только динамического поведения кольцевых пластин [1 – 3], криволинейных пластин частного вида [4], предельного анализа кольцевых [5] и квадратных пластин [6, 7].

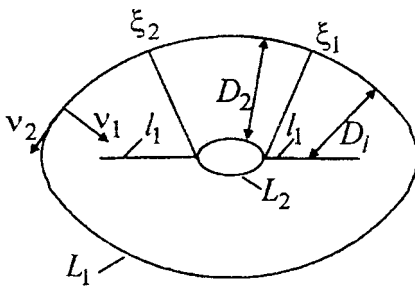


Рис. 1. Схема деформирования 1

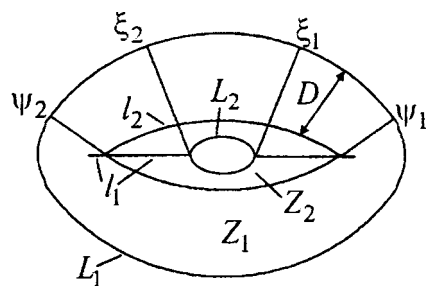


Рис. 2. Схема деформирования 2

Пусть уравнение контура пластины L_1 задано в параметрической форме $x = x_1(\varphi)$, $y = y_1(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Радиус кривизны контура L_1 (за исключением особых точек) равен $R(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1'y_1'' - x_1''y_1')$, где $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$; $(\square)' = \partial(\square)/\partial\varphi$. Для определенности будем рассматривать пластины, симметричные относительно оси x ; геометрические размеры пластины по оси y не больше, чем по оси x , особые точки контура расположены только на

оси x . Мы не будем здесь рассматривать случай очень большого отверстия, когда деформируется не вся пластина и схема квазистатического разрушения будет аналогична локальному механизму, рассмотренному в работе [7] для квадратной пластины с прямоугольным отверстием. Модель жесткопластического тела позволяет рассмотреть и этот случай, но это будет самостоятельное исследование. Поэтому, ссылаясь на работу [7], считаем, что максимальный размер отверстия не больше, чем минимальный размер пластины, помноженный на 0,8.

Введем криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) , связанную с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$x = x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / L(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / L(v_2).$$

Кривые $v_1 = \text{const}$ находятся на расстоянии v_1 от контура L_1 и имеют радиус кривизны $\rho_1 = R(v_2) - v_1$. Прямые линии $v_2 = \text{const}$ перпендикулярны контуру L_1 (радиус кривизны $\rho_2 = \infty$). В этом случае уравнение контура пластины L_1 имеет вид $v_1 = 0$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$. Уравнение отверстия L_2 задано и имеет вид: $v_1 = D_2(v_2)$, $\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2$, $2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1$.

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения P_{\max} возможно существование трех схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки ("низких" нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные ("средних" нагрузках), пластина вращается вокруг контура L_1 с углом поворота α_1 и деформируется в некоторую линейчатую поверхность. При этом, как и в случае отсутствия отверстия [8 – 10], в пластине возможно образование пластической шарнирной линии l_1 , которая может состоять из нескольких участков (см. рис. 1). На l_1 нормальный изгибающий момент равен предельному M_0 . Назовем такую схему деформирования схемой 1. Положение линии l_1 не зависит от времени и определяется формой опорного контура пластины из условия равенства расстояний по нормали к внешнему контуру от контура L_1 до линии l_1 [9, 10]. В силу симметрии пластины шарнир l_1 расположен на оси x и в случае, если на контуре L_1 имеются особые точки, то шарнир l_1 проходит через них. Уравнение шарнира l_1 имеет вид ([8]): $v_1 = D_l(v_2)$, $0 \leq v_2 \leq \pi$, где

$$D_l(v_2) = \left| \frac{y_1(v_2)}{x_1'(v_2)} \right| L(v_2); \quad \min(D_l(0), D_l(\pi)) = \min_{0 \leq v_2 \leq 2\pi} R(v_2).$$

При достаточно высоких значениях P_{\max} , как и в случае кольцевых пластин при так называемых "высоких" нагрузках [1, 3], динамика рассматриваемой пластины может сопровождаться возникновением нестационарной пластической шарнирной замкнутой кривой линии l_2 с нормальным изгибающим моментом равным M_0 . При этом внутренняя часть пластины между линиями l_2 и L_2 движется поступательно и деформируется в линейчатую поверхность. Возможны ситуации, когда шарнир l_2 проходит через шарнир l_1 (схема 2, представленная на рис. 2), и когда линия l_2 окружает шарнир l_1 либо шарнир l_1 не образуется (схема 3, приведенная на рис. 3).

Рассмотрим подробно схему 1. Считаем, как и в случае отсутствия отверстия [9, 10], угол поворота плоскости пластины α_1 не зависит от параметра v_2 .

Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [11]:

$$K = A - N, \tag{1}$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} u^* ds, \quad A = \iint_S [P(t) - k\dot{u}] \dot{u}^* ds, \tag{2}$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m + M_0 \iint_S (|\kappa_1^*| + |\kappa_2^*|) ds. \quad (3)$$

Здесь K , A , N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно; S – площадь пластины; ρ – поверхностная плотность материала пластины; u – прогиб; ds – элемент площади; l_m – линии разрыва угловых скоростей; M_m – изгибающий момент на l_m ; $[\dot{\theta}^*]_m$ – разрыв угловой скорости на l_m ; dl_m – элемент линии l_m ; κ_1 и κ_2 – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. В выражении для N суммирование проводится по всем линиям разрыва угловой скорости, включая границу L_1 пластины. Величины с верхним индексом “*” – допустимые скорости. Точки над символами обозначают производные по времени t .

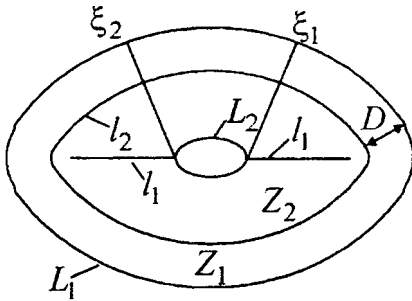


Рис. 3. Схема деформирования 3

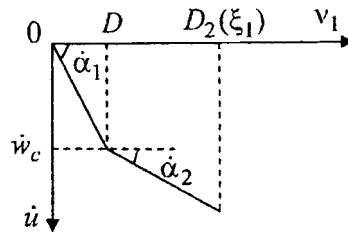


Рис. 4. Скорости прогибов пластины для схем 2, 3

Скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде:

$$(v_1, v_2) \in S: \dot{u}(v_1, v_2, t) = \dot{\alpha}_1(t) v_1. \quad (4)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины равны:

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v_1} = \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{R(v_2) - v_1}. \quad (5)$$

Выражения (2) будут равны:

$$K = \rho \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_S v_1^2 ds, \quad A = P(t) \dot{\alpha}_1^* \iint_S v_1 ds - \dot{\alpha}_1^* k \dot{\alpha}_1 \iint_S v_1^2 ds, \quad (6)$$

$$ds = L \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 dv_2.$$

Мощность внутренних сил (3) вычисляем как в [12], учитывая, что на свободном контуре L_2 нормальный изгибающий момент M_{nn} равен нулю, $M_{nn} = M_0$ на l_1 , $M_{nn} = -(1-\eta)M_0$ на L_1 ($\eta = 0$ при защемлении контура L_1 и $\eta = 1$ при его шарнирном опирании). Тогда имеем

$$N = \dot{\alpha}_1^* M_0 \left[(2-\eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2 \right]. \quad (7)$$

Подставляя полученные выражения (6), (7) в (1), получим уравнение движения для схемы деформирования 1:

$$\left(\rho \ddot{\alpha}_1 + k \dot{\alpha}_1\right) \iint_S v_1^2 ds = P(t) \iint_S v_1 ds - M_0 \left[(2-\eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2 \right]. \quad (8)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}_1(0) = \alpha_1(0) = 0. \quad (9)$$

Предельную нагрузку определим из (8) при учете (9) и $\ddot{\alpha}_1 = 0$. Тогда имеем

$$P_0 = M_0 \left[(2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R} \right) dv_2 \right] / \iint_S v_1 ds. \quad (10)$$

Рассмотрим подробно схему 2 (рис 2). Обозначим область пластины между контурами L_1 и l_2 через Z_1 , а оставшуюся часть – через Z_2 . Области Z_1 и Z_2 являются линейчатыми поверхностями. Поскольку шарнирная линия l_2 движется поступательно, то все ее точки движутся с одинаковой скоростью, которую обозначим через $\dot{w}_c(t)$. Действуя как в работе [8], из непрерывности скоростей на l_2 получим, что нормаль к линии l_2 является также нормалью к контуру L_1 и что расстояние D между L_1 и l_2 не зависит от параметра v_2 . Тогда уравнение шарнира l_2 для схемы 2 имеет вид: $v_1 = D$, $\psi_1 \leq v_2 \leq \psi_2$, $2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1$ ($\psi_1 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \psi_2$). Вследствие непрерывности скоростей на линии l_2 область Z_1 вращается вокруг опорного контура L_1 с одинаковой скоростью, обозначенной через $\dot{\alpha}_1(t)$, на интервалах $\psi_1 \leq v_2 \leq \psi_2$, $2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1$. Как и в [9, 10], считаем, что на остальной части контура L_1 скорость поворота области Z_1 вокруг L_1 также равна $\dot{\alpha}_1(t)$. Также считаем, что область Z_2 вращается вокруг подвижного шарнира l_2 со скоростью $\dot{\alpha}_2(t)$, не зависящей от параметра v_2 . Тогда скорости прогибов пластины для схемы 2 будут представлены в виде:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \in Z_1: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}_1(t)v_1, \\ (v_1, v_2) \in Z_2: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{w}_c(t) + \dot{\alpha}_2(t)(v_1 - D), \end{aligned} \quad (11)$$

где области Z_1 и Z_2 определены так:

$$\begin{aligned} Z_1: \quad & \begin{cases} 0 \leq v_1 \leq D_l(v_2) & \text{при } 0 \leq v_2 \leq \psi_1, \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_2, 2\pi - \psi_1 \leq v_2 \leq 2\pi; \\ 0 \leq v_1 \leq D & \text{при } \psi_1 \leq v_2 \leq \psi_2, 2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1. \end{cases} \\ Z_2: \quad & \begin{cases} D \leq v_1 \leq D_l(v_2) & \text{при } \psi_1 \leq v_2 \leq \xi_1, \xi_2 \leq v_2 \leq \psi_2, \\ & 2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_2, 2\pi - \xi_1 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1; \\ D \leq v_1 \leq D_2(v_2) & \text{при } \xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2, 2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Скорости прогибов пластины в сечении $v_2 = \xi_1$ изображены на рис. 4. Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в области Z_1 имеют вид (5) и в области Z_2 равны:

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \dot{\alpha}_2(t) / [R(v_2) - v_1].$$

Учитывая введенные обозначения, выражения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} K &= \rho \left\{ \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} v_1^2 ds + \iint_{Z_2} [\ddot{\alpha}_2(v_1 - D) + \dot{w}_c] [\dot{\alpha}_2^*(v_1 - D) + \dot{w}_c^*] ds \right\} = \\ &= \rho \left\{ \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} v_1^2 ds + \dot{\alpha}_2^* [\ddot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D)^2 ds + \dot{w}_c \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds] + \right. \\ &\quad \left. + \dot{w}_c^* [\ddot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds + \dot{w}_c \iint_{Z_2} ds] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
A = & \dot{\alpha}_1^* \left[P(t) \iint_{Z_1} v_1 ds - k \dot{\alpha}_1 \iint_{Z_1} v_1^2 ds \right] + \dot{\alpha}_2^* \left\{ P(t) \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds - \right. \\
& - k \left[\dot{w}_c \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds + \dot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D)^2 ds \right] \left. + \dot{w}_c^* \left\{ P(t) \iint_{Z_2} ds - \right. \right. \\
& \left. \left. - k \left[\dot{w}_c \iint_{Z_2} ds + \dot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds \right] \right\} \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Выражение (3) для мощности внутренних сил N представим в виде

$$N = \sum_{i=1}^5 N_i,$$

где N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 – мощности внутренних сил на контуре L_1 , внутри области Z_1 , на линии l_2 , внутри области Z_2 и на шарнире l_1 соответственно:

$$\begin{aligned}
N_1 = (1 - \eta) M_0 \iint_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dL_1 = \dot{\alpha}_1^* (1 - \eta) M_0 \int_0^{2\pi} L dv_2, \quad N_2 = M_0 \iint_{Z_1} \kappa_2^* ds = \dot{\alpha}_1^* M_0 \iint_{Z_1} \frac{L}{R} dv_1 dv_2, \\
N_3 = M_0 \iint_{l_2} [\dot{\theta}^*]_{l_2} dl_2 = 2(\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_2^*) M_0 L \int_{\psi_1}^{\psi_2} L \left(1 - \frac{D}{R}\right) dv_2, \\
N_4 = M_0 \iint_{Z_2} \kappa_2^* ds = \dot{\alpha}_2^* M_0 \iint_{Z_2} \frac{L}{R} dv_1 dv_2, \quad N_5 = M_0 \iint_{l_1} [\dot{\theta}^*]_{l_1} dl_1.
\end{aligned}$$

Для определения N_5 вычислим $[\dot{\theta}]_{l_1}$ и dl_1 . Как и в работе [12],

$$dl_1 = \frac{(1 - D_l / R) L^2}{|x_1'|} dv_2,$$

а $[\dot{\theta}]_{l_1} = \dot{\alpha}_i |x_1'| / L$ в области Z_i ($i = 1, 2$). Тогда

$$\begin{aligned}
N_5 = 2\dot{\alpha}_1^* M_0 \left[\int_0^{\psi_1} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 + \int_{\psi_2}^{\pi} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 \right] + \\
+ 2\dot{\alpha}_2^* M_0 \left[\int_{\psi_1}^{\xi_1} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 + \int_{\xi_2}^{\psi_2} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 \right],
\end{aligned}$$

и полная мощность внутренних сил пластины N определяется выражением

$$N = M_0 \left[\dot{\alpha}_1^* (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2\dot{\alpha}_2^* \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2 \right]. \quad (14)$$

Из (14) видно, что величина N не зависит от расстояния $D(t)$.

Подставляя полученные выражения (12) – (14) в равенство (1) и учитывая независимость функций $\dot{\alpha}_1^*$, $\dot{\alpha}_2^*$, \dot{w}_c^* , получим после небольших преобразований уравнения:

$$(\rho \ddot{\alpha}_1 + k \dot{\alpha}_1) \iint_{Z_1} v_1^2 ds = P(t) \iint_{Z_1} v_1 ds - M_0 (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2, \quad (15)$$

$$\rho \ddot{\alpha}_2 + k \dot{\alpha}_2 = 2M_0 \frac{\left(\iint_{Z_2} ds \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2}{\left(\iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left(\iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}, \quad (16)$$

$$\rho \ddot{w}_c + k \dot{w}_c = P(t) - 2M_0 \frac{\left[\iint_{Z_2} (v_1 - D) ds \right] \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2}{\left(\iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left(\iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}. \quad (17)$$

Условие непрерывности скоростей на границе областей Z_1 и Z_2 дает равенство

$$\dot{\alpha}_1 D = \dot{w}_c. \quad (18)$$

В области Z_1 для ψ_1 и ψ_2 справедливо равенство:

$$D = D_l(\psi_1) = D_l(\psi_2). \quad (19)$$

Система уравнений (15) – (19) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2. Начальные условия имеют вид (9) и

$$\dot{\alpha}_2(0) = \alpha_2(0) = \dot{w}_c(0) = w_c(0) = 0, \quad (20)$$

$$D(0) = D_l(\psi_1(0)), \quad D(0) = D_l(\psi_2(0)). \quad (21)$$

Начальное значение $D(0)$ определяется в зависимости от значения P_{\max} , как это будет показано ниже.

Заметим, что из неравенства Коши-Буняковского для гильбертова пространства интегрируемых функций, определенных на Z_2 , с интегрируемым квадратом и скалярным произведением функций f , g , определенным как $\iint_{Z_2} fg ds$, следует, что, если область Z_2 не вырождена, то выполняется неравенство

$$\left(\iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left(\iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2 > 0, \quad (22)$$

и тогда из (16) получим, что $\rho \ddot{\alpha}_2 + k \dot{\alpha}_2 > 0$ для рассматриваемой схемы 2. При отсутствии отверстия $\xi_1 = \xi_2$ и из (16) при учете начальных условий (20) следует, что $\alpha_2 = 0$, а область Z_2 движется поступательно.

Из условия $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$ определим величину нагрузки P_1 , которая является минимальным значением P_{\max} , при котором реализуется схема 2. Значение функции $D(t)$, соответствующее нагрузке P_1 , обозначим через D^* . Из (15), (16) при условии $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$ при $t \geq 0$ получим

$$\frac{P(t)}{M_0} \iint_{Z_1} v_1 ds = (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 + \frac{2 \left(\iint_{Z_1} v_1^2 ds \right) \left(\iint_{Z_2} ds \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2}{\left(\iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left(\iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}. \quad (23)$$

Дифференцируя (18) по времени и исключая с помощью полученного равенства функции $\ddot{\alpha}_1$, \ddot{w}_c из (15), (17), учитывая начальные условия, имеем

$$\begin{aligned} \frac{P_{\max}}{M_0} \iint_{Z_1} v_1 [D(0) - v_1] ds &= (2 - \eta) D(0) \int_0^{2\pi} L dv_2 - \\ &= \frac{2 \left(\iint_{Z_1} v_1^2 ds \right) \left\{ \iint_{Z_2} [v_1 - D(0)] ds \right\} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2}{\left(\iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left(\iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Считая в (23), (24) $P_{\max} = P_1$ и $D(0) = D^*$, получим, что P_1 определяется из равенства

$$P_1 = M_0(2 - \eta) \frac{\int_0^{2\pi} L dv_2 \iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds}{\left(\iint_{Z_1(D^*)} v_1 ds \right) \left(\iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds \right) - \left(\iint_{Z_1(D^*)} v_1^2 ds \right) \left(\iint_{Z_2(D^*)} ds \right)}, \quad (25)$$

где $Z_i(D^*)$ – области Z_i ($i = 1, 2$) при $D = D^*$, а D^* удовлетворяет уравнению

$$(2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 = F(D^*) \left[2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R} \right) L dv_2 \right], \quad (26)$$

с учетом равенств (19) и где

$$F(D) = \frac{\left(\iint_{Z_1(D)} v_1 ds \right) \left(\iint_{Z_2(D)} v_1 ds \right) - \left(\iint_{Z_1(D)} v_1^2 ds \right) \left(\iint_{Z_2(D)} ds \right)}{\left(\iint_{Z_2(D)} ds \right) \iint_{Z_2(D)} v_1^2 ds - \left(\iint_{Z_2(D)} v_1 ds \right)^2}. \quad (27)$$

Заметим, что поскольку $\iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds \geq D^* \iint_{Z_2(D^*)} ds$ и $D^* \iint_{Z_1(D^*)} v_1 ds \geq \iint_{Z_1(D^*)} v_1^2 ds$, то в (25),

(27) справедливо неравенство

$$\left(\iint_{Z_1(D^*)} v_1 ds \right) \left(\iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds \right) - \left(\iint_{Z_1(D^*)} v_1^2 ds \right) \left(\iint_{Z_2(D^*)} ds \right) \geq 0.$$

Уравнение (24) позволяет определить начальное значение $D(0)$ при $P_{\max} > P_1$ и деформировании по схеме 2.

Рассмотрим подробно схему деформирования 3 (рис. 3). В отличие от схемы 2 в этом случае шарнир l_1 может находиться только в области Z_2 , поэтому схема 3 может реализоваться только для пластин с гладким контуром. Как и в схеме 2, область Z_1 вращается вокруг опорного контура L_1 со скоростью $\dot{\alpha}_1(t)$, а шарнир l_2 находится на расстоянии $D(t)$ от опорного контура L_1 . Область Z_2 движется поступательно со скоростью $\dot{w}_c(t)$ и вращается вокруг шарнира l_2 со скоростью $\dot{\alpha}_2(t)$. Скорости прогибов в пластине представлены в виде (11), где области Z_1 и Z_2 определены следующим образом:

$$Z_1: \quad 0 \leq v_1 \leq D \quad \text{при} \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi; \quad (28)$$

$$Z_2: \quad \begin{cases} D \leq v_1 \leq D_1(v_2) & \text{при} \quad 0 \leq v_2 \leq \xi_1, \quad \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_2, \\ & 2\pi - \xi_1 \leq v_2 \leq 2\pi; \\ D \leq v_1 \leq D_2(v_2) & \text{при} \quad \xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2, \quad 2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1. \end{cases} \quad (29)$$

Уравнения движения пластины получим из (1). Для схемы 3 выражения (2), (3) имеют вид (12) – (14), в которых области Z_1 и Z_2 определены в (28), (29). Таким образом, динамическое поведение пластины при деформировании по схеме 3 описывается уравнениями (15) – (18), полученными для схемы 2, но при вычислении в них интегралов по областям Z_1 и Z_2 , определенным в (28), (29). Начальные условия имеют вид (9), (20). Начальное значение $D(0)$ определяется в зависимости от значения P_{\max} из уравнения (24) при соответствующих областях Z_1 и Z_2 . Нагрузка P_2 , которая является минимальным значением P_{\max} , при котором реализуется схема 3, вычисляется по формуле (25), в которой P_1 заменено на P_2 , а области Z_1 и Z_2 определены в (28), (29) и D^* заменено на D^{**} – значение функции $D(t)$, соответствующее нагрузке P_2 . Величина D^{**} определяется из (26) при замене D^* на D^{**} и соответ-

вующих областях Z_1 и Z_2 . Для схемы 3 также выполняется неравенство (22) и, следовательно, $\rho\ddot{\alpha}_2 + k\dot{\alpha}_2 > 0$ при движении по схеме 3.

Обозначим максимальное значение D для схемы 3 через D_3 . Имеем $D_3 = \min(D_I(0), D_I(\pi))$. Тогда при выполнении условия

$$\min_{\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2} D_2(v_2) \leq D_3 \quad (30)$$

в динамике пластины возможны только схемы 1 и 3 в зависимости от величины нагрузки.

Можно показать, что функция $F(D)$, определенная в (27) для схемы 3 (т.е. при вычислении интегралов по областям Z_1 и Z_2 , определенным в (28), (29)) является монотонно возрастающей при условии

$$\min_{\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2} D_2(v_2) > D_3, \quad (31)$$

Обозначим ее через $F_3(D)$. Из (27) для пластин с гладким контуром следует, если форма и размер отверстия таковы, что выполняются неравенства (31) и

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) Ldv_2 \geq F_c, \quad F_c = (2 - \eta) \int_0^{2\pi} Ldv_2 [2F_3(D_3)]^{-1},$$

тогда при разных уровнях нагрузки в пластине могут реализоваться схемы 1 и 3, а движения по схеме 2 не будет. Если выполняются неравенства (31) и

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) Ldv_2 < F_c, \quad (32)$$

то пластина в зависимости от уровня нагрузки может деформироваться по всем трем схемам.

2. Проведем анализ деформирования пластины, для которой выполняется неравенство (31), (32), и, следовательно, ее геометрические размеры позволяют деформироваться по всем рассмотренным трем схемам.

“Средние” нагрузки: $P_0 < P_{\max} \leq P_1$. Деформирование происходит по схеме 1 и описывается уравнением (8), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и переменной правой частью. Начальные условия имеют вид (9). Момент остановки пластины t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}_1(t_f) = 0. \quad (33)$$

Прогибы в пластине находятся из (4).

“Высокие” нагрузки: $P_1 < P_{\max} \leq P_2$. При $0 \leq t \leq t_*$ (первая фаза) деформирование происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (15) – (19) с начальными условиями (9), (20), (21), (23). Из (15), (16), (24) следует, что $\dot{\alpha}_1(t) > \dot{\alpha}_2(t)$ для схемы 2 при невырожденном отверстии. Поскольку рассматривается взрывная нагрузка, а из (15), (16) получим, что при $P(t) = 0$ будут выполняться равенства $\rho\ddot{\alpha}_1 + k\dot{\alpha}_1 < 0$ и $\rho\ddot{\alpha}_2 + k\dot{\alpha}_2 > 0$, следовательно, в некоторый момент времени t_* выполняется равенство

$$\dot{\alpha}_1(t_*) = \dot{\alpha}_2(t_*), \quad (34)$$

и дальнейшее движение пластины происходит по схеме 1.

При $t_* < t \leq t_f$ (вторая фаза) поведение пластины описывается уравнением (8) при начальных условиях $\dot{\alpha}_1(t_*)$, $\alpha_1(t_*)$, определенных в конце первой фазы движения. Пластина останавливается в момент времени t_f , определяемый из уравнения (33). Все прогибы вычисляются из (11), (4) с учетом обеих фаз движения.

“Сверхвысокие” нагрузки: $P_{\max} > P_2$. При $0 \leq t \leq t_1$ (первая фаза) деформирование происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (15) – (18) с начальными условиями (9), (20), (24) при вычислении интегралов по областям Z_1 и Z_2 , определенным в (28), (29). Поскольку функция $F_3(D)$ монотонно возрастающая, а $P(t)$ взрывная нагрузка, то функция $D(t)$ возрастающая. В некоторый момент времени t_1 выполняется условие $D(t_1) = D_3$, и дальнейшее движение пластины происходит по схеме 2. При $t = t_1$ определяются значения $\dot{\alpha}_1(t_1)$, $\alpha_1(t_1)$, $\dot{\alpha}_2(t_1)$, $\alpha_2(t_1)$, $\dot{w}_c(t_1)$, $w_c(t_1)$.

Вторая и третья фазы движения при $t_1 < t \leq t_*$ и $t_* < t \leq t_f$ происходят аналогично движению в первой и второй фазах при “высоких” нагрузках при соответствующих начальных условиях, определенных в конце первой и второй фаз деформирования. Все прогибы в пластине вычисляются из (11), (4) с учетом всех фаз движения.

Представленные аналитические зависимости для описания механизмов развития пластических зон, времени остановки и остаточных прогибов позволяют построить простую программную процедуру для решения рассматриваемой сложной проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mazalov V. N., Nemirovsky Ju. V. Dynamical bending of rigid-plastic annular plates // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. – 1976. – V. 11, No. 1. – pp. 25 – 39.
2. Jones N. Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically // *Int. J. Solids Structures*. – 1968. – V. 4. – pp. 593 – 603.
3. Mroz Z. Plastic deformations of annular plates under dynamic loads // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. – 1958. – V. 10, No. 4. – pp. 499 – 516.
4. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или жесткой шайбой // *Теоретическая и прикладная механика: Международ. науч.-техн. сб.* – Минск: БНТУ, 2006. – № 21. – С. 60 – 66.
5. Григорьев А. С. О несущей способности кольцевых пластин // *Инженерный сборник*. – 1953 – Т. 16. – С. 177 – 182.
6. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
7. Narasimhan R. K., Verreyya V. Yield line analysis of square slabs with central rectangular openings // *J. Inst. Eng. (India) Civil Eng. Div.* – 1978 – V. 59, No. 2. – pp. 138 – 143.
8. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // *Прикл. механика*. – 2001. – Т. 37, № 12. – С. 68 – 78.
9. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок // *Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та*. – 2002. – № 2. – С. 77 – 85.
10. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора // *Прикл. механика*. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 93 – 101.
11. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
12. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины // *ПМТФ*. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 108 – 120.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ РОЛИК-КОЛЬЦО В УСЛОВИЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ОБЪЕМНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Журавков М. А., Щербаков С.С.

A three-dimensional field of stresses in the roller-ring active system is observed in the present paper. The field was obtained by superposing the field of stresses conditioned by action of normal and tangential elliptically distributed contact forces and by bending of the ring. A significant change of the state of stress in comparison with the solution for the pure contact problem is shown.

В настоящей работе рассматривается напряженно-деформированное состояние силовой системы «ролик-кольцо» (рис. 1, тип В) при контактном взаимодействии ролика и кольца и изгибе последнего.

Тип контакта В согласно работе [3], соответствует простейшей механической модели для системы колесо-рельс. Данная модель предназначена для комплексных износоусталостных испытаний на машинах серии СИ [1]. Здесь ролик (элемент 2) имитирует колесо, а кольцо (элемент 1) – рельс.

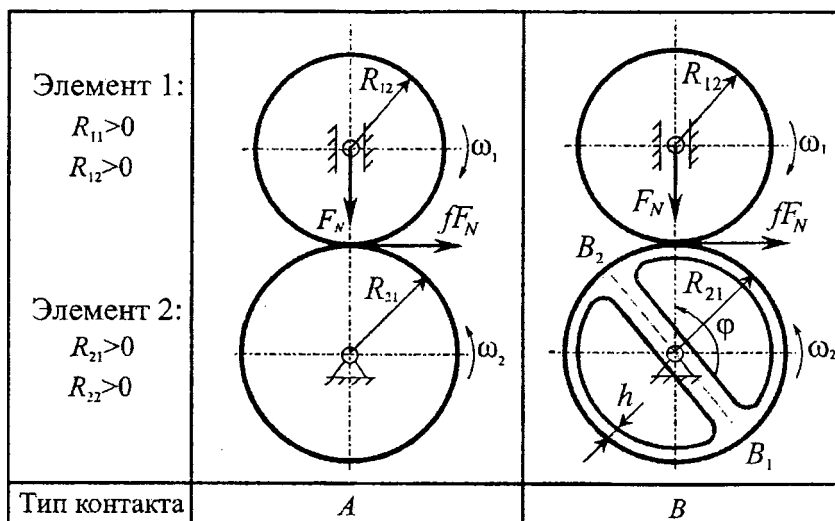


Рис. 1. Схемы подвижного контакта

Принципиальная особенность системы «ролик-кольцо» (таблица 1, тип В) по сравнению с соответствующей традиционной контактной задачей (таблица 1, тип А) для системы ролик/ролик состоит в том, в зоне взаимодействия кольца с роликом напряженное состояние обусловлено как полем контактных напряжений, так и полем напряжений вследствие изгиба. Будем называть напряженно-деформированное состояние в зоне взаимодействия кольца с роликом сопряженным напряженно-деформированным состоянием для того, чтобы подчеркнуть его особенность.

Основные положения

При исследовании сопряженного напряженного состояния рассматриваемой системы будем исходить из следующих основных положений.

1. Приложенная к силовой системе «ролик-кольцо» нагрузка F_N , вызывает в системе как локальные контактные деформации, так и объемное деформирование (изгиб) кольца – они возбуждаются одновременно и в единой области.

2. В силу того, что в области контакта взаимодействующие тела (ролик и кольцо) ограничены поверхностями второго порядка, считается применимой теория Герца. Таким обра-

зом, в общем случае площадка контакта $S(x, y)$ имеет форму эллипса, а усилия $p(x, y)$ на площадке контакта распределены по эллиптическому закону [4, 5].

3. Размеры и площадь эллипса контакта в исследуемой системе дополнительно формируются за счет изменения главной кривизны кольца вследствие его изгиба.

4. Связь между напряжениями и деформациями в области контакта линейная.

5. Изгибные напряжения в кольце рассчитываются в соответствии с теорией изгиба плоского кривого бруса [6].

В [2, 7] был предложен сравнительно простой метод описания нагруженности системы «ролик-кольцо». В основу метода положена гипотеза о том, что нагрузка F_N может быть разделена на контактную F_c и изгибную F_b составляющие:

$$F_N = F_c + F_b. \quad (1)$$

Способ определения величин F_c и F_b основан на следующем феноменологическом подходе. Под действием внешней сосредоточенной нагрузки F_N , передаваемой от ролика к кольцу, в последнем, вследствие упругого деформирования, возникает внутренний изгибающий момент M_b , который является, по существу, «моментом противодействия» внешней нагрузке со стороны кольца. Условие равновесия, следовательно, будет

$$F_N = F_c + \varphi(M_b), \quad (2)$$

где F_c – нескомпенсированная моментом M_b часть приложенной нагрузки F_N , т. е. ее контактная составляющая, а функция

$$\varphi(M_b) = F_b. \quad (3)$$

представляется как некоторая эквивалентная изгибная (поперечная) нагрузка, которая и обеспечивает условие равновесия (2) или (1).

Соотношение между составляющими F_c и F_b приложенной нагрузки F_N в общем случае зависит от объемной жесткости кольца El_z/l (E – модуль упругости материала кольца, I_z – момент инерции сечения, l – длина дуги кольца от точки приложения контактной нагрузки до ближайшей опоры) или, с точностью до постоянной k , от соотношения определяющих размеров кольца h/l , где h – толщина кольца. Постоянная k , следовательно, отражает, главным образом, влияние жесткости материала на формирование составляющих F_c и F_b .

Принимается, что разделение составляющих F_c и F_b описывается экспоненциальной функцией

$$F_c = F_N \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{lk}\right) \right), \quad F_b = F_N \exp\left(-\frac{h}{lk}\right), \quad (4)$$

с сохранением условия (1). Функция (4) считается справедливой в интервале

$$0 \leq \frac{h}{lk} \leq \infty. \quad (5)$$

Когда $l \rightarrow \infty$, то случай $h/lk = 0$ означает, что кольцо трансформируется в брус бесконечной длины, для которого $F_N = F_b$, а $F_c = 0$. Когда же $l \rightarrow 0$, то случай $h/lk = \infty$ означает, что кольцо стягивается в ролик (или полукольцо – в половину ролика), для которого $F_N = F_c$, а $F_b = 0$.

Общий анализ напряженного состояния

Сопряженное напряженное состояние в любой точке $M(x, y, z)$ силовой системы «ролик-кольцо» будем определять из общего соотношения [7, 9, 10]

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(t)} + \sigma_{ij}^{(b)}, \quad i, j = x, y, z, \quad (6)$$

где $\sigma_{ij}^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(t)}$, $\sigma_{ij}^{(b)}$ – напряжения, вызванные соответственно нормальной контактной, касательной контактной и неконтактной нагрузками.

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонент напряжений в точках оси z и в некоторых точках поверхности контакта [4, 5]. Определение всех компонент напряжения в любой точке по-

лупространства в точной постановке затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

Напряжения $\sigma_{ij}^{(n)}$ в формуле (6) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0, \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке $M(x, y, z)$ при $z < 0$ полупространства при действии на поверхность нормальных усилий $p(x, y)$ проводится численными методами с использованием решения задачи Буссинеска $\sigma_{ij}^{(B)}$ о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [7, 8]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Необходимо учесть, что в точке приложения единичной нагрузки напряжения $\sigma_{ij}^{(B)}$ не определены. Это приводит к тому, что для точек $z = 0$ поверхности полупространства расчет в соответствии с (8) не сходится.

Для расчета напряжений в любой точке $M(x, y, 0)$ поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий $p(x, y)$ проводится в соответствии со следующей общей формулой [7, 9]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (9)$$

где $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$ – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области $S(x, y)$.

Расчет напряженного состояния $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий $q(x, y)$, также выполняется численными методами с использованием решения задачи Черрути для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство $\sigma_{ij}^{(C)}$ [7, 9]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (10)$$

Напряжения от внеконтактных нагрузок будем определять, применяя теорию, подходящую для конкретной геометрии и граничных условий взаимодействующих тел [6, 10]:

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(M)} + \sigma_{ij}^{(N)} + \sigma_{ij}^{(Q)}, \quad (11)$$

где индексы M , N и Q соответствуют внутренним моменту, продольному и поперечному усилиям.

Сопряженное напряженное состояние, определяемое выражением (6), с учетом (7)–(11) описывается моделью [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\sigma_{ij}^{(hs)} \vee_z \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[\iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \vee_z \sigma_{ij}^{(S)}(x, y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(N)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x, y, z). \end{aligned} \quad (12)$$

Приведем численный пример реализации (12).

Рассмотрим область кольца, непосредственно примыкающую к точке первоначального контакта, при $\varphi = \pi/2$ (посередине кольца). Зададим локальную систему координат x, y, z с началом отсчета в точке первоначального контакта ролика и кольца. Ось z направим по внешней нормали, а ось x – по касательной к поверхности кольца в направлении действия силы трения. Ось y направим перпендикулярно плоскости xz . Тогда в силу соотношения $k_{11} + k_{22} > k_{12} + k_{21}$ большая полуось эллипса контакта будет сонаправлена с осью x .

В соответствии с формулами (12) при $k = 0,1$ и одновременном действии в системе сил $F_c = 412,3$ Н и $F_b = 587,7$ Н получим распределения соответствующих напряжений, представленные на рис. 2, 3. Значения напряжений отнесены к наибольшему значению давления в центре контакта $p_0^c = 3,511 \cdot 10^9$ Па, а размеры расчетной области к максимальному значению большей полуоси эллипса контакта $a_c = 4,867 \cdot 10^{-4}$ м ($b/a = 0,574$) при $F_c = 1000$ Н и $F_b = 0$ Н. В трехмерной области контакта ролика и кольца напряжения $\sigma_{yy}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = \sigma_{yz}^{(b)} = 0$, поэтому изменение напряженного состояния в данной области кольца по сравнению с чисто контактным напряженным состоянием (ролика) происходит в основном за счет напряжений $\sigma_{xx}^{(b)}$ (рис. 2, 3). Распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{xx}^{(n+\tau+b)} = \sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)} + \sigma_{xx}^{(b)}$ в кольце в непосредственной близости от контактной поверхности в наибольшей степени определяются напряжениями $\sigma_{xx}^{(n)}$ однако уже на глубине $z = 0,5a$ заметно влияние напряжений $\sigma_{xx}^{(\tau)}$ разного знака и сжимающих напряжений $\sigma_{xx}^{(b)}$ (рис. 2, 3). Величина напряжений $\sigma_{xx}^{(n+\tau+b)}$ за счет действия $\sigma_{xx}^{(b)}$ увеличивается примерно на 25% по сравнению с $\sigma_{xx}^{(n+\tau)}$ (рис.2).

На рис. 4 показано существенное различие между распределениями контактных и сопряженных деформаций в кольце при $F_c = 412,3$ Н, $F_b = 587,7$ Н ($\psi = \pi/2$), $a_c = 4,867 \cdot 10^{-4}$ м, $b/a = 0,574$.

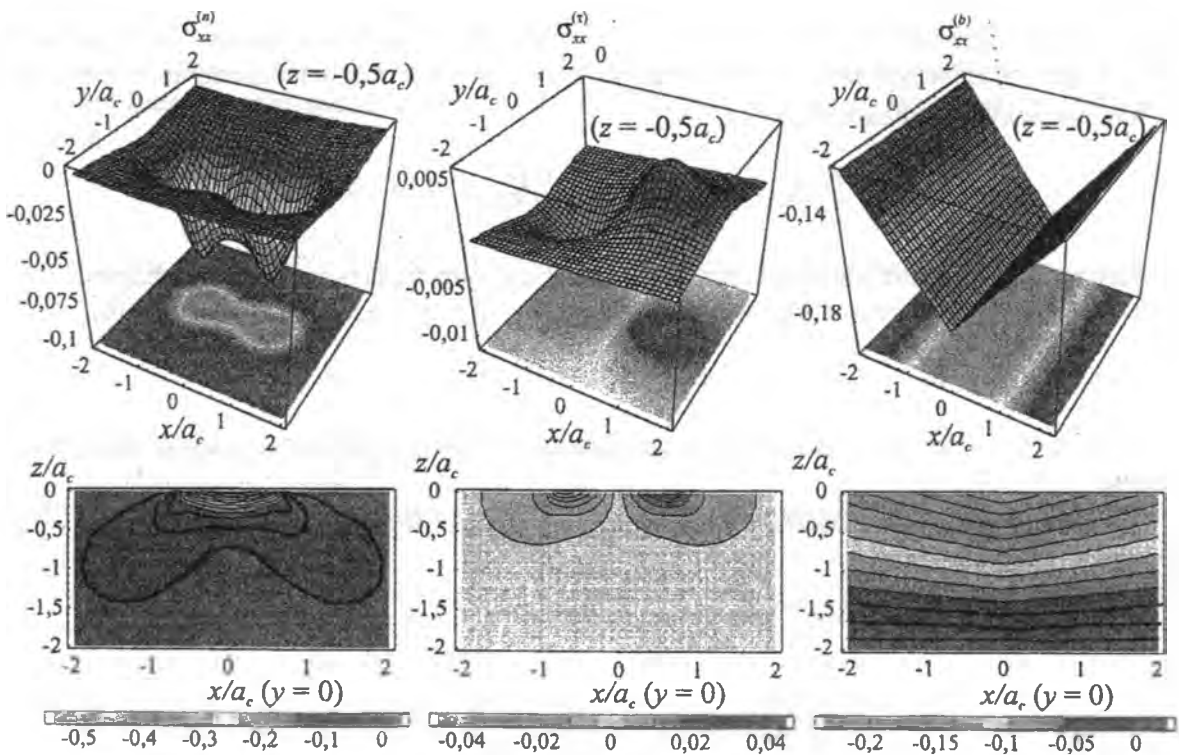


Рис. 2. Распределение напряжений $\sigma_{xx}^{(n)}$, $\sigma_{xx}^{(\tau)}$, $\sigma_{xx}^{(b)}$

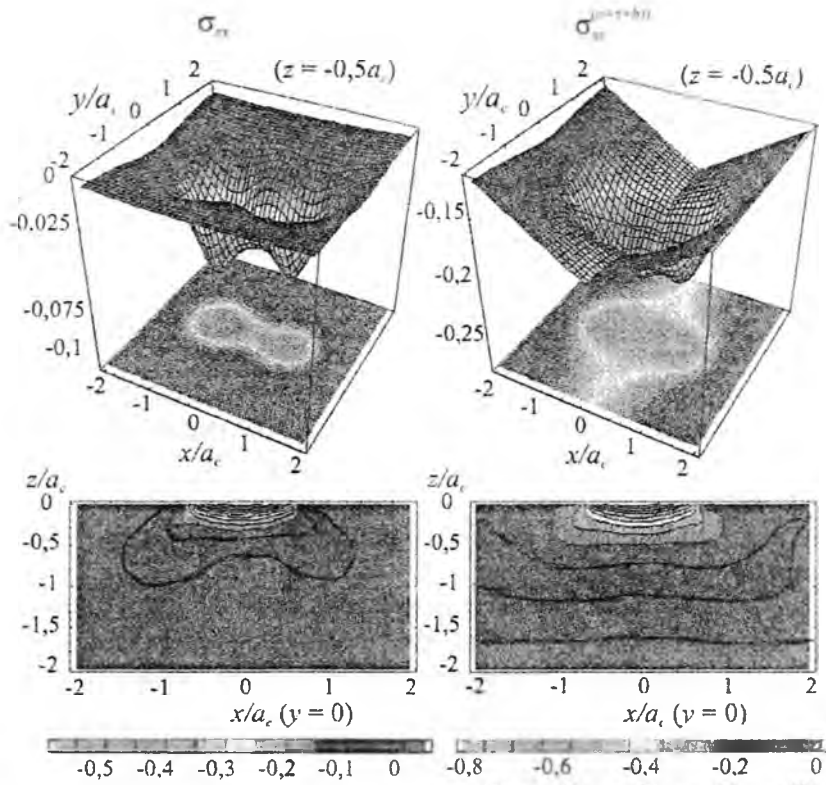


Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)} + \sigma_{xx}^{(h)}$

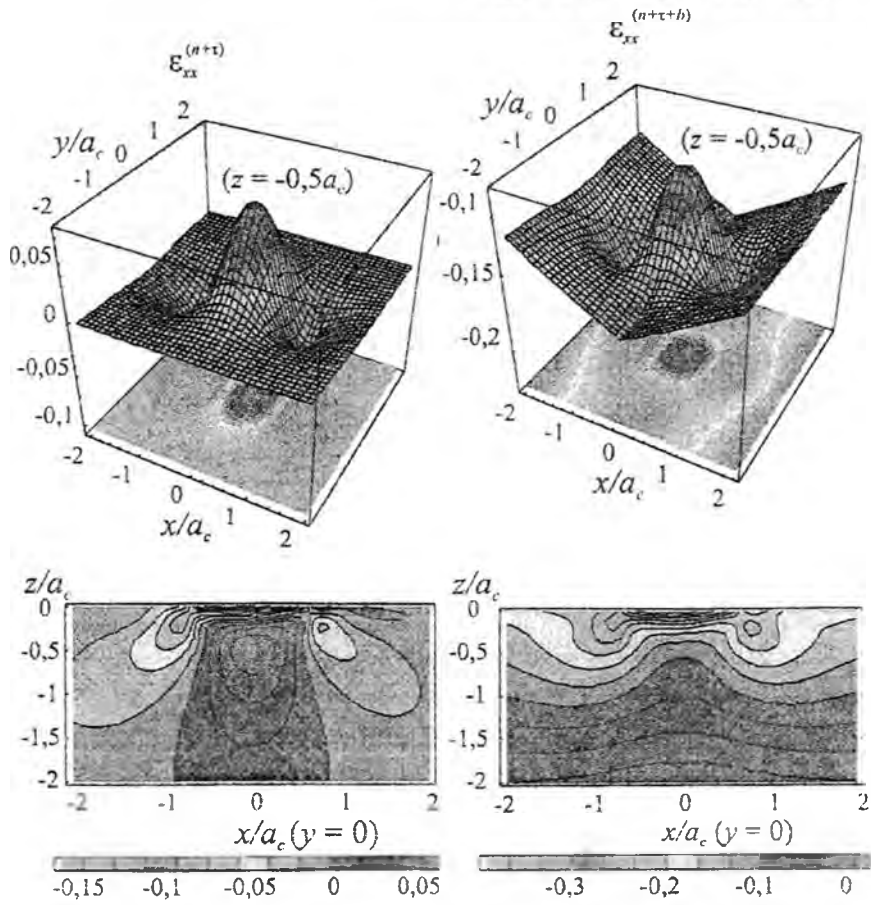


Рис. 4. Распределение деформаций $\epsilon_{xx}^{(n+\tau)} E / p_0^c$, $\epsilon_{xx}^{(n+\tau+h)} E / p_0^c$

Таким образом, установлено отличие сопряженного напряженно-деформированного состояния системы «ролик-кольцо» (12) как от контактного напряженно-деформированного состояния, так и рассчитанного в соответствии с теорией изгиба. Анализ показывает, что это различие, в зависимости от условий нагружения, может достигать 1,5–2 раз [7]. Это означает, что неучет сопряженного напряженного состояния при проектировании конкретной силовой системы может привести к неверной оценке ее работоспособности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский Л. А. Основы трибофатики: – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т.1. – 246 с.; Т.2. – 234 с.
2. Сосновский Л. А., Щербаков С. С. О классификации контактных задач применительно к силовым системам машин / Современные методы проектирования машин. Сборник научных трудов. Вып. в 7-ми т. / Под общ. ред. П. А. Витязя. – Мн.: УП "Технопринт", 2004. – Т.4. – С. 48–58.
3. Тюрин С. А. и др. Новые способы испытаний применительно к системе колесо/рельс // Вестник БелГУТа. – 2004. – С. 54–64.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
5. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958. – Т.1. – С. 387–486.
6. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
7. Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения: – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
8. Журавков М. А., Захарик А. М., Босяков С.М., Щербаков С.С. Компьютерный анализ напряженно-деформированного состояния в зоне эллиптической площадки контакта тел при качении применительно к модели зубчатых зацеплений.// Трение и износ, 2006. -№1. –С.12-16.
9. Журавков М. А., Щербаков С.С. Исследование опасных объемов при решении контактной задачи для системы ««ролик-кольцо»» / Тр. 5-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2005), 3–7 октября 2005 г., Иркутск (Россия) / отв. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2005. –Т. 1. – С. 375–390.
10. Сосновский Л. А., Сенько В. И., Щербаков С. С., Залесский Н. А., Исследование напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс // Вестник БелГУТа, 2005. – № 2. – С. 18–41.

УСТРАНЕНИЕ ПЛЕОНАЗМОВ В ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В.

The general solution that contains two arbitrary functions of longitudinal coordinates and time has been constructed for the elastic isotropic area comprising two parallel planes. The equilibrium equations within the area and homogeneous shearing stresses on the planes $z=\pm h$ are accomplished identically.

Изучению лишних элементов (плеоназмов) в общих решениях статической теории упругости изотропного тела посвящены работы П.Ф. Папковича, М.Г. Слободянского, Л.Н. Тер-Мкртчяна, И.С. Сокольниковой, Р. Юбэнкса и Э. Штернберга, А.С. Малиева, Э.Н. Байды. Предметом внимания указанных авторов являлись часто встречающиеся в приложениях решения Гродского-Папковича и Буссинеска-Галеркина.

Справедливости ради следует сказать о существующей до сих пор противоречивости в выводах исследователей, объясняющуюся исключительной сложностью вопроса, требующего аккуратных рассуждений и тонких математических средств. Использование в данной работе операторного метода позволило получить новые результаты для эластокинетики. Совпадение результатов с результатами полученными ранее другим способом позволяют говорить об их достоверности.

Рассмотрим задачу динамической теории упругости для области, ограниченной двумя бесконечными параллельными плоскостями.

Представим систему дифференциальных уравнений в перемещениях в операторной форме записи [2]

$$\begin{aligned}\Delta_2^2 u_1 + (\gamma - 1)\partial_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) &= 0, \\ \Delta_2^2 u_2 + (\gamma - 1)\partial_2(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) &= 0, \\ \Delta_2^2 u_3 + (\gamma - 1)\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\Delta_2^2 = \Delta^2 - c_2^{-2}\partial_t^2$; $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$;

$\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$; λ, μ – коэффициенты Ламе; c_2 – скорость распространения в упругом теле поперечной волны.

Решение системы уравнений (1) запишем в виде

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma\Delta_1^2\varphi_1 - (\gamma - 1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \\ u_2 &= \gamma\Delta_1^2\varphi_2 - (\gamma - 1)\partial_2(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \\ u_3 &= \gamma\Delta_1^2\varphi_3 - (\gamma - 1)\partial_3(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3).\end{aligned}\quad (2)$$

где $\Delta_1^2 = \Delta^2 - c_1^{-2}\partial_t^2$, c_1 – скорость распространения в упругом теле продольной волны.

Функции $\varphi_i(x, y, z, t)$ $i=1,2,3$ должны удовлетворять уравнению $\Delta_1^2\Delta_2^2\varphi_i = 0$. Для удобства анализа решения разобьем исходную задачу на симметричную по нормальным и кососимметричную по касательным напряжениям (Задача А) и на симметричную по касательным и кососимметричную по нормальным напряжениям (Задача В) относительно срединной плоскости.

В задаче А полагаем

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= [A_1 \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + B_1 \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t), \\ \varphi_2 &= [A_2 \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + B_2 \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t), \\ \varphi_3 &= [A_3 \sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + B_3 \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t).\end{aligned}\quad (3)$$

где $\nabla_1 = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2 - c_1^{-2} \partial_t^2}$, $\nabla_2 = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2 - c_2^{-2} \partial_t^2}$; A_i, B_i ($i=1,2,3$) – подлежащие определению операторные коэффициенты; $f(x, y, t)$ – произвольная аналитическая функция; звездочкой обозначено операторное произведение [1].

Можно непосредственно убедиться, что в этом случае равенство $\Delta_1^2 \Delta_2^2 \varphi_i = 0$ ($i=1,2,3$) будут выполняться тождественно. Далее в (3) определяем вид операторных сомножителей исходя из касательных однородных граничных условий для напряжений

$$\begin{aligned}\mu^{-1} \sigma_{31} &= \gamma \Delta_1^2 (\partial_3 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_3) - 2(\gamma - 1) \partial_1 \partial_3 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \\ \mu^{-1} \sigma_{32} &= \gamma \Delta_1^2 (\partial_3 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_3) - 2(\gamma - 1) \partial_2 \partial_3 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \\ \mu^{-1} \sigma_{33} &= 2\gamma \Delta_1^2 \partial_3 \varphi_3 - ((\gamma - 2) \nabla_2^2 - 2(\gamma - 1) \partial_3^2) (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3).\end{aligned}$$

Для операторных коэффициентов предварительно устанавливаем

$$\begin{aligned}\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 &= (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \cos(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) + \\ &+ (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3) \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ \gamma \Delta_1^2 (\partial_3 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_3) &= (\gamma - 1) c_2^{-2} \partial_t^2 (\partial_1 B_3 - \nabla_2 B_1) \sin(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ \gamma \Delta_1^2 (\partial_3 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_3) &= (\gamma - 1) c_2^{-2} \partial_t^2 (\partial_2 B_3 - \nabla_2 B_2) \sin(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ 2\gamma \Delta_1^2 \partial_3 \varphi_3 &= 2(\gamma - 1) c_2^{-2} \partial_t^2 \nabla_2 B_3 \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ \partial_1 \partial_3 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3) &= -\partial_1 \nabla_1 (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \sin(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_2) - \\ &- \partial_1 \nabla_2 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3) \sin(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ \partial_2 \partial_3 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3) &= -\partial_2 \nabla_1 (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \sin(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) - \\ &- \partial_2 \nabla_2 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3) \sin(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ ((\gamma - 2) \nabla_2^2 - 2(\gamma - 1) \partial_3^2) (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3) &= (\gamma - 1) (\nabla_2^2 + \nabla^2) (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3), \\ \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2) - 2(\gamma - 1) \nabla_2^2 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3) \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2).\end{aligned}$$

Полагая первый плеоназм равным $B_2 = \partial_1^{-1} \partial_2 B_1$, после преобразований получим

$$\begin{aligned}\mu^{-1} (\gamma - 1)^{-1} \sigma_{31} &= 2\partial_1 \nabla_1 (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \sin(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) + \\ &+ \partial_1 (\nabla_2^2 + \nabla^2) (\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3) \sin(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ \mu^{-1} (\gamma - 1)^{-1} \sigma_{32} &= 2\partial_2 \nabla_1 (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \sin(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) + \\ &+ \partial_2 (\nabla_2^2 + \nabla^2) (\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3) \sin(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2), \\ \mu^{-1} (\gamma - 1)^{-1} \sigma_{33} &= (\nabla_2^2 + \nabla^2) (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \cos(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) + \\ &+ 2\nabla^2 \nabla_2 (\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3) \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2).\end{aligned}$$

В соответствии с однородными граничными условиями $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$, находим второй

плеоназм $\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3 = -\frac{\nabla_2^2 + \nabla^2}{2\nabla_1} (\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3)$.

Возвращаясь к рядам перемещений, получим:

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma \nabla_1 \varphi_1 - (\gamma - 1) \partial_1 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3) = \\ &= (\gamma - 1) (c_2^{-2} \partial_t^2 B_1 \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2) - \partial_1 (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \cos z \nabla_1 \sin^{-1}(h \nabla_1) - \\ &- \partial_1 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3) \cdot \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2)) = (\gamma - 1) (\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3) \partial_1 \times \\ &\times \left[\frac{\nabla_2^2 + \nabla^2}{2\nabla_1} \cos(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) - \nabla_2 \cos(z \nabla_2) \sin^{-1}(h \nabla_2) \right].\end{aligned}$$

Аналогично находим:

$$u_2 = (\gamma - 1)(\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3) \partial_2 \left(\frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{2\nabla_1} \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) - \nabla_2 \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2) \right),$$

$$u_3 = (\gamma - 1)(\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3) \left(-\frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{2} \sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + \nabla^2 \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2) \right).$$

После сокращения на один и тот же операторный множитель $\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\nabla_2 \partial_1^{-1} B_1 + B_3)$, окончательно устанавливаем

$$u_1 = \partial_1 \left(\frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{\nabla_1} \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) - 2\nabla_2 \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2) \right) * f(x, y, t),$$

$$u_2 = \partial_2 \left(\frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{\nabla_1} \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) - 2\nabla_2 \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2) \right) * f(x, y, t),$$

$$u_3 = (\nabla_2^{-2} + \nabla^2) \sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + 2\nabla^2 \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2) * f(x, y, t).$$

В задаче В полагаем

$$\varphi_1 = [D_1 \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) + E_1 \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2)] * g(x, y, t),$$

$$\varphi_2 = [D_2 \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) + E_2 \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2)] * g(x, y, t),$$

$$\varphi_3 = [D_3 \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) + E_3 \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2)] * g(x, y, t).$$

По аналогии с предыдущим пунктом при выполнении граничных условий для лишних элементов (плеоназмов) получаем соответствия соотношения

$$E_2 = \partial_1^{-1} \partial_2 E_1 \text{ и } \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 - \nabla_1 D_3 = \frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{2\nabla_1} (\nabla_2 \partial_1^{-1} E_1 - E_3).$$

Ряды перемещений в этом случае примут вид

$$u_1 = \partial_1 \left(\frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{\nabla_1} \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - 2\nabla_2 \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2) \right) * g(x, y, t),$$

$$u_2 = \partial_2 \left(\frac{\nabla_2^{-2} + \nabla^2}{\nabla_1} \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - 2\nabla_2 \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2) \right) * g(x, y, t),$$

$$u_3 = (\nabla_2^{-2} + \nabla^2) \cos(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - 2\nabla^2 \cos(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2) * g(x, y, t).$$

Полное перемещение равно сумме рядов перемещений задач А и В. Нормальное напряжение в задаче А имеет вид:

$$\mu^{-1} \sigma_{33} = -\frac{(\nabla_2^{-2} + \nabla^2)^2}{\nabla_1} \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + 4\nabla^2 \nabla_2 \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2).$$

В задаче В:

$$\mu^{-1} \sigma_{33} = -\frac{(\nabla_2^{-2} + \nabla^2)^2}{\nabla_1} \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) + 4\nabla^2 \nabla_2 \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2).$$

В результате построено операторное решение первой основной динамической задачи теории упругости, удовлетворяющее условию и $\sigma_{13}|_{z=\pm h} = \sigma_{23}|_{z=\pm h} = 0$ и содержащей две производные функции $f(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости - М. Издательство «Мир», 1975-672с.
2. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Техно-принт», 2003-101с.

**РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ МЕТОДОМ УСТРАНЕНИЯ ЛИШНИХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В.

The general solution constructed satisfies identically the equilibrium equations within the area for the problem considered. The conditions of absence for longitudinal transferences on the planes $z=\pm h$ are accomplished identically.

Рассмотрим вторую основную задачу динамической теории упругости для области, ограниченной двумя параллельными плоскостями. Система дифференциальных уравнений в перемещениях имеет вид {1}

$$\begin{aligned}\Delta_2^2 u_1 + (\gamma - 1) \partial_1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) &= 0, \\ \Delta_2^2 u_2 + (\gamma - 1) \partial_2 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) &= 0, \\ \Delta_2^2 u_3 + (\gamma - 1) \partial_3 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\Delta_2^2 = \Delta^2 - c_2^{-2} \partial_t^2$; $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$;

$\gamma = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$; λ, μ – коэффициенты Ламе; c_2 – скорость распространения в упругом теле поперечной волны.

Решение системы уравнений (1) запишем в виде

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma \Delta_1^2 \varphi_1 - (\gamma - 1) \partial_1 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \\ u_2 &= \gamma \Delta_1^2 \varphi_2 - (\gamma - 1) \partial_2 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \\ u_3 &= \gamma \Delta_1^2 \varphi_3 - (\gamma - 1) \partial_3 (\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3).\end{aligned}\quad (2)$$

где $\Delta_1^2 = \Delta^2 - c_1^{-2} \partial_t^2$, c_1 – скорость распространения в упругом теле продольной волны.

Как и в первой основной динамической задаче теории упругости для задачи А полагаем

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= [A_1 \cos(z \nabla_1) \cos^{-1}(h \nabla_1) + B_1 \cos(z \nabla_2) \cos^{-1}(h \nabla_2)] * f(x, y, t), \\ \varphi_2 &= [A_2 \cos(z \nabla_1) \sin^{-1}(h \nabla_1) + B_2 \cos(z \nabla_2) \cos^{-1}(h \nabla_2)] * f(x, y, t), \\ \varphi_3 &= [A_3 \sin(z \nabla_1) \cos^{-1}(h \nabla_1) + B_3 \sin(z \nabla_2) \cos^{-1}(h \nabla_2)] * f(x, y, t).\end{aligned}\quad (3)$$

Далее в (3) определяем вид операторных сомножителей исходя из однородных краевых условий для перемещений

Предварительно устанавливаем

$$\begin{aligned}\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 &= (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \cos(z \nabla_1) \cos^{-1}(h \nabla_1) + (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3) \cos^{-1}(h \nabla_2), \\ \gamma \Delta_1^2 \varphi_1 &= (\gamma - 1) c_2^{-2} \partial_t^2 B_1 \cos(z \nabla_2) \cos^{-1}(h \nabla_2) * f(x, y, t), \\ \gamma \Delta_1^2 \varphi_2 &= (\gamma - 1) c_2^{-2} \partial_t^2 B_2 \cos(z \nabla_2) \cos^{-1}(h \nabla_2) * f(x, y, t), \\ \gamma \Delta_1^2 \varphi_3 &= (\gamma - 1) c_2^{-2} \partial_t^2 B_3 \cos(z \nabla_2) \cos^{-1}(h \nabla_2) * f(x, y, t).\end{aligned}$$

Полагая $B_2 = \partial_1^{-1} \partial_2 B_1$, получим операторные соотношения

$$\begin{aligned}
(\gamma - 1)^{-1} u_1 &= -\partial_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \cos(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - \nabla_2(\nabla_2 B_1 + \partial_1 B_3) \cos(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2), \\
(\gamma - 1)^{-1} u_2 &= -\partial_2(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_3 + \nabla_1 A_3) \cos(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - \frac{\partial_2}{\partial_1} \nabla_2(\nabla_2 B_1 + \partial_1 B_3) \cos(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2), \\
(\gamma - 1)^{-1} u_3 &= \nabla_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \nabla_1 A_3) \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) + \frac{\nabla^2}{\partial_1} (\nabla_2 B_1 + \partial_1 B_3) \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2).
\end{aligned}$$

Считая $\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 = -\frac{\nabla_2}{\partial_1} (\nabla_2 B_1 + \partial_1 B_3)$ и сокращая на $\frac{\nabla^2}{\partial_1} (\nabla_2 B_1 + \partial_1 B_3)$ получим

$$\begin{aligned}
u_1 &= \partial_1 [\cos(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - \cos(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t), \\
u_2 &= \partial_2 [\cos(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) - \cos(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t), \\
u_3 &= \left[-\nabla_1 \sin(z\nabla_1) \cos^{-1}(h\nabla_1) + \frac{\nabla^2}{\nabla_2} \sin(z\nabla_2) \cos^{-1}(h\nabla_2) \right] * f(x, y, t).
\end{aligned}$$

Полагая в задаче В

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= [D_1 \sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + E_1 \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * g(x, y, t), \\
\varphi_2 &= [D_2 \sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + E_2 \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * g(x, y, t), \\
\varphi_3 &= [D_3 \sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) + E_3 \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * g(x, y, t).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом определим перемещения в этом случае

$$\begin{aligned}
u_1 &= \partial_1 [\sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) - \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t), \\
u_2 &= \partial_2 [\sin(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) - \sin(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2)] * f(x, y, t), \\
u_3 &= \left[\nabla_1 \cos(z\nabla_1) \sin^{-1}(h\nabla_1) - \frac{\nabla^2}{\nabla_2} \cos(z\nabla_2) \sin^{-1}(h\nabla_2) \right] * f(x, y, t).
\end{aligned}$$

Полное перемещение равно сумме перемещений задач А и В. В результате построено операторное решение второй основной динамической задачи теории упругости, удовлетворяющее условию и $u_1|_{z=\pm h} = u_2|_{z=\pm h} = 0$ содержащее две произвольные аналитические функции. Уравнения равновесия внутри области удовлетворяются тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий, В. Теория упругости. — М.: Издательство «Мир», 1975. — 672 с.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.

Один из этапов решения задач термоупругости методом граничных элементов – определение граничных значений напряжений [1, 2]. При вычислении напряжений в граничных точках рассматриваемой области могут быть использованы два подхода. Один из способов заключается в том, что используются интегральные формулы, полученные из интегральных представлений для напряжений предельным переходом точки x из области V на границу S . Этот подход является достаточно трудоемким, т.к. требуется вычисление интегралов (в том числе и сингулярных) по всей границе и по времени. Другой подход состоит в том, что тензор напряжений в узловых точках элементов конструкции вычисляется при помощи закона Дюгамеля-Неймана по значениям вектора поверхностных сил и касательной деформации. При этом закон Дюгамеля-Неймана используется в местной системе координат, связанной с касательными и нормальными направлениями на элементе. Для вычисления напряжений в граничных точках в данной работе используется второй подход.

Введем в граничной точке x на элементе местную систему координат, определенную ортогональными базисными векторами ($\tau(x)$, $n(x)$ в случае плоской задачи), где $n(x)$ – вектор внешней нормали в точке x , $\tau(x)$ – касательный вектор (рис. 1).

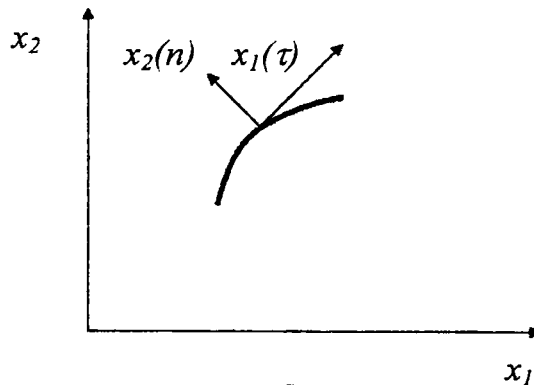


Рис. 1

В местной системе координат часть компонент тензора напряжений определяется по известным значениям поверхностных усилий. Остальные компоненты тензора напряжений находятся через касательные деформации и компоненты поверхностных сил. В двумерных задачах поверхностные усилия $P'_i(x, t)$ и напряжения $\sigma'_{ij}(x, t)$, отнесенные к местной системе координат в точке x рассматриваемого элемента, связаны между собой соотношением:

$$\sigma'_{ij}(x, t) = P'_i(x, t). \quad (1)$$

Исключая из закона Дюгамеля-Неймана [3]

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon'_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon'_{kk} \delta_{ij} \right) - \gamma \delta_{ij} T', \quad (2)$$

компоненты деформации ε'_{11} , ε'_{33} , получим:

$$\sigma'_{22}(x,t) = \frac{1}{1-\nu} \left[\nu P'_1(x,t) + 2\mu \varepsilon'_{22}(x,t) - \alpha_t E T'(x,t) \right]. \quad (3)$$

Матрицу преобразования координат представим в виде:

$$P^*(x) = \begin{vmatrix} n_1(x) & n_2(x) \\ \tau_1(x) & \tau_2(x) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Преобразуем компоненты поверхностных усилий от глобальной системы координат в локальную (местную):

$$\begin{aligned} P'_1(x,t) &= n_j(x) P_j(x,t), \\ P'_2(x,t) &= \tau_j(x) P_j(x,t). \end{aligned} \quad (5)$$

Деформации в местной системе координат определяются по формуле:

$$\varepsilon'_{22}(x,t) = \left. \frac{\partial u'_2(y,t)}{\partial y'_2} \right|_x = \tau_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial \tau}(x,t). \quad (6)$$

Опуская промежуточные выкладки, получим соотношение для вычисления граничных значений компонентов тензора напряжений в точке x в момент времени t :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,t) &= \left[\left(n_i n_j + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_i \tau_j \right) n_k + (n_i \tau_j + n_j \tau_i) \tau_k \right] \cdot [P_k(x,t) + \gamma n_k T(x,t)] + \\ &+ \frac{2\mu}{1-\nu} \tau_i \tau_j \tau_k \frac{\partial u_k}{\partial \tau}(x,t) - \gamma \delta_{ij} T(x,t). \end{aligned} \quad (7)$$

Дискретный аналог уравнения (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,t) &= \sum_{\beta=1}^{M^*} \left\{ [P_k(y^{\beta q}, t) + n_k \gamma T(y^{\beta q}, t)] A_{ijk}^{\beta q}(\xi) + u_k(y^{\beta q}, t) B_{ijk}^{\beta q}(\xi) - \right. \\ &\left. - \delta_{ij} \gamma T(y^{\beta q}, t) N_{\beta}(\xi) \right\}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты $A_{ijk}^{\beta q}$ и $B_{ijk}^{\beta q}$ вычисляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{\beta q} &= \left[\left(n_i n_j + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_i \tau_j \right) n_k + (n_i \tau_j + n_j \tau_i) \tau_k \right] N_{\beta}(\xi), \\ B_{ijk}^{\beta q} &= \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{\tau_i \tau_j \tau_k}{I(\xi)} N'_{\beta}(\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях (9) учтено, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial \tau} &= \frac{1}{I(\xi)} \sum_{\beta=1}^{M^*} u_k(y^{\beta q}, t) N'_{\beta}(\xi), \\ N'_{\beta}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} N_{\beta}(\xi). \end{aligned} \quad (10)$$

Вычисление компонентов базисных векторов $n(x)$, $\tau(x)$ осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_i(x)|_{\bar{s}_q} &= \frac{h_i^q(\xi)}{h^q(\xi)}, \\ n_i(x)|_{\bar{s}_q} &= \frac{\omega_i^q(\xi)}{\omega^q(\xi)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где функции $h^q(\xi)$, $\omega^q(\xi)$ определяются через координаты узловых точек $x_i^{\beta q}$ и функции формы $N_\beta(\xi)$ на основе следующих формул:

$$\begin{aligned} \omega^q &= (h_i^q h_i^q)^{1/2}, \quad h^q = (h_i^q h_i^q)^{1/2}, \\ h_i(\xi) &= \frac{\partial y_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\bar{s}_q} = \sum_{\beta=1}^{M^*} y_i^{\beta q} N_{,1}^\beta(\xi), \\ N_{,1}^\beta(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} N_\beta(\xi), \\ \omega_k^q(\xi) &= \varepsilon_{kij} h_i^q(\xi) l_j^q(\xi), \\ l_i^q(\xi) &= \frac{\partial y_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\bar{s}_q} = \sum_{\beta=1}^{M^*} y_i^{\beta q} N_{,2}^\beta(\xi), \quad N_{,2}^\beta(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} N_\beta(\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

По результатам расчетов на данном этапе решения задачи помимо напряжений определяются значения перемещений, деформаций, температуры во всех точках границы, что позволит в дальнейшем с использованием интерполяционных соотношений вычислить перемещения и температуры в любой точке границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия, К., Телес, Ж., Вроубел, Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Крауч, С., Старфилд, А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970. – 239 с.
4. Хвисевич, В.М., Веремейчик, А.И. Граничные интегральные уравнения двумерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической механике: сб. научн. трудов / БНТУ. – Минск: УП «Технопринт», 2001. – С. 99–103.

ПРОЧНОСТЬ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ

Клус С. А.

Введение

В настоящее время элементы конструкций, подвергаемые облучению и неравномерному нагреву, представляют определенный интерес с точки зрения напряженно-деформированного состояния. Учитывая, что в перспективе Республика Беларусь собирается реализовать свою собственную ядерную программу эта проблема является достаточно актуальной.

В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние осесимметричного цилиндра в условиях объемных термических и радиационных деформаций. Как частный случай рассмотрен бесконечно длинный цилиндр, нагруженный равномерными внешним и внутренним давлениями для которого проведены расчеты напряженно-деформированного состояния представленные в графическом виде.

Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричное распределение напряжений и деформаций полого цилиндра в условиях неравномерного нагрева, реакторного облучения, а также под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений (рис. 1).

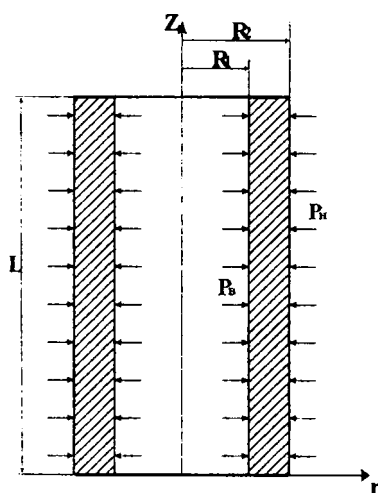


Рис. 1. Полый цилиндр, нагруженный внутренним и внешним давлением

Тогда в цилиндрической системе координат (r, Z) поле напряжений и деформаций имеет отличные от нуля компоненты $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ (для упрощения примем σ_{13} и ε_{13} равным нулю). Введем относительные координаты $\xi = Z/R_1$ и $\rho = r/R_1$, изменяющихся в пределах $0 \leq \xi \leq L/R_1$ и $1 \leq \rho \leq R_2/R_1$, где R_1, R_2 – внутренний и наружный радиусы цилиндра; L – его высота, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ – напряжения и деформации соответственно в радиальном, окружном и осевом направлениях.

В данном случае дифференциальные уравнения равновесия имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Деформации и перемещения точек цилиндра связаны следующими соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho}; \varepsilon_{22} = \frac{1}{R_1} \frac{u_1}{\rho}; \varepsilon_{33} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi}. \quad (2)$$

Физические уравнения с учетом объемных деформаций имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] + \alpha T + \frac{1}{3}S.\end{aligned}\quad (3)$$

где $T(r, Z)$ предполагается заданной функцией от координат, $S(T(r, Z), \phi, t)$ – радиационное распухание.

Граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -P_b \text{ при } \rho = 1, \\ \sigma_{11} &= -P_n \text{ при } \rho = R_2 / R_1, \\ \varepsilon_{33} &= 0 \text{ при } \xi = 0; \xi = L / R_1.\end{aligned}\quad (4)$$

Вывод основных формул

Решение задачи будем искать в перемещениях, для чего, согласно (3), выразим напряжения через деформации

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{11} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_{22} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_{33} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)].\end{aligned}\quad (5)$$

Подставляя (2) в (5) получим зависимость напряжений от перемещений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\nu}{R_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \frac{u_1}{\rho}\right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)\right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\nu}{R_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{u_1}{\rho} + \frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{R_1} \frac{u_1}{\rho} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)\right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\nu}{R_1}\left(\frac{u_1}{\rho} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)\right].\end{aligned}\quad (6)$$

С учетом (6) уравнение равновесия (1) примет вид

$$\begin{aligned}\nu \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \rho \partial \xi} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{u_1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right\} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} (1-2\nu) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - \frac{u_1}{\rho} \right) - (1+\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial \rho} \right) = 0, \\ \nu \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho \partial \xi} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right\} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - (1+\nu) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial \xi} \right) = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

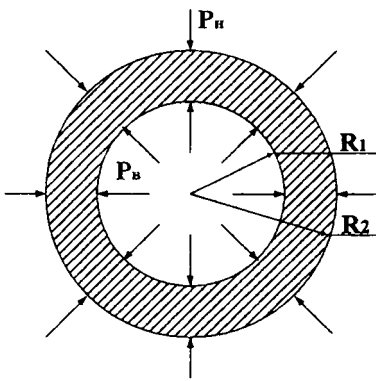
А граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\nu}{R_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \frac{u_1}{\rho} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} - (1+\nu) \left(\alpha T + \frac{1}{3} S \right) \right] &= -P_B, \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\nu}{R_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \frac{u_1}{\rho} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} - (1+\nu) \left(\alpha T + \frac{1}{3} S \right) \right] &= -P_H, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} &= 0 \text{ при } \xi = 0; \xi = L/R_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти формулы были выведены для общего случая определения напряжений и деформаций полого цилиндра в условиях реакторного облучения и неравномерного нагрева. В следующем пункте рассмотрим конкретную задачу для полого бесконечно длинного цилиндра в тех же условиях.

Полый бесконечно длинный цилиндр

Рассмотрим осесимметричное распределение напряжений и деформаций полого бесконечно длинного цилиндра (т.е. $L/R_2 > 15$) в условиях неравномерного нагрева, реакторного облучения, а также под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений (рис.1).



Основным отличием бесконечно длинного цилиндра состоит в том, что можно рассматривать не весь цилиндр, а лишь его отдельное сечение (рис. 2).

Тогда в цилиндрической системе координат поле напряжений имеет отличные от нуля компоненты σ_{11} , σ_{22} , ε_{11} , ε_{22} . Для полого открытого цилиндра выполняется условие плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$).

Тогда для решения задачи запишем следующие уравнения [1-2]

Рис. 2. Сечение цилиндра нагруженного внешним и внутренним давлениями

Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0. \quad (9)$$

Деформации и перемещения точек цилиндра связаны следующими соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{u}{r}. \quad (10)$$

Физические уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \\
0 &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] + \alpha T + \frac{1}{3}S.
\end{aligned} \tag{11}$$

Где $T(r)$ предполагается заданной функцией от координат, $S(T(r), \phi, t)$ функция, зависящая от температуры, времени, заданного нейтронного потока.

ГУ примем следующими:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -P_b \text{ при } r = R_1, \\
\sigma_{11} &= -P_n \text{ при } r = R_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Вывод основных формул

Решение задачи будем искать в перемещениях, для чего, согласно (11), выразим напряжения через деформации

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\varepsilon_{11} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1 + \nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S), \\
\sigma_{22} &= \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\varepsilon_{22} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1 + \nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S).
\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (10) в (13) получим зависимость напряжений от перемещений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1 + \nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S), \\
\sigma_{22} &= \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}\left[\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{u}{r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1 + \nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S).
\end{aligned} \tag{14}$$

С учетом (6) уравнение равновесия (1) примет вид

$$(\nu - 1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + (1 + \nu)\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{3}\frac{\partial S}{\partial r}\right) = 0. \tag{15}$$

ГУ запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1 + \nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S) &= -P_b, \\
\frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1 + \nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S) &= -P_n.
\end{aligned} \tag{16}$$

Решение задачи конечноразностным методом

Для решения задачи используем шаговый метод по времени, одновременно решая на каждом временном шаге уравнение (15) методом конечных разностей с учетом ГУ (16).

Разностное уравнение будет иметь вид

$$(\nu - 1) \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{u_i}{r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + (1 + \nu) \left(\alpha \frac{T_i - T_{i-1}}{h} + \frac{1}{3} \frac{S_i - S_{i-1}}{h} \right) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) записано для внутренних точек области, ограниченными точками 0 и n. ГУ примут следующий вид:

$$\frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1} \left[\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{u_0}{r_0} \right] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1} \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1} (1 + \nu) \left(\alpha T_0 + \frac{1}{3} S_0 \right) = -P_B, \quad (18)$$

$$\frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1} \left[\frac{u_n - u_{n-1}}{h} - \frac{u_n}{r_n} \right] - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1} (1 + \nu) \left(\alpha T_n + \frac{1}{3} S_n \right) = -P_H.$$

В качестве примера выполнен расчет полого бесконечно длинного цилиндра с данными, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

R1, м	0,003
R2, м	0,006
E, МПа	1,50E+05
λ , Вт/(м К)	18
q_v , Вт/м ³	2,20E+09
α , град ⁽⁻¹⁾	1,83E-06
P_H , МПа	16
P_B , МПа	25
T_s , К	300
ϕ , нейтр/(см ⁽²⁾ ч)	2,81E+19

Где E – модуль упругости, λ – коэффициент теплопроводности, q_v – объемное тепло-выделение, α – коэффициент линейного расширения материала цилиндра, T_s – температура наружной поверхности цилиндра, ϕ – нейтронный поток.

Термическая функция задается следующим образом:

$$T(r) = T_s + \frac{q_v}{4\lambda} (R_2^2 - r^2). \quad (19)$$

Функция радиационного распухания имеет вид

$$S(r, t) = 4.9 \cdot 10^{-51} (\phi t)^{1.71} 10^{\frac{1.549 \cdot 10^4}{r} - \frac{5.98 \cdot 10^6}{T^2(r)}}. \quad (20)$$

Решение разностных уравнений (17) (18) в системе Mathcad 2000 Professional с использованием формул для распределения температуры в цилиндре (19) и радиационного распу-

хания (20), а так же формул для напряжений (14), строим график зависимости напряжений от радиуса цилиндра рис. 3.

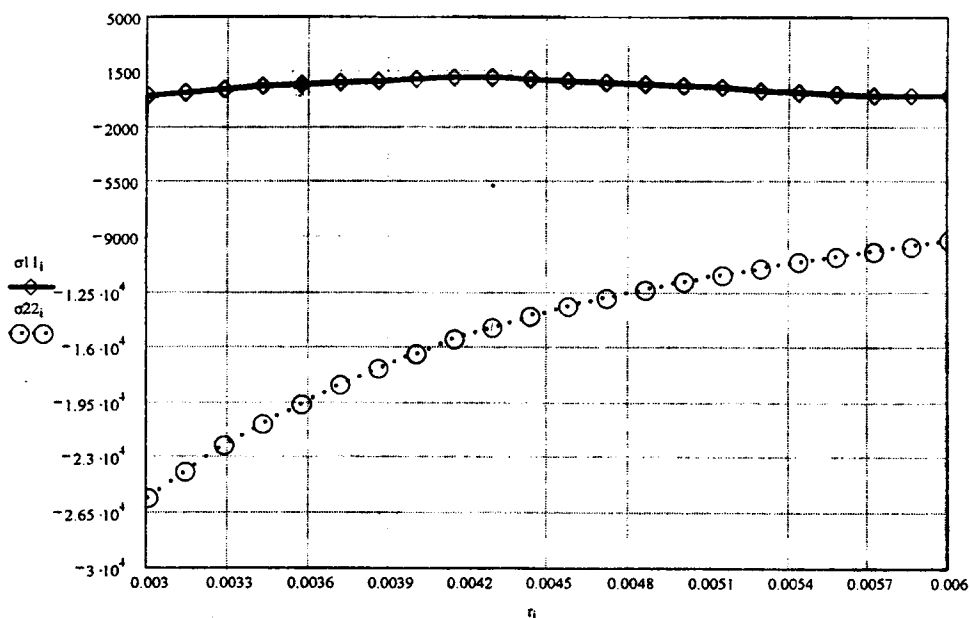


Рис. 3. Распределения по радиусу радиальных и окружных напряжений при $t = 1000$

Полученные данные (рис.3) показывают, что в любой момент времени можно получить поле терморadiационно упругих напряжений по сечению цилиндра и найти точки их максимальных значений с последующей оценкой несущей способностью цилиндра.

Заключение

Данный алгоритм решения поставленной задачи позволяет производить расчеты упруго-напряженно-деформированного состояния длинных полых цилиндров при значительных объемных изменениях, вызванных неравномерным нагревом и нейтронным облучением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И.С., Нестеренко, В.Б., Тверковкин, Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. – Мн.: Наука и техника, 1990.
2. Куликов, И.С., Тверковкин, Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов. – Мн.: Наука и техника, 1984.

РЕШЕНИЕ РАДИАЦИОННО-ТЕРМОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

Ширвель П.И.

Heat irradiation elements as rule have the shape of the cylinders. Tensely-strained state for entire cylinder under acting pressure, irregular warming and radiation are analysed in this article. The construction mathematical models and programming of the numerical method for task solving. Checking the right variant of the received results. The importance of radiation action on mechanical properties of fuel and construction materials.

Введение

Эффективность развития промышленности и сельского хозяйства в Республике Беларусь требует интенсивного роста потребления электроэнергии. В связи с этим встаёт вопрос поиска более выгодных путей её выработки. Наряду с традиционными способами производства электроэнергии в мире широкое распространение получили атомные электростанции (АЭС). Эффективность работы которых и послужила главным аргументом проекта строительства АЭС на территории РБ и начала развития собственной ядерной программы.

Безопасная работа любого реактора зависит от надёжной работы его тепловыделяющих элементов (ТВЭЛов), имеющих, как правило, форму цилиндров. Жёсткость условий работы ТВЭЛов (большие тепловые и радиационные нагрузки, высокое внешнее давление теплоносителя) предполагает повышенные требования к ним. В связи с этим, возникает необходимость решения ряда практических задач, учитывающих взаимосвязь не только процессов упругого деформирования и теплопроводности, но и процесса радиационного распухания (эффект объемного изменения конструкционных материалов под действием облучения потока быстрых нейтронов). Это требует от механики деформируемого твёрдого тела развития методов расчёта типовых задач, учитывающих влияние упругого деформирования, теплопроводности, и облучения. Одной из таких задач является термоупругая задача для бесконечно длинного осесимметричного цилиндра, подверженного радиационному распуханию.

Постановка задачи и основные уравнения

Напряжённо-деформированное состояние однородного бесконечно длинного, осесимметричного цилиндра (Рисунок 1), находящегося в температурном поле $T(r)$ и подвергающегося действию радиационного распухания $S[T(r), \phi \cdot t]$, и нагрузки P , можно описать следующей системой уравнений [1].

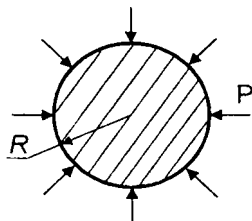
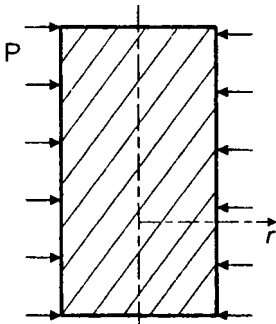


Рис. 1

1. Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0.$$

Касательные напряжения равны нулю ввиду симметрии поля деформаций.

2. Физические уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) + \alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) + \alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) + \alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t]. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагая условие плоского деформирования, $\varepsilon_{33} = 0$, из третьего из уравнений (2) имеем:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}) - E \cdot (\alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t]). \quad (3)$$

3. Соотношения Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{u_1}{r}, \quad \varepsilon_{33} = 0. \quad (4)$$

4. Граничные условия:

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{11} = -P \quad \text{при} \quad r = R. \quad (6)$$

Где $T(r)$, $S[T(r), \phi \cdot t]$ заданные функции [2], соответственно:

$$T(r) = Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2), \quad (7)$$

$$S[T(r), \phi t] = 4,9 \cdot 10^{-51} (\phi \cdot t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T+273} - \frac{5,98 \cdot 10^6}{(T+273)^2}}. \quad (8)$$

Значения постоянных R , P , E , ν , λ , ϕ , q_v , α , Ts равны реальным (табл. 1). Соответствующий материал – сталь ОХ16Н15МЗБ или западный аналог 316L.

Задача. Используя все вышеперечисленные основные уравнения, разработать и запрограммировать метод вычисления величин, характеризующие напряжённо-деформированное состояние цилиндра (σ , ε).

Таблица 1

Величина	Значение	Единицы измерения
R – радиус цилиндра	0,00265	м
P – внешнее давление	16	МПа
E – модуль упругости	$2 \cdot 10^5$	МПа
ν – коэффициент Пуассона	0,3	-
λ – коэффициент теплопроводности цилиндра	18	Вт/(м · К),
ϕ – нейтронный поток	$2,81 \cdot 10^{19}$	нейтрон/(см ² · ч)
q_v – тепловыделение в единице объёма цилиндра	$2,2 \cdot 10^9$	Вт/м ³
α – коэфф. линейного расширения материала цилиндра	$18,3 \cdot 10^{-6}$	град-1
Ts – температура поверхности цилиндра	500(773)	°C(К)

Подставляя полученное выражение (3) для σ_{33} в физические уравнения для ε_{11} и ε_{22} , получим систему из двух уравнений относительно σ_{11} и σ_{22} . Из которой, после ряда упрощений и преобразований, находим выражения для σ_{11} и σ_{22} . Так как σ_{33} выражается через величины σ_{11} и σ_{22} (3), то подставив выражения для σ_{11} и σ_{22} в формулу для σ_{33} , получим и этот компонент напряжений. Окончательно запишем компоненты напряжения для рассматриваемой задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11}(1-\nu) + \nu \cdot \varepsilon_{22} - (\alpha \cdot T + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu)), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{22}(1-\nu) + \nu \cdot \varepsilon_{11} - (\alpha \cdot T + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu)), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{(1-2\nu)} \left(\frac{\nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{(1+\nu)} - (\alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r), \phi \cdot t]) \right). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Учитывая соотношения Коши (4), перейдем от деформаций к перемещениям в полученных уравнениях (9) для σ_{11} и σ_{22} . Подставляем полученные выражения (9) (в перемещениях) в уравнение равновесия (1), упрощая это выражение, получаем уравнение равновесия, выраженное через перемещения:

$$(1-\nu) \cdot \left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_1}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot u_1 \right) - (1+\nu) \cdot \left(\alpha \frac{d(T(r))}{dr} + \frac{1}{3} \frac{d(S[T(r), \phi \cdot t])}{dr} \right) = 0. \quad (10)$$

Расписав граничные условия через перемещения: при $r = R$ получаем систему дифференциальных уравнений которая описывает решение термоупругой задачи для бесконечного цилиндра (однородного, осесимметричного), подверженного влиянию температуры $T(r)$ и радиационного распухания $S[T(r), \phi \cdot t]$ в перемещениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\nu) \cdot \left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_1}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot u_1 \right) = (1+\nu) \cdot \left(\alpha \cdot \frac{d(T(r))}{dr} + \frac{1}{3} \cdot \frac{d(S[T(r), \phi \cdot t])}{dr} \right), \\ \frac{du_1}{dr} \cdot (1-\nu) + \nu \cdot \frac{u_1}{r} - (\alpha \cdot T(r) + \frac{1}{3} S[T(r), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu) = P \frac{(1+\nu)(2\nu-1)}{E}, \text{ при } r = R, \\ u_1 = 0, \text{ при } r = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Подставляя выражения для $\frac{d(T(r))}{dr}$ и $\frac{d(S[T(r), \phi \cdot t])}{dr}$ в формулу (11), а также расписав граничное условие, получаем систему дифференциальных уравнений, которая описывает решение задачи в перемещениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\nu) \cdot \left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_1}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot u_1 \right) = (1+\nu) \cdot \left(\alpha \cdot \frac{-q_v r}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{3} \cdot 4,9 \cdot 10^{-51} \cdot \ln 10 \cdot (\phi \cdot t)^{1,71} \times \right. \\ \left. \times 10^{\frac{15490}{Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2) + 273} - \frac{5,98 \cdot 10^6}{(Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2) + 273)^2}} \cdot \frac{q_v r}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{15490}{(Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2) + 273)^2} + \frac{2 \cdot 5,98 \cdot 10^6}{(273 + Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2))^3} \right) \right), \\ \frac{du_1}{dr} \cdot (1-\nu) + \nu \cdot \frac{u_1}{r} - \left(\alpha \cdot \left(Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2) \right) + \frac{1}{3} \cdot 4,9 \cdot 10^{-51} \cdot (\phi \cdot t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2) + 273} - \frac{5,98 \cdot 10^6}{(Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2) + 273)^2}} \right) \times \\ \times (1+\nu) = P \frac{(1+\nu)(2\nu-1)}{E}, \text{ при } r = R, \\ u_1 = 0, \text{ при } r = 0. \end{array} \right.$$

Полученная система дифференциальных уравнений может быть решена одним из известных численных методов.

Математическая модель

Для замены дифференциального оператора конечно-разностным разобьем отрезок $[0, R]$ равноотстоящими точками: $r_0 = 0, \quad r_n = R; \quad r_i = ih, \quad h = \frac{R}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$

Производные от функции $u(r)$ в каждом из узлов заменим разностными отношениями, при этом будем пользоваться следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u'(r_i) &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \\ u''(r_i) &= \frac{u_{i+1} - u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Заменим в (11) производные функции $u(r)$ на разностные отношения, придем к решению разностной системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{1}{r_i} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{1}{r_i^2} \cdot u_i &= \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{d(S_i[T(r), \phi \cdot t])}{dr} - \alpha \cdot \frac{-q_v \cdot r_i}{2 \cdot \lambda} \right), \\ \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \cdot (1-\nu) + \nu \cdot \frac{u_n}{R} &= P \frac{(1+\nu)(2\nu-1)}{E} + (\alpha \cdot Ts + \frac{1}{3} S_n[T(r), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu), \text{ при } r_n = R, \\ u_0 &= 0, \text{ при } r_0 = 0, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая граничную задачу для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обычно имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} a_i \cdot u_{i+1} + b_i \cdot u_i + c_i \cdot y_{i-1} &= t_i, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_{01} \cdot u_0 + \beta_{01} \cdot u_1 &= \gamma_{01}, \\ \alpha_{02} \cdot u_{n-1} + \beta_{02} \cdot u_n &= \gamma_{02}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где $a_i, b_i, c_i, t_i, \alpha_{0k}, \beta_{0k}, \gamma_{0k}$, ($k = 1, 2$) – некоторые числа.

Приведём систему разностных уравнений (14) к виду (15) и решим её методом прогонки: В нашем случае, разностная система уравнений (14) представима в виде

$$\left\{ \begin{aligned} u_{i+1} \cdot (2r_i^2 + r_i \cdot h) - (4r_i^2 + 2h^2) \cdot u_i + u_{i-1} \cdot (2r_i^2 - r_i \cdot h) &= 2r_i^2 h^2 \cdot \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{dS_i}{dr_i} - \alpha \cdot \frac{q_v \cdot r_i}{2\lambda} \right), \\ 1 \cdot u_0 + 0 \cdot u_1 &= 0, \\ u_{n-1} \cdot (R \cdot (\nu-1)) + u_n \cdot (\nu \cdot h + R \cdot (1-\nu)) &= (1+\nu) \cdot h \cdot R \cdot \frac{(2\nu-1) \cdot P + E(\alpha \cdot Ts + \frac{1}{3} S_n)}{E}, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

где

$$\frac{dS_i}{dr_i} = 4,9 \cdot 10^{-51} \cdot \ln 10 \cdot (\phi \cdot t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T_i+273} \frac{5,98 \cdot 10^6}{(T_i+273)^2}} \cdot \frac{q_v r_i}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{15490}{T_i^2} + \frac{2 \cdot 5,98 \cdot 10^6}{T_i^3} \right), \quad \frac{dT_i}{dr} = \frac{-q_v r_i}{2 \cdot \lambda}.$$

$$S_i = 4,9 \cdot 10^{-51} (\phi \cdot t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T_i+273} \frac{5,98 \cdot 10^6}{(T_i+273)^2}},$$

$$T_i = Ts + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r_i^2).$$

Дальнейшее решение системы (16) по методу правой прогонки заключается в следующем:

1) находим значения

$$X_1 = -\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, Z_1 = \frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}}; \quad (17)$$

2) по рекуррентным формулам

$$X_{i+1} = -\frac{a_i}{b_i + c_i \cdot X_i}, Z_{i+1} = -\frac{t_i - c_i \cdot Z_i}{b_i + c_i \cdot X_i}, \quad (18)$$

последовательно вычисляем $X_2, Z_2, X_3, Z_3, \dots, X_n, Z_n$;

3) находим

$$u_n = \frac{1}{\Delta} (\gamma_{02} - \alpha_{02} \cdot Z_n), \quad (19)$$

$$\Delta = \beta_{02} + \alpha_{02} \cdot X_n; \quad (20)$$

4) по формуле

$$u_{i-1} = X_i \cdot u_i + Z_i, \quad (21)$$

вычисляем $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0$.

При условии, что $\alpha_{01} \neq 0$, $b_i + c_i \cdot X_i \neq 0, \Delta \neq 0$.

Метод правой прогонки решения системы разностных уравнений (16) будет устойчив к погрешностям округлений, если выполняются условия (22):

$$|\alpha_{0i}| \geq |\beta_{01}| \quad \text{и} \quad |b_i| \geq |c_i| + |a_i|, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

Проверим для поставленной задачи: $\alpha_{01} = 1, \beta_{01} = 0, |1| \geq |0|$,

$$b_i = -(4r_i^2 + 2h^2), c_i = (2r_i^2 - r_i \cdot h), a_i = (2r_i^2 + r_i \cdot h) \Rightarrow |4r_i^2 + 2h^2| \geq |2r_i^2 - r_i \cdot h| + |2r_i^2 + r_i \cdot h|, \\ i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Результатом реализации вышеперечисленного алгоритма станут значения перемещений точек цилиндра. Зная значения перемещений легко вычислить компоненты деформации используя, следующие численные схемы:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dr} \Rightarrow \varepsilon_{11i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_1}{r} \Rightarrow \varepsilon_{22i} = \frac{u_i}{r_i}. \quad (24)$$

Трудностью в этом вычислении является значение ε_{22} в точке $r_0 = 0$, так как в этой точке возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от этой неопределённости, перейдя в алгоритме вычислительной программы, в этой точке к пределу. Следуя алгоритму метода

прогонки в точке ноль имеем: $u_0 = X_1 \cdot u_1 + Z_1, X_1 = -\frac{a_0}{b_0 + c_0 \cdot X_0}, Z_1 = -\frac{t_0 - c_0 \cdot Z_0}{b_0 + c_0 \cdot X_0}$.

Подставляя значения соответствующих коэффициентов и переходя к пределу получим:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_0}{r_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{x_1 \cdot u_1 + z}{r_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\frac{a_0 \cdot u_1}{b_0 + c_0 \cdot X_0} + Z_1}{r_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-\frac{a_0 \cdot u_1}{b_0} + Z_1}{r_0} \Rightarrow \\ \lim_{r \rightarrow 0} = \frac{-u_1 \cdot (2r^2 + rh)}{-(2r^2 + h^2) \cdot r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-u_1 \cdot (2r + h)}{-(2r^2 + h^2)} = \frac{u_1}{h}. \quad (25)$$

Значит в точке $r_0 = 0$: $\varepsilon_{22} = \frac{u_1}{h}$. Заметим, что в точке $r_0 = 0$ выполняется следующее равенство:

$\varepsilon_{22}[0] = \varepsilon_{11}[0], \sigma_{22}[0] = \sigma_{11}[0]$. Зная значения деформаций, по формулам (9) находим значения напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$.

Взяв за основу алгоритма решения задачи, выведенные выражения (11) разностные схемы (13) и метод прогонки (17-21), запрограммируем численное решение задачи в пакете Mathcad и на языке C++. Результат – программа расчёта НДС и построения графиков в пакете Mathcad и автономная программа (что является преимуществом перед Mathcad) решения поставленной задачи PAC4ET.exe на языке C++.

Проверка правильности результатов решения

Аналитических решений радиационно-термоупругой задачи нет в литературе. Всё дело в сложности их отыскания для задачи сочетающие действие радиационного распухания, температурного поля и термоупругие свойства длинного цилиндра. Однако, в работе [3] дано аналитическое решение температурной задачи для длинного цилиндра (26). Из-за отсутствия других способов проверки правильности работы составленных программ, единственно-возможным является “зануление” силы P и радиационной составляющей $S[T(r), \phi, t]$ в программе решения и сравнение полученных результатов с теми, что получатся из аналитических выражений, выведенных С.П. Тимошенко, Дж. Гудьером. По результату этого сравнения и будем судить о достоверности решения. Кстати, первое решение температурной задачи принадлежит Дюгамелю (*J.M.C. Duhamel*).

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \cdot \left((1-2\nu) \frac{r}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr + \frac{1}{r} \int_0^r T \cdot r dr \right), \\
 \sigma_{11} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r dr \right), \\
 \sigma_{22} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T \cdot r dr - T \right), \\
 \sigma_{33} &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left(\frac{2\nu}{R^2} \int_0^R T \cdot r dr - T \right).
 \end{aligned} \tag{26}$$

В Mathcad запишем формулы в виде (26) и, вычислив значения этих четырёх выражений, «прогоняем» их по r . Затем сравниваем полученные результаты с теми, что получили для исходной задачи, приняв $P = 0, S = 0$, приходим к абсолютному совпадению значений $u_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ с $u_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ полученными по аналитическим формулам С.П.Тимошенко, Дж. Гудьер. Аналогично, в программе PAC4ET.exe, написанной на C++, введя $p=0$ и $t=0$ (при $t=0; S=0$ – температурная задача), получаем результаты, совпадающие с результатами аналитических выражений, что является лишним подтверждением правильности решения исходной задачи.

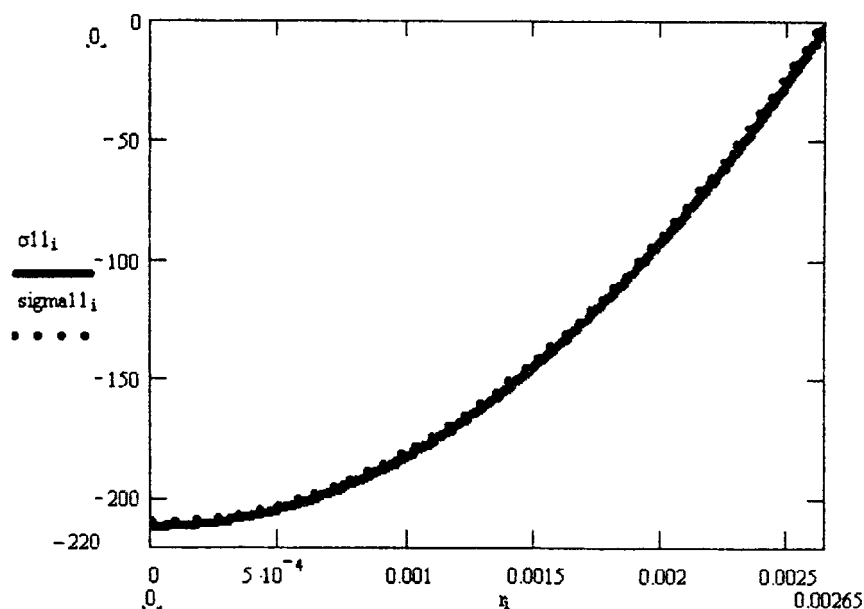


Рис. 2. Сравнение аналитических и численных значений σ_{11} .

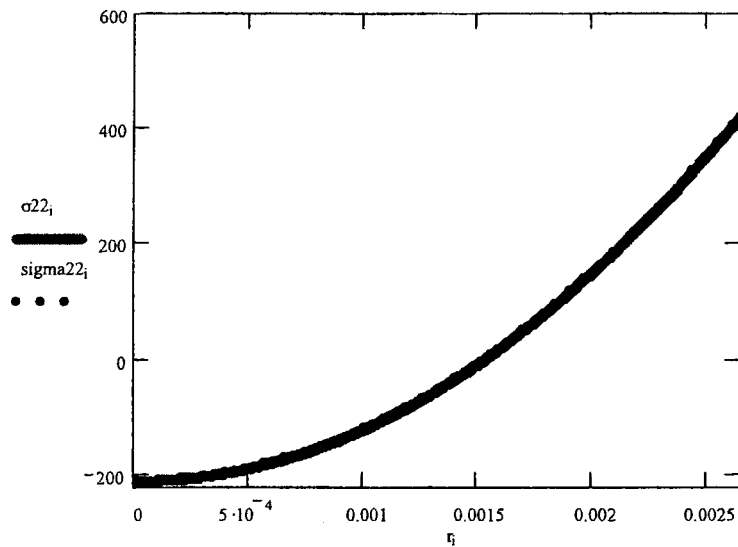


Рис. 3. Сравнение аналитических и численных значений σ_{22i}

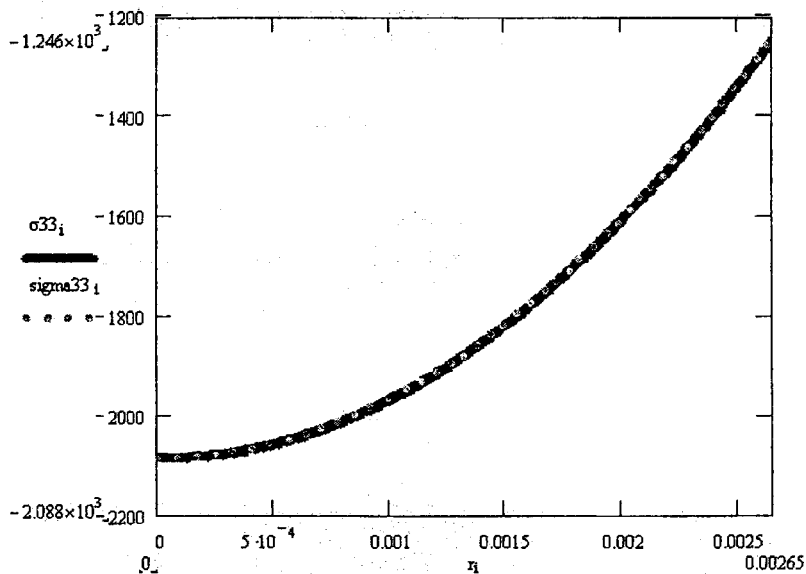


Рис. 4. Сравнение аналитических и численных значений σ_{33i}

На приведенных графиках значения $\sigma_{11i}, \sigma_{22i}, \sigma_{33i}$ - рассчитаны с помощью разработанной программы приняв $P = 0, S = 0 (t=0)$, а значения $\sigma_{11i}, \sigma_{22i}, \sigma_{33i}$ получены путём расчёта аналитических выражений приведенных Тимошенко, Гудьер. Как видно, кривые идентичны.

Изменение напряжений с течением времени

Зафиксируем последовательно четыре промежутка времени t : 1, 1000, 4000 и 7000 часов. Проследим за изменением напряжений за каждый промежуток времени и тем самым оценим степень влияния радиационного распухания на напряженно деформированное состояние тела. При рассмотрении рисунков 5-8 очевидна тенденция к росту значений главных напряжений с увеличением промежутка времени t . Что является следствием действия радиационной составляющей $S[T(r), \phi \cdot t]$ (эффект объемного изменения конструкционных материалов под действием облучения потока быстрых нейтронов) находящейся в степенной зависимости от времени.

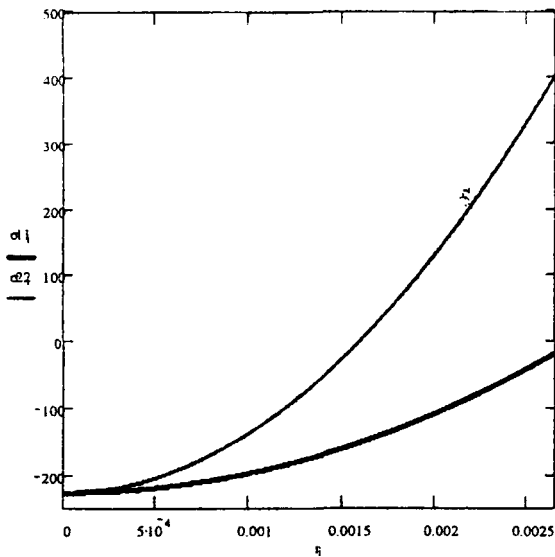


Рис. 5. Зависимость $\sigma_{11}(r)$ и $\sigma_{22}(r)$,
 $t = 1$ час

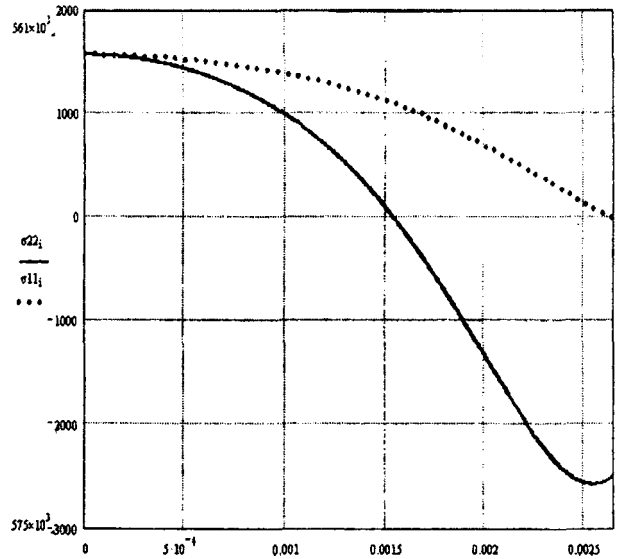


Рис. 7. Зависимость $\sigma_{11}(r)$ и $\sigma_{22}(r)$,
 $t = 4000$ часов

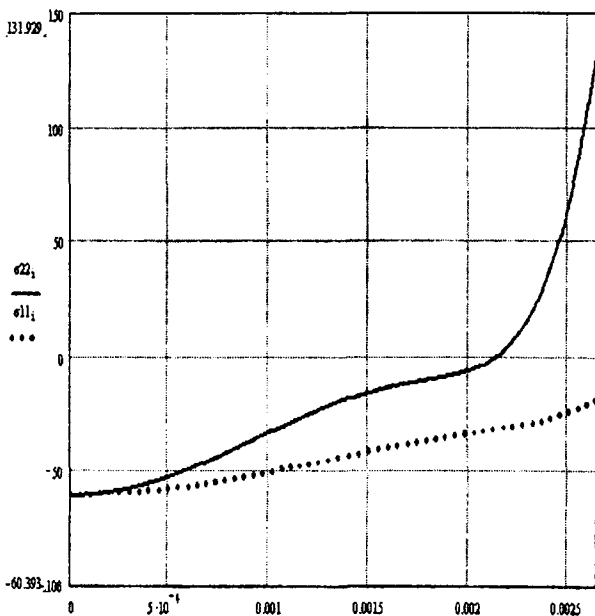


Рис. 6. Зависимость $\sigma_{11}(r)$ и $\sigma_{22}(r)$,
 $t = 1000$ часов

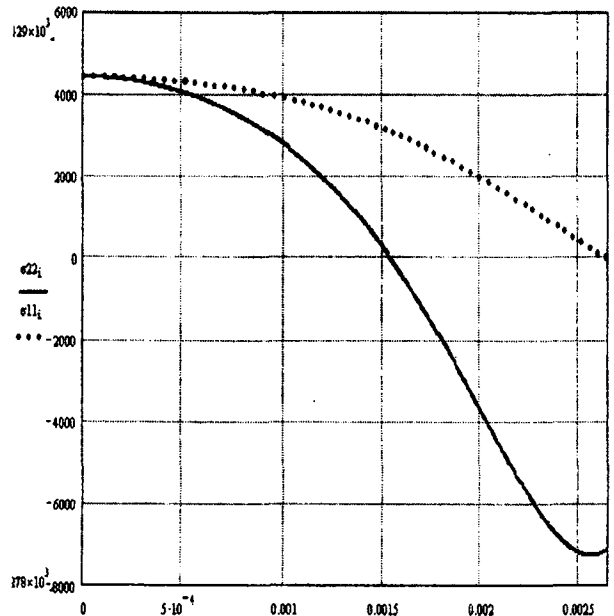


Рис. 8. Зависимость $\sigma_{11}(r)$ и $\sigma_{22}(r)$,
 $t = 7000$ часов

Из графиков распределения напряжения вдоль радиуса цилиндра при различных значениях времени ($t = 1$, $t = 1000$, $t = 4000$, $t = 7000$), очевидно влияние облучения на механические свойства топливных и конструкционных материалов, и это обстоятельство необходимо учитывать как при определении напряженно-деформированного состояния облученных конструкций, так и при оценке ресурса их работы.

Заключение

Основные результаты выполненной работы состоят в следующем.

1. Были получены выражения для определения напряжённо-деформированного состояния бесконечно длинного цилиндра, подверженного облучению нейтронным потоком, неравномерному нагреву и упругому воздействию.

2. Разработана математическая модель нахождения ε и σ , а также разработан и обоснован алгоритм численного решения этой задачи.

3. Найдены, на основе численного решения, значения основных характеристик НДС данной задачи с учётом существования особой точки $r=0$.

4. Решение исходной задачи запрограммировано в пакете Mathcad и на языке C++. Построены графики зависимости деформаций и напряжений от радиуса цилиндра при различных промежутках времени облучения t из которых видна зависимость действующих напряжений от увеличения времени облучения.

5. Проверена правильность результатов численного решения (правильность работы составленных программ расчёта).

6. Конечным продуктом решения исходной задачи является автономная компьютерная программа RAS4ET.exe, реализованная на C++, которая осуществляет:

- ввод числа итераций (n), времени (t) и нагрузки (p);
- формирует шаг алгоритма вычислений и расчёт характеристик НДС для стали ОХ16Н15МЗБ;
- вывод на экран результатов решения задачи $u, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$;

Данное решение может служить основой для дальнейших численных расчётов более сложных процессов возникающих в материалах подверженных термоупругорадиационному воздействию с течением времени (например пластическое деформирование и ползучесть).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И.С., Нестеренко, Тверковкин, Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. – Минск. 1990. – 144 с.

2. Куликов, И.С., Тверковкин, Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов. – Минск, 1984.

3. Тимошенко, С.П., Гудьер, Дж. Теория упругости. – Москва, 1979.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

И.М. Мартыненко, В.А. Казакевич

The asymptotic method for cubic anisotropy bodies are developed in the present paper.

Теория упругости кубически анизотропных тел начала систематически развиваться в последнее десятилетие, несмотря на то, что теоретические основы этой теории были заложены еще в курсе "Механике сплошной среды" Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица в 1954г. Появление в законе Гука третьей материальной константы существенно усложняет исследование законов деформации тел с кубической анизотропией. Это можно увидеть, анализируя известную работу И.М.Лифшица и Л.Н.Розенцвейга (ЖЭТФ т.16, 1946). В настоящей статье развит асимптотический метод исследования задач кубически анизотропной теории упругости.

Рассмотрим твердое упругое тело, главные линии анизотропии которого коллинеарны осям координат, а внешние поверхностные усилия вызывают в нем двухмерное НДС, следующее такому закону [1], [2], [3]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (A_{11} - A_{12})\varepsilon_{\alpha\alpha} + A_{12}\theta, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2A_{44}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad \theta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\beta}}, \quad (2)$$

где u_{α} – компоненты вектора перемещений, A_{ij} – материальные константы.

Поэтому в плоском случае из (1) получаем:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = A_{11} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - A_{12} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\beta}}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = A_{44} \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right). \quad (3)$$

При отсутствии объемных (массовых) сил уравнения равновесия приводятся к такому виду:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial x_{\beta}} = 0. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует

$$\begin{aligned} A_{44} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}^2} + A_{11} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x_{\beta}^2} + (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} &= 0, \\ A_{11} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x_{\beta}^2} + (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В матричном виде (5) записывается так

$$M \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} U(x) = \begin{vmatrix} A_{11}\partial_\alpha^2 + A_{44}\partial_\beta^2 & (A_{12} + A_{44})\partial_\alpha\partial_\beta \\ (A_{44} + A_{12})\partial_\alpha\partial_\beta & A_{44}\partial_\alpha^2 + A_{11}\partial_\beta^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Поэтому

$$\det M = A_{11}A_{44}(\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2)^2 + \partial_\alpha^2\partial_\beta^2(A_{11} + A_{12})(A_{11} - A_{12} - 2A_{44}).$$

Если $A_{11}, A_{44} > 0, (A_{11} + A_{12}) > 0, [A_{11} - A_{12} - 2A_{44}] > 0$, то $\det M > 0$ и система (6) принадлежит к эллиптическому типу. В практических приложениях часто выполняется неравенство $A_{44} < A_{11}, A_{12}$. Поэтому отношение $A_{44}^2 / (A_{11}A_{12}) < 1$. Следовательно, величину A_{44}/A_{11} можно рассматривать как малый параметр $\varepsilon = A_{44}/A_{11}$. Тогда система (5) преобразуется к следующему виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta^2} + q \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha^2} + q \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= 0 \end{aligned}, \quad q = (A_{12} + A_{44})/A_{11}. \quad (7)$$

Решение системы (7) будем искать в виде следующих рядов

$$u_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m U_m(x_\alpha, x_\beta), \quad u_\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m V_m(x_\alpha, x_\beta). \quad (8)$$

Внося (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left(\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\beta^2} + q \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) &= 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left(\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\beta^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha^2} + q \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\varepsilon^m, m = 0, 1, \dots$, получим для определения U_m, V_m такую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 U_{m-1}}{\partial x_\beta^2} + q \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\beta^2} + \frac{\partial^2 V_{m-1}}{\partial x_\alpha^2} + q \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При $m = 0$ в (10) появятся неизвестные функции. U_{-1} , V_{-1} , положим эти функции равными нулю (это вытекает из формулы (8)), и система (10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x_\alpha^2} + q \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_\beta^2} + q \frac{\partial^2 U_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha^2} + q \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= -\frac{\partial^2 U_{m-1}}{\partial x_\beta^2}, \\ \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\beta^2} + q \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= -\frac{\partial^2 V_{m-1}}{\partial x_\alpha^2}, \end{aligned} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

К уравнениям (11), (12) следует присоединить граничные условия, которые можно получить обычными рассуждениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М. Механика сплошных сред. – М., Наука, 1954. – С. 682–683.
2. Мартыненко, И.М. Волновые движения в кубически анизотропных телах // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: “Технопринт”. – 2004. – Вып. 17. – С. 99–102.
3. Мартыненко, И.М. Асимптотика собственных значений и собственных функций в кубически анизотропных средах // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: “Технопринт”. – 2007. – Вып. 22. – С. 270–278.

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ В РАСЧЕТАХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Веремейчик А.И., Даркович С.С., Хвисевич В.М.

Calculation of statically indefinable rod systems is considered at a stretching-compression in case of joint action of mechanical, temperature loadings and discrepancy of manufacturing.

Введение. Постановка задачи

При решении определенного класса инженерных задач, а также в учебниках курса «Сопротивление материалов» при исследовании напряженно-деформированного состояния статически неопределимых систем существует традиционный подход составления деформационных уравнений [1]. В случае совместного воздействия на конструктивные элементы механических и температурных нагрузок такие уравнения составляются при действии нагрузок в отдельности. В этой связи целесообразно рассмотреть методику составления деформационных уравнений при совокупном действии нагрузок.

Рассматривается система, образованная стержнями, соединёнными между собой непосредственно или при помощи недеформируемых элементов. Шарнирное соединение в узлах – идеальное.

Как известно [2], расчёт любой стержневой конструкции начинается с определения усилий в отдельных стержнях. И здесь эффективным является метод сечений, приводящий к системе уравнений равновесия, из которых определяются неизвестные усилия.

В случае статически неопределимой стержневой системы на распределение усилий влияет жёсткость каждого стержня.

Для раскрытия статической неопределимости чаще всего используются два метода:

а) для простых случаев – метод перемещений (метод сравнения деформации).

б) для более сложных случаев – широко используемый в строительной механике метод сил.

В курсе сопротивления материалов, как наиболее наглядный и удобный, рассматривается метод сравнения деформаций. Он приводит к типовым решениям. Тем не менее, при одновременном действии нескольких факторов, например, силовой нагрузки, температуры, неточности изготовления, схема перемещений и написание уравнений совместности деформаций (перемещений) вызывает определённые трудности, которые возрастают от сложности конфигурации и количества “лишних” связей. На начальном этапе освоения метода это нередко приводит к ошибкам.

В данной работе предлагается отказаться от составления подробной схемы перемещений, которая неизбежно приводит к трудностям в написании уравнений перемещений. Любая стержневая система – это совокупность стержней и решение её необходимо начинать с рассмотрения одного стержня под влиянием действующих на него факторов.

Методика исследований

Рассмотрим особенности предлагаемого расчета на следующих примерах (рис. 1, 2, 3).

Действие механических усилий

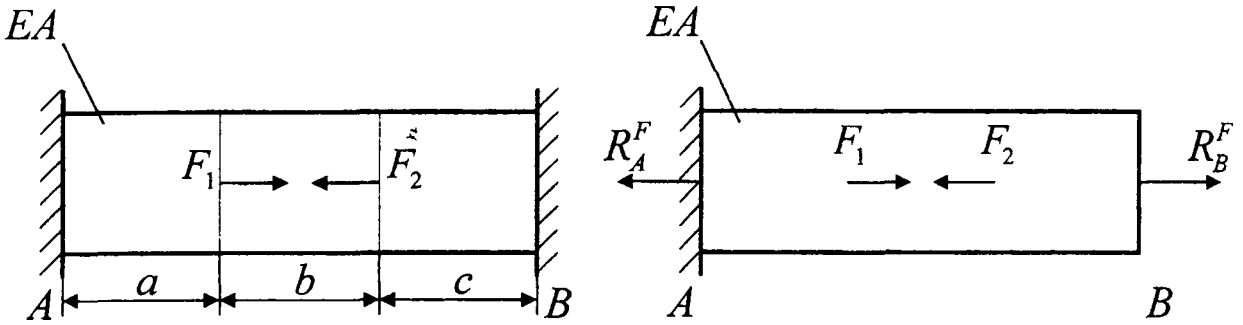


Рис. 1. Расчетная схема при действии механических усилий

Общая длина стержня не может измениться, следовательно,

$$\Delta_B^F = 0; \quad \text{или} \quad \Delta l_F + \Delta l_{R_B}^F = 0. \quad (1)$$

Деформации стержней от действия сил F_1, F_2 и реакции R_B :

$$\Delta l_F = \frac{F_1 a}{EA} - \frac{F_2 (a+b)}{EA}; \quad \Delta l_{R_B} = \frac{R_B (a+b+c)}{EA}; \quad (2)$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга), A – площадь поперечного сечения.

Подставляя (2) в (1), находим: $R_B^F = -\frac{1}{a+b+c} (F_1 \cdot a - F_2 (a+b))$.

Действие температуры

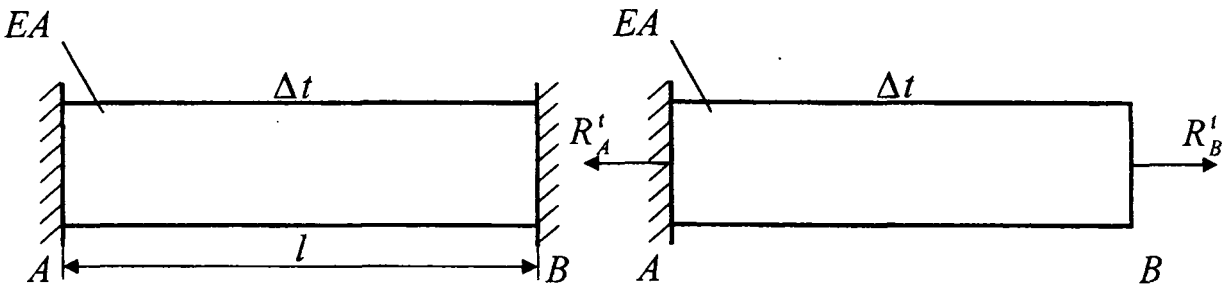


Рис. 2. Расчетная схема при действии температурных нагрузок

Аналогично примеру 1, $\Delta_B' = 0$; или $\Delta l_t + \Delta l_{R_B}' = 0$;

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot l + \frac{R_B' \cdot l}{EA} = 0;$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения, Δt – изменение температуры стержня.

Окончательно: $R_B' = -\alpha \cdot \Delta t \cdot EA$.

Действие монтажных напряжений

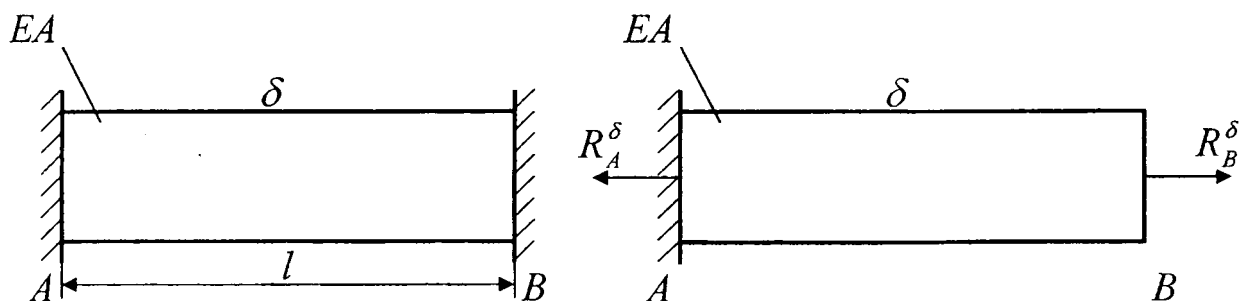


Рис. 3. Расчетная схема при действии монтажных напряжений

Аналогично рассмотренным ранее примерам, $\Delta_B^\delta = 0$; $\delta + \Delta l_R^\delta = 0$;

где δ – неточность изготовления, $\delta + \frac{R_B^\delta \cdot l}{EA} = 0$, откуда $R_B^\delta = -\frac{EA\delta}{l}$.

Примечание: В примерах 1, 2, 3, приняты значения Δt , δ , при которых длина стержня увеличивается. Если некоторый фактор уменьшает длину, его учитывают со знаком “–”.

Таким образом, в общем случае действия различных факторов уравнения перемещений имеет универсальный вид:

$$\Delta l_F + \Delta l_t + \delta + \Delta l_R = 0. \quad (3)$$

На примерах 1, 2, 3 показано, что итоговая величина неизвестной реакции от действия совокупности факторов равна:

$$R_B = R_B^F + R_B^t + R_B^\delta, \quad (4)$$

что предлагает эффективный способ проверки правильности результатов решения задачи. В этом случае необходимо приложить все действующие факторы и провести расчет от суммарного действия на стержни механических нагрузок, неточности изготовления или температуры. Затем приложить каждый фактор в отдельности (что хорошо показывает долю каждого из них), результаты сложить и сравнить с предыдущим расчетом.

В рассмотренном примере общая длина бруса после деформации не изменяется, т.е. если система состоит из нескольких стержней непосредственно соединенных между собой или через жёсткие элементы, то необходимо составить геометрическое соотношение (или соотношения), которое учитывает конфигурацию системы.

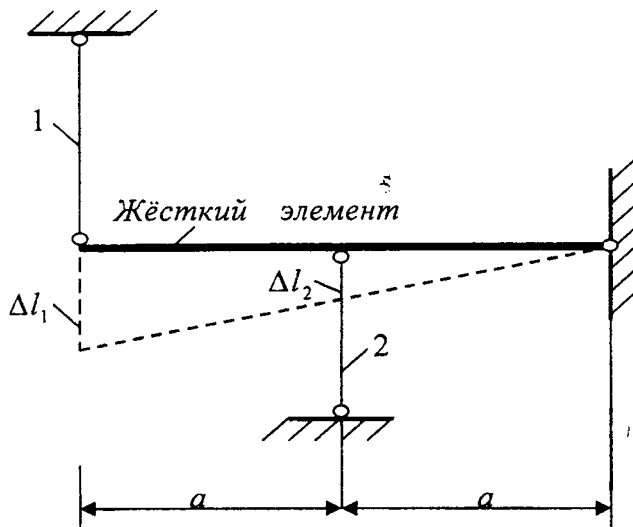


Рис. 4. Схема статически неопределимой стержневой системы

Геометрическое соотношение для приведённой схемы:

$$\Delta l_1 = -2\Delta l_2$$

При этом длина стержней 1 и 2 не остаётся постоянной, а изменяется на величину:

$$\text{I стержень: } \Delta l_F^I + \Delta l_i^I + \delta^I = \Delta l_1,$$

$$\text{II стержень: } \Delta l_F^{II} + \Delta l_i^{II} + \delta^{II} = \Delta l_2.$$

Окончательное решение:

$$\Delta l_F^I + \Delta l_i^I + \delta^I = -2(\Delta l_F^{II} + \Delta l_i^{II} + \delta^{II}). \quad (5)$$

В уравнении (5) Δl_F^I и Δl_F^{II} - удлинения, вызванные внешними силами (нагрузками) и в приведённом примере записываются через усилия в стержнях:

$$\Delta l_F^I = \frac{N_1 l_1}{(EA)_I}, \quad \Delta l_F^{II} = \frac{N_2 l_2}{(EA)_{II}}.$$

Остальные деформации в уравнении (5) определяются по методике, изложенной выше в примерах 2 и 3.

Заключение

Рассмотренная методика расчета апробирована студентами машиностроительного факультета Брестского государственного технического университета при выполнении расчетно-проектировочного задания по курсу «Механика материалов» «Расчет статически неопределимых стержневых систем» [3]. Она позволяет не только максимально упростить решение рассматриваемых в курсе сопротивления материалов статически неопределимых задач, но и формализовать процесс вычисления с последующим машинным расчётом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. – 775 с.
2. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
3. Хвиевич, В.М., Савченко, В.А., Даркович, С.С., Веремейчик, А.И., Мазырка, М.В. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по механике материалов «Осевое растяжение и сжатие прямолинейных стержней» для студентов специальностей 36.01.01, 36.01.03, 37.01.06 – Брест, изд-во БрГТУ, 2004. – 42 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ СВАРНОГО СОЕДИНЕНИЯ В ПАКЕТЕ LS-DYNA

Кравчук А.С., Чашинский А.С., Баркалин В.В., Миклашевич И.А.,
Юркевич С.Н., Случак П.А.

A crush model of a weld joint was created in the paper.

Введение

Повышение надежности и долговечности машин и их элементов, являясь важнейшим фактором, определяющим рост конкурентоспособности изделий, связано с достоверным определением «опасных» мест конструкций. Наиболее эффективным и широко используемым средством достижения этой цели является использование математическое моделирование метода конечных элементов. В настоящее время существует достаточно много программных продуктов для решения широкого спектра задач определения прочности [1]. Одним из наиболее мощных программных средств решения задач разрушения конструкций является LS-Dyna [2].

В настоящее время накоплен достаточный опыт в определении прочности цельнометаллических конструкций. Поэтому основное внимание исследователей сосредоточено на разработке методик учета влияния локальных особенностей конструкции (мест с резко меняющейся кривизной поверхности, сварных швов, локальных неоднородностей и т.д.).

В работе излагается методика прочности сварного соединения. Предлагаемый подход основан на использовании «третьего тела» в качестве модели сварного шва с соответствующими геометрическими характеристиками. Этот подход хорошо зарекомендовал себя в различных прикладных исследованиях, например в трибологии. Он позволяет использовать индивидуальные механические характеристики сварного шва и определять их влияние на прочность изделия.

Объект и цель исследования

В качестве объекта исследования, выбран восстановленный сваркой патрубок авиационного двигателя. Целью исследования является определение влияния механических и геометрических характеристик сварного шва, технологических отклонений (несоосности) частей патрубка, возникающих при проведении ремонта, на общую прочность детали.

Механические свойства титана и его сплавов

Важнейшей особенностью титана и его сплавов являются его механические свойства: низкая плотность, высокая прочность, твердость и др. Занимая по удельной плотности промежуточное положение между алюминием и железом, титан по своим механическим свойствам во много раз их превосходит.

Объект исследования изготовлен из сплава титана ПТ-7М и обладает механическими свойствами, представленными в табл. 1.

Таблица 1

Механические свойства титана

Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона	Предел текучести, МПа	Временное сопротивление разрыву, МПа	Относительное удлинение, %
116 000	0.32	382	480-667	20

Построение твердотельной модели

В ходе предварительного анализа было установлено, что наиболее эффективным подходом при построении твердотельной модели является выделение фрагмента патрубка достаточной длины, чтобы характер закрепления торцов модели не сказывался на напряженно-деформированном состоянии сварного шва. Остальные части патрубка отбрасываются в связи с необходимостью сокращения затрат времени на проведение вычислительного эксперимента. В построенной модели оси свариваемых участков патрубка смещены друг относительно друга. Это имитирует погрешность позиционирования участков патрубка при сварке. Сварной шов между двумя участками патрубка моделируется криволинейным («третьим») телом, ширина которого определяется технологическими параметрами сварки (рис. 1).

LS-DYNA KEYWORD DECK BY LS-PRE
Time = 0

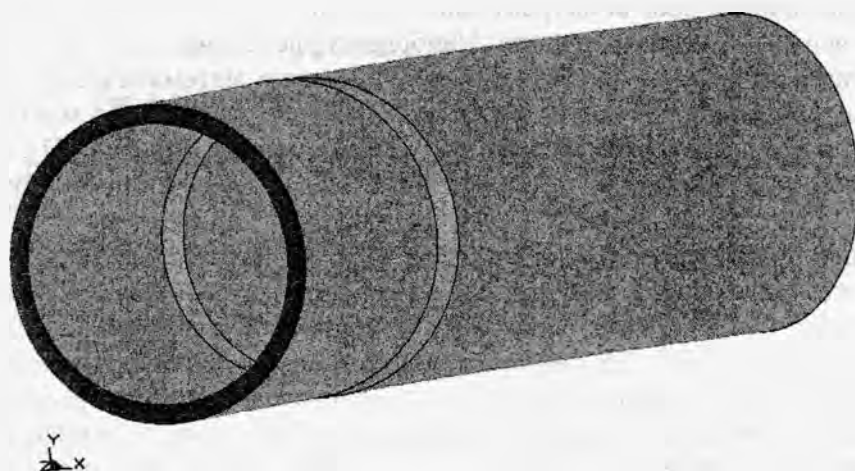


Рис. 1. Твердотельная модель сваренного патрубка, с учетом погрешностей позиционирования

Построение конечно-элементного разбиения модели патрубка

Выполнено построение конечно-элементного разбиения твердотельной модели патрубка. В ходе предварительного решения установлено, что поставленная задача имеет ряд особенностей, которые необходимо учесть уже на этапе построения конечно-элементного разбиения. К особенностям прежде всего следует отнести наличие «третьего» тела (сварного шва), размеры которого малы по сравнению с размерами патрубков, это приводит к построению некачественного свободного разбиения, а дальнейшее последовательное улучшение разбиения в зоне шва существенно увеличивает количество элементов и снижает скорость решения задачи [1].

Учитывая перечисленные особенности и симметричность модели, было построено упорядоченное разбиение, что приведет к повышению точности решения (рис. 2).

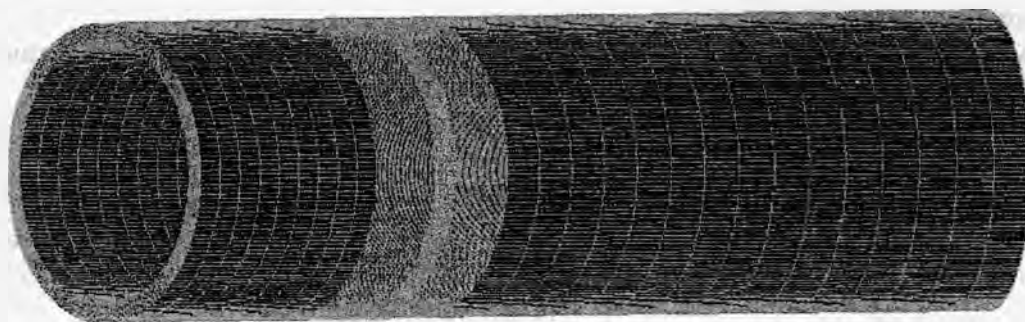


Рис. 2. Конечно-элементное разбиение модели сваренного патрубка

В результате создания конечно-элементного разбиения получилась модель, состоящая из 209000 узлов и 188000 элементов.

Особенности выбора модели материала

Методические особенности построения модели патрубка, его нагружения и предполагаемого характера деформирования, установленные на предыдущих этапах были учтены при создании конечно-элементной модели для **LS-Dyna** и выборе модели материала [1].

Исходя из анализа деформирования трубы установлено, что:

1. модель материала **LS-Dyna** должна позволять деформироваться трубе пластически;
2. Модель материала должна поддерживать эффект Баушингера.
3. При достижении определенного уровня пластической деформации труба должна разрушаться;

Одним из материалов которые удовлетворяют всем этим требованиям и доступны из препроцессора **LS-Dyna** является модель **Plastic Kinematic** [2].

Модель использует модель упругости и коэффициент Пуассона для описания деформаций в упругой области. Для пластической деформации модель поддерживает в отдельности как модель изотропного или кинематического упрочнения, так и их комбинацию. Это достигается выбором значения некоторого параметра, который принимает значение от 0 (кинематическое упрочнение) до 1 (изотропное упрочнение). Используется модель Cowper-Symonds учитывающая скорости деформаций. Связь деформаций и напряжений может быть установлена только для одной температуры.

Упруго-пластические характеристики материала трубы получены из справочных материалов по технологии титановых сплавов.

Решение поставленной задачи и анализ полученных результатов

При решении задачи предполагалось, что давление в патрубке возрастает до момента появления сквозного отверстия в поверхности патрубка (рис. 5). Было установлено, что предельное давление, при котором возникает поверхностная трещина, составляет 5.61×10^7 Па. Торцевые поверхности патрубка закреплены по всем направлениям (рис. 6). Это позволяет проследить разрушение, обусловленное особенностями механическими характеристиками сварного соединения и исключить влияние геометрии патрубка. Предполагалось, что прочность сварного соединения выше, чем прочность исходного материала патрубка.

При моделировании использовались 12 двухпроцессорных узлов суперкомпьютера «К-1000». Расчеты проводились с использованием явного и неявного алгоритма решения. При явном интегрировании внутренние и внешние силы в каждом узле суммируются, а ускорение в узле рассчитывается делением на массу в узле. Решение получается интегрированием этого ускорения по времени. Явное интегрирование хорошо работает при динамических расчетах, таких как ударные или аварийные воздействия, однако при расчете статических задач или задач с длительным нагружением его использование может стать слишком затратным. Для статических задач больше подходит неявное интегрирование. При неявном интегрировании рассчитывается глобальная матрица жесткости, которая затем инвертируется и используется в системе уравнений, определяющих неуравновешенные усилия в узле, для получения приращения смещения. Преимущество такого подхода состоит в том, что пользователь может сам выбирать размер шага по времени, а его недостатком является большой объем вычислений, которые необходимо сделать для получения, хранения и факторизации матрицы жесткости. Поэтому при неявном расчете используется сравнительно небольшое число шагов, но они требуют значительных затрат времени. Шаг времени расчета выбирался автоматически (5.9×10^{-9} с) в явном алгоритме и задавался вручную (5.0×10^{-4} с) при неявном методе решения, т.е. время расчета отличалось на несколько порядков.

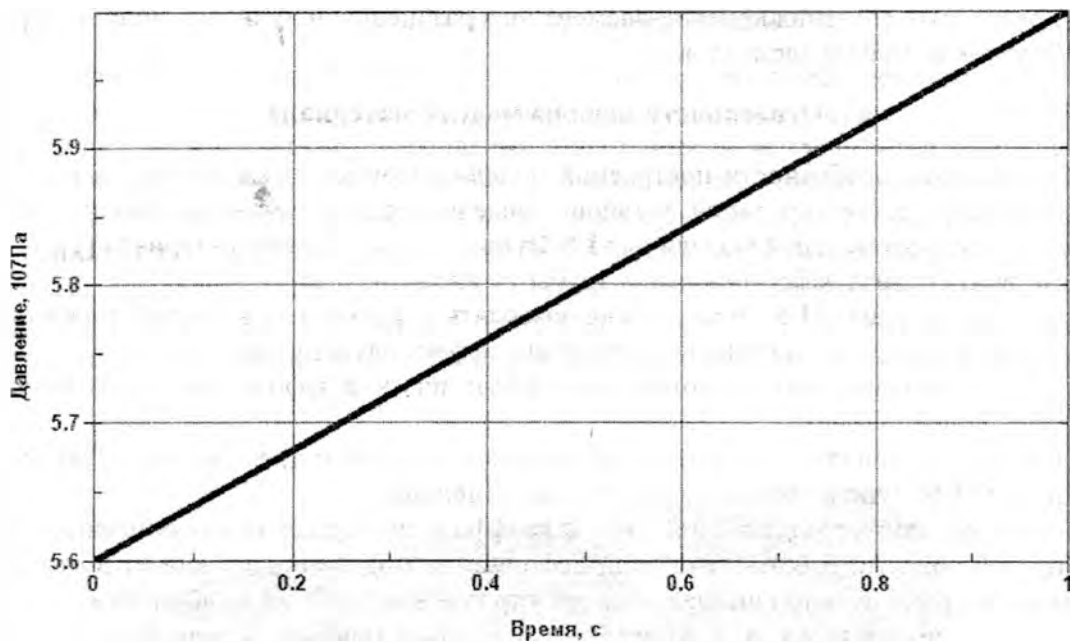


Рис. 5. Зависимость изменения давления во времени

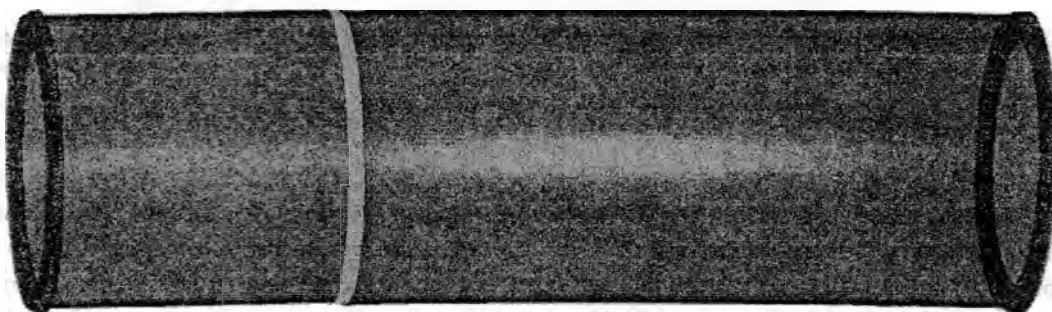


Рис. 6. Закрепление торцевых поверхностей патрубка

В ходе решения задачи при увеличении внутреннего давления в обеих частях сваренного патрубка на границе со сварным швом сформировались две локальные зоны с наибольшими значениями главных деформаций (рис. 7). В дальнейшем в этих местах появились поверхностные трещины (рис. 8) и далее разрывы патрубка. Сварной шов при этом не значительных повреждений не получил.

LS-DYNA KEYWORD DECK BY LS-PRE
Time = 0.002
Contour of Max Prin Strain
min=-1.4058e+07, at elem# 85150
max=5.27936e+08, at elem# 104000

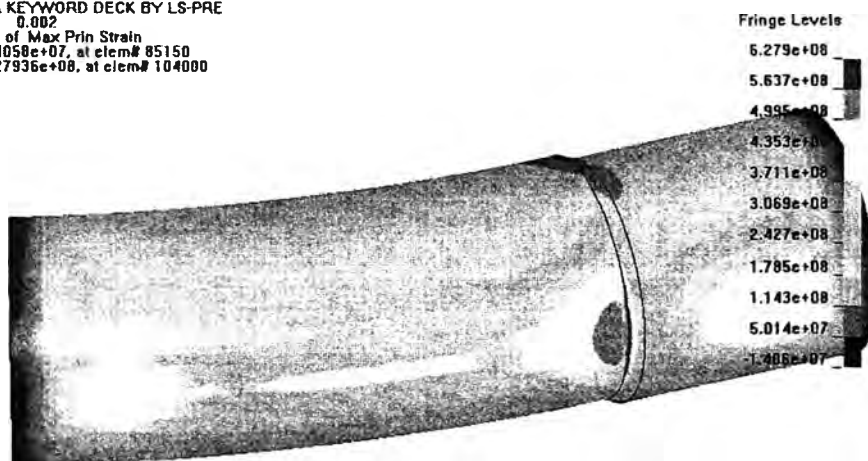


Рис. 7. Концентрация максимальных главных деформаций перед появлением трещины

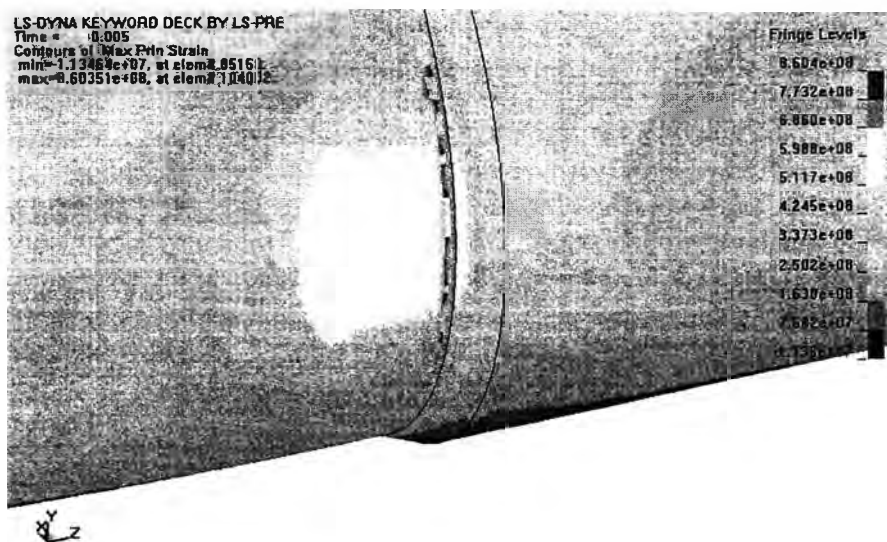


Рис. 8. Появление трещины в патрубке и перераспределение деформаций

Выводы

Разработана методика исследования сварного шва, которая позволяет определить влияние его механических и геометрических характеристик на разрушение детали.

Результаты решения задачи указывают, что модель материала **Plastic Kinematic** может быть применена к исследованию разрушения сварных деталей.

Благодарности

Авторы благодарят д.ф.-м.н. С.В.Медведева за плодотворные обсуждения «тонких» моментов работы с пакетом LS-Dyna и помощь в его освоении.

Работа выполнена в рамках проекта ПА 2.7 научно-технической программы Союзного государства «Триада» 2006-2008 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев, А.В., Кравчук, А.С., Смалюк, А.Ф. ANSYS для инженеров. – М: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.
2. LS-Dyna Keyword User's Manual. – Livermore Software Technology Corporation, 2003.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕЩИНЫ В ANSYS

Журавков М.А., Гляков С.А., Громыко О.В.

3-D finite-element model of rigid body with crack was created in ANSYS program. Stress intensity factors were calculated for three loading situations. Comparison of the solutions of the classical crushing mechanics problems with computer simulation results instill confidence in the validated modeling. ANSYS mode was used for exploration of the stressedly-deformed mode in the vicinity of crack.

Введение

Среди задач, связанных с поиском оптимальных способов разрушения конструкций, зданий, сооружений, горных пород при добыче полезных ископаемых, с обработкой деталей методами механического удаления поверхностных слоев и скола частиц материала, определения эффективных режимов резания и разрушения материалов [1], весьма важными являются задачи исследования концентрации напряжений вблизи трещин. Появление дефектов и трещин характерно для широкого класса конструкций и материалов и в большинстве случаев приводит к их разрушению. Исследование процессов возникновения, распространения и развития трещин весьма актуально, кроме того, и для обеспечения достаточной прочности и надежности машин, зданий и других конструкций.

Важнейшей задачей при изучении поведения трещины является наиболее достоверное и точное определение полей распределения напряжений в зоне их концентрации. Описание напряженного состояния вблизи трещин и оценка опасности разрушений предусматривает использование таких типовых параметров как коэффициенты интенсивности напряжений, удельная потенциальная энергия образования трещины, трещиноподвижная (расклинивающая) сила Гриффитса [2,3] и др. Коэффициенты интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} исчезающим образом характеризуют упругие поля вблизи вершины трещины, поскольку в остальной области распределение напряжений и деформаций полностью определено.

Теоретические основы исследований

В литературе приведены многочисленные аналитические решения, но они относятся к трещинам в телах бесконечной протяженности [2,3]. Однако практически более важными являются решения, относящиеся к малым трещинам в телах конечных размеров. Среди численных методов определения коэффициентов интенсивности напряжений особо следует выделить метод конечных элементов. В этом подходе тело представляют в виде совокупности конечных элементов, а решение получают интерполяцией значений основных неизвестных в узлах. К их числу относятся, например, перемещения узловых точек, общих для смежных элементов. Одним из наиболее популярных компьютерных приложений метода конечных элементов является широко известный пакет ANSYS [4,5]. Однако рассматриваемая задача в литературе, посвященной обзору методик использования пакета ANSYS, не рассматривается. Особо отметим, что в последнее время все шире применяются методы граничных интегральных уравнений и элементов [6].

Постановка задачи

Представленная работа посвящена определению коэффициентов концентрации напряжений путем моделирования в пакете ANSYS трещин, вызванных приложенными в их зоне продольных и поперечных нагрузок различного вида. Подчеркнем, что классические уточненные модели и аналитические решения с учетом различных моделей материалов [2] не всегда приводят к достоверным и согласованным с экспериментальными данными результатам. Как правило, основная трудность заключается в построении модели, адекватной условиям развития трещин. Для проверки качества компьютерного моделирования вначале выполним определение коэффициента интенсивности напряжений для случая, многократно исследу-

довавшегося аналитическими методами и для которого известно аналитическое решение (рис. 1 а). Если результаты моделирования удовлетворительно совпадут с аналитическим решением, то построенную компьютерную модель можно в дальнейшем использовать для решения аналогичных задач, но, например, с примененными нагрузками другого вида (рис. 1 б, в) или для которых аналитические решения отсутствуют.

Компьютерную модель построим для куба со стороной $a = 6$ см. Рассмотрим начальную трещину, глубина которой составляет $L = 1$ см (рис. 1). В первом расчетном случае (рис. 1 а) приложена разрывающая нагрузка интенсивностью $\sigma = 1$ Н/см², в двух других расчетных случаях направление приложения сил соответствует продольным и поперечным по отношению к образцу сдвиговым деформациям (рис. 1 б, в). Задача анализа состоит в определении коэффициента интенсивности напряжения K_1 для трещины, а также характера распределения напряжений в прилегающей зоне.

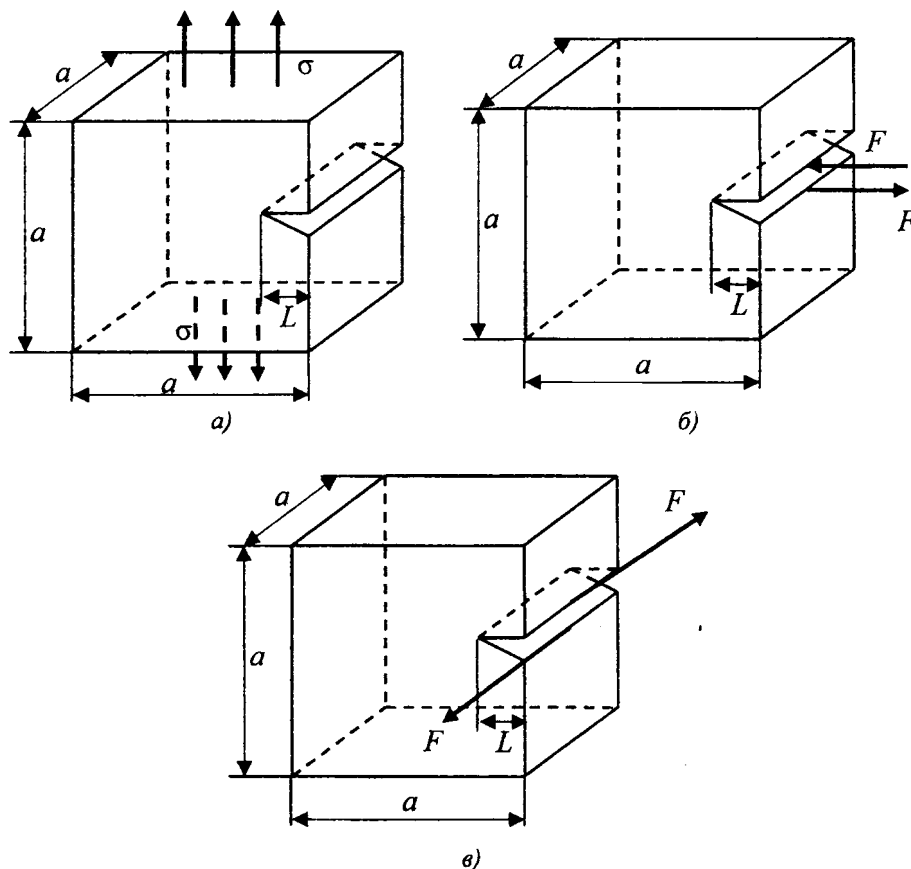


Рис. 1. Схемы приложения нагрузок вблизи трещины

Построение модели

Несмотря на то, что во всех случаях можно использовать условия симметрии и строить только часть модели для всех трех вариантов нагружения, в рассматриваемом примере в пакете ANSYS построена полная пространственная модель. Задача решается с использованием 3-D элементов SOLID45 и SOLID95. При помощи макроса элементы вблизи фронта трещины преобразуются из SOLID45 в сингулярный SOLID95 (с промежуточными узлами, находящимися ближе к фронту трещины).

Для построения пространственной модели с трещиной используется восьмиузловой элемент с прямыми ребрами SOLID45 и двадцатиузловой элемент с криволинейными ребрами SOLID95, который является квадратичной версией объемного элемента SOLID45. Элемент SOLID95 допускает возможность построения нерегулярной сетки без потери точности, имеет совместные формы перемещений. Он может быть использован в моделях, в том числе с трещинами, с искривленными границами. Как и большинство объемных элементов библио-

теки ANSYS обсуждаемые элементы имеют три степени свободы в каждом узле, т. е. перемещения в направлении осей X, Y и Z узловой системы координат. Дополнительными особенностями элементов SOLID45 и SOLID95 являются свойства пластичности и ползучести, радиационного набухания и изменения жесткости при приложении нагрузок, больших перемещений и больших деформаций. Эти свойства потенциально расширяют возможности компьютерного моделирования трещин для различных условий деформации и поведения материалов. Опция «рождение-смерть элемента» облегчает компьютерное моделирование процесса развития трещины. Для повышения наглядности и информативности выводимых результатов исследования имеются специальные опции определения интенсивности главных и эквивалентных напряжений на поверхности (по Треску, фон Мизесу и Сен-Венану), значений критериев разрушения и их максимумов в каждой точке интегрирования.

Модель строится таким образом, чтобы поверхность трещины была параллельна оси X, а фронт трещины располагался перпендикулярно оси Y.

Построение модели начинается с создания узлов вокруг фронта трещины командой *N* в цилиндрической системе координат и затем добавления промежуточных узлов между уже построенными командой *FILL*. При создании узлов им присваиваются такие номера, чтобы затем воспользоваться автоматическим повторением команд со смещением по номеру узла. Остальные узлы таким же образом достраиваются в декартовой системе координат (рис. 2).

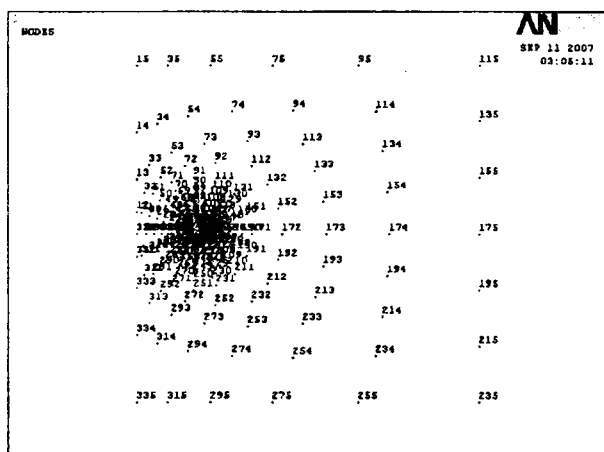


Рис. 2. Узлы конечно-элементной модели

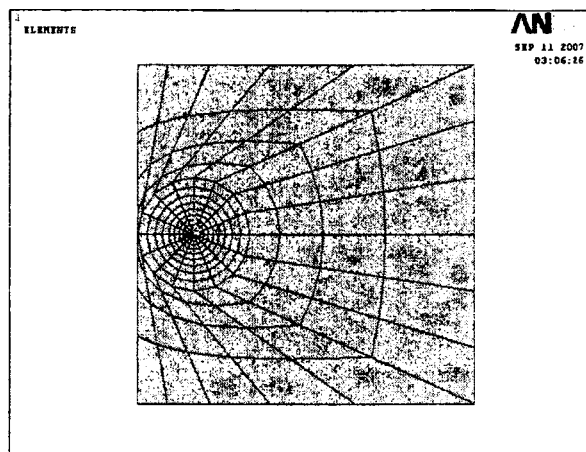


Рис. 3. Конечно-элементная сетка.

После определения координат всех узлов модели командой *E* создается элемент вблизи фронта трещины. Далее на его основе при помощи команды *EGEN* генерируются все элементы вокруг трещины. А затем, используя смещение по номерам узлов, командой *EGEN* создаются остальные элементы вдали от фронта трещины к краям тела (рис. 3).

Лишние степени свободы тела как твердого целого устранены путем закрепления двух узлов на противоположной от трещины стороне модели по всем трем направлениям.

В результате анализа вычислены коэффициенты интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} для трех случаев с различными способами приложения нагрузки.

Выполнение расчетов и анализ результатов решений

После завершения работы решателя ANSYS определяем пятью узлами контур трещины, а затем в постпроцессоре стандартной командой *KCALC* выполняем вычисление коэффициента концентрации напряжений K_I (рис. 4). Совершенно аналогично после приложения соответствующих поперечных нагрузок вычисляются коэффициенты K_2 и K_3 .

Из рис. 4 следует, что коэффициент интенсивности напряжений на основании описанной компьютерной модели равен $K_I = 1,7137$. Аналитическое решение для определения этого же коэффициента K_I выражается соотношением:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} (1.12 - 0.23\lambda + 0.16\lambda^2 - 21.7\lambda^3 + 30.4\lambda^4).$$

Учитывая, что λ — это отношение геометрических параметров модели L к a , получим:

$$K_I = 1\sqrt{3.14 \cdot 1} \left(1.12 - 0.23 \cdot \frac{1}{6} + 0.16 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 21.7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 30.4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \right) = 1.788.$$

```

KCAL C Command
File
**** CALCULATE MIXED-MODE STRESS INTENSITY FACTORS ****
ASSUME PLANE STRAIN CONDITIONS
ASSUME A FULL-CRACK MODEL (USE 5 MODES)
EXTRAPOLATION PATH IS DEFINED BY NODES: 1 5 11 325 331
WITH NODE 1 AS THE CRACK-TIP NODE
USE MATERIAL PROPERTIES FOR MATERIAL NUMBER 1
EX = 0.30000E+08 MUXY = 0.30000 AT TEMP = 0.0000
**** KI = 1.7137 , KII = 0.0000 , KIIT = 0.0000 ****
    
```

Рис. 4. Результаты вычисления коэффициентов интенсивности напряжений.

Различие между аналитическим и численным решением для коэффициента K_I составляет лишь 4%. Стремление к повышению точности моделирования заставляет уменьшать размеры элементов. Сгущение конечно-элементной сетки вблизи фронта трещины приводит не только к повышению скорости сходимости результатов. Вместе с этим существенно увеличивается размерность задачи и время ее решения. Итак, на основе проведенного анализа можно сделать вывод о том, что построенная компьютерная модель дает достоверные результаты и может быть использована для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_{II} и K_{III} .

Таким образом, используя данную модель и прикладывая нагрузку в поперечном направлении, указанном на рис. 1б, получим $K_2 = 1.2828$. Для расчетного случая, приведенного на рис. 1в, получим коэффициент интенсивности напряжений $K_3 = 0.5846$.

Заключение. Аналитические решения для определения коэффициентов интенсивности напряжений существуют для большого количества типов трещин и при различных вариантах приложения нагрузки. Наряду с ними, однако, существуют и варианты приложения нагрузки, для которых аналитические решения для коэффициентов интенсивности напряжений неизвестны. В представленной работе был продемонстрирован численный способ определения этих коэффициентов на основе компьютерного моделирования для таких случаев. Построенная в пакете ANSYS полная трехмерная конечно-элементная модель тела с трещиной использована для решения классической задачи механики разрушения с известным аналитическим выражением коэффициента интенсивности напряжений. Сопоставление результатов численных и аналитических решений позволило сделать вывод о приемлемой точности компьютерного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громько, О.В. и др. Популярно о механике / Под ред. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2006. – 192 с.
2. Хеллан, К. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 382 с.
3. Морозов, Е.М. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 328 с.
4. Чигарев, А.В., Кравчук, А.С., Смалюк, А.Ф. ANSYS для инженеров: справочное пособие. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с.
5. Басов, К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
6. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). – Минск.: БГУ, 2002. – 432 с.

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ANSYS И ADAMS ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

⁵
Громько О.В., Гляков С.А., Ци Лихуа

ANSYS doesn't fit to analyze dynamics/kinematics of the mechanical mechanisms and ADAMS doesn't fit for finite element analyzing the parts of these mechanisms. The paper deal with combining method of computer simulation programs ADAMS and ANSYS to analyze and simulate mechanisms with flexible components, approving the method feasible through simulating example.

¹ Введение

Анализ статического напряженно-деформированного состояния подразумевает, что механическая конструкция подвержена воздействию заданной стабильной статической нагрузки. В случае приложения к ней переменной во времени нагрузки необходимо исследовать динамическое поведение. Для компьютерного моделирования и расчета НДС, кинематики и динамики механических систем наиболее популярными пакетами являются следующие:

- а) программы анализа кинематики и динамики систем твердых тел (например, ADAMS, VisualNastran, ANSYS WorkBench, Catia, Working Model и т. п.);
- б) программы конечно-элементного анализа для гибких тел (например, ANSYS, Nastran, Patran, ProMechanica, LS-Dyna и т. д.).

В общем случае в процессе кинематического и динамического анализа механизмов упругие деформации звеньев не учитываются, а все тела считаются жесткими. На самом деле существует множество ситуаций, в которых упругая деформация может значительно влиять на поведение механической системы, а аппроксимация всех упругих тел абсолютно жесткими приводит к значительным погрешностям. В таких случаях для получения корректных результатов решений необходимо кинематику и динамику механизмов моделировать с учетом упругости их звеньев.

Отсутствие учета влияния гибкости тела в процессе анализа кинематики и динамики механической системы может привести к появлению не только погрешностей, но и к совершенно неверным результатам исследования поведения системы. Поэтому объединение возможностей ANSYS и ADAMS позволяет значительно точнее моделировать весь механизм и получать результаты динамического моделирования с учетом упругой деформации тел. Обычно ANSYS не подходит для анализа кинематики и динамики механизмов, а ADAMS не подходит для конечно-элементного анализа элементов конструкций. Однако объединение их возможностей позволяет дополнять друг у друга. ADAMS — самый известный в мире программный комплекс для моделирования механических систем и динамического анализа механизмов. Главный объект его анализа — система связанных между собой твердых тел. При моделировании динамики и кинематики в ADAMS с использованием пакета ANSYS можно учитывать упругость тел. При конечно-элементном анализе в ANSYS можно использовать граничные условия, вычисленные в ADAMS при моделировании кинематики.

Отметим также, что последние версии пакетов ANSYS WorkBench и VisualNastran уже в значительной степени решают задачу объединенного анализа внутри самого пакета без привлечения возможностей других программ.

Техника стыковки ADAMS/ ANSYS

Учет граничных условий в ANSYS, определенных в пакете ADAMS, осуществляется путем сохранения значений величины силы в заданных пользователем точках (узлах) после выполнения кинематического моделирования. Значения сил сохраняются в файле с расширением *.lod*. Этот файл можно экспортировать в ANSYS для дальнейшего использования в качестве граничных условий в конечно-элементной модели. Далее в пакете ANSYS проводится конечно-элементный анализ с целью исследования напряжений, деформаций, устойчивости, а также модальный анализ. Таким образом, при конечно-элементном анализе заданной части механизма информацию о силах, приложенных к этой части можно получить как результат кинематического моделирования в ADAMS.

В процессе модального анализа в ANSYS создается файл с результатами моделирования с расширением *.mnf*, который может быть также открыт в пакете ADAMS. При помощи модуля ADAMS/Flex на основе файла *.mnf* создается гибкое тело для кинематической модели, а также вычисляются деформации элементов и силы в узлах (в процессе динамического моделирования методом наложения модели - Model Superposition). Таким образом, можно учитывать упругие характеристики деталей в динамических моделях механических систем, существенно повышая уровень точности их компьютерного моделирования.

Алгоритм совместного использования ANSYS и ADAMS

Анализ напряжений и деформаций тела в ANSYS на основе граничных условий, определенных в пакете ADAMS:

- 1) построить модель: создать твердые тела, добавить кинематические пары, приложить нагрузки и окончательно сформировать модель;
- 2) проверить модель: определить положения полученной модели конструкции, экспортировать нагрузки и координаты узлов расположения нагрузки, измерить (и записать в файл) соответствующие характеристики модели, визуализировать анимацию и проанализировать результаты расчетов;
- 3) построить графики, экспортировать соответствующие спектры нагрузки и спектры перемещений (как функции времени) в *.lod* файл;
- 4) импортировать или непосредственно построить в ANSYS геометрическую модель тела, задать характеристики материала и прочие необходимые условия, приложить нагрузки к модели с помощью граничных условий, полученных в ADAMS в результате моделирования;
- 5) провести анализ и оценку напряжений и деформаций, отобразить искомые данные в постпроцессоре ANSYS.

Кинематический анализ в ADAMS с использованием гибкого тела, построенного в ANSYS:

- 1) построить конечно-элементную модель гибкого тела в ANSYS или экспортировать эту модель из другой программы;
- 2) выполнить модальный анализ и с помощью специальной функции ANSYS создать файл, содержащий его результаты (файл с расширением *.mnf*);
- 3) открыть модуль ADAMS/View и импортировать вышеуказанный файл (на его основе создается упруго-деформируемое тело - часть ADAMS-модели);
- 4) добавить к компьютерной модели все остальные жесткие тела;
- 5) добавить кинематические пары и нагрузки;

б) выполнить кинематическое и динамическое моделирование, сохранив файл нагрузки на гибкое звено во времени с расширением *.lod*;

7) снова возвратиться в пакет ANSYS, приложить к конечно-элементной модели гибкого тела нагрузки (в соответствии с шагами по времени в файле нагрузки *.lod*, полученном в программе ADAMS);

8) провести уточненный анализ напряжено-деформированного состояния гибкого тела и получить деформации и напряжения в теле с учетом расчетов в пакете ADAMS.

Динамическое моделирование на примере манипулятора «Пума»

С целью иллюстрации изложенных методик анализа в пакете ADAMS построена модель широко распространенного манипулятора «Пума» (промышленный робот РМ-01) с учетом реальных масс и размеров (но не формы) звеньев, а также их связей.

Для каждого звена задавались массы, моменты инерции и геометрические размеры (на основании исходных характеристик деталей и узлов технической документации для данного манипулятора). Моделирование движений манипулятора, обеспечивающих необходимое перемещение схвата, осуществлялось в соответствии с заданными законами движения для каждого сустава. Внешний вид манипулятора и его кинематическая схема с обозначениями звеньев и связей представлены на рис. 1.

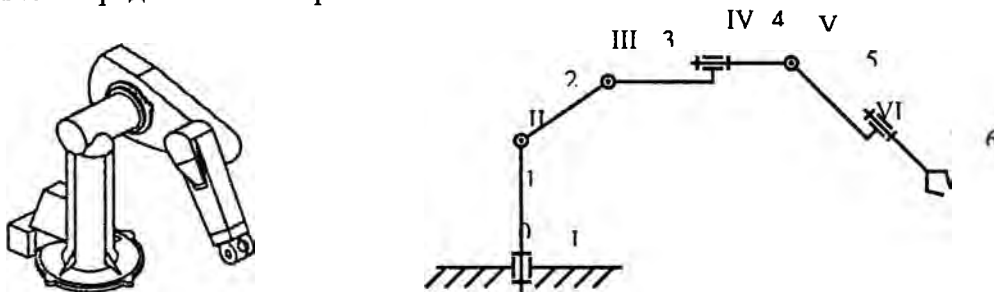


Рис. 1. Промышленный робот РМ-01 (манипулятор «Пума»)

На рис. 2 представлена компьютерная модель манипулятора, построенная в пакете ADAMS. В результате проведения динамического анализа в программе ADAMS можно (помимо основных важных результатов анализа поведения конструкции) получить информацию и о спектре нагрузки для каждого звена.

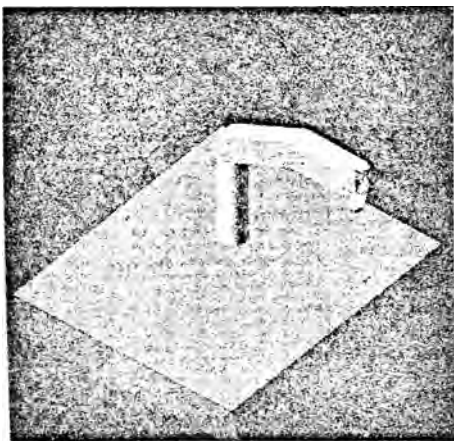


Рис. 2. Компьютерная модель манипулятора в ADAMS

Далее появляется возможность записать ее как массив информации о силовом нагружении звеньев в различные моменты времени в процессе движения механизма. Эту информацию экспортируем в *.lod* файл, который доступен для импорта, чтения и дальнейшего использования в пакете ANSYS. Для обеспечения совпадения размеров и формы, облегчения построения геометрической ANSYS - модели геометрия необходимого звена экспортируется в *.igs* файл.

После импорта *.igs* файла в ANSYS, задания свойств материала, типа конечных элементов и прочих необходимых параметров модель разбивается на конечные элементы и к ней прикладываются нагрузки

путем импорта *.lod* файла. Далее конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния исследуемого звена проводится в пакете ANSYS стандартными методами.

На рис. 3 представлены результаты исследования напряженного состояния для третьего звена манипулятора (контурный график распределения эквивалентных напряжений в рычаге робота).

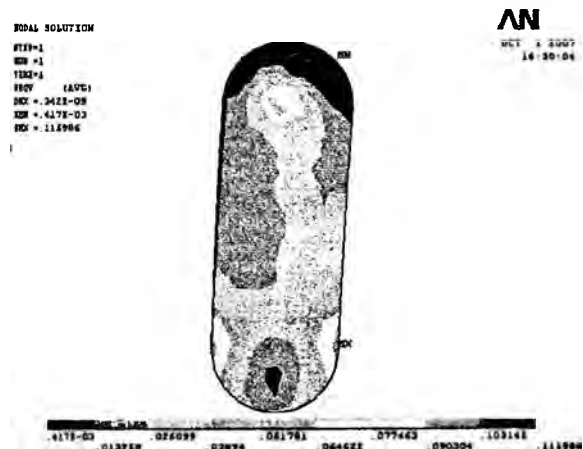


Рис. 3. Распределение эквивалентных напряжений в звене структуры



Рис. 4. Векторный график распределения перемещений узлов звена

Рис. 4 отражает результаты исследования деформированного состояния для третьего звена манипулятора (векторный график распределения суммарных перемещений узлов рычага робота).

Выводы

В настоящей работе изложены и продемонстрированы основные принципы совместного моделирования динамики механизмов в ADAMS с конечно-элементным анализом в пакете ANSYS. На конкретном примере компьютерного моделирования манипулятора показано, как можно при анализе напряженно-деформированного состояния одного из звеньев манипулятора использовать точные данные о приложенных силах к этому звену, которые определяются исходя из динамического моделирования всего манипулятора в ADAMS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гляков, С.А. и др. Компьютерная механика: кинематический и динамический анализ / под ред. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2006. – 375 с.
2. Чжан Чаохуй. ADAMS: основное руководство и примеры использования. – Пекин, 2006. – 482 с.
3. Чигарев, А.В., Кравчук, А.С., Смалюк, А.Ф. ANSYS для инженеров: справочное пособие. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с.
4. Басов, К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
5. Ли Цзэнган. ANSYS 8.0: анализ конструкций и примеры. – Пекин, 2007. – 586 с.

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЛЬНОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ В СРЕДЕ ANSYS WORKBENCH

Ковеня Т.А., Пронкевич С.А.

The article is devoted to describing the results of finite element modeling of console fixed H-beam with application of different types and sizes of finite elements. The comparison of the received results with results of analytical calculations is resulted in the article; also the estimation of accuracy of various variants of modeling is given here.

Как известно [1], достоверность расчетов, выполняемых с применением метода конечных элементов, зависит от типа и количества применяемых в модели конечных элементов. Тип и размеры (густота сетки) конечных элементов определяются характером задачи, особенностями объекта моделирования и некоторыми другими обстоятельствами.

Рассмотрим различные варианты конечно-элементного моделирования стальной двутавровой балки в среде *Ansys Workbench* с целью сравнения полученных результатов друг с другом, а также с известными аналитическими решениями.

Для расчетов был выбран случай нагружения консольной балки пролетом 6 м сосредоточенной силой $P = 1000$ Н (рис. 1).

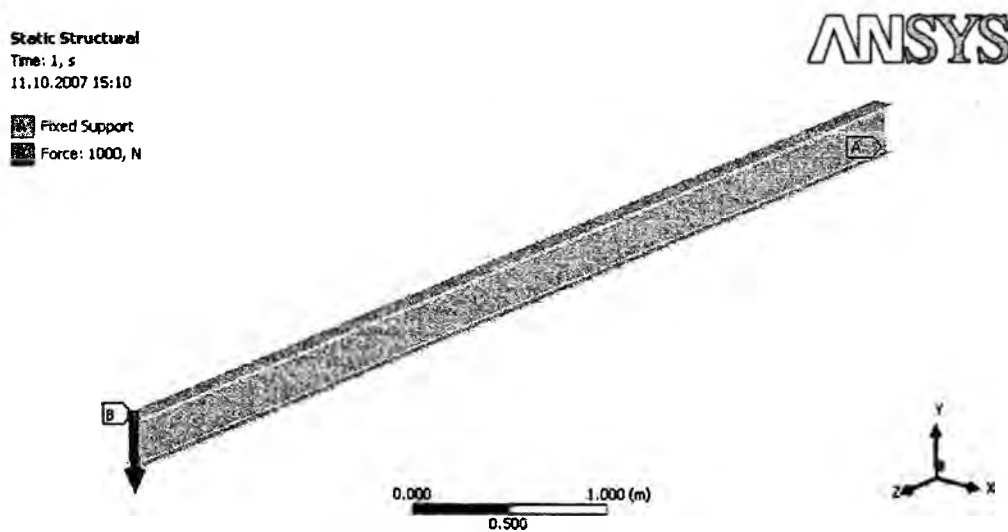


Рис. 1. Схема нагружения консольно закрепленной балки сосредоточенной силой

Рассмотрены три различных варианта конечно-элементного моделирования этого случая нагружения.

Первый вариант моделирования предполагает использование так называемых балочных конечных элементов. При этом вначале в модуле *Design Modeler* формируется линейное тело (*Line Body*), которому присваивается поперечное сечение определенного типа. В нашем случае было сформировано линейное тело длиной 6 м с сечением в виде двутавра высотой 270 мм, с полкой шириной 125 мм и толщиной 10 мм, и стенкой толщиной 6 мм. Расчетный момент инерции такого сечения составляет $I_x = 5008$ см⁴, что почти точно соответствует табличному значению этой величины для двутавра номер 27 ($I_x = 5010$ см⁴ по ГОСТ 8239-72). Это линейное тело было передано в модуль *Simulation* для генерации первого варианта конечно-элементной модели двутавровой балки. По умолчанию *Ansys Workbench* предлагает

ные конечные элементы типа *Beam188* (трехмерный линейный балочный элемент с конечными деформациями [2]).

Этот конечный элемент позволяет решать нелинейные задачи с большими деформациями, однако в данном исследовании рассматривалось только упругое поведение материала балки, в качестве которого принята сталь с модулем Юнга $E = 2,1$ ГПа. Для анализа влияния величины конечного элемента были сформированы разновидности модели с различной длиной балочных элементов. На рис. 2 показаны результаты моделирования консольно закрепленной балки балочными элементами различной длины.

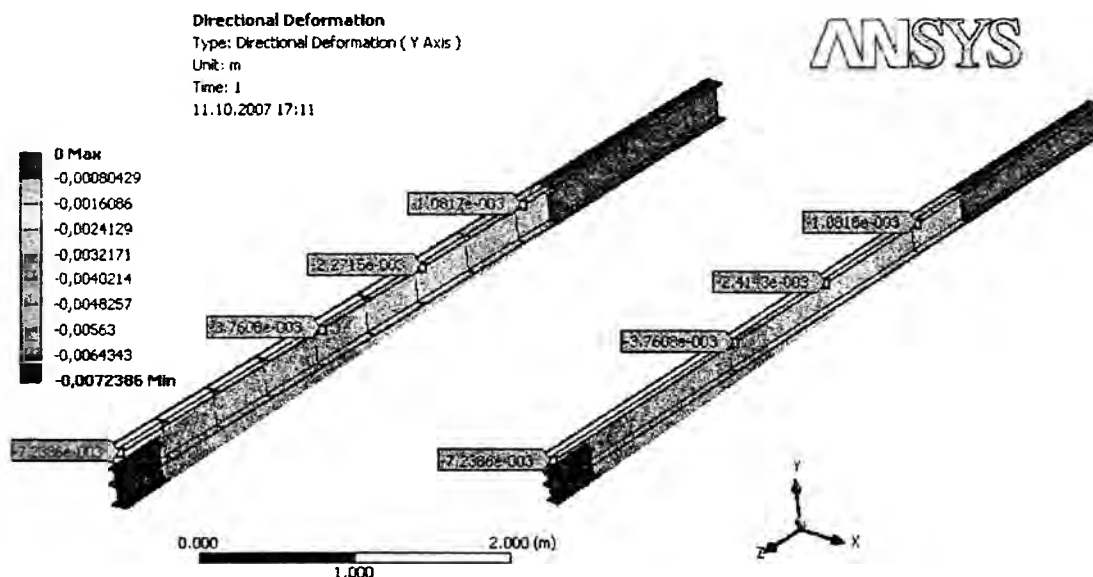


Рис. 2. Результаты моделирования консольно закрепленной балки с применением различного числа балочных конечных элементов ($n = 12$ слева и $n = 3$ справа)

В качестве второго варианта принята сплошная конечно-элементная модель с объемными конечными элементами типа *Solid186* (трехмерный элемент с 20-ю узлами в форме гексаэдра) или *Solid187* (трехмерный элемент с 10-ю узлами в форме тетраэдра). Для этого потребовалось вначале создать трехмерную геометрическую модель двутавровой балки, а затем, используя инструментарий модуля *Simulation*, сформировать сеть объемных конечных элементов. Так же, как и в предыдущем случае, были рассмотрены разновидности модели с различными размерами конечных элементов. На рис. 3 показаны варианты моделей балки с объемными конечными элементами различных типов.

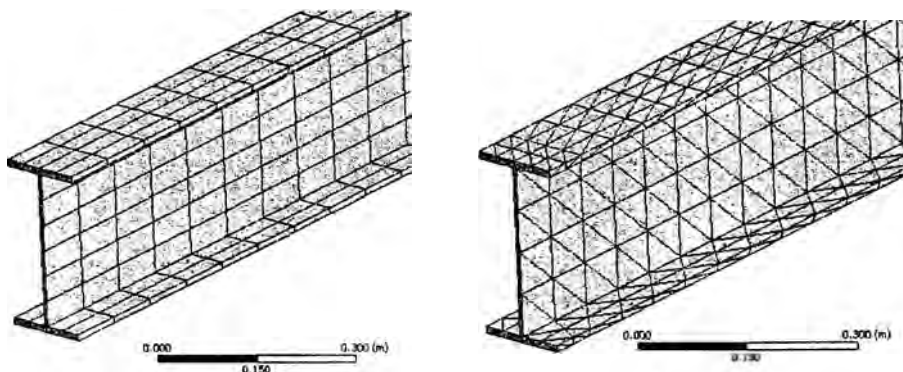


Рис. 3. Конечно-элементные модели балки с участием конечных элементов *Solid186* (слева) и *Solid187* (справа)

В качестве третьего варианта была принята модель балки, сформированная при помощи оболочечных конечных элементов *Shell181* (4-узловой оболочечный элемент с конечными деформациями). Для создания такой модели потребовалось предварительно построить срединные поверхности полок и стенки двутавра, а затем сформировать сетку конечных элементов. На рис. 4 показаны срединные поверхности и сформированная на них сетка оболочечных конечных элементов.

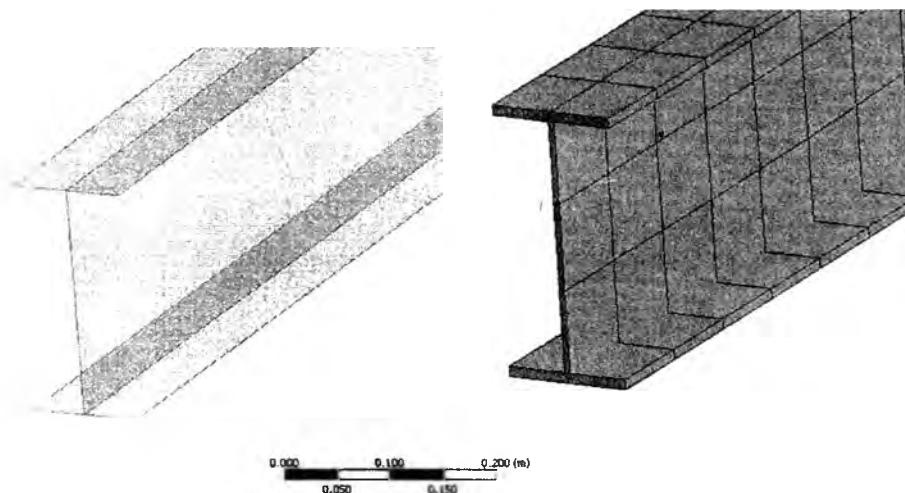


Рис. 4. Срединные поверхности и сетка оболочечных элементов типа *Shell181*

Ниже в табл. 1 представлены результаты расчета перемещений в направлении вертикальной оси Y нескольких контрольных точек осевой линии консольно закрепленной балки, рассчитанные с участием трех перечисленных выше видов конечно-элементных моделей. Для сравнения выбраны перемещения, поскольку в методе конечных элементов на них основываются все остальные параметры изгиба. Аналитический расчет выполнен в соответствии с расчетной схемой, показанной на рис. 5 с использованием уравнения упругой линии балки [3] по следующим формулам:

$$y = -\frac{P}{EI_x} \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right); \quad y_{\min} = -\frac{Pl^3}{3EI_x}$$

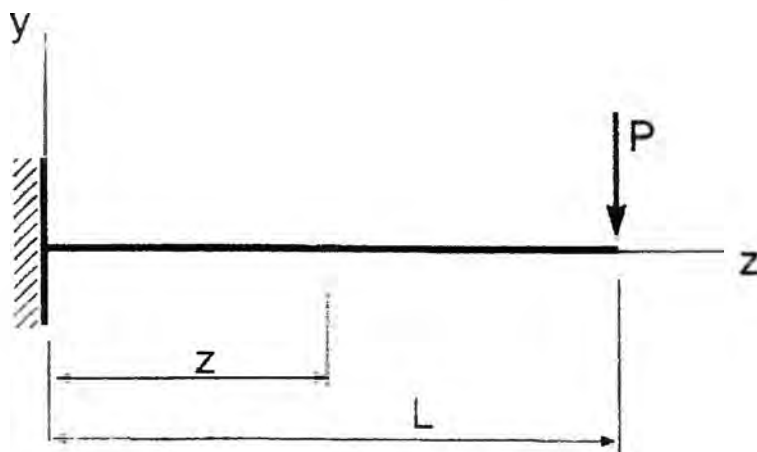


Рис. 4. Расчетная схема консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на конце

Результаты расчета перемещений точек осевой линии консольно закрепленной балки по оси Y ; под значением перемещения в скобках указано отклонение от результата аналитического расчета

		Перемещение в контрольной точке осевой линии балки, мм			
		$z = L/3$	$z = L/2$	$z = 2L/3$	$z = L$
Расчет с использованием уравнения упругой линии		-1,01	-2,14	-3,55	-6,85
Расчет в <i>Ansys Workbench</i> для разных типов элементов, в том числе:					
Балочные элементы <i>Beam188</i> с дискретностью n разбиения по длине балки	$n = 12$	-1,08 (6,9%)	-2,27 (6,1%)	-3,76 (5,9%)	-7,24 (5,7%)
	$n = 5$	-1,15 (13,8%)	-2,36 (10,3%)	-3,81 (7,3%)	-7,24 (5,7%)
	$n = 3$	-1,08 (6,9%)	-2,41 (12,6%)	-3,76 (5,9%)	-7,24 (5,7%)
	$n = 2$	-1,52 (50,5%)	-2,27 (6,1%)	-3,98 (12,1%)	-7,24 (5,7%)
Элементы <i>Solid186</i> с различной дискретностью разбиения; N – общее число конечных элементов, l – длина элемента	$N = 960$ $l = 0,1$ м	-1,08 (6,9%)	-2,27 (6,1%)	-3,76 (5,9%)	-7,23 (5,5%)
	$N = 120$ $l = 0,5$ м	-1,07 (5,9%)	-2,26 (5,6%)	-3,75 (5,6%)	-7,22 (5,4%)
	$N = 60$ $l = 1,0$ м	-1,07 (5,9%)	-2,25 (5,1%)	-3,73 (5,1%)	-7,20 (5,1%)
Элементы <i>Solid187</i> с различной дискретностью разбиения; N – общее число конечных элементов, l – максимальный габаритный размер элемента	$N = 8431$ $l = 0,1$ м	-1,08 (6,9%)	-2,27 (6,1%)	-3,76 (5,9%)	-7,23 (5,5%)
	$N = 2523$ $l = 0,4$ м	-1,07 (5,9%)	-2,26 (5,6%)	-3,75 (5,6%)	-7,22 (5,4%)
Элементы <i>Shell181</i> с различной дискретностью разбиения; N – общее число конечных элементов, l – максимальный габаритный размер элемента	$N = 420$ $l = 0,1$ м	-1,06 (5,0%)	-2,22 (3,7%)	-3,68 (3,7%)	-7,09 (3,5%)
	$N = 132$ $l = 0,5$ м	-1,05 (4,0%)	-2,21 (3,3%)	-3,67 (3,4%)	-7,06 (3,1%)
	$N = 106$ $l = 0,74$ м	-1,00 (0,1%)	-2,13 (0,5%)	-3,55 (0%)	-6,88 (0,4%)
	$N = 76$ $l = 1,0$ м	-0,92 (8,9%)	-1,97 (7,9%)	-3,33 (6,2)	-6,54 (4,5%)

Как показывает анализ данных, приведенных в табл. 1, расчет перемещений в консольной балке двутаврового сечения с применением балочных конечных элементов типа *Beam188* дает результаты, расходящиеся с результатами аналитического расчета на 5–7 % при числе балочных конечных элементов, равном или большем 12. Длина балочного конечного элемента составляет при этом 0,5 м. При увеличении длины балочного элемента до 1 м и выше точность расчета начинает уменьшаться, и погрешность может достигать 50% при длине балочного элемента, равном половине длины исследуемой балки.

Результат с погрешностью 5–7 % можно получить, применив объемные 20-узловые гексагональные конечные элементы типа *Solid186*. При этом количество таких элементов равно 960, а длина – 0,1 м.

Как видно из таблицы, точность расчета (по сравнению с аналитическим) при увеличении длины объемного конечного элемента не уменьшается (как можно было ожидать), а повышается и при длине элемента, равной 1 м, величина ошибки составляет 5–6 %. Количество конечных элементов составляет при этом 60. Средствами *Ansys Workbench* не удастся получить для этой модели сетку объемных элементов типа *Solid186* с длиной больше 1 м.

Применение объемных 10-узловых конечных элементов в форме тетраэдра типа *Solid187* дает погрешность 5–7 % при числе элементов, равном 8431. Габаритный размер конечных элементов в этом случае составляет 0,1 м. При увеличении размера конечных элементов такого типа точность расчетов в сравнении с аналитическим решением также несколько повышается, и при габаритных размерах конечного элемента 0,4 м (максимально возможный размер для данной модели) погрешность составляет 5–6 %.

Особые результаты дает третий вариант конечно-элементной модели, в которой применены оболочечные конечные элементы типа *Shell181*. При габаритном размере оболочечного конечного элемента, равном 0,1 м, погрешность расчета, по сравнению с аналитическим, составляет 3-5%, и уменьшается с увеличением длины конечного элемента до 0,74 м. В этот момент погрешность расчета составляет 0,1-0,5%. При дальнейшем увеличении длины конечного элемента точность расчета начинает падать.

Основываясь на приведенных выше данных, можно сделать вывод о том, что результаты конечно-элементного моделирования существенно зависят от типа и количества применяемых для моделирования конечных элементов. Выбор типа конечных элементов может быть продиктован как требуемым уровнем точности, так и вычислительными ресурсами, имеющимися в распоряжении расчетчика. В данном конкретном случае моделирования оболочечные конечные элементы обладают наибольшей точностью, что связано, по-видимому, с наиболее полным воспроизведением в этих элементах геометрических особенностей объекта моделирования. Интересно отметить также, что точность расчетов (в сравнении с аналитическим решением) в случае применения объемных и оболочечных конечных элементов при уменьшении количества (и увеличении размеров) элементов не уменьшается, как этого можно было ожидать, а несколько увеличивается, доходя до некоторого оптимума, а лишь затем уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплун, А.Б., Морозов, Е.М., Олферьева, М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
2. Басов, К.А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
3. Феодосьев, В.И. Соппротивлением материалов. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПК "ANSYS" К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Щетько Н. С.

Buildings and structures are affected externally by the blowing of wind in several aspects. Aerodynamic effects are the most important for multi-stored buildings. The aerodynamic effect is concerned with the configuration of the air flow in the building domain. This configuration determines the distributions of pressure and velocity on the building surfaces. In paper are presented some questions of using "ANSYS" for the purposes of structural aerodynamics.

Обозначенный в последние годы на территории постсоветского пространства курс на увеличение этажности городской застройки способствует выдвиганию новых требований к обеспечению прочности, надежности долговечности зданий и сооружений. Возрастает ответственность за качество и адекватность расчетов, как отдельных строительных конструкций, так и строений в целом. Для высоких зданий и сооружений доминирующей нагрузкой является ветровая, что делает вопросы строительной аэродинамики весьма актуальными и существенными.

Действующие нормативные документы, разработанные несколько десятилетий назад [0] зачастую не могут дать ответы на ряд вопросов выдвинутых современной строительной практикой. В связи с этим разрабатываются новые нормативные документы, регламентирующие проектирование высоких зданий [0, 0, 0] назначающие повышенные требования к безопасности и комфортности. Разработаны многочисленные методы и даны примеры [0, 0, 0] расчета зданий на ветровую нагрузку [0], в том числе, на действие пульсационной составляющей [0, 0], которые позволяют достаточно точно определить характер воздействия ветра на сооружение.

Для подтверждения данных, полученных при экспериментальных натурных исследованиях, а также при невозможности таковых, все чаще применяются универсальные расчетные программные комплексы [0] позволяющие прояснить физическую природу происходящих явлений [0, 0, 0, 0].

Среди важных задач строительной аэродинамики можно выделить задачи определения аэродинамических коэффициентов зданий и сооружений сложной формы, определения характера распределения ветровых потоков в пределах городской застройки, от которого может зависеть комфортность пребывания людей как в помещении так и в пределах застройки [0, 0].

Для решения некоторых задач строительной аэродинамики удобно воспользоваться программным комплексом "ANSYS", который на протяжении последних десятилетий активно применяется для расчетов во многих областях науки и техники.

Модуль "ANSYS/FLOTRAN" позволяет решать задачи анализа поля стационарных и нестационарных потоков газа (воздуха) включающих жидкие и (при необходимости) твердые области), определять распределение температуры и давления для однофазной вязкой жидкости (компоненты скорости, давления и температуры вычисляются в соответствии с законом сохранения массы, импульса и энергии). Для определенного типа задач могут быть полезны опции определения кинетической энергии турбулентности и диссипации турбулентной энергии.

Задачи гидрогазодинамического анализа FLOTRAN являются высоко нелинейными. Известно, что получение сходящихся решений для такого типа задач в некоторых случаях может вызвать определенные сложности. В ПК реализовано несколько способов улучшения сходимости и получения устойчивого решения: инерционная релаксация, модифицированная инерционная релаксация управление порядком интегрирования. Кроме того, разработчиками предложено несколько моделей турбулентности (рис. 1), позволяющих в зависимости от условий задач получать верное решение.

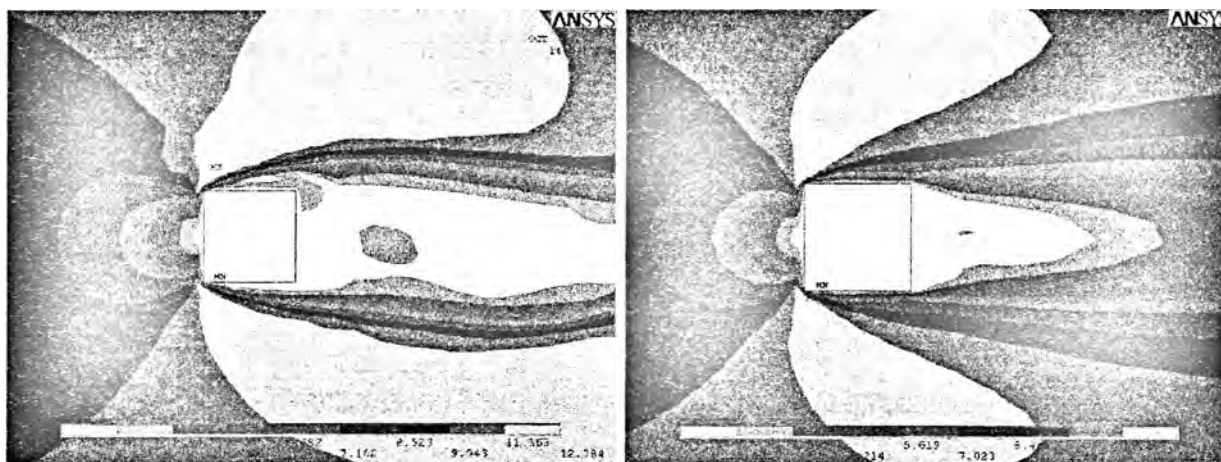


Рис. 1. Картина распределения скоростей потока

Движение воздуха в общем случае описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, уравнениями Навье — Стокса. Уравнения являются одними из важнейших в гидрогазодинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач. Система состоит из двух уравнений: уравнения движения, уравнения неразрывности. В векторном виде для несжимаемой жидкости они записываются следующим образом:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -(\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} + \nu \cdot \Delta \cdot \vec{V} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \vec{f}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0,$$

где ∇ — оператор Гамильтона, Δ — оператор Лапласа, \vec{V} — вектор скорости, t — время, ν — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность, P — давление, \vec{f} — вектор плотности массовых сил.

Иногда в систему уравнений Навье-Стокса дополнительно включают уравнение теплопроводности и уравнение состояния.

В классической постановке задач аэродинамики поток принято считать несжимаемым, благодаря чему упрощаются дифференциальные уравнения, используемые при моделировании ряда задач и трудности связанные с их решением, а также ускоряется решение задач больших размерностей.

Программным комплексом используется решатель, реализующий последовательный алгоритм, т.е. для каждой степени свободы (температуры, давления, скорости и т. д.) раздельно решается система матриц, полученных конечно-элементной дискретизацией основного уравнения.

Автором решена двумерная задача обтекания профилей сооружения потоком ветра в гидрогазодинамическом модуле “ANSYS/FLOTRAN” с учетом стандартных значений характеристик воздуха, его плотности и вязкости, получены распределения векторов скоростей и аэродинамических коэффициентов и поля турбулентных пульсаций в окрестностях сооружений (рис. 2, 3, 4).

При моделировании профиля сооружения требуется моделировать турбулентную структуру пограничного слоя атмосферы с учетом вертикального градиента средней скорости ветра и энергетического спектра его пульсационной составляющей, т. е. учитывать изменчивость структуры ветрового потока (рис. 5). Значительное влияние на распределение скоростей потока оказывает также шероховатость подстилающей поверхности и тип местности.

Таким образом, для всестороннего и полного изучения влияния воздействия ветра на сооружения требуются точные данные о предполагаемой местности строительства, расположении розы ветров и характере застройки прилегающих территорий, которые позволят снизить неопределенность и повысить точность расчетов.

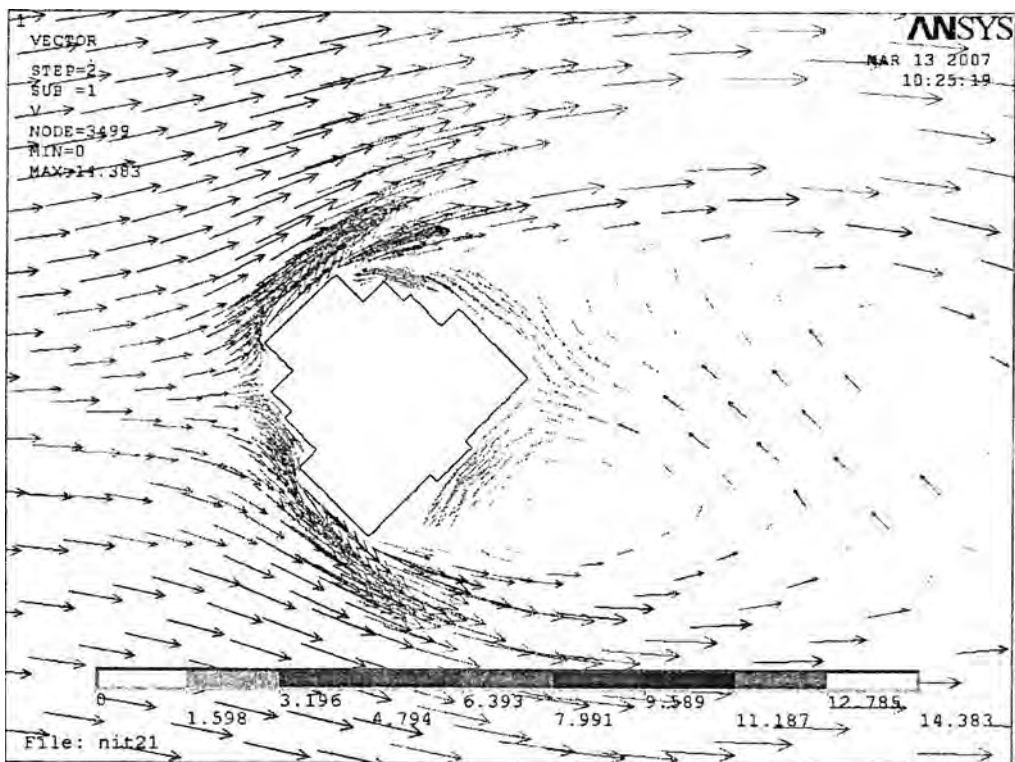


Рис. 2. Картина распределения векторов скоростей турбулентного потока для здания с перекрытием в форме пирамиды

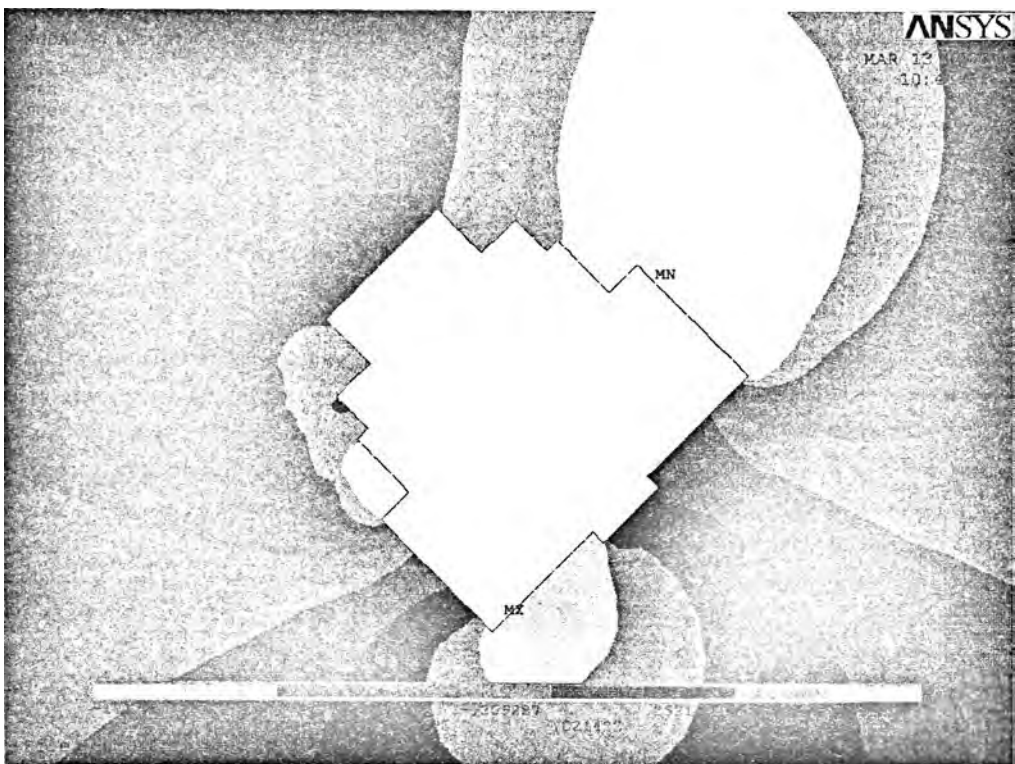


Рис. 3. Картина распределения аэродинамических коэффициентов

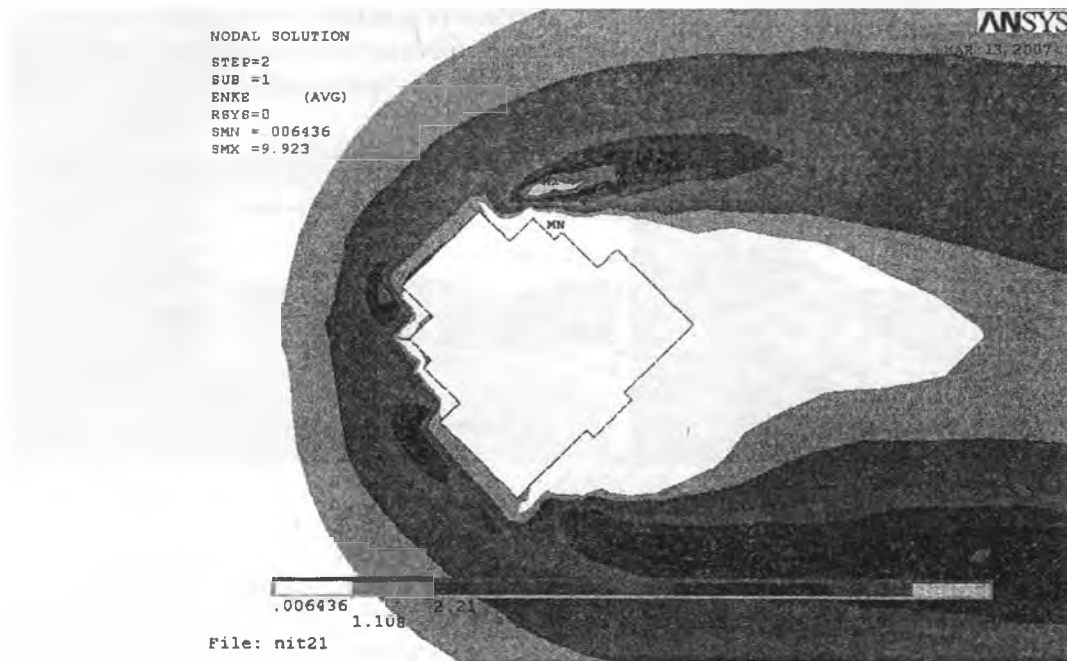


Рис.4. Поле турбулентных пульсаций

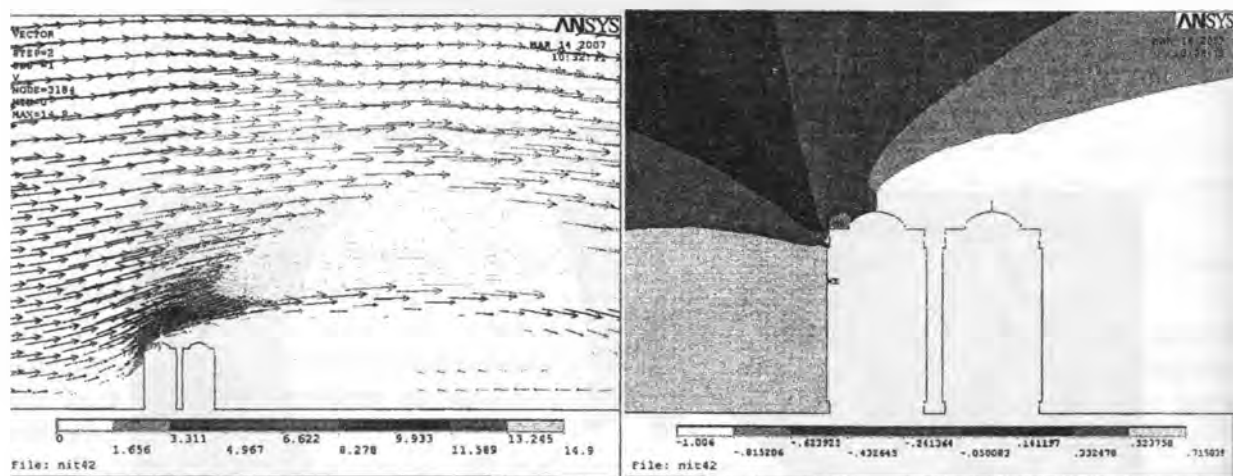


Рис. 5. Картина обтекания профиля сооружения потоком ветра и распределение аэродинамических коэффициентов по высоте.

Автором отмечена часть возможностей программного комплекса ПК “ANSYS” по решению задач строительной аэродинамики, которые может прояснить и дополнить некоторые практические и теоретические вопросы.

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП 2.01.07 – 85. Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 36 с.
2. ТСН 31-332-2006. Жилые и общественные высотные здания / Правительство С-Петербурга, 2006.
3. ДБН В.1.2-2:2006. Нагрузки и воздействия. Киев: Мінбуд України, 2006. – 60 с.
4. МГСН 4.19-05. Многофункциональные высотные здания и комплексы / Правительство Москвы, 2005.
5. Беспрозванная, И. М. Воздействие ветра на высокие сплошностенные сооружения / И. М. Беспрозванная, А. Г. Соколов, Г. М. Фомин. – М.: Стройиздат, 1976. – 183 с.
6. Босаков, С. В. К расчету сооружений на ветровую нагрузку / С. В. Босаков, О. Калаша // Строительство и Недвижимость. – № 48. – 2003. – С. 22–23.
7. Симиу Э. Воздействие ветра на здания и сооружения / Э. Симиу, Р. Сканлан. – М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
8. Савицкий, Г. А. Ветровая нагрузка на сооружения / Г. А. Савицкий. – М.: Стройиздат, 1972, – 109 с.
9. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. – М.: Стройиздат, 1978. – 216 с.
10. Попов, Н. А. Рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки / Н. А. Попов. – М.: Стройиздат, 2000 – 45 с.
11. Остроумов, Б. В. Учет динамического воздействия атмосферной турбулентности при расчете зданий и сооружений на действие ветра / Б. В. Остроумов, М. А. Гусев // Монтажные и специальные работы в строительстве. – № 8. – 2007. – С. 22–23.
12. Щетько, Н. С. Определение аэродинамических характеристик зданий и сооружений сложной формы с помощью ПК “ANSYS” / Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – № 3 (12). – 2007. – С. 41–46.
13. A computational model to calculate the flow-induced pressure fluctuations on buildings S. Senthoooran, Dong-Dae Lee, S. Parameswaran. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 92 (2004) 1131–1145.
14. Wind load effects and equivalent static wind loads of tall buildings based on synchronous pressure measurements. Guoqing Huang, Xinzhong Chen Engineering Structures 29 (2007) 2641–2653.
15. Numerical evaluation of wind effects on a tall steel building by CFD. Shenghong Huang, Q.S. Li, Shengli Xu. Journal of Constructional Steel Research 63 (2007) 612–627.
16. Dynamic response of wind-excited building using cfd s. Swaddiwudhipong and m. S. Khan journal of sound and vibration (2002) 253(4), 735}754.
17. Стриженов, С.И. Аэродинамика зданий / С. И. Стриженов, Э. И. Реттер. – М.: Стройиздат, 1968. – 294 с.
18. Реттер, Э. И. Архитектурно-строительная аэродинамика / Э. И. Реттер. – М.: Стройиздат, 1984. – 240 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Щетько Николай Сергеевич – инженер лаборатории несущих конструкций отдела строительных конструкций, аспирант БелНИИС.

Служебный адрес – 220114, Минск, ул. Ф. Скорины, 15б. Тел. 267 78 97.

Домашний адрес – 220000, Минск, ул. Коллекторная, 20 – 90. Тел. 8 029 7585570
8 029 6900807

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАНЕВРА «ПЕРЕСТАВКА» В ADAMS

Алферчик А.О.

Description of a model of a vehicle MAZ-4570 assigned for dynamic analysis is observed in the present article. Results of dynamic simulation of resetting maneuver and results of finite-element modelling of front and rear car suspension are also given here

Современный уровень развития вычислительной техники позволяет значительно сократить время на проектирование автомобилей путем использования специализированного программного обеспечения. Примерами могут служить такие программные пакеты как SolidWorks, Unigraphics, MSC.Patran, MSC.Nastran и другие. Их использование позволяет еще в процессе проектирования оптимизировать детали и конструкции с целью уменьшения их массы и увеличения прочности.

В данной работе представлен пример расчета модели автомобиля

МАЗ при выполнении маневра «переставка». Маневр «переставка» представляет собой переход автомобиля с одной полосы движения на другую. При данном процессе подвеска автомобиля подвергается значительным динамическим нагрузкам, а при определенных условиях существует вероятность опрокидывания автомобиля. Моделирование проводится с целью оценки устойчивости автомобиля при выполнении маневра «переставка», а так же проводится анализ напряженно-деформированного состояния деталей подвески автомобиля.

Объектом расчетных исследований при выполнении маневра «переставка» служил автомобиль-самосвал МАЗ-4570. Проводится моделирование маневра в среде «ADAMS», а так же анализ напряженно-деформированного состояния элементов подвески автомобиля в пакете ANSYS.

Оценка управляемости и устойчивости автомобиля производилась в пакете ADAMS/Car с использованием трехмерных моделей, созданных в пакете UNIGRAPHICS. В модели учитываются массово-инерционные характеристики элементов в системе координат, проходящей через их центры масс. Моменты инерции и координаты центров масс находились в системе твердотельного моделирования UNIGRAPHICS, массы брались из системы управления техдокументацией УГК МАЗ iMAN.

Модель сбалансирована в соответствии с грузоподъемностью автомобиля (4550 кг) таким образом, чтобы высота центра массы балласта над платформой соответствовала грузу объемом $11,5 \text{ м}^3$ плотностью $0,57 \text{ т/м}^3$, так как это указано в техническом задании на автомобиль.

Для управления моделью автомобиля по заданной траектории используется специализированный модуль ADAMS/Driver, подгружаемый автоматически при запуске модели на расчет.

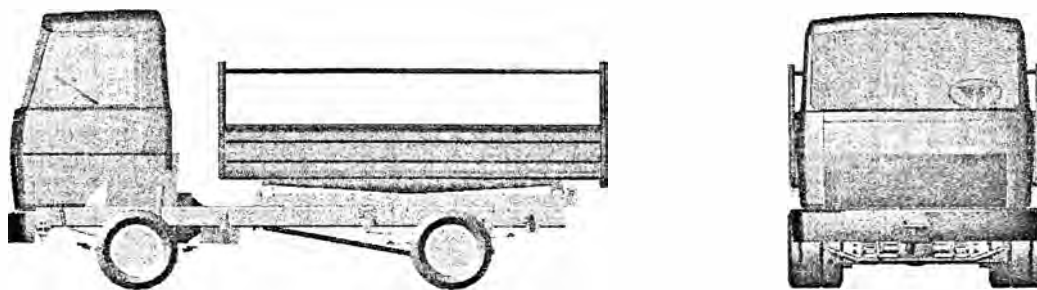


Рис. 1. Вид модели в пакете Unigraphics

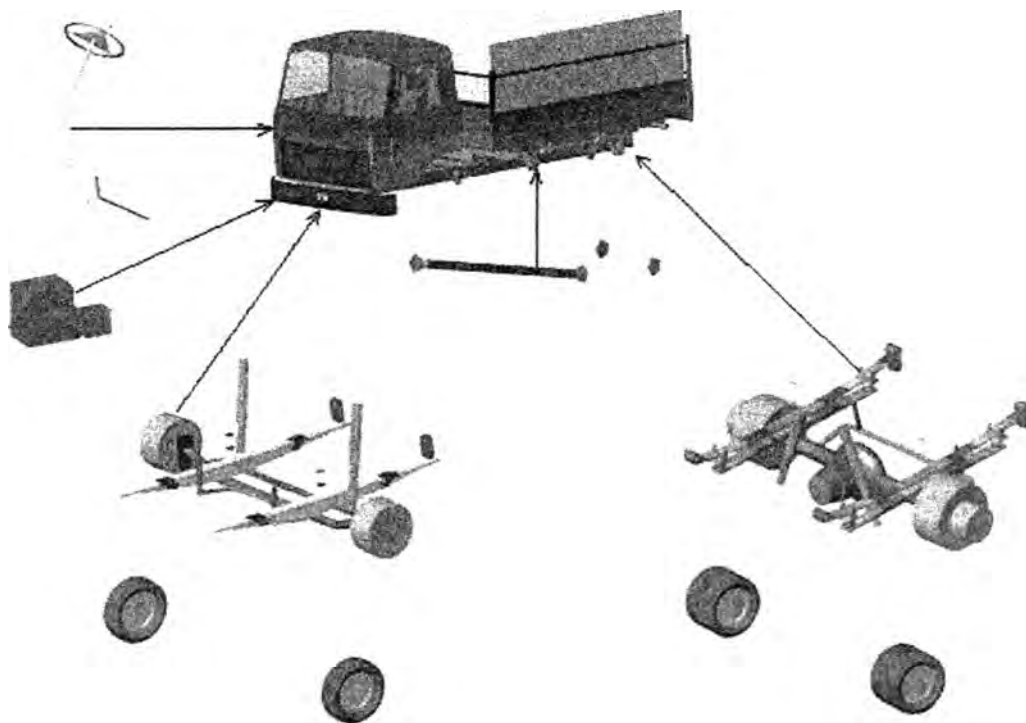


Рис. 2. Структура модели

Модель включает в себя следующие элементы:

- модель подвески автомобиля;
- модель трансмиссии;
- модель рулевого управления;
- модель человека-оператора.

Для конечно-элементных расчетов в пакете ANSYS применялись твердотельные модели, импортированные из Unigraphics

В исследуемом автомобиле передняя и задняя подвески – зависимые рессорные. Функцию упругих элементов и направляющего аппарата в подвесках выполняют многоресорные. В передней подвеске установлена 8-листовая рессора, в задней – 4-листовая с подвеской параболы.

Модель трансмиссии исследуемого автомобиля формируется двумя “шаблонами”: “силовой агрегат” и “карданная передача”. Шаблон “силовой агрегат” моделирует работу двигателя и коробки передач (сцепление не моделируется). Шаблон “карданная передача” состоит из модели выходного вала коробки передач, карданного вала, главной передачи и дифференциала. Модель силового агрегата представляет собой жесткий элемент с заданными массово-инерционными характеристиками. Силовой агрегат вращающихся элементов не имеет

Шаблон “рулевое управление” включает следующие элементы:

- рулевой механизм;
- колонку: рулевой вал, рулевое колесо;
- рулевой привод: сошка, продольная рулевая тяга.

Рулевое управление работает только по кинематической схеме. Это в свою очередь упрощает модель и сокращает затраты времени на расчет.

Одним из элементов разрабатываемой в ADAMS/Car модели автомобиля-самосвала является человек-оператор, представленный математической моделью. Для управления моделью автомобиля по заданной траектории используется специализированный модуль ADAMS/Driver, подгружаемый автоматически при запуске расчета. Модуль ADAMS/Driver включает следующие компоненты:

- модуль тягово-скоростной динамики;
- модуль поперечной динамики;
- модуль управления трансмиссией.

Моделирование маневра “переставка” для оценки автомобиля на соответствие требованиям РД

Изучение автомобиля как динамической системы проводится по традиционной схеме:

- моделируется автомобиль в модуле ADAMS/Car;
- задаются параметры управляющего воздействия, характеристики самообучающегося виртуального водителя: скорость автомобиля, передачу, диапазон оборотов двигателя, координаты траектории движения;
- выполняется расчет маневра модели автомобиля по заданной траектории.

Методика дорожных испытаний “переставка” изложена в нормативных документах РД 37.001.005-86, ОСТ 37.001.471-88 и проекте ГОСТа РФ “Управляемость и устойчивость автотранспортных средств”. Но в ОСТ 37.001.471-88, в отличие от РД, не приведены нормативные количественные параметры для оценки устойчивости и управляемости автомобилей при выполнении маневра “переставка”. Поэтому РД 37.001.005-86 используется при сертификации автомобилей МАЗ, эту методику можно применить для расчетной оценки устойчивости и управляемости автомобилей при выполнении маневра “переставка”.

Испытания на выполнение маневра «переставка», по РД предназначены для определения предельной скорости $V_{пр}$ выполнения маневра перехода автомобиля с одной полосы движения на соседнюю. В целях экономии времени испытания проводятся только на участке смены полосы длиной 20 м. ($S_{п}=20$ м.). Дополнительными показателями, характеризующими отдельные составляющие свойств управляемости, служат:

$V_{тр}$ – скорость АТС при появлении снижения устойчивости управления траекторией (критическая ситуация проявляется в сносе передней оси, т.е. выходе передней оси за разметку), км/ч;

$V_{курс}$ – скорость АТС при появлении снижения устойчивости курсового управления (критическая ситуация проявляется в заносе, выходе задней оси за разметку), км/ч;

$V_{кк}$ – скорость АТС при появлении курсовых колебаний, км/ч;

$V_{отр}$ – скорость АТС при появлении отрыва колеса от поверхности дороги, км/ч.

Предельная скорость АТС $V_{пр}$ при выполнении маневра определяется как среднее значение скоростей двух заездов: заезда с наибольшей скоростью, при которой не было потери устойчивости управления, и заезда с наибольшей скоростью, при которой наблюдается это явление.

Оценка показателей устойчивости управления АТС при выполнении маневра “переставка” производится путем сравнения величин скоростей $V_{тр}$, $V_{курс}$, $V_{кк}$, $V_{отр}$ полученных при испытаниях с нормативными значениями.

Для исследуемого автомобиля нормативные значения скоростей:

$[V_{курс}] = 52$ км/ч,

$[V_{кк}] = 55$ км/ч,

$[V_{пр}] = 59$ км/ч

Начальную скорость заездов примем равной 47 км/ч.

Расчеты проводились с интервалом в 2 км/ч при скоростях 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59 км/ч.

Схема разметки участка для проведения испытания “переставка” представлена на рис. 3.

При проведении испытаний автомобиль разгоняется до заданной скорости на высшей передаче, движется с этой скоростью в коридоре разметки участка А. После пересечения передними колесами линии а-а водитель отпускает педаль акселератора и начинает выполнять заданный маневр.

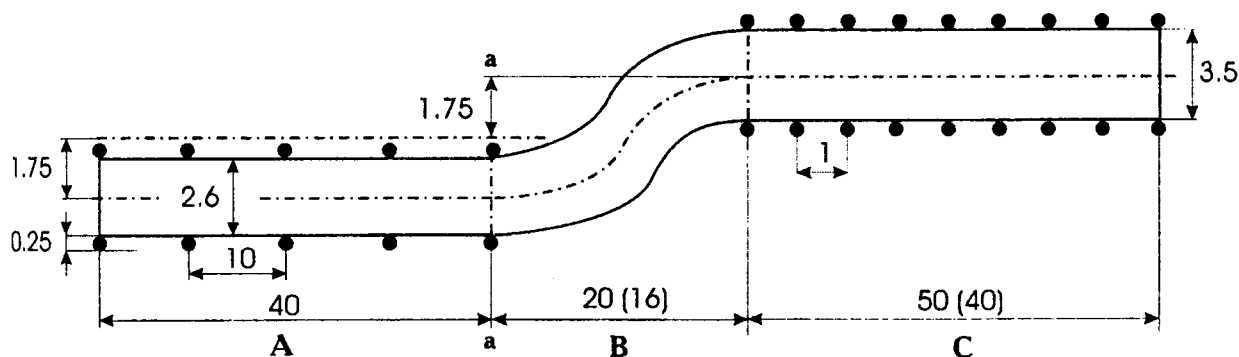


Рис. 3. Схема разметки участка для проведения испытаний “переставка”
(все размеры указаны в метрах)

Выход модели автомобиля за разметку будим фиксировать по ее анимационной модели.

Результаты моделирования маневра “переставка”

Визуальный контроль движения модели автомобиля и анализ графиков показывает, что на скорости 47 км/ч наблюдаются курсовые колебания, что заметно по графику угловой скорости поворота. Следовательно, $V_{кк} = 47$ км/ч – скорость появления курсовых колебаний. Траектории движения автомобиля при различных скоростях приведены на рис. 4.

Автомобиль проходит контрольный прямолинейный участок С на скоростях 47, 49 и 51 км/ч без выхода за разметку.

На скорости 53 км/ч у модели автомобиля при прохождении участка С наблюдается отрыв переднего правого колеса, что видно по графику нормальных реакций на этом колесе. Автомобиль теряет управляемость и выходит за пределы разметки. Следовательно, $V_{отр} = 53$ км/ч – скорость появления отрыва колеса и потери устойчивости управления траекторией.

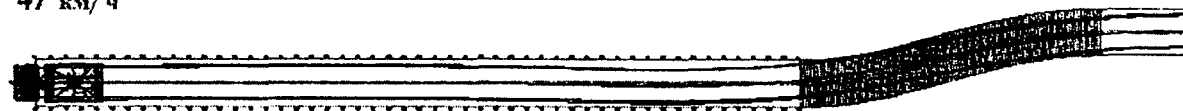
На скорости 57 км/ч при движении на участке В у модели происходит отрыв от дороги колес правого борта, далее, при входе на прямолинейный участок С, теряют контакт с дорогой шины левого борта. Заваливания автомобиля “на бок” не наблюдается. При движении на скорости 59 км/ч автомобиль входит в занос, задняя ось выходит за пределы разметки, виртуальный водитель стабилизирует движение, которое происходит с высокими курсовыми колебаниями. Значит, $V_{курс} = 59$ км/ч – скорость появления снижения устойчивости курсового управления.

Сравнение показателей устойчивости с нормативными значениями $[V_{курс}] = 50$ км/ч, $[V_{кк}] = 52$ км/ч, $[V_{пр}] = 56$ км/ч показывает, что исследуемая модель автомобиля обладает высокой склонностью к курсовым колебаниям. Модель обладает высоким запасом устойчивости по заносу.

49 км/ч



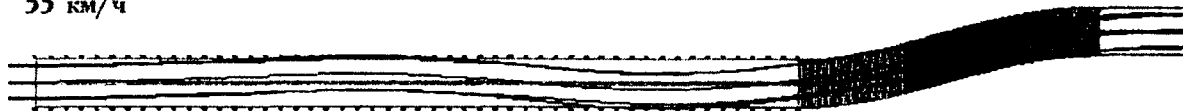
47 км/ч



51 км/ч



55 км/ч



57 км/ч

59 км/ч



Рис. 4. Траектория движения модели

Анализ напряженно-деформированного состояния моделей передней и задней подвески методом конечных элементов

Анализ напряженно-деформированного состояния проводится путем расчета моделей передней и задней подвески методом конечных элементов в пакете ANSYS 10.0. Выбор этого пакета обусловлен тем, что он обладает широким набором инструментов как для построения твердотельной модели, так и для разбиения ее на конечные элементы. Основой для расчета служат модели, импортированные из Unigraphics. Основные объекты расчетов – стабилизаторы поперечной устойчивости и листовые рессоры. Величины нагрузок на каждое из колес известны нам из расчетов на устойчивость, проведенных ранее. Точные значения нагрузок мы можем узнать из соответствующих графиков, ознакомиться с которыми можно с помощью пакета ADAMS/Postprocessor .

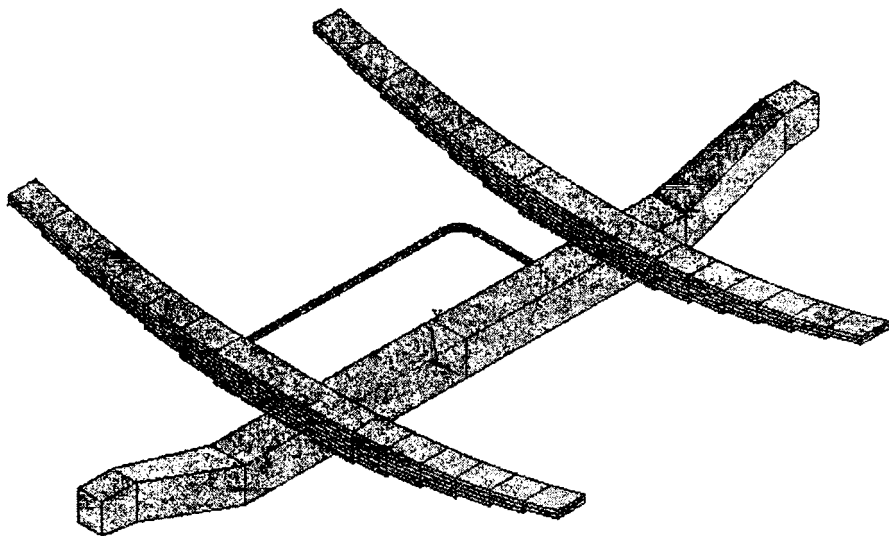


Рис. 5. Модель передней подвески

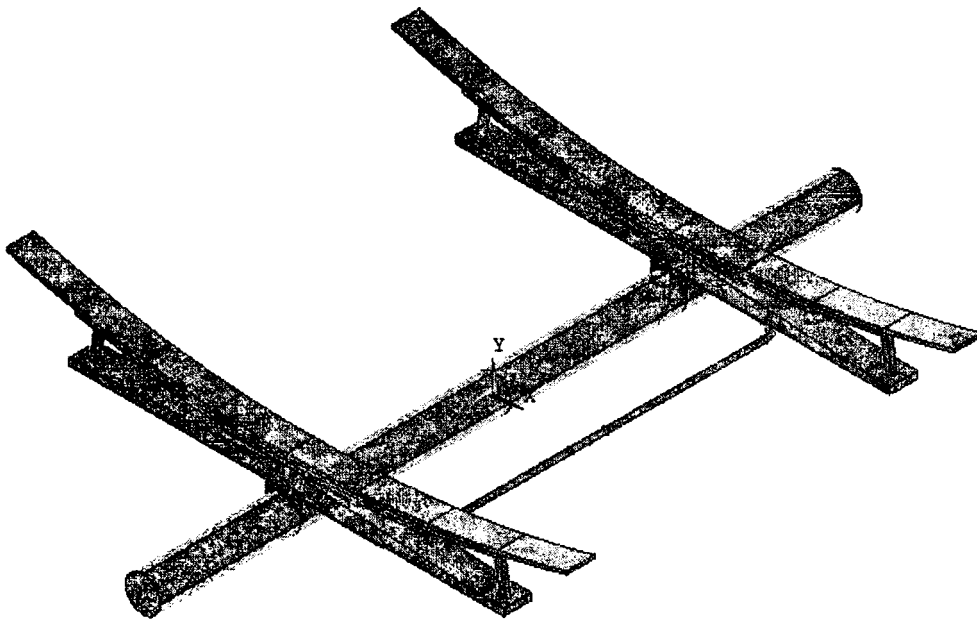


Рис. 6. Модель задней подвески

Разбиение модели на конечные элементы

При разбиении используется элемент категории Solid. Данная категория предназначена для проведения прочностных расчетов. Тип элемента – Tet 10node 92 (SOLID 92). Он представляет собой объемный четырехгранник с десятью узлами, расположенными на углах и серединах сторон. Элементы этого типа предпочтительно использовать для нерегулярных сеток, полученных свободным разбиением. Данный тип элементов позволяет использовать изотропные, пластичные и другие нелинейные виды материалов, за исключением гиперэластичных.

Нагружение и конечно-элементный расчет модели

Нагружение моделей производим в соответствии с данными, полученными при динамическом расчете в пакете ADAMS. Для конечно-элементного расчета из всего диапазона нагрузок выберем пиковые.

Для передней подвески пиковая нагрузка составляет 46780 Н на переднее левое колесо при скорости 57 км/ч через 12 секунд после начала испытания.

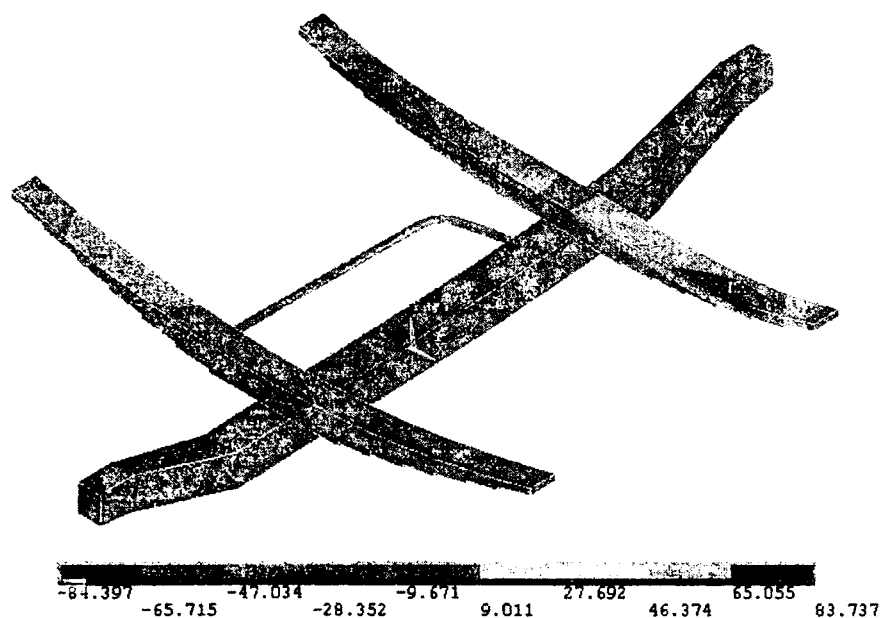


Рис. 7. Распределение деформаций в передней подвеске при пиковой нагрузке

Для задней подвески пиковая нагрузка – 29780 Н на заднее левое колесо при скорости 57 км/ч через 14 секунд после начала испытания.

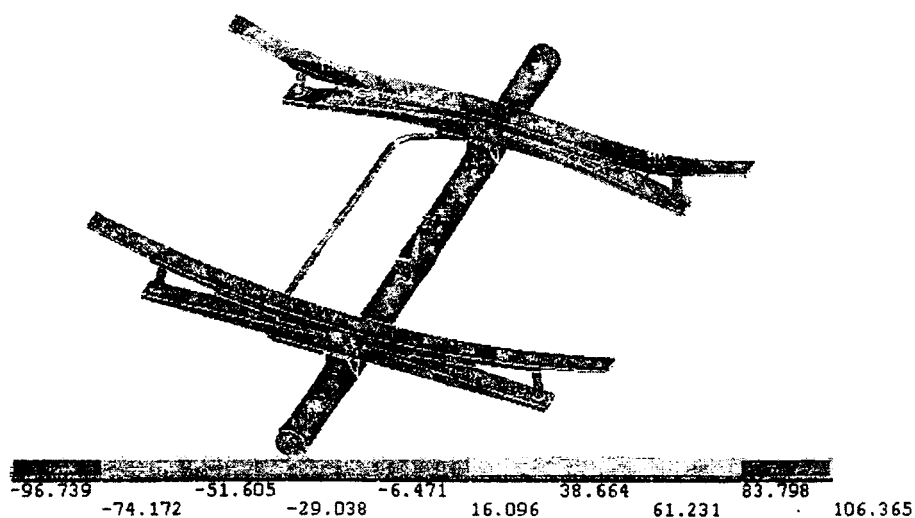


Рис. 8. Распределение деформаций в задней подвеске при пиковой нагрузке

Таким образом, видно, что наибольшие деформации как в передней так и в задней подвесках возникают в областях, близких к торцам рессор. В задней подвеске наибольшие напряжения возникают в зоне контакта рессоры с подрессорником. В передней подвеске распределение напряжений не явно. Это может быть связано как со значительным упрощением модели, так и с использованием конечных элементов большого размера. Для устранения недостатков необходимо создание более точной модели подвески с использованием более мощной вычислительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев, С.А. Комплексная система испытаний автомобилей: Формирование, развитие, стандартизация. – М.: Издательство стандартов, 1991. – 172 с.
2. Пархиловский, И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Машиностроение, 1978. – 232 с.
3. Раймпель, Й. Шасси автомобиля: Элементы подвески / Пер. с нем. А.Л. Карпухина; Под ред. Г.Г. Гридасова. – М.: Машиностроение, 1987. – 288 с.
4. Автомобили: Испытания: учебное пособие для вузов / В.М. Беляев, М.С. Высоцкий, Л.Х. Гилелес [и др.]; Под ред. А.И. Гришкевича, М.С. Высоцкого. – Минск: Выш. школа, 1991. – 187 с.
5. Работа автомобильной шины / Под ред. В.И. Кнороза. – М: Транспорт, 1976. – 238 с.
6. Совершенствование технико-экономических показателей автомобильной техники. сборник научных трудов. – М.: Изд. НАМИ, 1993. – 164 с.
7. Проект ГОСТ. Управляемость и устойчивость автотранспортных средств. Технические требования и методы испытаний, 1999г.
8. РД 37.001.005-86. Методика испытаний и оценки устойчивости управления автотранспортными средствами.
9. ОСТ 37.001.051-73. Автомобили. Управляемость и устойчивость.
10. ОСТ 37.001.471-88. Управляемость и устойчивость автотранспортных средств. Методы испытаний.
11. ОСТ 37.001.487-89. Управляемость и устойчивость автомобилей. Общие технические требования.
12. Чигарев, А.В., Кравчук, А.С., Смалюк, А.Ф. ANSYS для инженеров. Справочное пособие. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.

ГЕНЕРАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ДВИЖЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИЙ ПАКЕТА *MECHANICAL SYSTEMS*

Медведев Д.Г., Босяков С.М., Кохан Л.Л.

In the present paper development cycles of models of mechanical systems in package Mechanical Systems are submitted. Definitions of the functions forming mathematical system of the analytical equations on the basis of which calculation of kinematics characteristics of model is carried out are resulted. The example of calculation and modeling the three-dimensional crank-slider mechanism is submitted.

В настоящее время широкое применение находят системы компьютерной математики для персональных компьютеров, которые интегрируют в себе современный интерфейс пользователя, решатели математических задач в численном и символьном виде, а также мощные средства графики. Применение таких систем охватывает различные сферы деятельности прикладной математики, в частности, теоретическую и прикладную механику. В настоящей работе представлены функциональные возможности пакета *Mechanical Systems* [1] компьютерной системы *Mathematica*, позволяющие выполнять моделирование и визуализацию движения механических систем различной сложности.

Внешний пакет *Mechanical Systems* представляет собой совокупность подпакетов, написанных на языке программирования системы *Mathematica* и предназначенных для анализа и проектирования плоских и пространственных твердых механизмов. Также как и остальные пакеты расширения, он имеет независимую платформу и может быть установлен совместно с любой версией системы *Mathematica*, начиная с версии 2.2. Пакет *Mechanical Systems* состоит из двух основных подпакетов – *Mech2D* и *Mech3D*, предназначенных для моделирования и анализа работы двумерных и трехмерных механических систем соответственно. Эти подпакеты могут быть инициализированы аналогично стандартным пакетам расширения системы, например, с помощью функций `Get["Mech`Mech2D`"]`, `Needs["Mech`Mech3D`"]`, а также конструкции `<<Mech`Mech2D``. Отметим, что невозможно одновременно загрузить подпакеты *Mech2D* и *Mech3D*, поскольку они используют функции, имеющие одинаковые идентификаторы, но различный смысл. Для удаления определений, сделанных в ходе сессии, или отключения ядра пакета *Mechanical Systems* (подпакетов *Mech2D* и *Mech3D*) предназначены функции `ClearMech[]` (возвращает ядро в исходное состояние) и `KillMech[]` (полностью закрывает ядро *Mechanical Systems*).

Рассмотрим этапы генерации модели пространственного кривошипно-шатунного механизма, представленного на рис. 1, состоящего из двух движущихся тел – кривошипа и ползунка. Система приводится в движение вращающимся кривошипом, который вынуждает ползунок перемещаться по направляющим, параллельным оси кривошипа. Кривошип соединен с ползунком через шатун, который смоделирован ограничением расстояния.

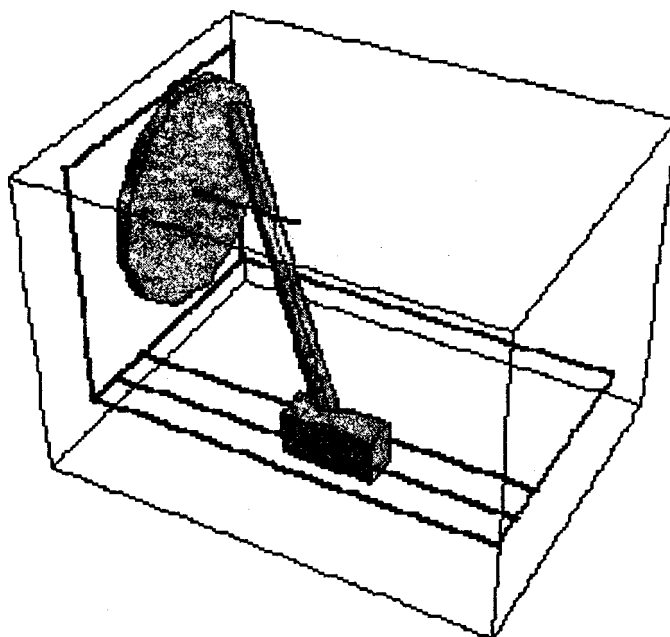


Рис. 1. Кривошипно-шатунный механизм

Каждому независимому элементу механизма необходимо присвоить уникальный целочисленный номер. Выбор номера для элемента произволен, за исключением номера 1, который обязательно должен быть присвоен соответствующему неподвижному элементу (основанию) механизма. Так, в нашем случае, имеем

```
ground=1;crank=2;slider=3;
```

Заметим, что реальный кривошипно-шатунный механизма имел бы четвертое тело - шатун между кривошипом и ползунком. Все элементы модели связаны с локальной системой координат, необходимой для описания характерных точек, линий и тех особенностей элементов модели, на которые накладываются механические связи. Для формирования элемента механической системы предназначена функция `Body[bnum,options]`. Здесь аргумент `bnum` – положительное целое число, определяющее номер тела, `options` – необязательные входные параметры, в качестве которых могут выступать опции `Mass`, `Inertia`, `Centroid`, `PointList`, `InitialGuess`. Функция `Body` в нашем случае, определяющая стержневую систему как основание механизма приведена ниже

```
bd[ground] = Body[ground,
PointList→{{0,10,12},{10,10,12},{1,0,0},{0,1,0}}];
```

Таким образом, основание (`ground`) имеет четыре ключевых точки, определяющие данный объект, причем две из них определяют положение оси вращения кривошипа, еще две точки используются для формирования направляющих ползунка. Кривошип (`crank`) имеет две ключевые точки, определяющие данный объект, одна из которых используется для задания локальной оси координат и оси вращения, другая - точка приложения шатуна. Ползунок (`slider`) имеет три ключевые точки, определяющие данный объект: точка приложения шатуна на ползунке, точка, определяющая направление скольжения и точка, определяющая связи с основанием. С учетом опций, описывающих начальные условия, функции, определяющие кривошип и ползунок запишутся в следующем виде:


```

bd[crank]=Body[crank,PointList→{{8,0,0},{0,8,0}},
InitialGuess→{{0,10,12},{1,0,0,0}}};
bd[slider]=Body[slider,PointList→{{1,0,0},{0,1,0}},
InitialGuess→{{20,0,0},{1,0,0,0}}};

```

Для объединения элементов механической системы в единую модель механизма применяется функция `SetBodies[bodies]` (`bodies` – список элементов механизма, построенных с помощью функции `Body`). В нашем случае следует объединить основание, кривошип и ползунок.

```
SetBodies[Array[bd,3]]
```

При дальнейшем построении модели необходимо совместить характерные точки в соответствии с теми связями, которые накладываются на систему. При формировании связей, пользователь задает уникальный номер `cnum`. Общая функция `Constraint[cnum, equation, {symbol, guess}]` используется для добавления связи в виде алгебраического уравнения (`symbol` – добавляется к вектору зависимых переменных в модели с начальными условиями `guess`). Функция `Constraint` имеет столько же степеней свободы, сколько неизвестных в уравнении. В подпакете также предусмотрены некоторые часто используемые виды ограничений, генерирующие соответствующие уравнения автоматически. При описании рассматриваемого кривошипно-шатунного механизма список функций, выполняющих наложение связей на элементы механизма, имеет вид

```

cs[1]=Revolute5[1,Line[ground,1,2],Line[crank,0,1]];
cs[2]=ProjectedAngle1[2,Line[crank,0,2],
Line[ground,0,4],Line[ground,0,3],2 N[Pi] T];
cs[3]=RelativeDistance1[3,Point[crank,2],Point[slider,0],30.0];
cs[4]=Translate5[4,Axis[ground,0,3,4],Axis[slider,0,1,2]];

```

Здесь функция `Revolute5` задает параллельность линий и совпадение характерных точек, функция `ProjectedAngle1` – равенство угла $2 N[\text{Pi}] T$ и угла между первой и второй линиями на плоскости, перпендикулярной третьей линии, функция `RelativeDistance1` моделирует соединение между элементами механизма и указывает на равенство расстояния между одной из точек ползунка и одной из точек кривошипа постоянной величине, функция `Translate5` задает совпадение двух осей.

Заметим, что еще одной возможностью наложения связей является составное ограничение, которое задается функцией `StageSwitch[cnum, testi, constrainti]` передает управление `constrainti` при выполнении `testi` и содержит несколько обыкновенных ограничений `Mech`, позволяющих пользователю указывать, какое из них является активным. Здесь `constrainti` – стандартные ограничения `Mech` (или список ограничений), каждое из которых должно ограничивать одинаковое число степеней свободы.

Провести учет установленных ограничений степеней свободы и начальных условий движения механизма, также наложить реакции связей позволяет функция `SetConstraints[constraints, options]`, которая выполняет генерацию математической системы, описывающую модель механизма. Аргументы `constraints` могут быть списком или последовательностью ограничений, каждое из которых должно быть переменной или функцией. Опции `options` позволяют манипулировать начальными условиями и видом расчета. Приведем запись функции для нашего случая кривошипно-шатунного механизма.

```
SetConstraints[Array[cs,4]]
```

На следующем этапе построения модели используется функция `SetLoads[loads, options]`, которая применяет заданные `SysLoad` объекты (результаты функций нагрузок) к модели. Все возможные виды нагружения могут быть представлены в виде вложенного списка или последовательности нагрузок. При успешном выполнении функция `SetLoads` возвращает `Null`.

Поскольку пакет *Mech* использует метод множителей Лагранжа для статического и динамического расчета модели, нет необходимости задавать начальные условия при отсутствии сил трения. Если начальные условия необходимы, они могут быть заданы `LambdaGuess` опцией. Модели механизма часто содержат множество определенных пользователем переменных, но они все должны быть инициализированы прежде, чем будет осуществлен запуск функции `SolveMech`. Для этого применяется функция `CheckSystem[]`, которая проверяет модель на наличие неинициализированных переменных и избыточность ограничений, возвращает `False`, если найдены ошибки и выводит сообщение, описывающее ошибку.

Решатель ядра пакета *Mechanical Systems* может численно находить результат подобно встроенной функции `FindRoot` пакета *Mathematica*. Здесь основной функцией является `SolveMech[]`, которая осуществляет поиск единственного числового решения, а также определяет положение и ориентацию каждого из тел. Заметим, что большинство моделей характеризуется временной зависимостью (в уравнениях по умолчанию используется символ `T`). Если положение и ориентация элементов механизма не зависят от времени необходимо задать начальный момент времени. В этом случае аргумент функции `SolveMech` может быть записан в виде `SolveMech[time]`. Рассчитаем положение и ориентацию элементов рассматриваемого кривошипно-шатунного механизма для момента времени равного 0,05 с.

```
SolveMech[0.05]//Chop
```

```
{T→0.05, X2→0, Y2→10., Z2→12., Eo2→0.987688, Ei2→0.156434,  
Ej2→0, Ek2→0, X3→19.5064, Y3→0, Z3→0, Eo3→1., Ei3→0,  
Ej3→0, Ek3→0}
```

Здесь E_o, E_i, E_j, E_k – обобщенные углы Эйлера, X_n, Y_n, Z_n – координаты центра тяжести элементов механизма.

В случае, если интерес представляют числовые характеристики отдельных элементов механизма, целесообразно использовать функцию `SetCouple[symbol, equation, options]`. Эта функция возвращает объект `CoupleSystem`, который определяет значение `symbol`, удовлетворяющее `equation` и всем ограничениям степеней свободы. При этом генерация всех необходимых начальных условий и моментов времени осуществляется функцией `LastSolve[]`. На заключительном этапе используется функция `SolveCouple[crsys]`, которая рассчитывает решение для объекта `crsys`, являющегося результатом функции `CoupleSystem`, и возвращает список, содержащий решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов, В. П. *Mathematica 4* с пакетами расширений. – М.: Нолидж, 2000. – 605 с.
2. Beretta R. *Mechanical Systems Pack*. – Vancouver: Wolfram Research, 1995. – Pp. 525.

РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СОСТАВНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАКЕТА *MECHANICAL SYSTEMS* СИСТЕМЫ *MATHEMATICA*

Скляр О.Н., Босяков С.М., Кохан Л.Л.

In the present paper the algorithm of calculation of velocities and accelerations of components of mechanical system in Mathematica package Mechanical systems is submitted. The example of calculation of velocities and accelerations of elements of brake draft of a back suspension bracket of the automobile is resulted.

Одним из внешних пакетов, расширяющим стандартные возможности компьютерной системы *Mathematica* в области моделирования и визуализации движения механических систем различной сложности, является пакет *Mechanical Systems* [1, 2]. В частности, применение функциональных возможностей пакета позволяет автоматизировать дифференцирование кинематических уравнений относительно времени и находить числовые результаты для скорости и ускорения каждого элемента в модели составного механизма. В настоящей работе представлены алгоритмы расчета скоростей и ускорений элементов механических систем с применением пакета *Mechanical Systems*.

Рассмотрим двумерную модель тормозной тяги задней подвески автомобиля, состоящую из трех движущихся тел: рамы, кронштейна и кулисы. Визуализация модели в пакете *Mechanical Systems* выполнена на рис. 1.

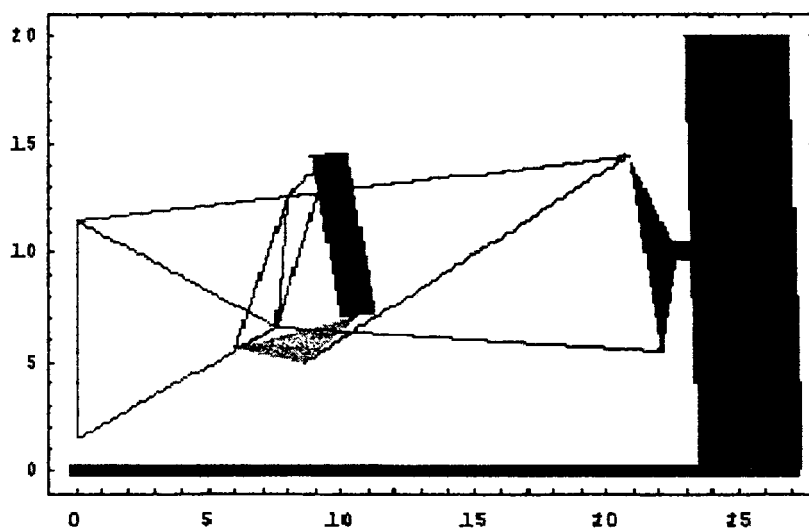


Рис. 1. Модель тормозной тяги

Механизм приводится в движение рамой, перемещающейся вертикально относительно земли. Кронштейн колеса соединяется с кулисой двумя рычагами привода, которые построены как зависимые тела. Кулиса вращается вокруг оси рамы, которая прикреплена к кронштейну колеса посредством тяги – стержня, работающего на растяжение. Амортизатор связывает второй конец кулисы и раму. Заметим, что реальная модель тормозной тяги имела бы еще три движущихся тела: верхний и нижний рычаги привода и тягу между кронштейном и кулисой.

Каждому независимому элементу механизма необходимо присвоить уникальный целочисленный номер.

```
ground=1; chassis=2; carrier=3; rocker=4;
```

Выполним загрузку пакета и зададим свойства составных элементов механизма с помощью функции *Body*. Следует учесть, что основание (*ground*) требует задания двух точек, одна из которых является началом координат, другая - определяет вертикальную линию перемещения рамы. Для описания рамы (*chassis*) необходимо задать шесть локальных точек: начало локальной системы координат; положение вертикальной оси движения рамы; точка приложения нижней тяги; точка приложения верхней тяги; точка центра кулисы и верхняя точка закрепления амортизатора. Кронштейн колеса (*carrier*) требует определения трех локальных точек: начало локальной системы координат и точка приложения нижней тяги; точка приложения верхней тяги и стержня, работающего на растяжение; точка касания шины с дорогой. Кулиса (*rocker*) определятся тремя локальными точками: начало координат и одна из точек, задающая ось вращения; нижняя точка закрепления амортизатора и точка приложения шатуна. Ниже записаны функции, определяющие каждый из этих элементов.

```
Needs["Mech`Mech2D`"]
bd[ground]=Body[ground,PointList→{(*P1*){0,0},{*P2*}{0,10}}];
bd[chassis]=Body[chassis,
PointList→{0,0},{0,10},{7.5,4},{8,10},{6,3.125},{9.5,12}},
InitialGuess→{{0,2.5},0}];
bd[carrier]=Body[carrier,PointList→{{0,0},{-1,9},{1.25,-5.5}},
InitialGuess→{{22.0,5.5},0}];
bd[rocker]=Body[rocker,PointList→{{0,0},{4.1,2.6},{2.5,0}},
InitialGuess→{{6.0,6.6},-0.7}];
```

Объединим элементы механизма в единую модель.

```
SetBodies[bd[ground],bd[chassis],bd[carrier],bd[rocker]]
```

При дальнейшем построении модели необходимо совместить характерные точки в соответствии с теми механическими связями, которые накладываются на систему.

```
cs[1]=RelativeY1[1,Point[chassis,1],T];
cs[2]=Translate2[2,Line[ground,2,1],Line[chassis,2,1]];
cs[3]=RelativeDistancel[3,Point[chassis,3],Point[carrier,1],14.6];
cs[4]=RelativeDistancel[4,Point[chassis,4],Point[carrier,2],13.0];
cs[5]=RelativeY1[5,Point[carrier,3],0];
cs[6]=Revolute2[6,Point[chassis,5],Point[rocker,1]];
cs[7]=RelativeDistancel[7,Point[carrier,2],Point[rocker,3],rodlength];
```

Здесь *cs[1]* – используется как ограничение движения (зависит от переменной времени) и управляет вертикальным положением рамы; *cs[2]* – позволяет раме перемещаться только вертикально относительно основания; *cs[3]* – моделирует верхнюю тягу; *cs[4]* – моделирует нижнюю тягу; *cs[5]* – вынуждает основание шины оставаться в контакте с землей; *cs[6]* – задает ось вращения кулисы; *cs[7]* – моделирует стержень, работающий на растяжение (длина стержня задается параметром *rodlength*, которому нужно задать числовое значение прежде, чем управление будет передано решателю *Mech2D*).

Выполним построение модели:

```
SetConstraints[Array[cs,7]]
rodlength=15.5;
```

4

Расчет модели выполним с помощью функции `SolveMech` для момента времени 2.5 с.

```
SolveMech[2.5]//Chop
```

```
{T→2.5, X2→0, Y2→2.5, Th2→0, X3→22.0636, Y3→5.46934, Th3→0.0233305,  
X4→6., Y4→5.625, Th4→-0.193489}
```

Здесь результирующий список определяет положение и ориентацию механизма: Th – угол поворота относительно глобальной системы координат (в радианах); X_n, Y_n – координаты центра тяжести элемента механизма.

Для нахождения скоростей и ускорений в аргумент функции `SolveMech` следует внести опции `Solution→Velocity` и `Solution→Acceleration`, указывающие на то, что должны быть определены положение, ориентация, скорость и ускорение для каждого составных элементов механизма (по умолчанию принимается `Solution→Location`, что указывает на расчет положения и ориентации элементов механизма).

Выполним расчет скоростей и ускорений составных частей механизма для момента времени 3 с.

```
SolveMech[3.0, Solution→Velocity]//Chop
```

```
{T→3., X2→0, Y2→3., Th2→0, X3→22.0212, Y3→5.48505, Th3→0.0116616, X4→6.,  
Y4→6.125, Th4→-0.311793, X2d→0, Y2d→1., Th2d→0, X3d→-0.101143,  
Y3d→0.0305219, Th3d→-0.0232273, X4d→0, Y4d→1., Th4d→-0.231717}
```

```
SolveMech[3.0, Solution→Acceleration]//Chop
```

```
{T→3., X2→0, Y2→3., Th2→0, X3→22.0212, Y3→5.48505, Th3→0.0116616, X4→6.,  
Y4→6.125, Th4→-0.311793, X2d→0, Y2d→1., Th2d→0, X3d→-0.101143,  
Y3d→0.0305219, Th3d→-0.0232273, X4d→0, Y4d→1., Th4d→-0.231717, X2dd→0,  
Y2dd→0, Th2dd→0, X3dd→-0.0657943, Y3dd→-0.00349459, Th3dd→0.000407417,  
X4dd→0, Y4dd→0, Th4dd→0.0165601},
```

Здесь X_{nd}, Y_{nd} – покоординатные компоненты скорости, Th_{nd} – угловая скорость, X_{ndd}, Y_{ndd} – покоординатные компоненты ускорения, Th_{ndd} – угловое ускорение n -го элемента механизма.

Отметим, что опция `Solution` функции `SolveMech` позволяет учесть особенности решения статических, кинематических и динамических задач. В частности `Solution→Static` позволяет вычислить положение тел механизма и числовые значения множителей Лагранжа, когда скорости и ускорения равны нулю, и найти силы реакции в модели. Опция `Solution→Kinematic` и `Solution→Dynamic` позволяют найти положение и скорость тела, а также обобщенные силы реакции, которые зависят от скорости и от приложенных нагрузок (включая силы инерции) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов, В. П. *Mathematica 4* с пакетами расширений. – М.: Нолидж, 2000. – 605 с.
2. Beretta R. *Mechanical Systems Pack*. – Vancouver: Wolfram Research, 1995. – Pp. 525.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕЙ МАШИНЫ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ В ПАКЕТАХ ADAMS И VISUALNASTRAN

Журавков М.А., Гляков С.А., Громыко А.О., Громыко О.В.

Paper deal with computer simulation of the wheel-stepping machine (WSM) using VisualNastran and ADAMS programs facilities. WSM motion process, trajectories, turnability parametres were calculated for different transference modes and situations.

Поиск эффективных принципов перемещения привел к идее создания колесно-шагающего движителя, воплощающего в себе положительные качества весьма распространенного колесного движителя и шагающего, великолепные возможности которого по проходимости очевидны из практики передвижения живых организмов [1, 2].

В общем случае колесно-шагающий движитель можно представить как обычный шагающий, у которого опоры механизмов шагания выполнены в виде колес. Колеса по своему функциональному назначению исполняют роль не только элемента, воспринимающего нагрузку при взаимодействии с опорной поверхностью, но и движителя. При организации движения колесно-шагающего движителя необходимо учитывать, что в нем можно реализовать несколько режимов движения и для каждого режима имеется возможность изменения некоторых параметров движителя. Так, при реализации колесного режима форма многоугольника опор и его положение относительно центра масс могут выбираться оптимальными в соответствии с условиями передвижения.

Колесно-шагающий режим осуществляется так, что все колеса в определенной последовательности то перемещаются вперед относительно корпуса машины с помощью механизмов шагания (этап переноса), то становятся упором на опорной поверхности (этап отталкивания). Отличительной особенностью колесно-шагающего режима по сравнению с колесным является то, что в любой момент времени лишь часть колес (переносимых) перемещается по опорной поверхности, испытывая сопротивление деформации грунта, а остальные колеса (отталкиваемые) упираются в грунт, реализуя перемещение корпуса машины.

Колесно-шагающий режим потенциально имеет в себе значительно больше возможностей для эффективного передвижения. Перенос колеса может осуществляться следующими способами: с разгрузкой переносимого колеса от веса машины, с частичной разгрузкой и без разгрузки от веса машины. Перенос колеса третьим способом имеет некоторые преимущества перед первым, так как при этом решается часть проблем, присущих шагающему способу. При полной разгрузке переносимого колеса от веса машины реализуется чисто шагающий способ передвижения. Можно создать такие механизмы, в которых удастся реализовать все способы переноса, обеспечивая движение в различных режимах.

Будем считать, что при переносе колеса с полной разгрузкой осуществляется шагающий режим движения, а без разгрузки или с частичной разгрузкой — колесно-шагающий режим. На этапе переноса колесо может перемещаться: 1) как приведенное во вращение и толкаемое механизмом шагания; 2) как пассивное и толкаемое механизмом шагания; 3) как приведенное во вращение с пассивным механизмом шагания. Очевидно, что последний вариант неприемлем. Рассмотрим движитель, переносимое колесо которого находится в первом состоянии. Различают два состояния колеса на этапе отталкивания: невращающееся (блокированное) и приведенное во вращение, и два принципиально разных по методам реализации способа передвижения: непрерывное (определяющее непрерывные походки) и прерывное передвижение корпуса машины (прерывные походки). В случае использования прерывных походок, сначала все колеса в определенной последовательности перемещаются относительно неподвижного корпуса машины вперед на величину шага, а затем осуществляют-

ся перемещение корпуса относительно неподвижных колес. Корпус при этом перемещается прерывно на величину шага в каждом цикле перемещения.

Порядок перемещения определяется числом колес, перемещающихся в одной фазе. Если колеса движителя перемещаются так, что проходят одинаковые положения через одинаковые интервалы времени, то это равномерная походка. Если колеса движителя разделены на две группы, перемещающиеся в противофазе, то это фазная походка. Когда все колеса перемещаются в одной фазе, то это однофазная походка. Из всего многообразия последовательностей перемещения колес рассмотрим следующие две. Если их перемещение осуществляется последовательно с заднего колеса (по ходу движения машины), то это прямая последовательность, если начинается с переднего колеса — обратная.

Последовательность перемещения колес определяет режим движения след в след, когда каждое последующее колесо в конце этапа переноса устанавливается в то место на опорной поверхности, с которого оттолкнулось предыдущее колесо. Для равномерных непрерывных походок основные параметры шагания определяются по совмещенной траекторной диаграмме опор механизмов шагания. Ее образуют совмещением проекций траекторий опор каждого механизма шагания на продольную плоскость машины с фиксацией их положений в данный момент времени.

В процессе выполнения работы построены модели и исследована поворотливость (маневренность) колесно-шагающих движителей на поддресоренных жестких колесах в пакетах VisualNastran и ADAMS [3]. Приведем методику построения компьютерных моделей для анализа кинематики всех вариантов перемещения, указанных в таблице.

Вид движения	Шаги			
	Смещение направляющих	Переключение тормозов	Смещение направляющих	Переключение тормозов
Движение прямо. 1 способ				
Движение прямо. 2 способ				
Поворот. 1 способ				
Поворот. 2 способ				

Поскольку модель четырехколесного колесно-шагающего механизма имеет четыре совершенно одинаковых набора тел с кинематическими парами (колесо, рессора, направляющая ...), то их построение производится только один раз и затем они размножены путем копирования. Последовательность создания компьютерных моделей в пакетах VisualNastran и ADAMS практически не отличается и включает следующие этапы. Построение начинается с колеса с заданным радиусом и шириной. Для его построения выбирается соответствующий инструментарий (например, *Cylinder* в случае простой цилиндрической формы) или из библиотеки стандартных упругих колес (модуль *Tire*). Для второго и последующих колес указываются их координаты и далее они создаются путем размножения (копирования). Далее моделируются оси и последовательно попарно объединяются с колесами при помощи команд *Unit*.

Следующим этапом является моделирование направляющих и рессор. Создается четыре направляющие и рессоры, для них устанавливаем ориентацию в пространстве и объединяем с соответствующими элементами при помощи связей. Последним элементом модели является основание. Полученные компьютерные модели представлены на рис. 1 и 2.

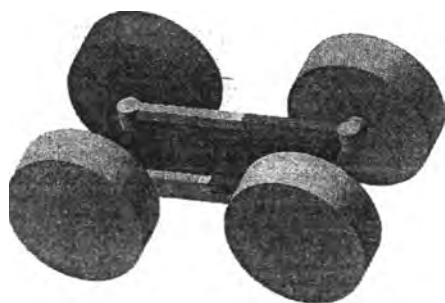


Рис 1. Компьютерная модель в пакете ADAMS

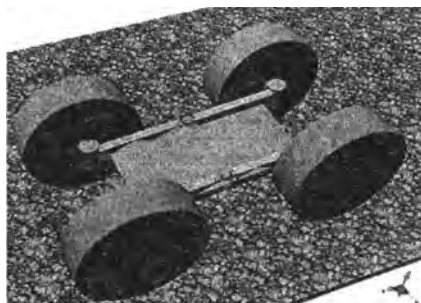


Рис 2. Компьютерная модель в VisualNastran

Для корректного анализа кинематики и динамики механизма в соответствии со схемами перемещения, приведенными в таблице, были заданы массы всех звеньев системы и кинематические пары, соединяющие построенные тела.

В заключение отметим, что сравнительное исследование кинематики колесно-шагающих механизмов проведено в двух пакетах. Полученные результаты совпали, что указывает на их достоверность. На рис. 3 приведен пример расчета скорости центра масс одного из вариантов модели.

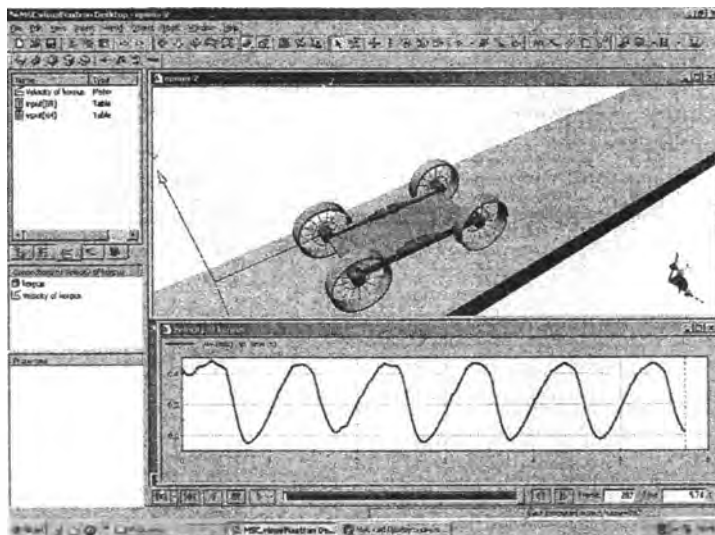


Рис 3. Анализ изменения скорости центра масс в пакете VisualNastran

ЛИТЕРАТУРА

1. Добролюбов, А.И. Скольжение, качение, волна. – М.: Наука, 1991. – 286 с.
2. Dobrolyubov, A.I.: Travelling Deformation Waves : A Tutorial Review. Applied Mechanics Reviews, 5. – New York, 1991. – 103 pp.
3. Гляков, С.А. и др. Компьютерная механика: кинематический и динамический анализ / Под ред. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2006. – 375 с.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СРЕДЕ MATLAB/SIMULINK

Литвинов Е.А., Карпович С.Е. Жарский В.В.

The six degree of freedom spatial movement system has been examined. Algorithms and simulation programs for direct and inverse kinematic problems solving of spatial mechanism are presented. As a result of computer simulation the movement system's actuator spatial motion capabilities are obtained and investigated.

Введение

Многокоординатная пространственная система перемещений находит широкое применение в различных областях робототехники, при автоматизации технологических процессов в машиностроении и приборостроении. Наряду с другими, подобными антропоморфными системами, в последние годы находят всё большее применение манипуляционные многокоординатные системы на механизмах параллельной кинематики [1]. Такие системы обладают большей жёсткостью и динамической устойчивостью кинематических узлов и механизмов, в целом при той же кинематической мобильности, а также посредством выбора оптимальной структуры и геометрии подвижных звеньев позволяют находить область рабочего пространства в которой кинематические и точностные параметры на рабочей площадке выше, чем у исполнительных механизмов на входе системы [2]. Это одна из определяющих особенностей систем с механизмами параллельной кинематики, в которых за счёт кинематической мультипликации и редукции, а также усреднения случайных составляющих в кинематических, динамических и точностных характеристиках, достигается в процессе кинематического преобразования существенное повышение параметров назначения автоматизированного оборудования.

В этой связи алгоритмизация математических моделей и последующая компьютерная симуляция являются главными инструментами современного расчёта и проектирования таких механизмов с привлечением программных возможностей сред разработки, таких как MATLAB/Simulink [3].

Пространственный механизм системы перемещений с шестью степенями свободы

В работе рассматривается пространственный механизм системы перемещений с шестью степенями свободы, фотография которой представлена на рис. 1. Рассматриваемый механизм, в соответствии с его структурной схемой (рис. 2), состоит из подвижной площадки P , звеньев r_1, r_2, \dots, r_6 , жёстко связанных с вращающимися элементами двигателей $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$, которые, в свою очередь, посредством сферических шарниров и промежуточных шатунов l_1, l_2, \dots, l_6 связаны с площадкой P .

В соответствии со структурной схемой (рис. 2) механизма звенья r_1, r_2, \dots, r_6 являются входными, законы перемещения которых, задаются непосредственно управляющими двигателями.

Расчёт числа степеней свободы такого механизма может быть выполнен по формуле Сомова-Малышева [4]:

$$W = 6n - \sum_{k=1}^5 k \cdot p_k - \nu, \quad (1)$$

где W – число степеней свободы механизма, определяющее его структурную или максимальную кинематическую подвижность; p_k – число подвижных соединений звеньев механизма, называемых кинематическими звеньями, относящихся к k -му классу; k – целочисленный коэффициент, который в структурной формуле (1) численно равен классу кинематической пары, которая в свою очередь определяется по количеству независимых подвижностей m в рассматриваемой паре по формуле $k = 6 - m$; ν – число так называемых “лишних” степеней свободы, то есть внутренних степеней свободы механизма, не влияющих на конечную кинематическую подвижность исполнительного элемента (выходного звена) механизма, в данном случае лишние степени свободы это возможные вращения шатунов l_1, l_2, \dots, l_6 вокруг своих осей.



Рис. 1. Система перемещений с шестью степенями свободы

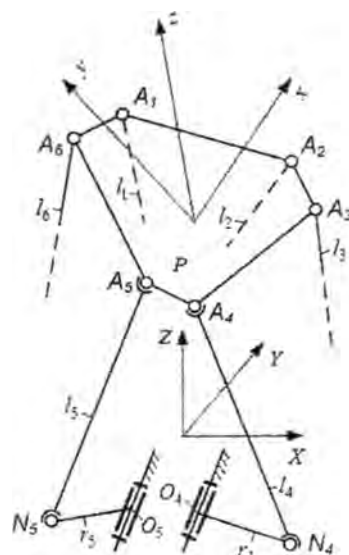


Рис. 2. Структурная схема пространственного механизма

Для рассматриваемого механизма в соответствии с его структурной схемой имеем:

- число подвижных звеньев $n = 13$;
- число кинематических пар 5-го класса $p_5 = 6$, равно числу вращательных подвижностей в шести приводах двигателей $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$;
- число кинематических пар 4-го класса $p_4 = 0$, так как такие пары в рассматриваемом механизме отсутствуют;
- число кинематических пар 3-го класса $p_3 = 12$, равно общему числу шарнирных соединений A_1, A_2, \dots, A_6 и N_1, N_2, \dots, N_6 ;
- число кинематических пар 1-го и 2-го класса $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$, так как такие кинематические пары в механизме отсутствуют;
- число лишних степеней свободы $\nu = 6$, так как в механизме возможны шесть вращений шатунов, не влияющих на конечную подвижность выходного звена.

С учётом вышесказанного получим:

$$W = 6n - \sum_{k=1}^5 k \cdot p_k - \nu = 6 \cdot 13 - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 12 - 6 = 6,$$

где $n = 13$; $p_5 = 6$; $p_4 = 0$; $p_3 = 12$; $p_1 = p_2 = 0$; $\nu = 6$.

Полученное значение $W = 6$ говорит о том, что манипуляционный механизм со структурой, приведённой на рис. 2, в общем случае может реализовать перемещение платформы с шестью степенями свободы, обеспечивая при этом возможность формирования программных движений выходного звена, в данном случае площадки P , по трём независимым линейным перемещениям в пространстве, определяющим её плоскопараллельное перемещение, и трём независимым угловым перемещениям, определяющим конечное ориентационное перемещение площадки.

Прямая задача кинематики пространственного механизма

Прямая задача кинематики решается в следующей постановке. По заданным геометро-конструктивным параметрам механизма, входным переменным параметрам, задаваемым обобщёнными угловыми координатами поворота подвижных элементов шести приводов необходимо определить положение и ориентацию подвижной площадки относительно абсолютной неподвижной системы координат $OXYZ$ [5]. Укрупнённая структура решения прямой задачи показана на рис. 3, из которой следует, что входными задаваемыми переменными будут углы поворота валов двигателей ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$), выраженные как углы поворота соответствующих кривошипов $O_1N_1, O_2N_2, \dots, O_6N_6$ (рис. 2).

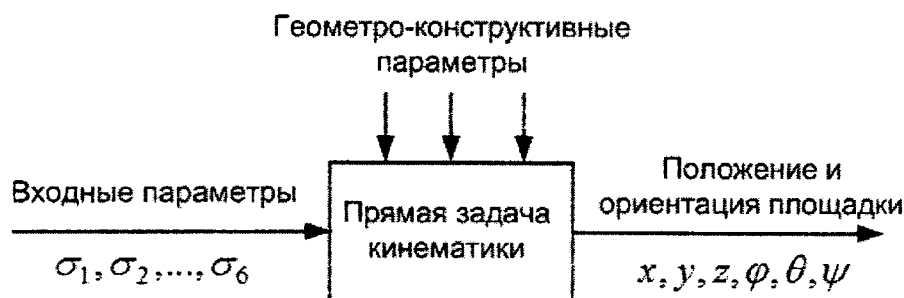


Рис. 3. Структура решения прямой задачи кинематики

Сферические шарниры, показанные на рис. 2 точками N_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), связаны с рабочей площадкой P шестью шатунами с длинами N_iA_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), которые в точке A_i сопрягаются с площадкой тоже сферическими шарнирами. Это конструктивное исполнение механизма может быть аналитически описано векторным условием неизменности в процессе движения длин самих шатунов:

$$|\vec{R}^{(N_i)} - \vec{R}^{(A_i)}| = l, \quad (2)$$

где $\vec{R}^{(N_i)}$, $\vec{R}^{(A_i)}$ – радиус-векторы соответственно точек N_i и A_i в декартовой системе координат $OXYZ$.

Для пересчёта координат точек A_i из системы координат площадки P в неподвижную систему координат $OXYZ$ необходимо воспользоваться матричным равенством:

$$\vec{R}^{(A_i)} = M \cdot \vec{R}_{A_i}, \quad (3)$$

где \vec{R}_{A_i} – вектор координат точки A_i в системе координат площадки P ;

$$M = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\cos\psi & x \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & y \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В матрице M использованы x, y, z – координаты начала системы координат $Oxuz$ в системе координат $OXYZ$; φ, θ, ψ – углы Эйлера, однозначно определяющие ориентацию площадки. Последовательно используя векторное условие (2) для каждого из шести шатунов окончательно получим следующую систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} (x^{A_1} - x^{N_1})^2 + (y^{A_1} - y^{N_1})^2 + (z^{A_1} - z^{N_1})^2 = l_1^2 \\ (x^{A_2} - x^{N_2})^2 + (y^{A_2} - y^{N_2})^2 + (z^{A_2} - z^{N_2})^2 = l_2^2 \\ (x^{A_3} - x^{N_3})^2 + (y^{A_3} - y^{N_3})^2 + (z^{A_3} - z^{N_3})^2 = l_3^2 \\ (x^{A_4} - x^{N_4})^2 + (y^{A_4} - y^{N_4})^2 + (z^{A_4} - z^{N_4})^2 = l_4^2 \\ (x^{A_5} - x^{N_5})^2 + (y^{A_5} - y^{N_5})^2 + (z^{A_5} - z^{N_5})^2 = l_5^2 \\ (x^{A_6} - x^{N_6})^2 + (y^{A_6} - y^{N_6})^2 + (z^{A_6} - z^{N_6})^2 = l_6^2 \end{cases} \quad (5)$$

Если выразить в системе (5) параметры $x^{A_i}, x^{N_i}, y^{A_i}, y^{N_i}, z^{A_i}, z^{N_i}$ ($i=1, 2, \dots, 6$) через входные переменные $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ и выходные переменные $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, то в полученной вновь системе уравнений (5) переменные $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ и $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ будут связаны через трансцендентные нелинейные выражения, не позволяющие находить выходные переменные в явном виде. Поэтому для компьютерного моделирования прямой задачи в работе был использован пакет оптимизации Optimization Toolbox среды MATLAB/Simulink.

В среде MATLAB/Simulink разработана программа моделирования численного решения прямой задачи кинематики рассматриваемого пространственного механизма (рис. 4). Программа моделирования решения прямой задачи кинематики осуществляет численный поиск конечных значений выходных переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, определяющих положение и ориентацию в пространстве подвижной площадки P рассматриваемого механизма, которые однозначно соответствуют задаваемым в программе моделирования входным угловым значениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ поворота активных элементов управляющих приводов. Численный поиск решения базируется на оптимизации целевой функции соответствующей системы уравнений (5).

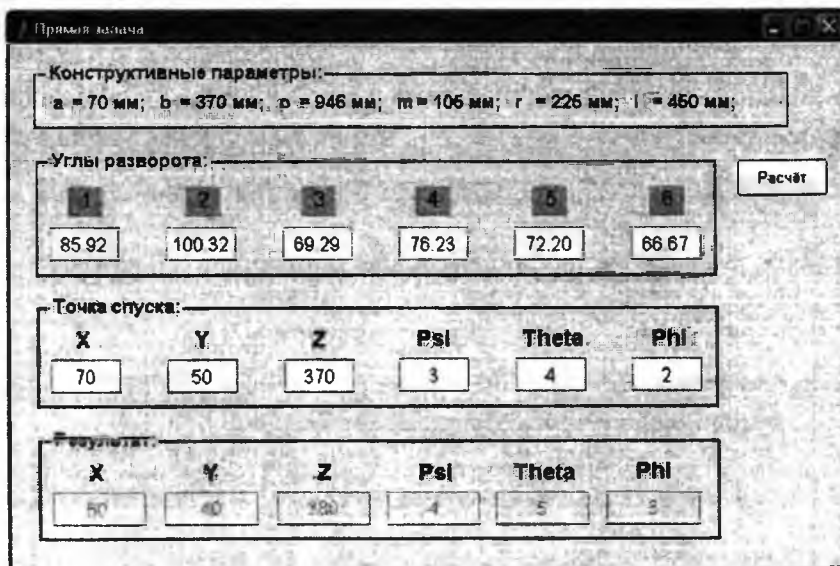


Рис. 4. Программа моделирования решения прямой задачи кинематики

Программа моделирования решения прямой задачи кинематики осуществляет численный поиск конечных значений выходных переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, определяющих по-

ложение и ориентацию в пространстве подвижной площадки P рассматриваемого механизма, которые однозначно соответствуют задаваемым в программе моделирования входным угловым значениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ поворота активных элементов управляющих приводов. Численный поиск решения базируется на оптимизации целевой функции соответствующей системы уравнений (5). Программа поддерживает возможность выбора алгоритма оптимизации: крупно-масштабный алгоритм оптимизации (метод доверительных подпространств [6]) и средне-масштабный алгоритм оптимизации (метод Гаусса-Ньютона или метод Левенберга-Макуарда).

Обратная задача кинематики пространственного механизма

Обратная задача кинематики формулируется следующим образом. При известных геометро-конструктивных параметрах механизма необходимо найти входные параметры, в данном случае $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$, которые обеспечивают заданное положение (x, y, z) и ориентацию (φ, θ, ψ) площадки. Укрупнённая структура решения обратной задачи показана на рис. 5:



Рис. 5. Структура решения обратной задачи кинематики

Решение обратной задачи кинематики в работе осуществлено на основании геометро-аналитического подхода, основанного на аналитической геометрии в трёхмерном пространстве и матричных преобразованиях. Предложенный подход позволил получить аналитические уравнения связи входных и выходных параметров разрешённые в явном виде относительно искомым выходных параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$, что не удавалось другими методами.

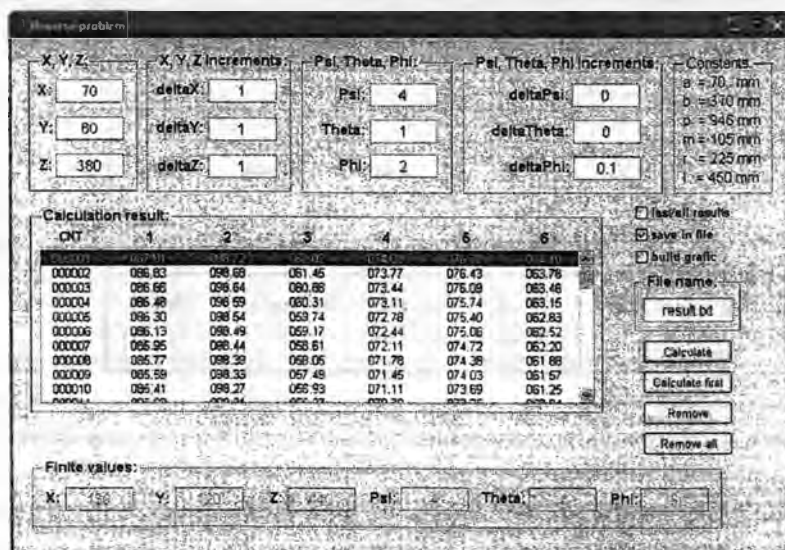


Рис. 6. Программа моделирования решения обратной задачи кинематики

Для моделирования обратной задачи в среде MATLAB/Simulink на основании математической модели приведенной в работе [7] был разработан алгоритм и расчётная программа. Программа моделирования решения обратной задачи кинематики представлена на рис. 6. Разработанная программа может проводить непосредственное и пошаговое решение обратной задачи кинематики, а так же осуществлять построение граничных областей движения площадки в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манипуляционные системы роботов / А. И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л. И. Тывес [и др.]; под общ. ред. А. И. Корендясева. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.: ил.
2. Карпович, С.Е., Матюшков, В.Е., Аваков, С.М. Построение математических моделей автоматизированного проектирования прецизионного оптико-механического оборудования для электронного оборудования. – Минск: НПО “Интеграл”, 2000. – 124 с.
3. Карпович, С.Е., Русецкий, А.М., Ляшук, Ю. Ф. Теория построения прецизионных механизмов оборудования производства электронной техники. Минск: ГНПК ТМ “Планар”, 1999. – 261 с.
4. Голдстейн, Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 375 с.
5. Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений / С.Е. Карпович, А. Яковлюк, М. Чех [и др.]; под ред. С.Е. Карповича. – Минск: Технопринт, 2004. – 187 с.
6. Coleman, T.F. and Y. Li, "An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds," SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, pp. 418–445, 1996.
7. E. Litvinov, S. Karpovich, A. Ahranovich. The 6-DOF Spatial Parallel Mechanism Control System Computer Simulation // Proceedings of 52st International Scientific Colloquium Ilmenau (Germany), September 10-13, 2007 TU-Ilmenau, 2007.

ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ (АРТЕРИЙ) ЧЕЛОВЕКА КАК МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

А. В. Чигарев, В.Т. Минченя, А.С.Манько, А.А. Орловская

There is helical motion of biological environment in the cardiovascular system and others transporting systems. The member of the Academy N. Dobrecov reported about that discovery in his paper in 2003. The basis of such motion is transporting canals walls interaction with the medium due to torsion wave that is generated by helical and muscular elements.

The walls of arteries have three layers: intima (inner), media (middle), adventitia (external). Elastic properties of the vessel (membrane) is determined by middle layer which represents composite that consist of elastin, collagen, muscular tissue, at that muscle fibers is inclined on-the-miter of $30^\circ - 50^\circ$ to the axis of the membrane (vessel). Thus we have three-layer membrane with helical anisotropy.

Модель прохождения пульсовой волны по упругой оболочке, имеющей винтовое армирование

Рассмотрим элемент кровеносного сосуда как цилиндрическую трубку, армированную волокнами. Пусть трубка находится под действием некоторого постоянного давления, не вызывающего существенных деформаций. Пусть материал трубки армирован волокнами, жесткость которых значительно больше жесткости самой трубки, причем каждое волокно представляет собой винтовую линию. Эксперименты на эластичных трубках, армированных волокнами по винтовым линиям показывают, что при создании избыточного внутреннего давления сверх P_0 характер деформации трубки зависит от угла армирования (угол между осью трубки и волокном). Существует такой критический угол армирования, при котором дополнительное давление не меняет формы трубки. При углах меньших критического трубка принимает форму бочонка (максимальная деформация в центре), а при углах больших критического (максимальная деформация у краев) поверхность трубки вогнута в середине.

Рассмотрим трубку, армированную волокнами вдоль ее оси. Эффективные упругие модули зависят от упругих модулей материала трубки, волокон, длины и радиуса.

$$\lambda_l^3 = \lambda_l^* (1 + f(l, r)).$$

В случае армирования поперек можем записать

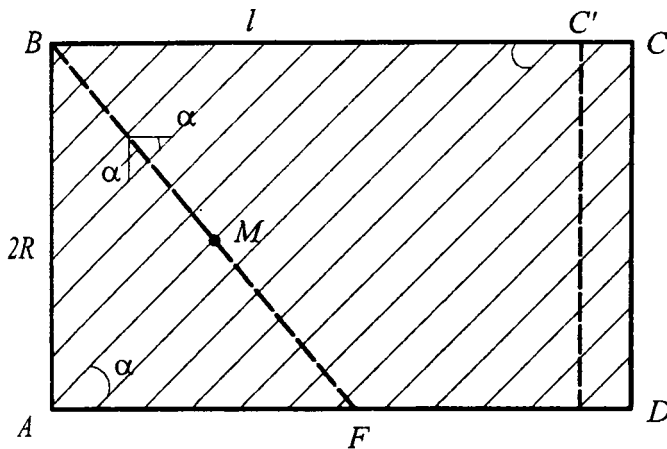
$$\lambda_r^3 = \lambda_r^* (1 + \varphi(l, r)), \quad (1)$$

где λ_l^* , λ_r^* – модули упругости трубки, армированной вдоль и поперек оси трубы.

Тогда при армировании под углом α к оси трубки можем записать

$$\lambda_\alpha^3 = \lambda_l^3 \cos \alpha + \lambda_r^3 \sin \alpha. \quad (2)$$

Рассмотрим нахождение критического угла армирования $\alpha_{кр}$. Вначале рассмотрим сосуд на участке, где его радиус остается постоянным вдоль длины. Выделим элемент длины l . Пусть расстояние между армируемыми волокнами равно δ , тогда на стороне AB количество волокон равно $(BM: \delta) = 2 R \sin(\pi/2 - \alpha) : \delta = 2R \cos \alpha : \delta$.



Количество волокон на стороне BC равно l/δ . пользуясь произволом выбора l можем выбрать l таким образом, чтобы число волокон на AB и BC было равным, т.е. возьмем длину $BC' = 2R \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Действительно, в этом случае расстояние между волокнами на AB равно $\delta_{AB} = \frac{\delta}{\cos \alpha}$, а на BC' будет равно $\delta_{BC'} = \delta/\sin \alpha$.

Обозначим среднее за цикл усилие в нити при прохождении пульсовой волны через $\langle P \rangle = \int_t^{t+T} P$. Рассмотрим условие равновесия элемента в течение цикла. Средняя равнодействующая сила в сечении AD будет

$$\langle P_{AD} \rangle = \langle P \rangle n \sin \alpha \quad (3)$$

где n – число волокон в сечении AD .

Средняя равнодействующая в сечении CD равна

$$\langle P_{CD} \rangle = \langle P \rangle n \cos \alpha. \quad (4)$$

Поскольку при нагружении цилиндра внутренним давлением окружное напряжение больше осевого в два раза, то можем записать

$$\frac{\langle P_{CD} \rangle}{l \operatorname{tg} \alpha} = 2 \frac{\langle P_{AD} \rangle}{l}. \quad (5)$$

Из (5) с учетом (3), (4) находим α , при котором оболочка под действием внутреннего давления сохраняет цилиндрическую форму.

При угле армирования $\alpha < \alpha_{кр}$ при прохождении пульсовой волны оболочка принимает бочкообразную форму, а при $\alpha > \alpha_{кр}$ она принимает вогнутую форму. Таким образом, происходит сначала запасание (резервирование) крови, а затем ее проталкивание. Угол α зависит от времени, и движение каждого волокна можно моделировать как колебания около положения равновесия равного $\alpha_{кр}$.

Обозначим $\alpha - \alpha_{кр} = q$, а изменение q во времени будем описывать уравнением

$$q + 2n\dot{q} + p^2 q = Q(t), \quad (6)$$

где $Q(t)$ будем рассматривать как импульсы рисунка 1

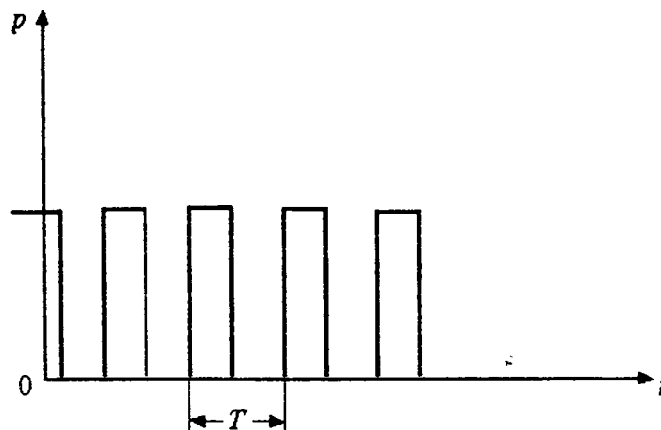


Рис. 1. Модель последовательных импульсов в артерии

Тогда решение имеет вид

$$q = \frac{\langle p \rangle}{2mp} \left(\sin pt + \operatorname{ctg} \frac{pT}{2} \cos pt \right), \quad \langle p \rangle = \int_t^{t+T} Q(t) dt.$$

Если рассматривать нарастание и падение давления в пульсовой волне как непрерывный процесс, описываемой функцией $Q(t) = Q_0 |\sin \omega t|$, то решение имеет вид

$$q = \frac{Q_0}{mp^2} \left[\frac{p\omega}{\omega^2 - p^2} \left(\sin pt + \operatorname{ctg} \frac{pT}{2\omega} \cos pt \right) - \frac{p^2 \sin \omega t}{\omega^2 - p^2} \right].$$

Таким образом, можно описать крутильные колебания цилиндрической оболочки, которые могут закручивать поток крови при прохождении пульсовой волны. Модель стента с эффективной винтовой анизотропией соответствовать характеру анизотропии оболочки, что предполагает возможность синхронных крутильных колебаний оболочки и стента.

Отметим, что если необходимо учитывать возрастные изменения, то к уравнению (6) нужно добавить уравнения для изменения физико-механических характеристик волокон с возрастом. Вследствие старения меняется жесткость и вязкость волокон, что влияет на параметры крутильных колебаний.

Модель цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией

Рассмотрим цилиндрическое тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$, где S – поперечное сечение цилиндра, L – его длина. Боковую поверхность обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$, ∂S – граница S . С геометрическим центром тяжести одного из торцов цилиндра свяжем начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем сопутствующую цилиндрическую систему координат* r, z, θ , связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z. \quad (7)$$

Здесь и ниже предполагается, что $\tau = \operatorname{const}$.

Соотношения (9) при $r = \operatorname{const}$, $\theta = \operatorname{const}$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии, при этом $\tau = 2\pi/h$, где h – шаг винтовой спирали. Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде

$$\begin{aligned} R &= re_1' + re_3', \\ e_1' &= e_r = i_1 \cos(\theta + \tau z) + i_2 \sin(\theta + \tau z), \\ e_2' &= e_\theta = -i_1 \sin(\theta + \tau z) + i_2 \cos(\theta + \tau z), \\ e_3' &= e_z, \end{aligned}$$

i_n – орты основной системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный репер

$$e_1 = n, \quad e_2 = b, \quad e_3 = t,$$

где n, b, t – орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{Bmatrix} e_{rr} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{zz} \\ 2e_{\theta z} \end{Bmatrix}, \quad S_l' = \begin{Bmatrix} S_{l1}' \\ S_{l2}' \\ S_{l3}' \\ S_{l4}' \end{Bmatrix}, \quad l = 1, \dots, 4, \\ \varepsilon_2 &= \begin{Bmatrix} 2e_{rz} \\ 2e_{r\theta} \end{Bmatrix}, \quad S_5' = \begin{Bmatrix} S_{55}' \\ S_{56}' \end{Bmatrix}, \quad S_6' = \begin{Bmatrix} S_{65}' \\ S_{66}' \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

В результате перехода от базиса e_j к базису e'_j получаем следующие соотношения обобщенного закона Гука в сопутствующей системе координат:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S'_1 \sigma_{rr} + S'_2 \sigma_{\theta\theta} + S'_3 \sigma_{zz} + S'_4 \sigma_{\theta z}, \quad \varepsilon_2 = S'_5 \sigma_{rz} + S'_6 \sigma_{r\theta}, \\
S'_{11} &= S_{11}, S'_{12} = (S_{12} + x^2 S_{13}) / g^2, \\
S'_{22} &= (S_{13} + x^2 S_{12}) / g^2, \quad S'_{14} = -2x(S_{12} - x^2 S_{13}) / g^2, \\
S'_{22} &= (S_{22} + 2x^2 S_{23} + x^4 S_{33} + x^2 S_{44}) / g^4, \\
S'_{23} &= [(1 + x^4) S_{23} + x^2 (S_{22} + S_{33} - S_{44})] / g^4, \\
S'_{24} &= x[2(S_{23} - S_{33}) + 2x^2 (S_{33} - S_{23}) + (1 - x^2) S_{44} S] / g^4, \\
S'_{33} &= [S_{33} + 2x^2 (S_{23} + x^4 S_{22} + x^2 S_{44})] / g^4, \\
S'_{34} &= x[2(S_{33} - S_{23}) + 2x^2 (S_{23} - S_{22}) - (1 - x^2) S_{44} S] / g^4, \\
S'_{44} &= [(1 - x^2)^2 S_{44} + 4x^2 (S_{22} - 2S_{23} + S_{33})] / g^4, \\
S'_{55} &= (S_{55} + x^2 S_{66}) / g^2, \quad S'_{56} = x(S_{55} - S_{66}) / g^2, \\
S'_{55} &= (S_{66} + x^2 S_{55}) / g^2, \quad S'_{ij} = S'_{ji}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Одним из мотивов, стимулирующих построение основных соотношений для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией, является механическая структура стенок артериальных кровеносных сосудов и связанное с этой структурой явление винтового движения крови.

Построение основных соотношений для цилиндрической оболочки осуществим, опираясь на гипотезы Кирхгоффа–Лява. Поскольку во многих источниках указывается на то, что стенка сосуда предварительно напряжена в продольном и окружном направлениях, приведём вариант линейризованных уравнений, учитывающих эти факторы. Ограничимся осесимметричным случаем.

Обратимся, вначале, к соотношениям (8), (9). Преобразуя их, полагая $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ и $x = at$, где a – радиус срединной поверхности, получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= g_{11} e_{\theta\theta} + g_{12} e_{zz} + g_{13} e_{\theta z}, \\
\sigma_{zz} &= g_{12} e_{\theta\theta} + g_{22} e_{zz} + g_{23} e_{\theta z}, \\
\sigma_{zz} &= g_{12} e_{\theta\theta} + g_{22} e_{zz} + g_{23} e_{\theta z}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
g_{11} &= [E_2 + x^2 (v_{32} E_2 + 4G_{23} + 4G_{23} v_{23} v_{32}) + x^4 E_3], \\
g_{12} &= [v_{32} E_2 + x^2 (E_2 + E_3 + 4G_{23} - 4G_{23} v_{23} v_{32})], \\
g_{22} &= [E_3 + x^2 (E_2 + E_3 + 4G_{23} - 4G_{23} v_{23} v_{32}) + x^4 E_3], \\
g_{13} &= x [2G_{23} (1 - v_{23} v_{32}) - E_2 (1 - v_{23}) + x^2 (E_3 - v_{32} E_2 - 2G_{23} + 2G_{23} v_{23} v_{32}) / g_0], \\
g_{23} &= x [-2G_{23} (1 - v_{23}) + E_3 (1 - v_{23}) + x^2 (-E_2 - v_{23} E_3 - 2G_{23} + 2G_{23} v_{23} v_{32}) / g_0], \\
g_{33} &= x [G_{32} (1 - v_{23} v_{32}) (1 - x^2)^2 + x^2 (E_2 - v_{23} E_2 + E_3 - v_{32} E_3 - 2G_{23} + 2G_{23} v_{23} v_{32})], \\
g_{33} &= x [G_{32} (1 - v_{23} v_{32}) (1 - x^2)^2 + x^2 (E_2 - v_{23} E_2 + E_3 - v_{32} E_3 - 2G_{23} + 2G_{23} v_{23} v_{32})], \\
g_0 &= (1 + x^2)^4 (1 - v_{23} v_{32}).
\end{aligned}$$

Упрощения на основе гипотезы единой нормали приводят к выражениям

$$e_{\theta\theta} = e_1^0 + ye_1^1, \quad e_{zz} = e_2^0 + ye_2^1, \quad 2e_{\theta z} = e_3^0 + ye_3^1,$$

$$e_1^1 = -u_r^0/a^2, \quad e_2^1 = -\partial^2 u_r^0, \quad e_3^1 = 0.$$

где u_r^0, u_θ^0, u_z^0 – смещение точек срединной поверхности, $-h/2 \leq y \leq h/2$, h – толщина оболочки.

В принятых выше обозначениях выражения для усилий и моментов можно записать в следующем виде:

$$T_i = hg_{ij}e_j^0, \quad M_i = h^3g_{ij}e_j^1/12,$$

где

$$T_1 = T_{\theta\theta}, \quad T_2 = T_{zz}, \quad T_3 = T_{\theta z}, \quad M_1 = M_{\theta\theta}.$$

Замыкая цепочку основных соотношений уравнения движения

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} - \frac{T_1}{a} + T_\theta^0 \frac{u_r^0}{a^2} + T_z^0 \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial z^2} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial t^2} + q_r = 0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial t^2} + q_z = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial z} + \frac{\partial T_3}{\partial z} - \frac{T_{\theta z}^0}{a} \frac{\partial u_r^0}{\partial z} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial t^2} + q_\theta = 0.$$

Здесь ρ_0 – плотность материала оболочки, $T_\theta^0, T_r^0, T_{\theta z}^0$ – усилия предварительно напряженного состояния.

Для того, чтобы получить представление о взаимодействии продольных и крутильных деформаций при динамических процессах, рассмотрим задачу о распространении гармонических волн.

Решение будем отыскивать в виде

$$u_j = U_j e^{i(k\xi - \omega t)}, \quad \xi = z/a,$$

где U_j – произвольные постоянные, $j = 1, 2, 3$ символизирует r, z, θ .

Полагая в (1) $q_r = q_\theta = q_z = 0$ и подставляя (2), получим однородную алгебраическую систему

$$l_{ij}U_j = 0.$$

Определитель этой системы является дисперсионным уравнением, корни которого $k(\omega)$ определяют множество нормальных волн (мод). При $T_{\theta\theta}^0 = T_{zz}^0 = T_{\theta z}^0 = 0$ в низкочастотной области всегда существуют четыре вещественных корня $\pm k_1, \pm k_2$, которые для достаточно тонких оболочек можно найти на основе безмоментной теории. Этим корням соответствуют однородные (незатухающие) моды. Учет моментных слагаемых при малых ω дает еще две пары комплексных корней, а соответствующие им моды описывают краевой эффект. Ниже U_{j1}, U_{j2} – компоненты амплитуды, соответствующие k_1, k_2 .

Математическая модель пульсового движения крови в артериальных сосудах

В предлагаемой математической модели, как и в [3], колебания стенки сосуда описываются уравнениями безмоментной теории упругих оболочек, а движение крови – линейными уравнениями вязкой несжимаемой жидкости.

Отличие состоит в учёте винтовой анизотропии стенки сосуда.

Будем считать, что на стенке сосуда выполняются кинематические условия прилипания

$$\partial_t u_r = v_r, \quad \partial_t u_z = v_z, \quad \partial_t u_\theta = v_\theta,$$

а гидродинамическое воздействие на стенку сосуда выражается тем, что в уравнениях (10)

$$\begin{aligned} q_r &= [p - 2\rho\nu\partial_r\vartheta_r]_{r=a}, \\ q_z &= -\rho\nu[\partial_r\vartheta_z + \partial_z\vartheta_r]_{r=a}, \\ q_\theta &= -\rho\nu[\partial_r\vartheta_\theta + \vartheta_\theta/r]_{r=a}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\vartheta_r, \vartheta_z, \vartheta_\theta$ – радиальная, осевая и крутильная компоненты вектора скорости, p – давление, $\partial_r, \partial_z, \partial_\theta, \partial_t$, – частные производные по соответствующим переменным.

Решение для совместного движения будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_j &= U_j e^{i(k\xi - \omega t)}, \quad u_j = V_j(\xi) e^{i(k\xi - \omega t)}, \quad p = p_0 e^{i(k\xi - \omega t)} \\ \xi &= r/a, \quad \xi = z/a, \end{aligned} \quad (12)$$

где на основании решения уравнений гидродинамики в предположении, что $\partial_r p = 0$,

$$\begin{aligned} V_z &= \frac{ika}{\rho\nu\beta^2} p_0 + \frac{J_0(\beta\xi)}{J_0(\beta)} X_z, \quad V_r = \frac{k^2 a}{2\rho\nu\beta^2} \xi p_0 + \frac{ik}{\beta}, \\ V_\theta &= \frac{J_1(\beta\xi)}{J_1(\beta)} X_\theta, \quad \beta^2 = i\gamma^2 - k^2, \quad \gamma^2 = a^2\omega/\nu. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь ρ_0, X_z, X_θ , как и U_j – произвольные постоянные, ρ – плотность крови, ν – кинематическая вязкость.

Уравнения движения оболочки (10) совместно с соотношениями (11)-(13) позволяет свести задачу к однородной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} d_{ij}(k)X_j &= 0, \quad i, j = 1, \dots, 3, \\ X_1 &= X_z, \quad X_2 = X_\theta, \quad X_3 = p_0. \end{aligned}$$

определитель которой, приравненный нулю, определяет дисперсионное уравнение.

ВЫВОДЫ

1. Разработана модель и методика расчета устойчивости и радиальной жесткости проволочных стентов с S-образными формами элементов.
2. Для того, чтобы обеспечить заданную устойчивость стента, необходимо проектировать стент так, чтобы краевые кольца имели несущую способность выше, чем остальные части стента, необходимо проектировать стент так, чтобы он был равножестким.
3. Вследствие того, что в реальных условиях стент нагружен неравномерно, то необходимо проектировать стент так, чтобы его жесткость менялась по длине.
4. Произведен расчет напряженно- деформированного состояния стента после его установки в сосуд.
5. Разработаны метод и установка для экспериментального исследования механических параметров стента.
6. Разработана физическая модель артерии для проведения экспериментальных исследований гибкости эндопротезов.
7. Установлено влияние геометрических параметров эндопротеза и его дизайна на механические свойства стентов.
8. Получено уравнение устойчивости стента в приближении эффективной пружины.

ЛИТЕРАТУРА

1. A randomized comparison of coronary-stent placement and balloon angioplasty in the treatment of coronary artery disease / D. Fischman, M. Leon, D. Baim et al. // *N. Engl. J. Med.* – 1994. – Vol. 331, № 8. – P. 496–501.
2. Козлов, К.Л. Интервенционная пластика венечных артерий – С.-Петербург: ЭЛБИ, 2000. – С. 68.
3. Stenting in cardiac interventional practice, off-label versus approved indication / D. Holmes, P. Berger, K. Garratt et al. // *Circulation.* – 1995. – Vol. 92, suppl. I. – P. 85.
4. Bosch, J.L., Hunink, M.G.M. Meta-analysis of the results of percutaneous transluminal angioplasty and stent placement for aortoiliac occlusive disease. *Radiology* 1997; 204: 87–96.
5. Fischman, D.L., Leon, M., Baim, D.S., Schatz, R.A., Savage, M.P., Penn, I., Detre, K., Veltri, L., Ricci, D., Nobuyoshi, M., Cleman, M., Heuser, R., Almond, D., Teirstein, P.S., Fish, D., Colombo, A., Brinker, J., Moses, J., Shaknovich, A., Hirshfeld, J., Bailey, S., Ellis, S., Rake, R., Goldberg, S., for the Stent Restenosis Study Investigators. A randomized comparison of coronary stent placement and balloon angioplasty in the treatment of coronary disease. *N Engl J Med.* 1994; 331: 496–501.
6. Macaya, C., Serruys, P.W., Ruygrok, P., Suryapranata, H., Mast, G., Klugmann, S., Urban, P., den Heijer, P., Koch, K., Simon, R., Morice, M.C., Crean, P., Bonnier, H., Wijns, W., Danchin, N., Bourdonne, C., Morel, M.A., for the Benestent Study Group. Continued benefit of coronary stenting compared to balloon angioplasty: one year clinical follow-up of the Benestent trial. *J Am Coll Cardiol.* 1996; 27; 255–261.
7. Richter, G.M., Roeren, T.H., Noeldge, G., et al. Superior clinical results of iliac stent placement versus percutaneous transluminal angioplasty: four-year success rates of a randomized study (abstr). *Radiology* 1991; 181 (suppl): 161.
8. Serruys, P.W., de Jaegere P., Kiemeneij, F., Macaya, C., Rutsch, W., Heyndricks, G., Emanuelsson, H., Marco, J., Legrand, V., Materne, P., Belardi, J., Sigwart, U., Colombo, A., Goy, J.J., van den Heuvel, P., Delcan, J., Morel, M.A., for the Benestent Study Group. A comparison of balloon-expandable stent implantation with balloon angioplasty in patients with coronary artery disease. *N Engl J Med.* 1994; 331: 489–495.
9. Van der Ven, G.J.P., Kaatee, R., Beuter, J.J., Beek, J.A.F., Woittiez, J.A., Buskens, E., Koomans, A.H., Mali, P.Th.W. Arterial stenting and balloon angioplasty in ostial atherosclerotic renovascular disease: a randomised trial. *Lancet.* 1999. 353: 282–86.
10. A.V.Chigarev, V.T.Minchenya, A.S.Manko. Interaction Research of Vessel-Stent-Blood System/. International Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics. STAMM 2006. July 10-14, 2006. Vienna University of Technology organized under the auspices of ISIMM. С. 29–30.
11. Мрочек, А.Г., Адзерихо, И.Э., Герасевич, В.А., Чigarev, А.В., Минченя, В.Т. Расчет радиальной жесткости и устойчивости внутрисосудистых эндопротезов – артериальных стентов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № – С.
12. Чigarev, А.В., Минченя, В.Т., Манько, А.С. Теоретические и экспериментальные исследования элементов проволочных стентов. Межведомственный сборник научно-методических статей. Теоретическая и прикладная механика. Вып. 20. Минск. 2006. С. 13–16.
13. Минченя, В.Т. Манько, А.С. Технология изготовления проволочного стента. Материалы докладов 7-й международной научно-технической конференции «Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия». 16-17 мая 2006 г. С. 207–208
14. Устинов, Ю.А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // *Успехи механики.* – 2003. – № 4. – С. 3–29

БИОМЕХАНИКА МНОГООПОРНОГО ПРОТЕЗА

Крушевский А.Е.

Переход ко многим опорам

При наличии многих опор должны учитываться реакции R_i всех опор. Это означает, что к уравнениям моментов добавляются слагаемые учитывающие моменты сил реакций в каждой опоре. В связи с вышесказанным уравнения равновесия многоопорного мостовидного протеза записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_{ix} &= \sum_{i=1}^n (c_{ix} u_i + c_{ixy} v_i + c_{ixz} w_i + c_{ix\varphi} \varphi_x) = P_x; \\ \sum_{i=1}^n R_{iy} &= \sum_{i=1}^n (c_{iy} u_i + c_{iy} v_i + c_{iyz} w_i + c_{iy\varphi} \varphi_y) = P_y; \\ \sum_{i=1}^n R_{iz} &= \sum_{i=1}^n (c_{iz} u_i + c_{izy} v_i + c_{iz} w_i + c_{iz\varphi} \varphi_z) = P_z; \\ \sum_{i=1}^n m_{ix} &= \sum_{i=1}^n [c_{ix\varphi} u_i + \mu_{ix} \varphi_x + \mu_{ixy} \varphi_y + \mu_{ixz} \varphi_z + (y_{ic} - y_c) R_{iz} - (z_{ib} - z_b) R_{iy}] = m_x = \\ &= \sum_{k=1}^m [(y_k - y_c) P_{kx} - (z_k - z_b) P_{ky}]; \\ \sum_{i=1}^n m_{iy} &= \sum_{i=1}^n [c_{iy\varphi} v_i + \mu_{iy} \varphi_x + \mu_{iy} \varphi_y + \mu_{iyz} \varphi_z + (z_{ia} - z_a) R_{ix} - (x_{ic} - x_c) R_{iz}] = m_y = \\ &= \sum_{k=1}^m [(z_k - z_a) P_{kx} - (x_k - x_c) P_{kz}]; \\ \sum_{i=1}^n m_{iz} &= \sum_{i=1}^n [c_{iz\varphi} w_i + \mu_{iz} \varphi_x + \mu_{iz} \varphi_y + \mu_{iz} \varphi_z + (x_{ib} - x_b) R_{iy} - (y_{ia} - y_a) R_{ix}] = m_z = \\ &= \sum_{k=1}^m [(x_i - x_b) P_{ky} - (y_i - y_a) P_{kx}], \end{aligned}$$

где n – число опор, m – число внешних сил;

P_{kx}, P_{ky}, P_{kz} – проекции внешних сил;

R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} – проекции сил реакций в i -й опоре;

$x_{ib}, x_{ic}, y_{ia}, y_{ic}, z_{ia}, z_{ib}$ – координаты центров сопротивления в i -й опоре;

$x_b, x_c, y_a, y_c, z_a, z_b$ – координаты центров сопротивления протеза;

u_i, v_i, w_i – поступательные перемещения i -й опоры. Остальные коэффициенты уравнений представляют собой соответствующие жёсткости i -й опоры, причём в формулах для этих жёсткостей входят координаты центров сопротивления i -й опоры.

Зная закон изменения перемещений

$$\begin{aligned} u_i &= u_0 + (z_{ia} - z_a) \varphi_y - (y_{ia} - y_a) \varphi_z, \\ v_i &= v_0 + (x_{ib} - x_b) \varphi_z - (z_{ib} - z_b) \varphi_x, \\ w_i &= w_0 + (y_{ic} - y_c) \varphi_x - (x_{ic} - x_c) \varphi_y, \end{aligned}$$

где u_0, v_0, w_0

поступательные перемещения протеза, можно вычислить реакции каждой опоры.

Так, проекции сил реакций опор равны

$$R_{ix} = c_{ix}u_0 + c_{ixy}v_0 + c_{ixz}w_0 + [c_{ix\varphi} + c_{ixz}(y_{ic} - y_c) - c_{ixy}(z_{ib} - z_b)]\varphi_x + [c_{ix}(z_{ia} - z_a) - c_{ixz}(x_{ic} - x_c)]\varphi_y + [c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)]\varphi_z;$$

$$R_{iy} = c_{ixy}u_0 + c_{iy}v_0 + c_{iyz}w_0 + [c_{iyz}(y_{ic} - y_c) - c_{iy}(z_{ib} - z_b)]\varphi_x + [c_{iy\varphi} + c_{ixy}(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)]\varphi_y + [c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)]\varphi_z;$$

$$R_{iz} = c_{ixz}u_0 + c_{iyz}v_0 + c_{iz}w_0 + [c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)]\varphi_x + [c_{ixz}(z_{ia} - z_a) - c_{iz}(x_{ic} - x_c)]\varphi_y + [c_{iz\varphi} + c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a)]\varphi_z$$

Моменты реакций опор относительно осей координат x, y, z равны (ось x проходит через точку y_c, z_b , ось y — через точку x_c, z_a , ось z через точку x_b, y_a).

$$m_{ix} = [c_{ix\varphi} + c_{ixz}(y_{ic} - y_c) - c_{ixy}(z_{ib} - z_b)]u_0 + \{\mu_{ix} + (y_{ic} - y_c)[c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)] - (z_{ib} - z_b)[c_{iyz}(y_{ic} - y_c) - c_{iy}(z_{ib} - z_b)]\}\varphi_x + \{\mu_{ixy} + c_{ix\varphi}(z_{ia} - z_a) - c_{iy\varphi}(z_{ib} - z_b) + (y_{ic} - y_c) \times [c_{ixz}(z_{ia} - z_a) - c_{iz}(x_{ic} - x_c)] - (z_{ib} - z_b)[c_{ixy}(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)]\}\varphi_y + \{\mu_{ixz} - c_{ix\varphi}(y_{ia} - y_a) + c_{iz\varphi}(y_{ic} - y_c) + (y_{ic} - y_c)[c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a)] - (z_{ib} - z_b) \times [c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)]\}\varphi_z + v_0[c_{iyz}(y_{ic} - y_c) - (z_{ib} - z_b)c_{iy}] + w_0[c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)];$$

$$m_{iy} = u_0[c_{ix}(z_{ia} - z_a) - c_{ixz}(x_{ic} - x_c)] + v_0[c_{iy\varphi} + c_{ixy}(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)] + w_0[c_{ixz}(z_{ia} - z_a) - c_{iz}(x_{ic} - x_c)] + \varphi_x\{[c_{ix\varphi} + c_{ixz}(y_{ic} - y_c) - c_{ixy}(z_{ib} - z_b)] - (x_{ic} - x_c)[c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)] - c_{iy\varphi}(z_{ib} - z_b) + \mu_{iy}\} + \varphi_y\{\mu_{iy} + (z_{ia} - z_a)[c_{ix}(z_{ia} - z_a) - c_{ixz}(x_{ic} - x_c)] - (x_{ic} - x_c)[c_{ixz}(z_{ia} - z_a) - c_{iz}(x_{ic} - x_c)]\} + \varphi_z\{c_{iy\varphi}(x_{ib} - x_b) + (z_{ia} - z_a)[c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a) - (x_{ic} - x_c)[c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a) + c_{iz\varphi}]\};$$

$$m_{iz} = u_0[c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)] + v_0[c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)] + w_0[c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz} \times (y_{ia} - y_a)] + \varphi_x\{c_{iz\varphi}(y_{ic} - y_c) + (x_{ib} - x_b)[c_{iyz}(y_{ic} - y_c) - c_{iy}(z_{ib} - z_b)] - (y_{ia} - y_a) \times [c_{ixz}(y_{ic} - y_c) - c_{ixy}(z_{ib} - z_b) + c_{ix\varphi}]\} + \varphi_y\{-c_{iz\varphi}(x_{ic} - x_c) + (x_{ib} - x_b)[c_{ixy}(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c) + c_{iy\varphi}]\} - (y_{ia} - y_a)[c_{ix}(z_{ia} - z_a) - c_{ixz}(x_{ic} - x_c)] + \varphi_z\{(x_{ib} - x_b)[c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)] - (y_{ia} - y_a)[c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)]\}.$$

В вышеприведенных уравнениях равновесия входят суммы реакций и суммы моментов. Эти суммы можно значительно упростить, если ввести понятие центров сопротивления многоопорного протеза.

Определение координат центра сопротивления многоопорного мостовидного протеза

Для того, чтобы определить координаты центра сопротивления многоопорного мостовидного протеза выписываем формулы.

$$\sum_{i=1}^n R_{ix}, \quad \sum_{i=1}^n R_{iy}, \quad \sum_{i=1}^n R_{iz} \text{ и обращаем в нуль}$$

$$\text{суммы} \quad \sum_{i=1}^n [c_{ix}(z_{ia} - z_a) - c_{ixz}(x_{ic} - x_c)] = 0, \sum_{i=1}^n [c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)] = 0$$

при φ_y и φ_z в выражении $\sum_{n=1}^n R_{ix}$,

$$\text{суммы} \quad \sum_{i=1}^n [c_{iyz}(y_{ic} - y_c) - c_{iy}(z_{ib} - z_b)] = 0, \sum_{i=1}^n [c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)] = 0$$

при φ_x, φ_z в выражении $\sum_{n=1}^n R_{iy}$,

$$\text{суммы} \quad \sum_{i=1}^n [c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)] = 0, \sum_{i=1}^n [c_{ixz}(z_{ia} - z_a) - c_{iz}(x_{ic} - x_c)] = 0$$

при φ_x и φ_y в выражении $\sum_{n=1}^n R_{iz}$,

Решая полученные уравнения относительно $x_b, x_c, y_a, y_c, z_a, z_b$, находим

$$x_b = \frac{\sum_{i=1}^n c_{ixy} \sum_{i=1}^n (c_{ix} y_{ia} - c_{ixy} x_{ib}) - \sum_{i=1}^n c_{ix} \sum_{i=1}^n (c_{ixy} y_{ia} - c_{iy} x_{ib})}{\sum_{i=1}^n c_{ix} \sum_{i=1}^n c_{iy} - (\sum_{i=1}^n c_{ixy})^2},$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n c_{ix} \sum_{i=1}^n (c_{iz} x_{ic} - c_{ixz} z_{ia}) - \sum_{i=1}^n c_{ixz} \sum_{i=1}^n (c_{ixz} x_{ic} - c_{ix} z_{ia})}{\sum_{i=1}^n c_{ix} \sum_{i=1}^n c_{iz} - (\sum_{i=1}^n c_{ixz})^2},$$

$$y_a = \frac{\sum_{i=1}^n c_{iy} \sum_{i=1}^n (c_{ix} y_{ia} - c_{ixy} x_{ib}) - \sum_{i=1}^n c_{ixy} \sum_{i=1}^n (c_{ixy} y_{ia} - c_{iy} x_{ib})}{\sum_{i=1}^n c_{ix} \sum_{i=1}^n c_{iy} - (\sum_{i=1}^n c_{ixy})^2},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n c_{iyz} \sum_{i=1}^n (c_{iy} z_{ib} - c_{iyz} y_{ic}) - \sum_{i=1}^n c_{iy} \sum_{i=1}^n (c_{iyz} z_{ib} - c_{iz} y_{ic})}{\sum_{i=1}^n c_{iy} \sum_{i=1}^n c_{iz} - (\sum_{i=1}^n c_{iyz})^2},$$

$$z_a = \frac{\sum_{i=1}^n c_{ixz} \sum_{i=1}^n (c_{iz} x_{ic} - c_{ixz} z_{ia}) - \sum_{i=1}^n c_{iz} \sum_{i=1}^n (c_{ixz} x_{ic} - c_{ix} z_{ia})}{\sum_{i=1}^n c_{ix} \sum_{i=1}^n c_{iz} - (\sum_{i=1}^n c_{ixz})^2},$$

$$z_b = \frac{\sum_{i=1}^n c_{iz} \sum_{i=1}^n (c_{iy} z_{ib} - c_{iyz} y_{ic}) - \sum_{i=1}^n c_{iyz} \sum_{i=1}^n (c_{iyz} z_{ib} - c_{iz} y_{ic})}{\sum_{i=1}^n c_{iy} \sum_{i=1}^n c_{iz} - (\sum_{i=1}^n c_{iyz})^2}.$$

Как видим, на основании полученных формул, для определения координат центра сопротивления многоопорного мостовидного протеза необходимо сначала найти жесткости и координаты центров сопротивления всех опорных корней.

Упрощение формул для суммарных усилий и моментов реакций в опорах многоопорного протеза

Введение центров сопротивления протеза позволяет значительно упростить формулы для суммарных усилий и моментов относительно осей координат и тем самым упростить систему уравнений равновесия многоопорного протеза.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n R_{ix} &= \sum_{i=1}^n \{c_{ix}u_0 + c_{ixy}v_0 + c_{ixz}w_0 + \varphi_x [c_{ix\varphi} - c_{ixy}(z_{ib} - z_b) + c_{ixz}(y_{ic} - y_c)]\}, \\
\sum_{i=1}^n R_{iy} &= \sum_{i=1}^n \{c_{ixy}u_0 + c_{iy}v_0 + c_{iyz}w_0 + \varphi_y [c_{iy\varphi} - c_{iyz}(x_{ic} - x_c) + c_{ixy}(z_{ia} - z_a)]\}, \\
\sum_{i=1}^n R_{iz} &= \sum_{i=1}^n \{c_{ixz}u_0 + c_{iyz}v_0 + c_{iz}w_0 + \varphi_z [c_{iz\varphi} - c_{ixz}(y_{ia} - y_a) + c_{iyz}(x_{ib} - x_b)]\}, \\
\sum_{i=1}^n m_{ix} &= \sum_{i=1}^n \{\varphi_x [y_{ic}c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)y_{ic} - z_{ib}c_{iyz}(y_{ic} - y_c) + z_{ib}c_{iy}(z_{ib} - z_b) + \mu_{ix}] + \\
&+ \varphi_y [y_{ic}c_{ixz}(z_{ia} - z_a) - y_{ic}c_{iz}(x_{ic} - x_c) - c_{ixy}(z_{ia} - z_a)(z_{ib} - z_b) + c_{iyz}(x_{ic} - x_c)(z_{ib} - z_b) - \\
&- c_{iy\varphi}(z_{ib} - z_b) + c_{ix\varphi}(z_{ia} - z_a) + \mu_{ixy}] + \varphi_z [c_{iyz}(x_{ib} - x_b)(y_{ic} - y_c) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a)(y_{ic} - y_c) - \\
&- c_{iy}z_{ib}(x_{ib} - x_b) + c_{ixy}z_{ib}(y_{ia} - y_a) + c_{iz\varphi}(y_{ic} - y_c) - c_{ix\varphi}(y_{ia} - y_a) + \mu_{ixz}] + \\
&+ u_0 [c_{ix\varphi} + c_{ixz}(y_{ic} - y_c) - c_{ixy}(z_{ib} - z_b)]\}, \\
\sum_{i=1}^n m_{iy} &= \sum_{i=1}^n \{\varphi_x [c_{ix\varphi}(z_{ia} - z_a) - c_{iy\varphi}(z_{ib} - z_b) + c_{ixz}(y_{ic} - y_c)(z_{ia} - z_a) - c_{iz}x_{ic}(y_{ic} - y_c) + \\
&+ c_{iyz}x_{ic}(z_{ib} - z_b) - c_{ixy}(z_{ia} - z_a)(z_{ib} - z_b) + \mu_{ixy}] + \varphi_y [\mu_{iy} + (z_{ia} - z_a)(c_{ix}z_{ia} - c_{ixz}x_{ic}) + \\
&+ (x_{ic} - x_c)(c_{iz}x_{ic} - c_{ixz}z_{ia})] + \varphi_z [\mu_{iyz} + c_{iy\varphi}(x_{ib} - x_b) - c_{iz\varphi}(x_{ic} - x_c) - (x_{ic} - x_c)(x_{ib} - x_b)c_{iyz} + \\
&+ c_{ixz}(x_{ic} - x_c)(y_{ia} - y_a) + (x_{ib} - x_b)c_{ixy}z_{ia} - (y_{ia} - y_a)c_{ix}z_{ia}] + v_0 [c_{iy\varphi} + c_{izy}(z_{ib} - z_b) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)]\}, \\
\sum_{i=1}^n m_{iz} &= \sum_{i=1}^n \{\varphi_x [c_{ix\varphi}(y_{ic} - y_c) - c_{ix\varphi}(y_{ia} - y_a) + c_{iyz}(y_{ic} - y_c)(x_{ib} - x_b) - c_{iy}(x_{ib} - x_b)(z_{ib} - z_b) - \\
&- c_{ixz}(y_{ia} - y_a)(y_{ic} - y_c) + c_{ixy}(y_{ia} - y_a)(z_{ib} - z_b) + \mu_{ixz}] + \varphi_y [\mu_{iyz} - c_{iz\varphi}(x_{ic} - x_c) + c_{iy\varphi}(x_{ib} - x_b) + \\
&+ c_{ixy}(x_{ib} - x_b)(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)(z_{ia} - z_a) + c_{ixz}(x_{ic} - x_c)(y_{ia} - y_a)] + \\
&+ \varphi_z [\mu_{iz} + (x_{ib} - x_b)[c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)] - (y_{ia} - y_a)[c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)] + \\
&+ w_0 [c_{iz\varphi} + c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a)]\}.
\end{aligned}$$

Уравнение равновесия многоопорного протеза записываются в таком же виде, как и для одноопорного, но с некоторой корректировкой коэффициентов, а именно:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (c_{ix}u_0 + c_{ixy}v_0 + c_{ixz}w_0 + c_{ix\varphi}^* \varphi_x) &= P_x, \\
\sum_{i=1}^n (c_{ixy}u_0 + c_{iy}v_0 + c_{iyz}w_0 + c_{iy\varphi}^* \varphi_y) &= P_y, \\
\sum_{i=1}^n (c_{ixz}u_0 + c_{iyz}v_0 + c_{iz}w_0 + c_{iz\varphi}^* \varphi_z) &= P_z, \\
\sum_{i=1}^n (\mu_{ix}^* \varphi_x + \mu_{ixy}^* \varphi_y + \mu_{ixz}^* \varphi_z + c_{ix\varphi}^* u_0) &= m_x, \\
\sum_{i=1}^n (\mu_{ixy}^* \varphi_x + \mu_{iy}^* \varphi_y + \mu_{iyz}^* \varphi_z + c_{iy\varphi}^* v_0) &= m_y, \\
\sum_{i=1}^n (\mu_{ixz}^* \varphi_x + \mu_{iyz}^* \varphi_y + \mu_{iz}^* \varphi_z + c_{iz\varphi}^* w_0) &= m_z,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{ix\varphi}^* &= c_{ix\varphi} + c_{ixz}(y_{ic} - y_c) - c_{ixy}(z_{ib} - z_b), \\
c_{iy\varphi}^* &= c_{iy\varphi} + c_{ixy}(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c), \\
c_{iz\varphi}^* &= c_{iz\varphi} + c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a), \\
\mu_{ix}^* &= \mu_{ix} + y_{ic}[c_{iz}(y_{ic} - y_c) - c_{iyz}(z_{ib} - z_b)] - z_{ib}[c_{iyz}(y_{ic} - y_c) - c_{iy}(z_{ib} - z_b)] \\
\mu_{iy}^* &= \mu_{iy} + (z_{ia} - z_a)(c_{ix}z_{ia} - c_{ixz}x_{ic}) + (x_{ic} - x_c)(c_{iz}x_{ic} - c_{ixz}z_{ia}) \\
\mu_{iz}^* &= \mu_{iz} + x_{ib}[c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ia} - y_a)] - y_{ia}[c_{ixy}(x_{ib} - x_b) - c_{ix}(y_{ia} - y_a)] \\
\mu_{ixy}^* &= \mu_{ixy} + c_{ix\varphi}(z_{ia} - z_a) - c_{iy\varphi}(z_{ib} - z_b) + y_{ic}[c_{xiz}(z_{ia} - z_a) - c_{iz}(x_{ic} - x_c)] - \\
&\quad - (z_{ib} - z_b)[c_{ixy}(z_{ia} - z_a) - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)], \\
\mu_{ixz}^* &= \mu_{ixz} - c_{ix\varphi}(y_{ia} - y_a) + (y_{ic} - y_c)c_{iz\varphi} + (y_{ic} - y_c)[c_{iyz}(x_{ib} - x_b) - c_{ixz}(y_{ia} - y_a)] - \\
&\quad - z_{ib}[c_{iy}(x_{ib} - x_b) - c_{ixy}(y_{ic} - y_c)], \\
\mu_{iyz}^* &= \mu_{iyz} + c_{iy\varphi}(x_{ib} - x_b) - (x_{ic} - x_c)c_{iz\varphi} + (x_{ib} - x_b)[c_{ixy}z_{ia} - c_{iyz}(x_{ic} - x_c)] - \\
&\quad - (y_{ia} - y_a)[c_{ix}z_{ia} - c_{ixz}(x_{ic} - x_c)].
\end{aligned}$$

Уравнения, как следовало ожидать, обладают симметрией, т.е. матрица жесткостей является симметричной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский, А. Е. Решение задачи о равновесии периодонта, ограниченного двумя эллиптическими двуполостными гиперboloидами // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – Вып. 10. – С. 11–21.
2. Наумович, С.А., Крушевский, А. Е. Биомеханика системы зуб-периодонт. – Минск: Экономические технологии, 2000. – 168 с.
3. Крушевский, А. Е., Наумович, С.С. Основы биомеханики мостовидных протезов // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: Технопринт, 2006. – Вып. 20. – С. 134–139.

БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА

А.Е. Покатилов¹, В.И. Загrevский²

The biomechanical analysis of purposeful movement of the person in conditions of an elastic support is presented at performance of such sports exercises as exercises in gymnastics on female bars and on a crossbeam. For purposeful movement the equations which members are generally broken into six groups are deduced. In such kind of the equation of movement show connection of these groups with the kinds of movement making absolute movement of parts, and with the forces put to the sportsman at the dynamic analysis, and also enable to estimate influence of all considered factors quantitatively.

Представлен биомеханический анализ целенаправленного движения человека в условиях упругой опоры при выполнении таких спортивных упражнений как маховые в гимнастике на женских брусьях и на перекладине. Для целенаправленного движения выведены уравнения, члены которых в общем случае разбиваются на шесть групп. В таком виде уравнения движения показывают связь этих групп с видами движения, составляющими абсолютное движение звеньев, и с силами, прикладываемыми к спортсмену при кинетостатическом анализе, а также дают возможность оценить влияние всех учитываемых факторов количественно.

Общие положения

С точки зрения управления различают естественное и целенаправленное движения. Естественное движение определяют как неуправляемое [1]. Оно не зависит от воли человека и решаемых им задач. Независимость означает подчинение только объективным законам механики. При естественном движении объект не вырабатывает управляющих воздействий.

Но движение человека отличается от естественного, т.к. для управления внутри тела вырабатываются мышечные силы. Эти силы называются управляющими, а само движение – целенаправленным. Отметим, что если бы естественные движения достигали цели, то управление было бы не нужным [2, 3].

Таким образом, естественное и целенаправленное движения коренным образом различаются.

Для вывода уравнений движения биомеханической системы (БМС) используем принцип Даламбера [4, 5]. Модели принимают вид уравнений кинетостатического равновесия системы в виде суммы моментов силовых факторов, приложенных к звеньям. Центрами моментов являются дистальные шарниры БМС. Уравнения решаются относительно моментов управляющих сил мышечной системы.

Работа мышечного аппарата человека представляется достаточно сложной и во многом неизвестной [6, 7]. Воспользуемся ограничениями, налагаемыми на модели мышечного аппарата и описанными в работе [3]. Считается, что они в основном правильно отражают суть проблемы, позволяя перевести исследование движения человека от общих рассуждений в практическую плоскость при нехватке точных знаний.

Принято:

- массой звена считать сумму масс костей скелета и мышц, примыкающих к кости;
- распределение масс внутри звена считать неизменным;
- тело мышц заменять линией действия мышечного усилия;
- считать, что движение обеспечивается минимальным количеством мышц, достаточным для обеспечения целенаправленного движения N -звенной системы;
- возможные взаимодействия между мышцами не учитывать.

Рассмотрим случай прикрепления мышц к соседним звеньям БМС, моделирующей опорно-двигательный аппарат человека. Чаще всего управляющее воздействие обеспечивается не одной, а несколькими мышцами. Поэтому можно говорить о действии на звено целой группы управляющих сил – по числу мышц, участвующих в данном движении. Им противодействует такое же количество равных по величине сил, направленных противоположно и возникающих на звене, к которому мышцы прикреплены вторым концом. Управляющие силы попарно компенсируют друг друга. Действуя на каждое из звеньев, они дают два главных вектора управляющих сил, равных и противоположно направленных по одной общей линии.

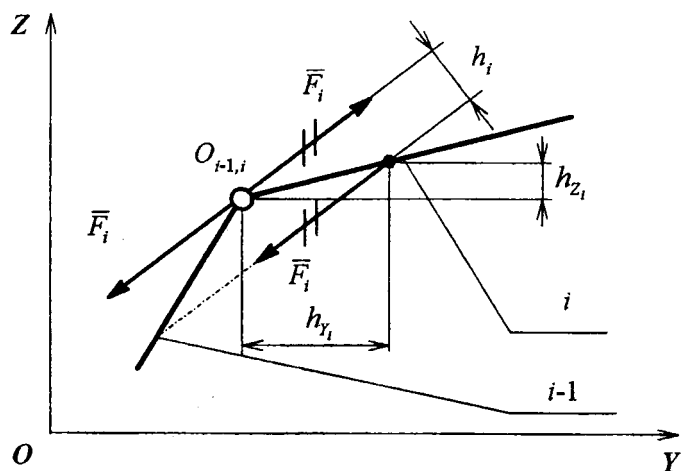
Таким образом, вместо группы управляющих сил, приложенных к звену, будем иметь дело с одним главным вектором управляющих сил. Точка звена, через которую он проходит, не обязательно является местом прикрепления мышцы к кости, но такое представление удобно при исследовании движения.

Необходимо иметь в виду, что в общем случае управляющие воздействия, испытываемые каждым звеном, разбиваются на две группы, так как кроме первого и последнего звеньев все остальные имеют по два сустава, относительно которых и реализуется движение человека. Другими словами, для промежуточных звеньев движение относительно дистального сустава создают одни мышцы, и их действие описывается соответствующими силами, приложенными к данному звену. Движение относительно проксимального сустава происходит за счет других мышц и появляется вторая группа управляющих сил, также приложенная к рассматриваемому звену.

Для исследования возьмем случай плоского движения человека, выполняющего маховое упражнение на упругой опоре, каковой может являться перекладина или женские брусья в гимнастике.

Уравнения целенаправленного движения спортсмена

Так как ни величина, ни направление, ни точка приложения к звену каждой управляющей



силы неизвестны, то необходимо привести эти силы к соответствующему шарниру. Это позволит определить относительно его моменты управляющих сил. Пример такого приведения показан на рис. 1.

В результате получим приложенные к шарниру силы реакции и управляющие силы, а также действующий на звено момент управляющих сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$:

Рис. 1. Приведение управляющей силы к шарниру

$$M_{i,i-1} = -F_i h_i = F_{iy} h_{zi} - F_{iz} h_{yi}, \quad (1)$$

где $M_{i,i-1}$ – момент управляющей силы, действующей на i -е звено относительно сустава $O_{i-1,i}$;

h_i – плечо управляющей силы на i -ом звене;

F_{iy} , F_{iz} – проекции управляющей силы F_i на i -ом звене на соответствующие оси;

h_{yi} – плечо проекции F_{iz} управляющей силы на i -ом звене;

h_{zi} – плечо проекции F_{iy} управляющей силы на i -ом звене.

На каждое звено также действует сила тяжести \bar{G}_i , и к нему присоединена в центре масс (ЦМ) звена инерционная нагрузка \bar{U}_i . При этом возникает момент пары сил инерции M_{u_i} [7].

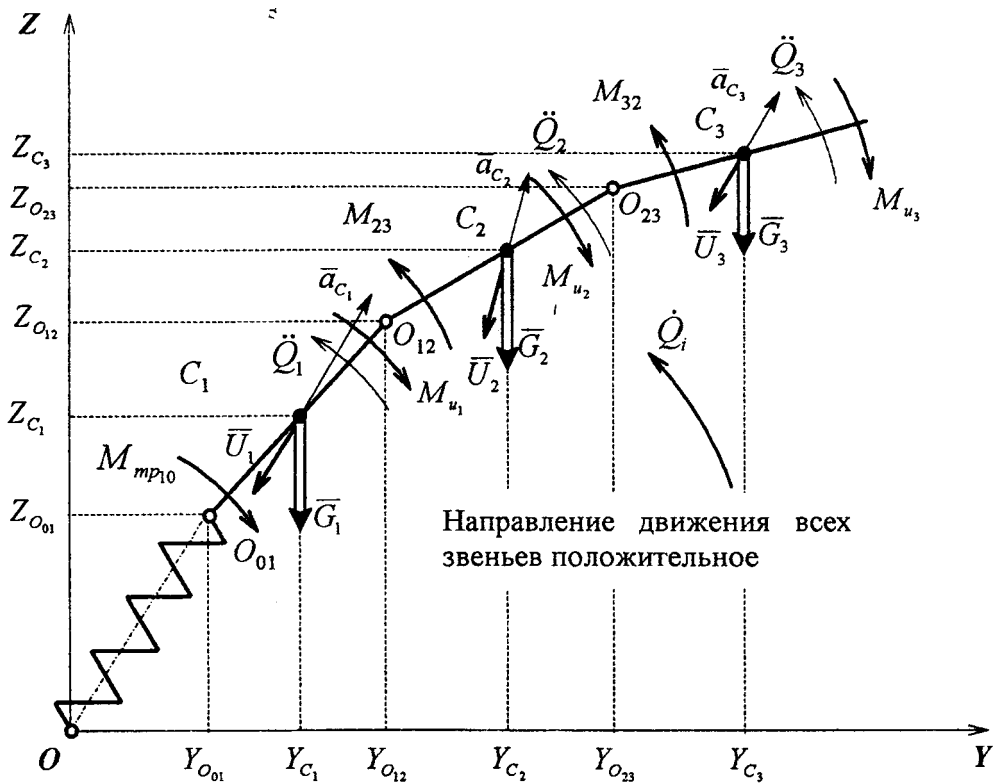


Рис. 2. Расчетная схема биомеханической системы (упругая опора в виде вращающейся пружины)

Покажем на рис. 2 все силовые факторы, используемые при выводе уравнений движения биомеханической системы. Здесь моменты управляющих сил относительно суставов O_{12} , O_{23} , а также момент трения в опорном суставе O_{01} показаны только со стороны анализируемой части биомеханической системы, и не показаны на соседних звеньях и на самой опоре.

Составим уравнения кинестатического равновесия исследуемой части системы в виде суммы моментов относительно освобожденной кинематической пары. В этом случае для получения расчетной схемы необходимо последовательно отбрасывать все звенья биомеханической системы со стороны опоры.

Для трехзвенной БМС относительно ее шарниров по рисунку 2 имеем:

$$\sum M_{O_{01}} = 0, \quad \sum M_{O_{12}} = 0, \quad \sum M_{O_{23}} = 0. \quad (2)$$

Сразу выражая управляющие моменты мышечных сил и момент сил трения из уравнений кинестатики, получим:

$$\begin{aligned} -M_{mp10} &= I_1 \ddot{Q}_1 + I_2 \ddot{Q}_2 + I_3 \ddot{Q}_3 + G_1(Y_{C_1} - Y_{O_{01}}) + G_2(Y_{C_2} - Y_{O_{01}}) + G_3(Y_{C_3} - Y_{O_{01}}) - \\ &- m_1 \ddot{Y}_{C_1}(Z_{C_1} - Z_{O_{01}}) - m_2 \ddot{Y}_{C_2}(Z_{C_2} - Z_{O_{01}}) - m_3 \ddot{Y}_{C_3}(Z_{C_2} - Z_{O_{01}}) + \\ &+ m_1 \ddot{Z}_{C_1}(Y_{C_1} - Y_{O_{01}}) + m_2 \ddot{Z}_{C_2}(Y_{C_2} - Y_{O_{01}}) + m_3 \ddot{Z}_{C_3}(Y_{C_3} - Y_{O_{01}}), \\ M_{21} &= I_2 \ddot{Q}_2 + I_3 \ddot{Q}_3 + G_2(Y_{C_2} - Y_{O_{12}}) + G_3(Y_{C_3} - Y_{O_{12}}) - m_2 \ddot{Y}_{C_2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (Z_{C_2} - Z_{O_{12}}) - m_3 \ddot{Y}_{C_3} (Z_{C_3} - Z_{O_{12}}) + m_2 \ddot{Z}_{C_2} (Y_{C_2} - Y_{O_{12}}) + m_3 \ddot{Z}_{C_3} (Y_{C_3} - Y_{O_{12}}), \\ M_{32} &= I_3 \ddot{Q}_3 + G_3 (Y_{C_3} - Y_{O_{23}}) - m_3 \ddot{Y}_{C_3} (Z_{C_3} - Z_{O_{23}}) + m_3 \ddot{Z}_{C_3} (Y_{C_3} - Y_{O_{23}}). \end{aligned} \quad (3)$$

где $I_1 \ddot{Q}_1, I_2 \ddot{Q}_2, I_3 \ddot{Q}_3$ – моменты пар сил инерции звеньев 1, 2 и 3;

I_1, I_2, I_3 – центральные моменты инерции масс звеньев 1, 2 и 3;

m_1, m_2, m_3 – массы звеньев 1, 2 и 3 соответственно;

G_1, G_2, G_3 – вес звеньев 1, 2 и 3 соответственно;

$\ddot{Y}_{C_1}, \ddot{Y}_{C_2}, \ddot{Y}_{C_3}, \ddot{Z}_{C_1}, \ddot{Z}_{C_2}, \ddot{Z}_{C_3}$ – проекции ускорений ЦМ звеньев 1, 2 и 3;

$Y_{C_1}, Y_{C_2}, Y_{C_3}, Z_{C_1}, Z_{C_2}, Z_{C_3}$ – координаты ЦМ звеньев 1, 2 и 3;

$Y_{O_{01}}, Y_{O_{12}}, Y_{O_{23}}, Z_{O_{01}}, Z_{O_{12}}, Z_{O_{23}}$ – координаты шарниров БМС.

Для проекций сил инерции использованы выражения:

$$U_{iy} = -m_i \ddot{Y}_{C_i}, U_{iz} = -m_i \ddot{Z}_{C_i}.$$

Опорный шарнир отличается от остальных, являющихся на самом деле суставами БМС. В отличие от них, в кинематической паре O_{01} учитываются силы трения, и нет управляющих сил, приводимых к опоре, а значит, нет момента этих сил. При этом необходимо учесть, что момент сил трения направлен против движения [8], что и показано на рис. 2.

Обозначим левую часть первого выражения системы (3) как M_{10} . Это есть движущий момент всей биомеханической системы относительно спортивного снаряда. Его надо отличать от момента движущих сил, так как первый есть сумма моментов движущих сил и сил сопротивления, а последний является моментом только движущих сил.

Имеем $\bar{M}_{10} = -\bar{M}_{mp_{10}}$. Знак минус означает, что моменты имеют противоположные направления при равенстве их значений.

Для сохранения однотипности формы уравнений движения относительно всех шарниров будем использовать для первого уравнения системы (3) запись момента через M_{10} слева от знака равенства.

Запишем в общем виде уравнение для момента управляющих мышечных сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$:

$$\begin{aligned} M_{i,i-1} &= \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^N G_j (Y_{C_j} - Y_{O_{i-1,i}}) - \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Y}_{C_j} (Z_{C_j} - Z_{O_{i-1,i}}) + \\ &+ \sum_{j=i}^N m_j \ddot{Z}_{C_j} (Y_{C_j} - Y_{O_{i-1,i}}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$.

Здесь N – число звеньев БМС. Отметим, что точкой приведения инерционных нагрузок является центр инерции C_j , т.е. центр масс каждого звена. В этом случае дополнительно возникает момент пары сил инерции:

$$M_{u_j} = -I_{C_j} \ddot{Q}_j, \quad (5)$$

где I_{C_j} – центральный момент инерции массы j -го звена.

Знак минус означает, что направление дополнительного момента и углового ускорения звена противоположны. Выполнив преобразования, получим

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + \sum_{j=i}^N m_j \left[(g + \ddot{Z}_{C_j}) (Y_{C_j} - Y_{O_{i-1,i}}) - \ddot{Y}_{C_j} (Z_{C_j} - Z_{O_{i-1,i}}) \right], \quad (6)$$

где $i=1, 2, \dots, N$.

Кинематический анализ движения человека в различных условиях проведен в работах [1-3, 6, 7, 9]. Подставим в формулы (3) координаты и ускорения соответствующих точек по уравнениям работы [9] для случая движения спортсмена в условиях упругой опоры. Преобразования из-за их трудоемкости опустим.

Для N -звенной системы момент управляющих сил относительно шарнира $O_{i-1,i}$ равен:

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + \quad (7)$$

$$+ 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j).$$

Коэффициенты B_{jk} в общем виде определяются как:

$$B_{jk} = \delta_{jk} (m_k S_k^2) + m_j L_k S_j (1 - \delta_{jk}) + \sum_{s=k+1}^N m_s L_k L_j, \quad (8)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь L_k – размеры звеньев, S_j – расстояние от дистального сустава звена до его ЦМ. $L_0, \dot{L}_0, \dot{Q}_0$ – размеры пружины и ее кинематические параметры. j, k – буквенные индексы. Они соответствуют цифровым индексам коэффициентов B_{jk} и равны:

$$j=1, 2, \dots, N; \quad k=0, 1, \dots, N.$$

Учтено, что $B_{jk} = B_{kj}$ при $k > j$.

Коэффициенты C_{ij} рассчитываются по работе [9] из раздела силового анализа биомеханической системы:

$$C_{ij} = \begin{cases} m_j S_j + L_j \sum_{s=j+1}^N m_s, & \text{если } i \leq j, \\ L_j \sum_{s=i}^N m_s, & \text{если } i > j, \end{cases} \quad (10)$$

$$s \leq N.$$

Коэффициенты B_{jk} и C_{ij} при $i > 0$ и $j > 0$ зависят только от параметров тела спортсмена и остаются постоянными на всей траектории его движения, поэтому определяются всего один раз.

Заключение

В работе затронут вопрос анализа движения спортсмена в условиях упругой опоры. Это означает, что изучаются уже выполненные движения. Проблемы синтеза, то есть создания новых движений (новых спортивных упражнений и их элементов), в статье не рассматривается. Тем не менее, отметим, что теория анализа является фундаментом, без которого теорию синтеза целенаправленного движения с учетом влияния на движение упругих свойств спортивного снаряда, выступающего в качестве опоры, создать нельзя.

Полученные модели целенаправленного движения дают возможность учесть как влияние упругой опоры на движение человека, так и влияние человека на сам спортивный снаряд. Ограниченные рамки статьи не позволяют рассмотреть все возможные случаи моделирования указанного случая, а также провести полный анализ всех выявленных факторов, от которых зависит техника спортивного упражнения.

Однако объем статьи позволяет показать состав уравнений целенаправленного движения и влияние на абсолютное движение звеньев как различных видов движений, в которых они участвуют, так и роль каждого силового фактора, используемого при кинестатическом исследовании спортивного упражнения.

Работа выполняется по гранту государственной программы научных исследований на 2006-2010 г.г.

Финансирует: Министерство образования РБ.

Тема: «Разработка методов оценки биомеханического состояния человека и реализация оптимальных режимов движений биомеханических систем».

ЛИТЕРАТУРА

1. Загревский, В. И. Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В. И. Загревский. – Томск–Могилев, 1999. – 156 с.
2. Коренев, Г. В. Цель и приспособляемость движения / Г. В. Коренев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 528 с.
3. Коренев, Г. В. Введение в механику человека / Г. В. Коренев. – М.: Наука, 1977. – 264 с.
4. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин: учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
5. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. – 608 с.
6. Загревский, В. И. Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В. И. Загревский, Д. А. Лавшук, О. И. Загревский. – Могилев–Томск, 2000. – 190 с.
7. Бегун, П. И. Моделирование в биомеханике: учеб. пособие / П. И. Бегун, П.Н. Афонин. – М.: Высшая школа, 2004. – 390 с.
8. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М.: Высшая школа, 1990. – 592 с.
9. Покатилов, А. Е. Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой / А. Е. Покатилов; под ред. В.И. Загревского. – Минск: Изд. центр БГУ, 2006. – 351 с.

ДИНАМИКА ОБЪЕМНОЙ И ПОВЕРХНОСТНОЙ УСАДКИ ЯГОД ПРИ ПОТЕРЕ СТРУКТУРНОЙ ВЛАГИ

Шуляк В.А., Изотова Л.А.

Разработана методика определения текущего объема и площади поверхности объектов сушки по фотографическому изображению. Проведен компьютерный анализ полученных фотоизображений и оценка скорости изменения объема и поверхности объекта сушки при потере структурной влаги. Экспериментально определены текущий вес и изменение линейных размеров материала, как функция времени и влажности, а также проведена оценка напряженного состояния в процессе объемной и термоусадки для различных ягод. С практической точки зрения, проведенные исследования позволяют уточнить методику расчета сушилок, с учетом изменения площади поверхности испарения влаги и объемной усадки материала в процессе сушки.

Введение

Большинство продуктов растительного происхождения содержат от 60 до 88 % структурной влаги. При этом, сохранить и переработать продукты в течение всего года можно лишь высушив их до минимальных значений остаточной влажности. При сушке исходные сырьевые материалы теряют вес, за счет испарения преимущественно паров воды. Одновременно происходит изменение объема и площади поверхности высушиваемого материала. Это приводит, прежде всего, к падению скорости удаления влаги, за счет уменьшения площади поверхности и увеличения плотности покровных слоев. Кроме этого, изменяется плотность материала и растут внутренние напряжения в объеме материала.

С целью изучения процессов усадки в процессе сушки нами была создана экспериментальная установка (рис. 1) [1], включающая: сушильный шкаф 5, мерную чашу с навеской из ягод 2, помещенную в него и подвешенную к электронным весам «OHAUS» 1.

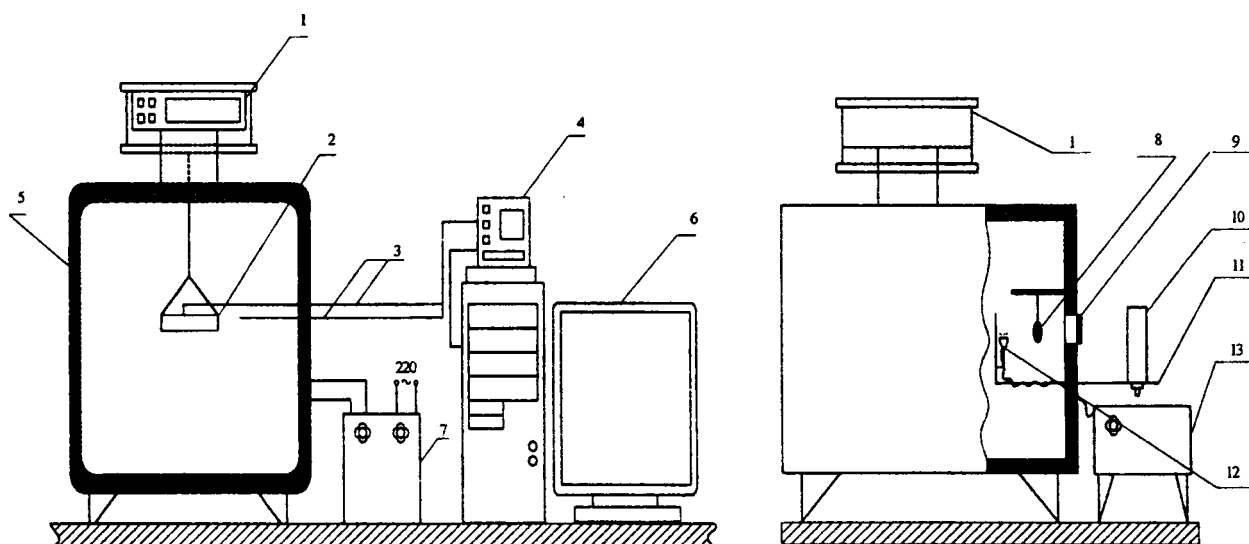


Рис. 1. Общий вид экспериментальной установки

Измерение температуры производится в двух точках с помощью термопар 3 марки ТХА-1199 завода «Энергоприбор». Для этого отделялась плодоножка ягоды и в полученное отверстие помещалась термопара приблизительно до середины ягоды». Обе они работают в комплекте с регистрирующим преобразователем-регулятором 4 – «Сосна-004», с цифровым индикатором.

Регулировка температуры в объеме сушильного шкафа 5 осуществлялась однофазным регулятором напряжения 7.

Определение степени усадки ягод осуществляли с помощью цифрового фотоаппарата 10 – «KONICA», закрепленного на держателе 11. Отдельно подвешенная ягода 8 фотографируется через линзу 9, вмонтированную в корпус сушильного шкафа 5 (рис. 2).

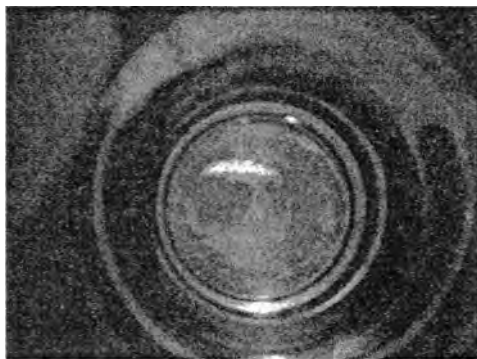


Рис. 2. Фотографическое изображение отдельной ягоды

Так как сушильный шкаф герметично закрыт и свет не проникает внутрь, то для обеспечения равномерного освещения подвешенной ягоды на держателе закрепляется лампа накаливания 12, регулировка интенсивности освещения которой, выполняется с помощью ручки выпрямителя 13. Все текущие данные выводились на монитор компьютера 6 и записывались в его память для последующего анализа.

Для обеспечения более высокой точности эксперимента с помощью электронного анализатора влажности «Sartorius MA 45» измеряется начальная влажность ягод и равновесная – для уже высушенных. Причем начальная влажность измерялась с помощью этого прибора для сопоставления расчетных и экспериментальных значений влажности и полученное значение использовалось как контрольный параметр, а по значению конечной влажности проводилось уточнение экспериментальных значений и в том числе значения массы абсолютно сухой ягоды. Температура, при которой работает анализатор влажности – 140 °С.

Начальные размеры подвешиваемой ягоды измеряются с помощью микрометра. Если форма ягоды максимально приближена к сферической, то находится средний ее диаметр путем проведения нескольких замеров. Если же у ягоды иная форма, то снимается 4-5 характерных для данной формы размеров (высота, максимальный и средний диаметр и т.д.). Все они заносятся в журнал наблюдений и учитываются при обработке результатов экспериментов.

При обработке фотографий каждое изображение преобразуется в монохромное (рис. 3), в котором ягода представлена в виде совокупности черных точек, а фон – белых. Это осуществляется в программном комплексе «Adobe Photoshop 7.0» следующим образом: вначале контур ягоды выделяется с помощью опции Magic Wand Tool, а затем автоматически заполняется черным цветом, а фон – белым. Все световые блики и другие дефекты, возникающие в процессе фотографирования, удаляются с помощью программного комплекса «Adobe Photoshop 7.0». После этого изображение преобразовывается в формат точечного рисунка и открывается с помощью специальной программы «Agea», созданной в среде «Delphi 7» [2], которая осуществляет подсчет количества пикселей черного цвета в каждой строке изображе-

ния. Высота и ширина одного пикселя H равнялась 0,05 мм. Объект сканировался сверху вниз, при этом форма и линейные размеры оценивались с точностью в один пиксель.

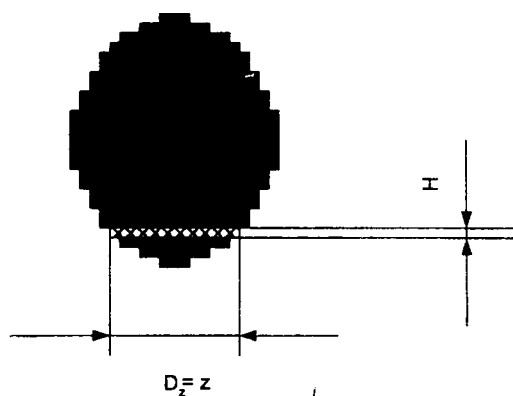


Рис. 3. Монохромное фотографическое изображение ягоды

Полученные экспериментальные данные о величинах основных геометрических параметров ягод позволили исследовать характер изменения темпа объемной и поверхностной усадки, динамику изменения величины относительной усадки. На рисунке 4 представлены кривые зависимости скорости объемной и поверхностной усадки от приведенной влажности, построенные в координатах $(dV/dt; W_{np})$ и $(dS/dt; W_{np})$ соответственно.

$$W_{np} = \frac{W_n - W_\tau}{W_n - W_p}, \quad (1)$$

где W_{np} – приведенная влажность ягоды в момент времени \square ;

W_n – начальная влажность ягоды, %;

W_τ – текущая влажность в момент времени \square , %;

W_p – равновесная влажность ягоды, %.

Значения текущей влажности определялись согласно стандартной методике [3].

Эти кривые хорошо описывается экспоненциально-степенной функцией вида [4]

$$W_{np} = \exp(-A \cdot (D_i(t))^N), \quad (2)$$

где $D_1(t) = dV/dt$ или $D_2(t) = dS/dt$ – скорость объемной, $\text{см}^3/\text{мин}$ и поверхностной усадки, $\text{см}^2/\text{мин}$;

A и N – эмпирические константы.

Экспериментальные данные, представленные на рисунке 4, можно описать уравнением вида (3), полученного после несложных преобразований выражения (2)

$$D_i(t) = \sqrt[N]{-\frac{1}{A} \cdot \ln\left(\frac{W_n - W_p}{W_n - W_\tau}\right)}. \quad (3)$$

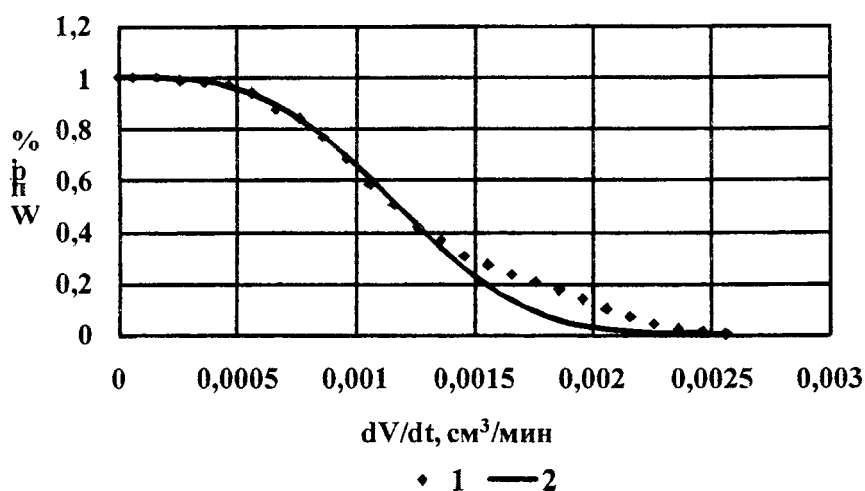


Рис. 4. Кривые зависимости текущей приведенной влажности от скорости объемной усадки для черной смородины:
1 – экспериментальные данные; 2 – расчетные данные по формуле (3)

Аналогично получены кривые зависимости темпа изменения площади поверхности от приведенной относительной влажности. Для черной смородины они представлены на рис. 5.

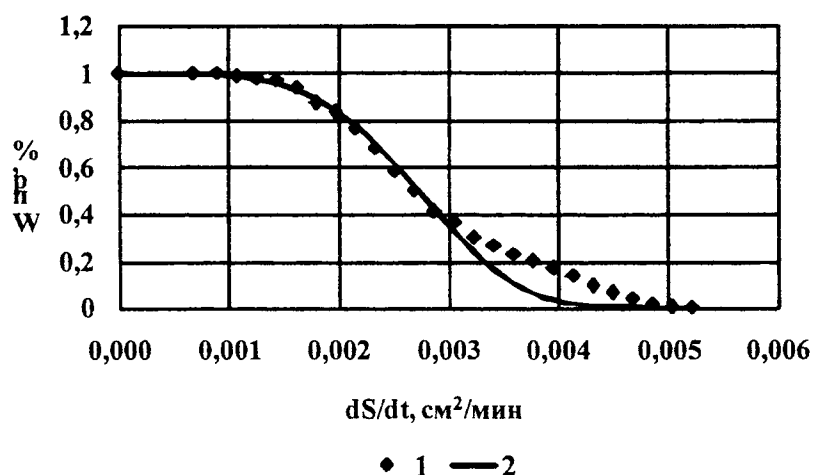


Рис. 5. Кривые зависимости текущей приведенной влажности от скорости изменения площади поверхности для черной смородины:
1 – экспериментальные данные; 2 – расчетные данные по формуле (3)

Отклонение расчетных и экспериментальных данных не превышает 2%.

Параметры A и N уравнений (2) и (3) определялись по двум парам опытных значений, расположенных на линейном участке кривой, представленной на рис. 4. Таким образом, выражение (2) сводится к системе из двух уравнений, решая которые относительно A и N получим

$$N = \frac{\ln \left(\ln \frac{1}{W_{np1}} / \ln \frac{1}{W_{np2}} \right)}{\ln \left(D_i(t) / (D_i(t)) \right)}, \quad A = \frac{1}{(D_i(t))^N} \ln \frac{1}{W_{np1}}. \quad (4)$$

Расчетные значения параметров A и N для различных ягод сведены в табл. 1.

Таблица 1

Расчетные значения параметров уравнений (2) и (3) для различных видов ягод

Наименование ягоды	Расчетные значения коэффициентов			
	Изменение объема		Изменение площади поверхности	
	A	N	A	N
Ежевика	$3,16 \cdot 10^8$	2,532	$9,46 \cdot 10^6$	3,4
Вишня	$5,16 \cdot 10^8$	4,33	$3,2 \cdot 10^9$	5,29
Черная смородина	$8,94 \cdot 10^8$	3,11	$8,14 \cdot 10^{10}$	4,32
Красная смородина	$1,2 \cdot 10^{49}$	16,24	$5,08 \cdot 10^{17}$	6,83
Крыжовник	$9,36 \cdot 10^{14}$	6,57	$2,29 \cdot 10^{10}$	4,1

Относительные объемная усадка и изменение площади поверхности ягод рассчитывается по формулам:

$$\delta_V = \frac{V_0 - V}{V_0}; \quad \delta_S = \frac{S_0 - S}{S_0}. \quad (5)$$

Графические зависимости относительной объемной и поверхностной усадки от времени для различных ягод представлены на рис. 6 и 7.

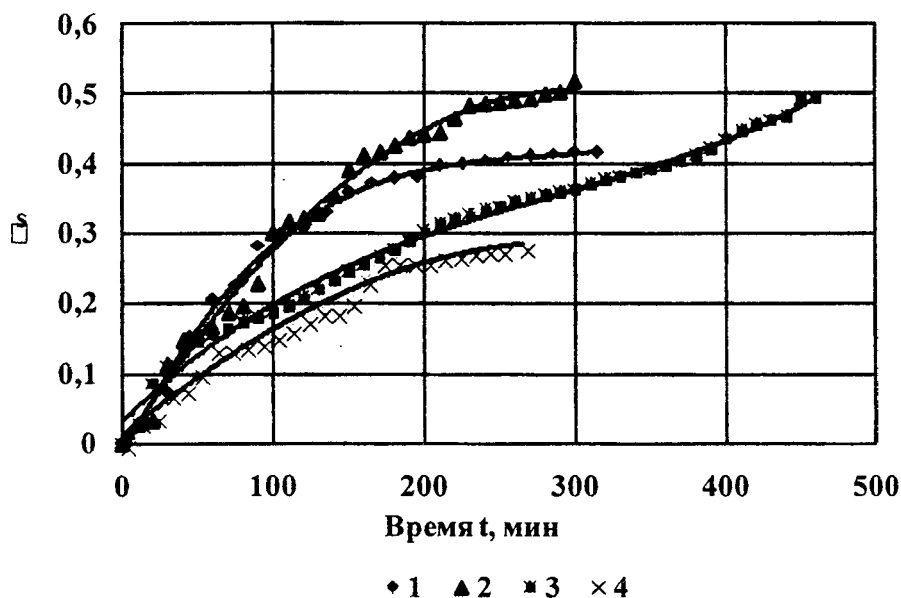


Рис. 6. Кривые зависимости относительной поверхностной усадки от времени для смородины при различных температурных режимах сушки:

1 – красная смородина 90°C; 3 – красная смородина 75°C;
2 – черная смородина 90°C; 4 – черная смородина 80°C

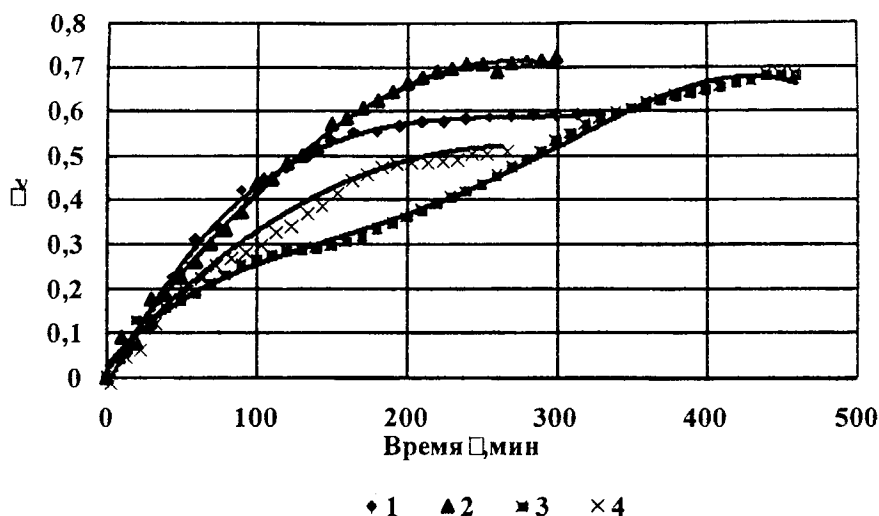


Рис. 7. Кривые зависимости относительной объемной усадки от времени для смородины при различных температурных режимах сушки:
 1 – красная смородина 90°C; 3 – красная смородина 75°C;
 2 – черная смородина 90°C; 4 – черная смородина 80°C

Для характеристики кинетики развития напряжений в объекте сушки используется коэффициент ν_0 [5], который равен отношению темпа объемной усадки ягоды к темпу изменению массы в процессе сушки и находится по формуле

$$\nu_0 = \rho \cdot \frac{\Delta V}{\Delta G}, \quad (6)$$

где ΔV – изменение объема ягоды в единицу времени, см³/мин;
 ΔG – изменение массы ягоды в единицу времени, г /мин;
 ρ – плотность воды, г/см³.

По величине коэффициента ν_0 , осредненное по времени значение которого для различных ягод представлено в табл. 2, судят о продвижении поверхности испарения вглубь ягоды.

Таблица 2

Среднее по времени значение коэффициента ν_0 для различных ягод

Сорт ягоды	Вишня	Крыжовник	Ежевика	Красная смородина	Черная смородина
ν_0	1,63	1,17	1,5	1,76	0,65

Анализ полученных значений коэффициента ν_0 показал, что для крыжовника «темп усадки» соответствует «темпу (скорости) сушки» ($\nu_0 \approx 1$). Для вишни, ежевики и красной смородины ($\nu_0 > 1$), т.е. под действием внутренних напряжений «выжимаются» пустоты, что приводит к более существенному снижению объема по сравнению с убылью влаги. В случае с черной смородиной ($\nu_0 < 1$), что соответствует опережающему темпу потери влаги по отношению к уменьшению объема. В результате поверхность испарения углубляется и увеличивается длина пути диффундирования влаги с внутренних слоев ягоды.

На рис. 8 представлен график зависимости коэффициента ν_0 от времени.

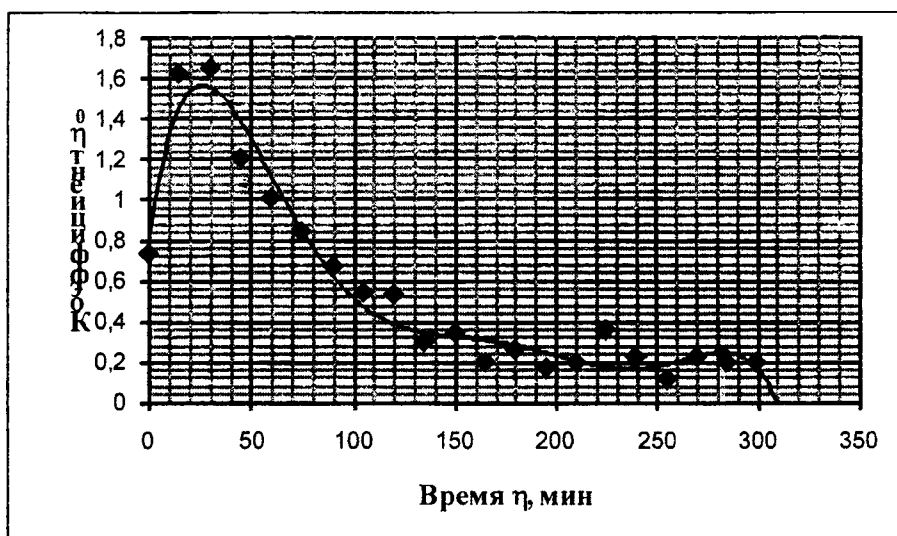


Рис. 8. Кривая зависимости коэффициента v_0 от времени

Проведенные нами исследования в совокупности позволили получить новые достоверные экспериментальные данные по сушке и усадке различных пищевых продуктов, на базе которых расчетным путем определены скорости объемной и поверхностной усадки, а также параметр скорости продвижения фронта поверхностного уплотнения высушиваемых материалов при потере структурной влаги.

Установлено, что темп объемной усадки наиболее значителен в первый период сушки и падает по времени. Причем темп объемной усадки примерно на 25-30% больше, чем темп поверхностной усадки. Построены кривые, отражающие изменение объема и площади поверхности ягод во времени, осуществлен подбор уравнений для этих кривых. Их сравнение при различных температурах сушки показало, что при более высоких температурах объемная и поверхностная усадка ягод достигает более высоких значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левьюк, Л.Н. Разработка технологии получения пищевых порошков из фруктов и ягод / Л.Н. Левьюк, Л.А. Изотова, В.А. Шуляк // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности: материалы респ. науч.-техн. конф. аспирантов, магистрантов и студентов, Могилев, 27 января 2005 г. / Бел.-Рос. ун-т; редкол.: И.С.Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев, 2005. – С. 270.
2. Изотова, Л.А. Контроль геометрических параметров плодов и ягод в процессе термоусадки при сушке / Л.А. Изотова, В.А. Шуляк // Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов: материалы 2-й межд. научн.-техн. конф., Могилев, 19-20 октября 2006 г. / Бел.-Рос. ун-т; редкол.: И.С.Сазонов (гл. ред.) [и др.]. – Могилев, 2006. – С. 216–217.
3. Гинзбург, А.С. Лабораторный практикум по процессам и аппаратам пищевых производств / А.С. Гинзбург, С.М. Гребенюк, Н.С. Михеева и др. – М.: Агропромиздат, 1990. – 256 с.
4. Мизонов, В. Е. Аэродинамическая классификация порошков / В.Е. Мизонов, С.Г. Ушаков. – М.: Химия, 1989. – 160 с.
5. Гинзбург, А.С. Технология сушки пищевых продуктов / А.С. Гинзбург. – М.: Пищевая промышленность, 1976. – 248 с.

Белорусский государственный медицинский университет, Минск
Белорусский государственный университет, Минск

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОРТОДОНТИЧЕСКОГО АППАРАТА

Доста А.Н., Босяков С.М., Юркевич К.С.

In the present paper results of modeling and calculation strain - deformed conditions of the orthodontic device with four crowns, executed in a finite - element package Ansys and Ansys Workbench are submitted.

Одной из основных проблем современной ортопедической стоматологии является проектирование конструкций, учитывающих индивидуальные особенности пациента [1]. В этом направлении востребованным представляется проведение вычислительного эксперимента с применением конечно-элементных программных комплексов, которые позволяют определить напряженно-деформированное состояние элементов и узлов механических систем с учетом их реальных геометрических размеров и формы, условий нагружения и закрепления, физико-механических свойств материалов, используемых в конструкции [2]. В настоящей работе представлены результаты моделирования и конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния ортодонтического аппарата, выполненных средствами пакетов ANSYS и Ansys Workbench.

Поскольку каждый ортодонтический аппарат проектируется с учетом индивидуальных особенностей строения челюсти и зубов конкретного пациента, представляется целесообразной разработкой параметризованных моделей ортодонтических аппаратов, генерация которых осуществляется на основании определенной совокупности геометрических параметров. В частности, параметризация модели ортодонтического аппарата может быть выполнена по координатам центров оснований четырех цилиндрических насадок и точки, лежащей посередине винта, разжимающего пластинки. Реальный ортодонтический аппарат с обозначением характерных точек представлен на рис. 1.

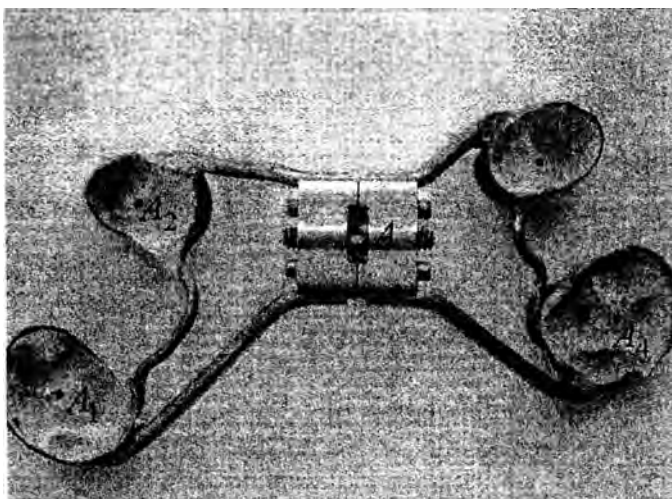


Рис. 1. Реальная конструкция ортодонтического аппарата
(A_i - центры оснований насадок аппарата, $i = \overline{1, 4}$,
 A - точка, находящаяся посередине разжимающего винта)

При изменении координат опорных точек A_i и A изменяются как геометрические размеры стержней, так и их положение в пространстве.

С опорными точками далее связывается построение всех кривых и объемных элементов модели, причем построение кривых (стержней) осуществляется на основании прямых линий и сплайнов, а создание объемных элементов модели (насадок и пластин) выполняется с помощью геометрических примитивов комплекса ANSYS. При построении стержней необходимо также задавать поперечное сечение каждого стержня, располагая его в точке контакта стержня и пластины. При этом рабочая система координат переносится в соответствующую опорную точку и поворачивается на необходимый угол. Генерация объема проводится посредством вытягивания поперечного сечения вдоль построенной ранее опорной кривой. Результат построения трехмерной модели ортодонтического аппарата в пакете ANSYS представлен на рис. 2.

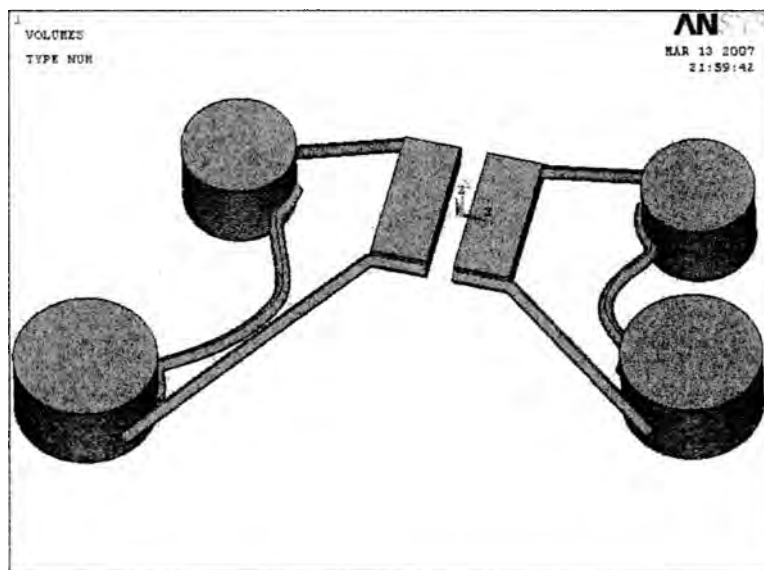


Рис. 2. Трехмерная модель ортодонтического аппарата, построенная в программе ANSYS

Отметим, что экспорт полученной трехмерной модели аппарата осуществляется в программную среду ANSYS Workbench в виде графического файла с расширением *iges*.

Следующим этапом расчета ортодонтического аппарата в пакете ANSYS Workbench является разбиение ее на конечные элементы. В нашем случае стержни конструкции разбились на большее количество элементов по сравнению с остальными элементами модели. Такой подход к созданию конечно-элементной сетки позволяет значительно уменьшить время расчета и сэкономить ресурсы ЭВМ. Дискретная модель ортодонтического аппарата в пакете ANSYS Workbench представлена на рис. 3.

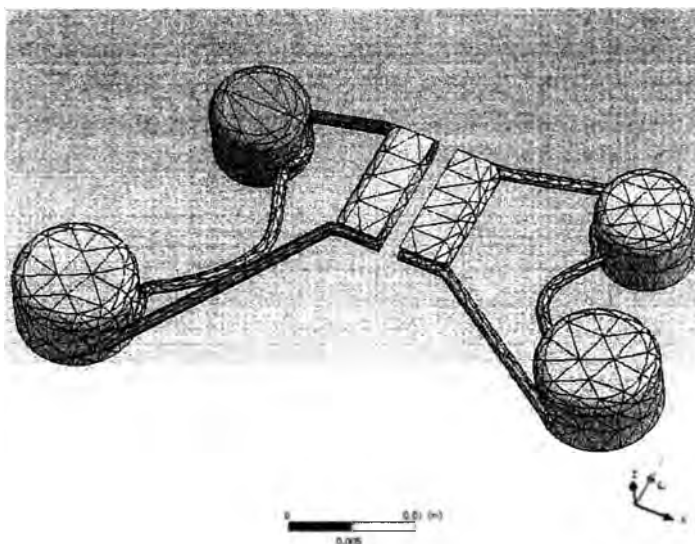


Рис. 3. Дискретная модель ортодонтического аппарата в программе Ansys Workbench.

Отметим, что представленная на рис. 3 конечно-элементная модель ортодонтического аппарата состоит из 13834 узлов и 8584 конечных элементов.

Граничные условия, накладываемые на модель, соответствуют случаю жесткого закрепления оснований насадок. Каждой пластинке задавались перемещения вдоль оси абсцисс противоположные по направлению и равные 1 мм, которые являлись единственной степенью свободы для данного элемента конструкции. Свойства материала, из которого изготовлен аппарат, описываются следующими материальными константами: модуль упругости $E=200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность $\rho=7850$ кг/м³.

В результате расчета модели с учетом граничных условий получены распределения эквивалентных напряжений и суммарных перемещений. В частности, на рис. 4 представлено распределение суммарных перемещений в ортодонтическом аппарате для случая перемещения пластинок аппарата на 1 мм друг относительно друга.

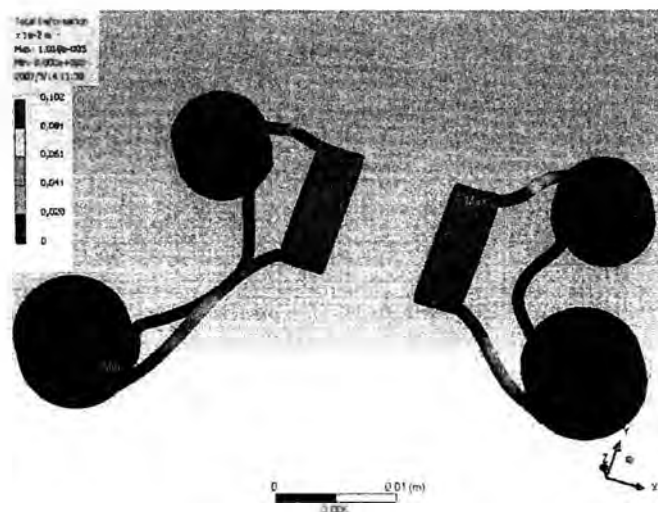


Рис. 4. Распределение суммарных перемещений в ортодонтическом аппарате при предельном перемещении пластинок

Важным с практической точки зрения представляется визуализация векторного поля перемещений, представленного на рис. 5, которое указывает направления и значения перемещений точек ортодонтического аппарата и позволяет стоматологу-ортопеду спрогнозировать поведение зубов пациента под действием аппарата, а также выполнить более точную и эффективную настройку конструкции.

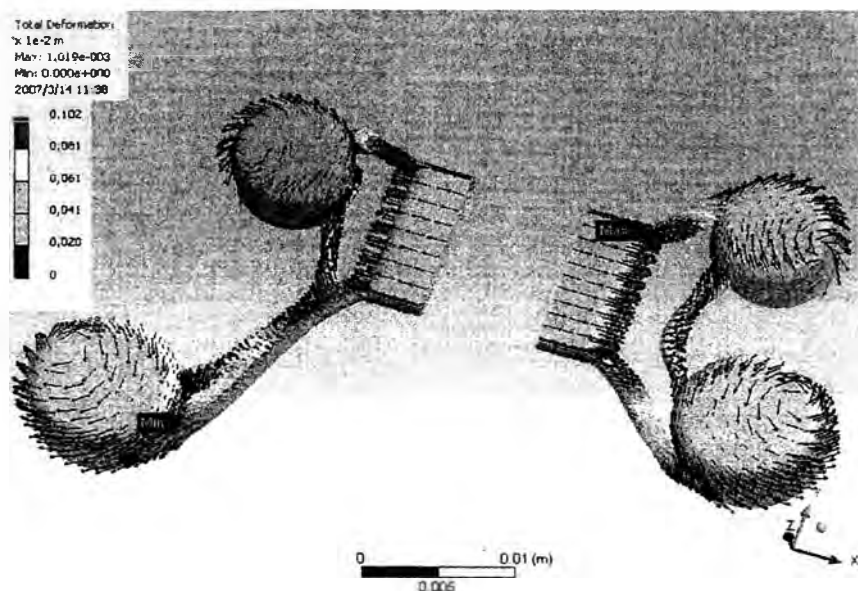


Рис. 5. Векторное поле перемещений

Полученные результаты могут быть использованы в ортопедической стоматологии для внесения индивидуальных изменений в проектируемую конструкцию аппарата, оперативной оценки напряженно-деформированного состояния и необходимости дальнейшего усовершенствования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руководство по ортодонтии / Под ред. Ф.Я. Хорошилкиной. – М.: Медицина, 1999. – 800 с.
2. Чигарев, А. В., Кравчук, А. С., Смоляк. ANSYS для инженеров. - М.: Машиностроение-1. 2004. – 466 с.

¹Могилевский государственный университет продовольствия
²Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова

ВЛИЯНИЕ МНОГОСУСТАВНЫХ МЫШЦ НА ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧЕЛОВЕКА

А.Е. Покатилов¹, В.И. Загревский², Д.А. Лавшук²

The equations of purposeful movement of the person who is carrying out exercises on sports shells, possessing elastic properties in the working part, are deduced without taking into account functionalities of muscular system of the person. Actually, the realization of the physical dependences which described by models of movement and have been not reflected in the equations, depends on human anatomy. So various groups of muscles participate in operated movement: one-articulate, two-articulate and multiarticulate. It is shown as at drawing up of the equation of purposeful movement operating forces of two-articulate and multiarticulate muscles are resulted in joints through which they are thrown.

Classification of chances of occurrence of forces in multiarticulate muscles, and also work of muscles of antagonists and their influence on distribution of the moments of operating forces concerning joints is lead. On examples of the analysis of technics of sports exercises in gymnastics it is drawn a conclusion on realization by muscular and nervous systems of each concrete equation of purposeful movement by the various ways depending on a condition of the sportsman, his physical and technical training, etc.

Уравнения целенаправленного движения человека, выполняющего упражнения на спортивных снарядах, обладающих упругими свойствами в своей рабочей части, выводятся без учета функциональных возможностей мышечной системы человека. На самом деле, реализация физических зависимостей, описываемая моделями движения и не отраженная в уравнениях, зависит от анатомии человека. Так в управляемом движении участвуют различные группы мышц: односуставные, двухсуставные и многосуставные. Показано как при составлении уравнения целенаправленного движения методом кинестатики приводятся управляющие силы двухсуставных и многосуставных мышц к суставам, через которые они переброшены.

Проведена классификация возможных случаев возникновения сил в многосуставных мышцах, а также работа мышц антагонистов и их влияние на распределение моментов управляющих сил относительно суставов. На примерах анализа техники спортивных упражнений в гимнастике сделан вывод о реализации мышечной и нервной системами каждого конкретного уравнения целенаправленного движения различными путями, зависящими от состояния спортсмена, его физической и технической подготовки и т.д.

Общие положения

С точки зрения управления различают два вида движений человека – естественное, являющееся неуправляемым, и целенаправленное, при котором управление обеспечивается мышечной системой [1]. Наибольший интерес представляет целенаправленное движение, т.е. то, которое достигает цели. Внимание к нему проявляют специалисты, работающие в различных областях науки, техники и производства – от робототехники, до медицины и спорта. Исследование целенаправленного движения в спорте позволяет, во-первых, создавать эффективные методики для подготовки спортсменов и тренеров различных категорий, а, во-вторых, разрабатывать теорию синтеза движения человека, т.е. создавать новые виды движений, новые упражнения, их отдельные элементы и пр. Особенно актуальна эта задача для спорта высоких достижений [2, 3].

При этом необходимо отметить, что современное развитие вычислительной техники и программного обеспечения позволяют включать в исследования факторы, оказывающие существенное влияние на движение человека, но ранее почти не использовавшиеся при моделировании движения. Одним из таких факторов является сам спортивный снаряд, рабочая часть которого проявляет упругие свойства, тем самым, оказывая влияние на технику выполнения упражнений [4].

Существует несколько подходов к моделированию упругих свойств спортивного снаряда. Последний показывают или в виде одной вращающейся пружины, или в виде двух – горизонтальной и вертикальной пружин, движущихся поступательно.

Другой особенностью расчетных моделей кинематики и динамики является их представление в удобном для программирования виде. Для этого уравнения выводят для биомеханической системы с произвольным количеством звеньев и записывают в свернутой по одноименным параметрам форме, т.е. компактно.

Так для N -звенной системы момент управляющих сил (уравнение движения) относительно шарнира $O_{i-1,i}$ при моделировании упругого спортивного снаряда в виде вращающейся пружины равен:

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + \quad (1)$$

$$+ 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j),$$

где I_j – центральный момент инерции j -го звена;

g – ускорение свободного падения;

$Q_j, \dot{Q}_j, \ddot{Q}_j$ – обобщенные координаты, скорости и ускорения j -го звена;

\dot{L}_0, \ddot{L}_0 – линейные кинематические параметры пружины;

Q_0, \dot{Q}_0 – угловые обобщенные координаты и скорости пружины;

C_{ij}, B_{jk} – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров тела конкретного спортсмена.

Уравнение целенаправленного движения разбивается на шесть групп, каждая из которых показывает влияние соответствующих ускорений на выполнение спортивного упражнения в условиях упругой опоры.

Многосуставные мышцы

Уравнение движения (1) выводится без учета функциональных возможностей мышечной системы [5]. Отправной точкой полученных выражений явилось приведение управляющих сил к шарнирам и написание уравнений кинестатики с использованием моментов управляющих сил [6, 7]. Но при внимательном рассмотрении возникают вопросы о правомочности такого подхода. И вот почему. Некоторые мышцы перекидываются через один сустав, другие – через два, а третьи – через три. Различают односуставные, двусуставные и многосуставные мышцы [8, 9].

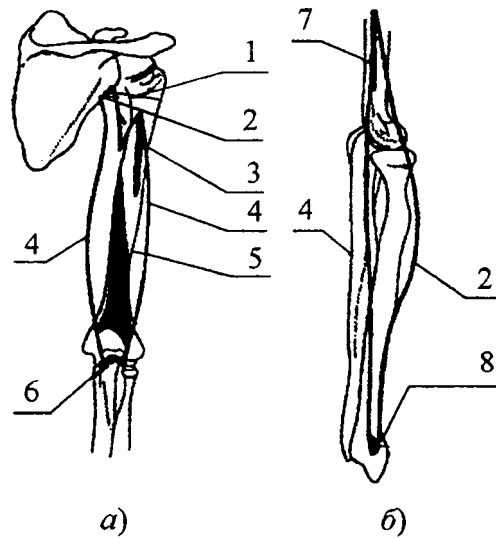


Рис. 1. Мышцы плеча и схемы их прикреплений:

а) трехглавая мышца плеча; б) плечелучевая мышца;

1, 2 – место прикрепления длинной головки на передней поверхности лопатки; 3 – место прикрепления латеральной головки трехглавой мышцы плеча; 4 – свободные края мышцы; 5 – место прикрепления медиальной головки трехглавой мышцы плеча; 6 – место прикрепления трехглавой мышцы плеча на локтевом отростке локтевой кости; 7 – место прикрепления на плечевой кости; 8 – прикрепление на лучевой кости

На рис. 1, а показано прикрепление трехглавой мышцы плеча. Эта мышца двусуставная. А плечелучевая мышца по рис. 1, б является уже примером односуставной мышцы.

Не вдаваясь в анатомические особенности прикрепления мышц, исследуем действие мышц антагонистов. Отметим, что для фиксации сустава необходимо равенство вращающих в противоположном направлении моментов. Поэтому нас интересуют силы и плечи, относительно суставов, а не одни лишь значения управляющих сил.

Силу мышц антагонистов, вызывающих движение звена (звеньев), обозначим как управляющую силу с соответствующим индексом, например, \bar{F}_{13}^{yn} . Силу, возникающую в мышцах антагонистах и компенсирующую полностью или частично действие соответствующих управляющих сил, обозначим, например, как \bar{F}_{13}^{an} . Здесь мышцы антагонисты, вызывающие целенаправленное движение, и мышцы антагонисты, препятствующие этому движению, есть разные мышцы. Например, двуглавая мышца плеча (бицепс) вызывает движение звеньев, а трехглавая мышца (трицепс) этому движению препятствует.

Рассмотрим трехзвенную систему и действие двусуставных мышц. Согласно схеме на рис. 2, движение звеньев 2 и 3 обеспечивается управляющими мышечными силами \bar{F}_{13}^{yn} , \bar{F}_{31}^{yn} . Звено 1 неподвижно. При этом силы равны по модулю $|F_{13}^{yn}| = |F_{31}^{yn}|$ и противоположны по направлению.

Предположим следующие варианты реализации движения за счет этих сил:

1. движение звеньев 2 и 3 происходит относительно сустава O_{12} , при этом сустав O_{23} зафиксирован;
2. движение звена 3 происходит относительно сустава O_{23} , при этом сустав O_{12} зафиксирован;
3. зафиксированных суставов нет, звенья 2 и 3 находятся в движении относительно звена 1.

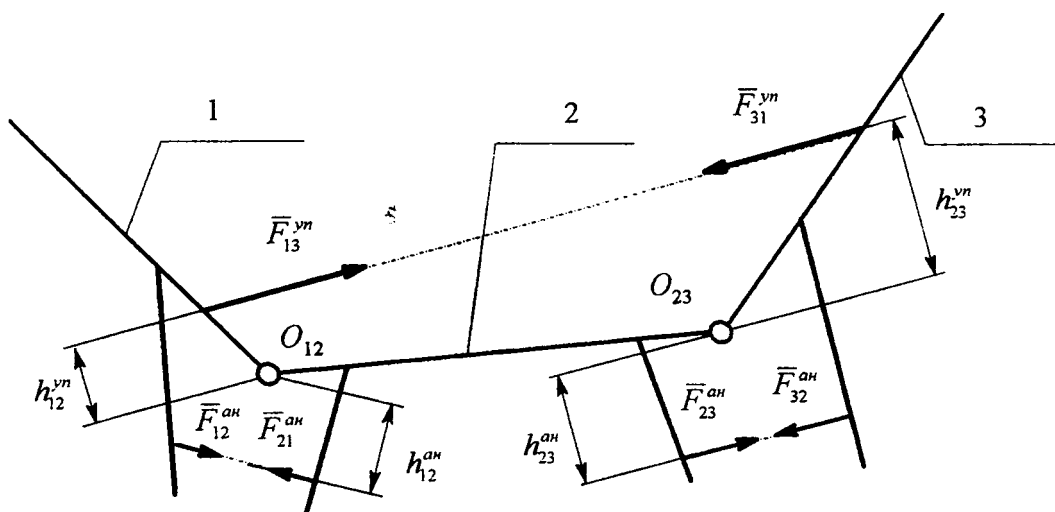


Рис. 2. Управляющее действие двусуставных мышц

На рис. 2 попарно обозначены силы \bar{F}_{12}^{an} , \bar{F}_{21}^{an} и \bar{F}_{23}^{an} , \bar{F}_{32}^{an} , возникающие в мышцах антагонистах, прикрепленных к соседним костям (звеньям). Здесь выбран вариант, когда управляющие мышцы антагонисты являются многосуставными, а мышцы антагонисты, препятствующие движению, – односуставные, так как это не принципиально. Получим следующую картину:

1. В случае равенства моментов $|M_{32}^{an}| = |M_{32}^{yn}|$ относительно сустава O_{23} , последний будет зафиксирован, и движение станет возможным лишь относительно сустава O_{12} . Здесь:

$$M_{32}^{an} = -F_{32}^{an} h_{23}^{an}, \quad M_{32}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{23}^{yn}. \quad (2)$$

2. В случае равенства моментов $|M_{21}^{an}| = |M_{31}^{yn}|$ относительно сустава O_{12} , теперь уже он окажется зафиксирован, а движение можно реализовать лишь относительно сустава O_{23} . Здесь:

$$M_{21}^{an} = -F_{21}^{an} h_{12}^{an}, \quad M_{31}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{12}^{yn}. \quad (3)$$

3. В случае, если ни один из суставов, через которые переброшены мышцы, вызывающие движение, не зафиксирован ($|M_{32}^{an}| \neq |M_{32}^{yn}|$, $|M_{21}^{an}| \neq |M_{31}^{yn}|$), то получим движение относительно обоих суставов одновременно. Можно записать моменты, создаваемые силой \bar{F}_{31}^{yn} , как:

$$M_{32}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{23}^{yn}, \quad M_{31}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{12}^{yn}. \quad (4)$$

Для лучшего понимания п.3 воспользуемся правилом параллельного переноса силы [7]. На рис. 3 показан пример последовательного приведения управляющей силы \bar{F}_{31}^{yn} многосуставной мышцы к суставам O_{23} и O_{12} , через которые данная мышца переброшена.

Сила \bar{F}_{31}^{yn} вызывает вращение звена 3 относительно сустава O_{23} с моментом $M_{32}^{yn} = F_{31}^{yn} h_{23}^{yn}$. Приведение выполнено в пределах одного звена, т.е. жесткого тела, на которое эта управляющая сила действует.

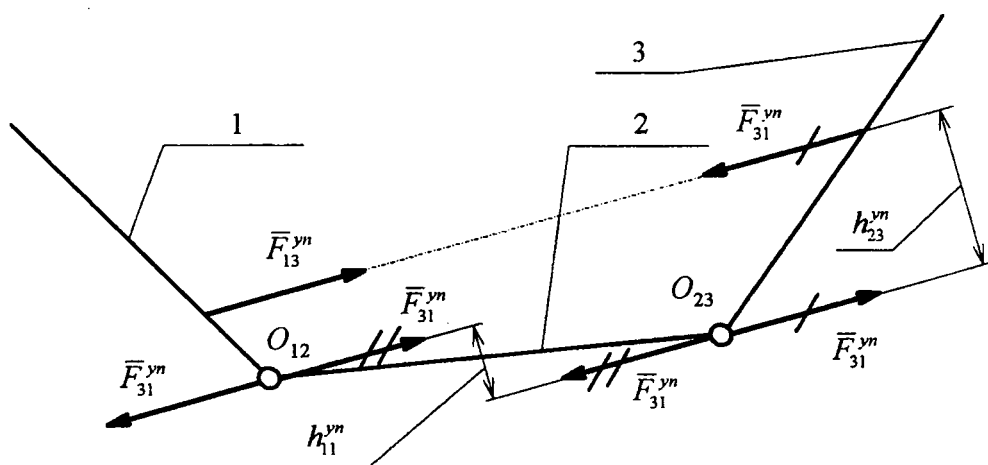


Рис. 3. Приведение управляющей силы многосуставной мышцы к разным суставам

Так как по рис. 3 сила \bar{F}_{31}^{yn} , приложенная к суставу O_{23} , действует как на звено 3, так и на звено 2, то выполним перенос силы \bar{F}_{31}^{yn} в пределах уже этого звена в сустав O_{12} . Получим дополнительный момент пары сил $M_{21}^{yn} = -F_{31}^{yn} h_{11}^{yn}$ и управляющую силу мышечной системы \bar{F}_{31}^{yn} , приложенную в суставе O_{12} .

Таким образом, получен суммарный момент управляющих сил:

$$M_{31}^{yn} = M_{32}^{yn} - M_{21}^{yn} = F_{31}^{yn} (h_{23}^{yn} - h_{11}^{yn}) = F_{31}^{yn} h_{12}^{yn},$$

$$h_{12}^{yn} = h_{23}^{yn} - h_{11}^{yn}. \quad (5)$$

Тем самым показано, что одна и та же управляющая сила одновременно вызывает разные моменты относительно разных осей вращения, т.е. сила не распределяется между звеньями 2 и 3 – меняется лишь плечо соответствующего момента.

Во всех рассмотренных вариантах мы исходили из того, что моменты от сил в мышцах антагонистах, работающих на фиксацию сустава, меньше моментов управляющих сил или вообще отсутствуют. В противном случае картина не изменится, так как мышцы антагонисты, работающие на фиксацию сустава, начнут вырабатывать усилия, создающие целенаправленное движение. А управляющие мышцы антагонисты станут фиксировать и тормозить движение в суставе или не будут оказывать никакого действия [10-12].

Заключение

Многосуставные мышцы участвуют в движении звеньев относительно суставов, через которые они переброшены. По поводу мышц антагонистов отметим, что они могут перераспределять управляющее воздействие между звеньями за счет фиксации необходимых суставов, но не влияют на общую величину необходимых для движения моментов, вычисленных аналитически.

На основании проведенного анализа работы мышечного аппарата сделаем следующий вывод: уравнения целенаправленного движения отражают выполнение целей движения и не отражают напрямую работу мышц. Мозг человека сам решает, какими средствами и с помощью каких программ выполнить предложенные задачи целенаправленного движения.

По поводу программ, используемых мозгом для управления движением, в данной работе ничего говорить не будем. Относительно же действия мышечного аппарата человека заметим следующее: конкретная реализация необходимого движения зависит от многих факторов, например, от тренированности спортсмена, от спортивного упражнения и фазы, в которой находится спортсмен, его анатомических особенностей, его психологического состояния на данный момент времени и т.д.

Работа выполняется по гранту государственной программы научных исследований на 2006-2010 г.г.

Финансирует: Министерство образования РБ.

Тема: «Разработка методов оценки биомеханического состояния человека и реализация оптимальных режимов движений биомеханических систем».

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев, Г.В. Введение в механику человека / Г.В. Корнев. – М.: Наука, 1977. – 264 с.
2. Загrevский, В.И. Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В.И. Загrevский. – Томск–Могилев: Издательская лаборатория Томского педагогического университета, 1999. – 156 с.
3. Загrevский, В. И. Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В. И. Загrevский, Д. А. Лавшук, О. И. Загrevский. – Могилев–Томск, 2000. – 190 с.
4. Покатилов, А.Е. Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой / А.Е. Покатилов; под. ред. В.И. Загrevского. – Минск: Изд. центр БГУ, 2006. – 351 с.
5. Бегун, П.И. Моделирование в биомеханике / П. И. Бегун, П. Н. Афонин. – М.: Высшая школа, 2004. – 390 с.
6. Левитский, Н.И. Теория механизмов и машин / Н.И. Левитский. – М.: Высшая школа, 1990. – 592 с.
7. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. – 608 с.
8. Боянович, Ю. В. Атлас анатомии человека / Ю. В. Боянович, Н. П.. Балакирев. – Ростов-на-Дону; Феникс, Харьков: Торсинг, 2005. – 734, [1] с.
9. Фениш, Х. Карманный атлас анатомии человека на основе Международной номенклатуры / Х. Фениш (при участии В. Даубера). – Минск: Вышэйшая школа, 2001. – 464 с.
10. Зациорский, В. М. Методы экспериментальных исследований в современной биомеханике спорта / В. М. Зациорский // Материалы первой Всесоюзной научной конференции по биомеханике спорта: Часть I. – М., 1974. – С. 35.
11. Зациорский, В. М. Физические качества спортсмена / В. М. Зациорский. – М.: Физкультура и спорт, 1966. – 198 с.
12. Зинковский, А. В. О методике оценки мышечных усилий при биомеханическом анализе спортивной техники / А. В. Зинковский // Теория и практика физ. культуры. – 1973. – № 9. – С. 66–69.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕОДНОРОДНОГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Никонова Т.В., Михасев Г. И.

The problem of stability of the thin-walled corrugated shell laying on the elastic foundation under action of non-uniform pressure is considered. The influence of the elastic foundation is taken into account as the additional pressure within the framework of Winkler's model. The rigid clamped conditions are considered at the edges of the shell. The obtained resolving equation with respect to a normal deflection enables to calculate the value of the critical pressure.

Металлические тонкостенные гофрированные конструкции являются высокотехнологичными и экономичными. В настоящее время подобные конструкции широко используются при капитальном строительстве для всевозможных транспортных, в том числе железнодорожных, развязок. Исследование устойчивости равновесия тонкостенных гофрированных оболочек наряду с расчетом на прочность является одной из самых важных в прикладном отношении проблем в механике деформируемого твердого тела. В настоящее время достаточно широко проведены исследования устойчивости тонкостенных изотропных цилиндрических оболочек, подверженных статическим изгибным и крутящим нагрузкам, осевому сжатию, гидростатическому давлению [1, 2]. В [3] проведено исследование локальной устойчивости пластин и пологих оболочек на упругом основании. В [4] авторами проводилось исследование устойчивости длинной тонкостенной оболочки под действием веса грунта с учетом его реакции. Недостаточно исследованной является устойчивость тонкостенных гофрированных оболочек.

Рассмотрим тонкостенную гофрированную оболочку средней длины L , лежащую на упругом основании и находящуюся под действием внешнего неоднородного гидростатического давления Q_n^* . Смоделируем гофрированную оболочку тонкой оболочкой вращения толщиной h (рис.1).

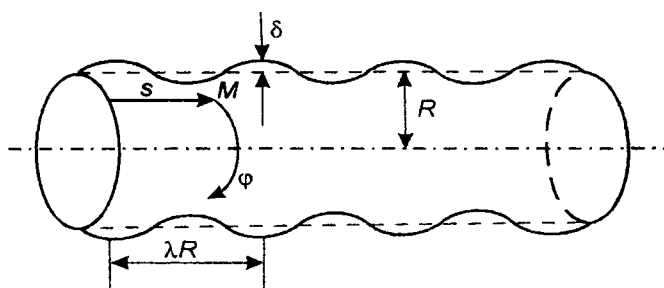


Рис. 1. Оболочка вращения

На поверхности опорного цилиндра введем безразмерную ортогональную систему криволинейных координат (s, φ) , где s — длина отрезка образующей опорного цилиндра, отсчитываемая от края до точки M и отнесенная к его радиусу R , а φ — окружная координата. При таком выборе координат первая квадратичная форма срединной поверхности имеет вид:

$$d\sigma^2 = R^2 (ds^2 + d\varphi^2).$$

Расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки, отнесенное к радиусу R зададим функцией:

$$B(s) = 1 + \mu F(s), \quad F(s) = \sin(2\pi s / \lambda), \quad \mu = \delta / R,$$

где μ – малый параметр, функция $F(s)$ описывает форму начальных отклонений от цилиндрической поверхности, имеет порядок единицы и существенно не возрастает при дифференцировании, δ – высота волны гофра, λ – длина волны гофра, отнесенная к радиусу R .

Воздействие упругого основания примем в качестве дополнительного давления, обусловленного нормальным перемещением w стенок трубы, в рамках модели Винклера [5, 6].

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния, используем систему полубезмоментных уравнений тонких оболочек [7], записанную в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 w + \varepsilon^2 \Lambda \Delta_s w - \Delta_k \Phi + ew &= 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right], \quad \Delta_s = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1} t_1 \frac{\partial}{\partial s} + t_3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2} t_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + t_3 \frac{\partial}{\partial s} \right) \right], \\ \Delta_k &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{A_1 R_2} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A_1}{A_2 R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь усилия T_i ($i=1, 2, 3$), функция напряжения Φ^* , связаны со своими безразмерными аналогами по формулам: $T_i = -\Lambda E h \varepsilon^6 t_i$, $\Phi^* = E h R^2 \varepsilon^4 \Phi$; $\varepsilon^8 = h^2 / [12(1-\nu^2)R^2]$ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, $e = (\alpha R^3 / E h^2) [12(1-\nu^2)]^{1/2}$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, Λ – искомый параметр нагружения, α – коэффициент постели винклеровского основания. Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки R_1, R_2 , отнесенные к R , параметры Ляме A_1 и A_2 в принятой системе координат имеют вид [8]:

$$R_1 = -\frac{1}{\mu F_{ss}''}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{1 - \mu^2 F_s'^2}}{1 + \mu F}, \quad A_1 = \sqrt{1 + \mu^2 (F_s')^2}, \quad A_2 = 1 + \mu F.$$

На краях оболочки рассмотрим условия жесткого закрепления:

$$w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, s = l, \quad (2)$$

где $l = L/R$.

Задача состоит в определении наименьшего значения $\Lambda > 0$, при котором краевая задача (1), (2) имеет ненулевое решение.

Считаем, что вследствие неоднородности гидростатического давления, оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой “наиболее слабой” образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [7], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu^{1/2} \xi.$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде [7]:

$$w(s, \varphi, \varepsilon) = w_* \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \quad \Phi(s, \varphi, \varepsilon) = \Phi_* \exp \left\{ i \left(\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\},$$

$$w_* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(\xi, s), \quad \Phi_* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \Phi_j(\xi, s), \quad \xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0), \quad (3)$$

где $w_j(\xi, s)$, $\Phi_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты, p – вещественное число, определяющее изменчивость в направлении φ , параметр a характеризует скорость уменьшения глубины вмятин при удалении от «наиболее слабой образующей $\varphi = \varphi_0$. Исходя из требования убывания решения (3) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $p > 0$, $\text{Im } a > 0$.

Усилия t_i ($i = 1, 2, 3$), параметр нагружения Λ представим в виде ряда по степеням ε

$$t_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j t_{ij}, \quad i = \overline{1..3}, \quad \Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Lambda_j. \quad (4)$$

Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки R_1, R_2 , параметры Ляме A_1 и A_2 разложим в ряд по степеням малого параметра μ :

$$R_1 = -\mu^{-1} / F_{ss}''; \quad R_2 = 1 - \mu F + \mu^2 (F^2 - 1/2 F_s'^2) + O(\mu^3); \quad A_2 = 1 + \mu F; \quad A_1 = 1 + 1/2 \mu^2 F_s'^2 + O(\mu^4).$$

Для того чтобы влияние начального отклонения $F(s)$ проявлялось уже в нулевом приближении, необходимо положить $\mu = \kappa \varepsilon^2$. После всех подстановок в нулевом приближении разрешающее уравнение примет вид

$$L_0 w_0 = \frac{1}{p^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial s^4} + \frac{2}{p^2} \kappa F_{ss}'' \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} + \frac{2}{p^2} \kappa F_{sss}''' \frac{\partial w_0}{\partial s} + [p^4 - \Lambda_0 t_{20} p^2 + \frac{\kappa}{p^2} F_{ssss}^{IV} + \kappa^2 F_{ss}''^2 + e] w_0 = 0. \quad (5)$$

Краевые условия запишутся следующим образом:

$$w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l. \quad (6)$$

Очевидно, что наименьшему значению критической нагрузки оболочки соответствует наименьшее положительное собственное значение Λ_0 краевой задачи (5), (6). Положим

$$\Lambda_0^0 = \min_{p, \varphi_0} \Lambda_0(p, \varphi_0) = \Lambda_0(p^0, \varphi_0^0), \quad (7)$$

где для параметров p^0, φ_0^0 будут выполняться соотношения:

$$\frac{\partial \Lambda_0}{\partial p} = \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0 \quad \text{при } p = p^0, \quad \varphi = \varphi_0^0. \quad (8)$$

Очевидно, Λ_0 может быть найдено численно, например, с использованием метода Рунге–Кутты. Из краевой задачи (5), (6) находим искомую величину Λ_0^0 как минимум функции $\Lambda_0 = f(p)$, а также число p_0 , при котором достигается этот минимум.

Предположим, что дифференциал второго порядка Λ_0 в точке p^0, φ_0^0 – положительно-определенная квадратичная форма:

$$d^2\Lambda_0 = \Lambda_{pp}dp^2 + 2\Lambda_{p\varphi}dpd\varphi + \Lambda_{\varphi\varphi}d\varphi^2 > 0, \quad (9)$$

где через $\Lambda_{pp}, \Lambda_{p\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$ обозначены производные Λ_0 по соответствующим переменным вычисленные при $p = p^0, \varphi = \varphi_0^0$. Значения производных $\Lambda_{pp}, \Lambda_{p\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$ также находятся численно с использованием прикладной программы. Поправка Λ_1 находится по формуле [7], получаемой из рассмотрения первого и второго приближений:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}(\Lambda_{pp}\Lambda_{\varphi\varphi} - \Lambda_{p\varphi}^2)^{1/2}. \quad (10)$$

Ненулевые поправки $\Lambda_i, i = \overline{3..n}$ могут быть найдены из последующих приближений, однако точность исходных уравнений (1) для их определения является недостаточной.

Таким образом, сформулирован алгоритм, согласно которому определяются критическое усилие, а также соответствующая форма бифуркации гофрированной оболочки, под действием неоднородного гидростатического давления. С использованием комплексного ВКБ-метода [7], исходная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных краевых задач. Полученное в нулевом приближении разрешающее уравнение дает возможность численно найти значение параметра нагружения Λ_0^0 и число волн p_0 . Разработанная авторами прикладная программа позволяет исследовать зависимость параметра нагружения Λ_0^0 и числа волн p_0 от длины оболочки, длины волны гофра λ , коэффициента постели винклеровского основания α , оптимизировать линейные размеры оболочки для получения заданных свойств. Поправка Λ_1 находится по формуле (10), получаемой из рассмотрения первого и второго приближений с учетом найденных численно $\Lambda_{pp}, \Lambda_{p\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Григолюк, Э.И., Кабанов, В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
3. Товстик, П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 147–160.
4. Михасев Г.И., Никонова Т.В. Расчет на прочность и устойчивость труб большого диаметра, лежащих в грунте // Труды международной конференции по геотехнике «Взаимодействие сооружений и оснований: методы расчета и инженерная практика». – С.-Пб., 2005. – Т. 2. – С. 139–142.
5. Корбут, Б.А., Нагорный, Ю.Н. Об одной модели заполнителя в задачах устойчивости цилиндрических оболочек. – Изв. вузов, "Машиностроение". – 1971. – № 6. – С. 16–21.
6. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат. 1954. – 232 с.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995.-320 с.
8. Михасев, Г.И., Никонова, Т.В. Оценка усилий в тонкостенной гофрированной трубе с упругим заполнителем под действием переменного давления // Изв. НАН Беларуси. – Сер. физ.-тех. наук. – 2005. – № 4. – С. 55–60.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ НАНОСТРУКТУРЫ ГРАФЕНА, СОДЕРЖАЩЕЙ РАЗРЕЗ

Нагорный Ю.Е., Репченков В.И., Чижик С.А.

The mathematical model of graphene nanostructure containing a cut is constructed and realized in package Mathematica. Dependences of forces arising in valence bonds at loading and Young modulus from length of defect are investigated. It is shown, that at edge of a cut forces grow in some times. Young modulus decreases almost in two.

Механика разрушения является необходимой составной частью расчетов на прочность и устойчивость. В классической теории в основе лежит задача Гриффитса о трещине в линейно упругой среде в виде математического разреза в условиях простого однородного напряженно-деформированного состояния. В окрестности вершины трещины поле напряжений имеет особенность вида K_J / \sqrt{r} , где r – расстояние от края, K_J – постоянная, называемая коэффициентом интенсивности напряжений. Её величина зависит от размера трещины. Резкое возрастание напряжений в данном случае приводит, естественно, к уменьшению прочности и увеличению податливости, что обязательно учитывается при проектировании.

Расширение сферы применения наноразмерных систем делает актуальным решение аналогичной задачи в нанобласти. Речь идёт об исследовании изменения их механических свойств при появлении в них трещиноподобных дефектов, когда в какой-либо части системы, например, нарушаются валентные связи между атомами. Понятно, что это приводит к перераспределению нагрузки и росту силовых факторов в элементах, расположенных в непосредственной близости от дефекта.

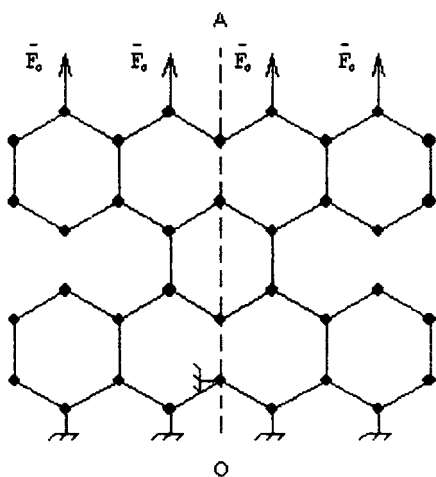


Рис. 1

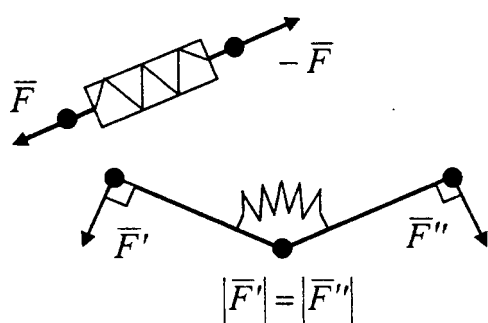


Рис. 2

В данной работе рассматривается простейшая ситуация – нагружению в виде растяжения подвергается регулярная структура графена с нарушениями в виде симметричного разрыва валентных связей по краям (рис. 1). Вычисляются силы, действующие в валентных связях между атомами и силы, раскрывающие упругий структурный элемент в виде трёх атомов (рис. 2). Расчёт проводится в рамках силовой модели [1] с использованием двух элементов показанных на рис. 2. Математическая модель строится на основе алгоритмов МКЭ [2]. Компьютерная модель оригинальна, реализована в пакете Mathematica. Для уменьшения необходимых ресурсов рассматривается половина структуры, показанной на рис. 1. На вертикальной границе ОА выбраны граничные условия в виде закрепления атомов по горизонтали, на горизонтальной границе запрещены смещения по вертикали. Силовые постоянные элементов приняты $k_2 = 126 \text{ kcal mol}^{-1} \text{ rad}^{-2}$ [3].

Необходимо отметить, что сами по себе валентные связи образуют чисто шарнирную систему, не обладающую никакими упругими свойствами. Только когда учитываются угловые элементы ($k_2 \neq 0$) возникает сопротивление нагружению. Точно так же одни угловые элементы тоже не обеспечивают жёсткости.

Результаты расчётов отображены на графиках (рис. 3–7). Рассматриваются наиболее только наиболее нагруженные вертикальные валентные связи. На первом графике показано распределение сил в бездефектной системе размером 15×15 ячеек. По горизонтали откладываются координаты середин связей и к ним привязываются нормированные значения сил F_i / F_0 , где i – номер связи. Видно, что распределение практически равномерное, только на границах слева и справа усилия немного меньше, примерно $0,95F_0$. Если удалить одну связь (рис. 1), то происходит перераспределение нагрузки – два элемента на краю ниже и выше “разреза” оказываются разгруженными. Зато усилие в связи, непосредственно примыкающей к дефекту, возрастает почти в два раза (график на рис. 4).

Характер распределения не изменяется с ростом длины дефекта, что иллюстрирует график на рис. 5 для системы с $L=5$ из $L_0=15$ отсутствующими связями. Естественно увеличится максимальное значение силы – примерно в четыре с половиной раза.

Зависимость максимальной силы от размера разреза близка к линейной и показана на рис. 6. Понятно, что прочность образца уменьшается в обратной пропорции.

Когда дефектов нет, вертикальные смещения атомов на верхней границе очень мало отличаются друг от друга. При наличии “разреза” край испытывает большие смещения чем центр. Смещения точек на краю и в центре могут различаться в несколько раз (рис. 7), то есть отклонение от однородности весьма существенно. Если, тем не менее, ввести среднее значение по всем точкам на верхнем крае и вычислить упругий коэффициент по формуле

$$E = \frac{F_0}{\sqrt{3} a t} \cdot \frac{l}{\Delta l},$$

где $a = 0.142$ нм – длина валентной связи, соответственно $\sqrt{3}a$ – расстояние между двумя противоположно расположенными связями, $t = 0.34$ нм – величина межслоевого расстояния в графите, принимается в качестве толщины пластины графена, l – высота модели, Δl – среднее удлинение, то получаются значения меньшие исходного E_0 . Соответственно податливость системы возрастает. Зависимость E / E_0 от длины дефекта приведена на графике рис. 8.

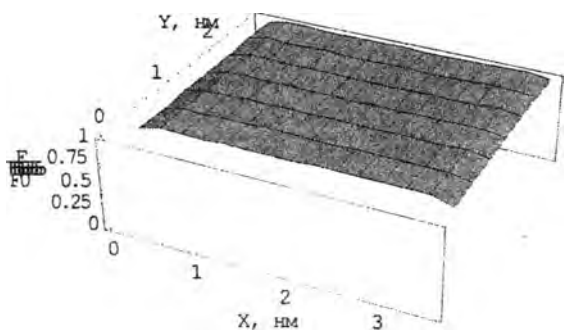


Рис. 3 Зависимость нормированного значения силы в вертикальной валентной связи от координат при отсутствии дефектов

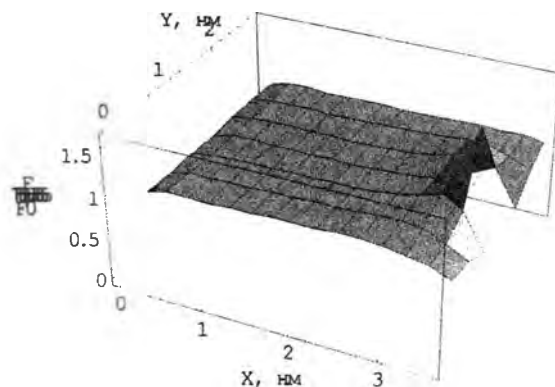


Рис. 4 Зависимость нормированного значения силы в вертикальной валентной связи от координат при наличии одного дефекта

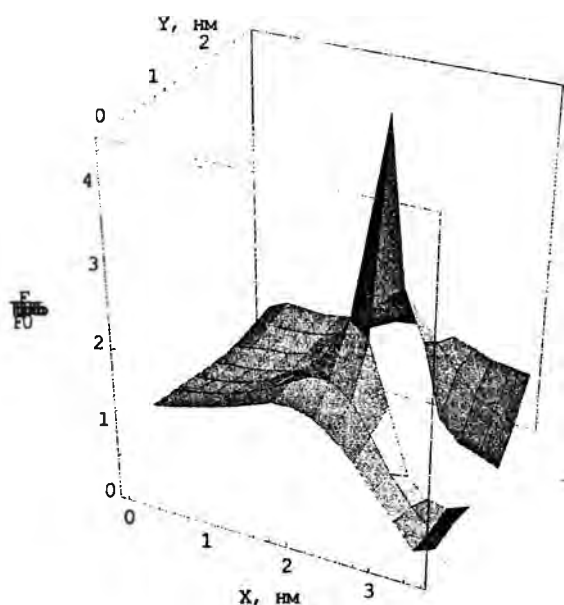


Рис. 5. Зависимость нормированного значения силы в вертикальной валентной связи от координат при наличии пяти дефектов

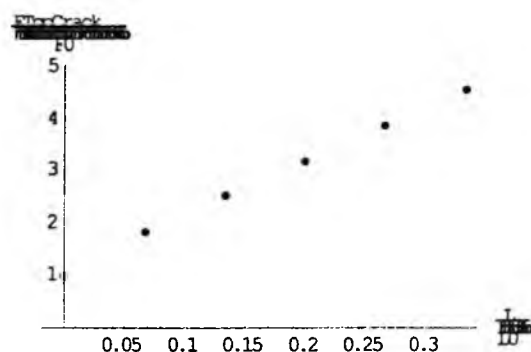


Рис. 6. Зависимость максимальной силы от размера дефекта

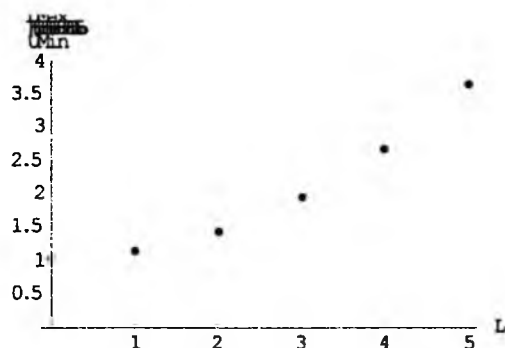


Рис. 7. Эпюра перемещения атомов на верхней границе

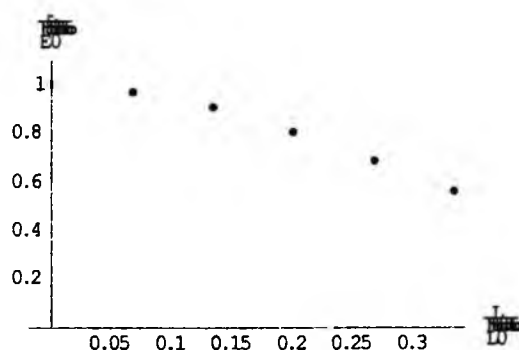


Рис. 8. Зависимость приведенного значения модуля Юнга от размера дефекта

Подобные зависимости наблюдаются и для сил в угловых элементах.

Приведенные выше результаты представляются важными в двух аспектах. Во-первых, необходимо отдавать себе отчет в том, что прочность наноразмерных структур существенно зависит от наличия в них дефектов. Даже при небольшом их количестве прочность может снижаться в разы. Во-вторых, значения упругих постоянных, получаемые в экспериментах скорее всего всегда будут меньше предсказанных теоретически, поскольку существование в природе регулярных наноструктур является скорее исключением, чем правилом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волькенштейн, М., Ельяшевич, М., Степанов, Б. Колебания молекул. – М.-Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1949. – 600 с.
2. Репченков, В.И., Нагорный, Ю.Е., Репченкова, Е.В. Векторная параметризация номеров степеней свободы и номеров элементов в МКЭ. – Минск: Белгосуниверситет, 2003. – 13 с. Деп. в БелИСА.
3. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. Chunyu Li, Tsu-Wei Chou // International journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40 – P. 2487–2499.

РАВНИТЕЛЬНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ НАНОТРУБКИ В СЛУЧАЕ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Нагорный Ю.Е., Репченков В.И., Чижик С.А.

It was developed computer model of single-walled carbon nanotube on basis of valence-force-field approach. One performed computational experiments to determine mechanical characteristics (linear elasticity modulus, crosscut compression coefficient, shear modulus) according nanotube dimensions. One realized comparison present results with results obtained within Urey-Bradley model. Qualitative distinctions in behaviour of modules are found out.

В основе описания наноструктур углерода, состоящих из правильных шестиугольников, лежит фрагмент из четырёх атомов в виде трёхлучевой звезды (рис. 1).

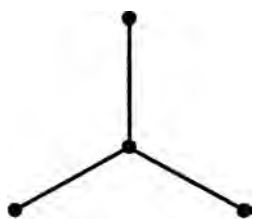


Рис. 1

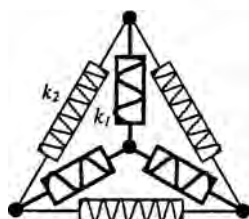


Рис. 2

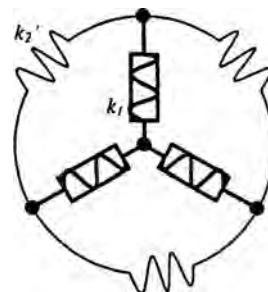


Рис. 3

Предположим, что взаимодействуют между собой только ближайшие и расположенные через один атомы. Все они идентичны и при малых смещениях возникающие в системе силы могут быть выражены через два параметра, которые называются силовыми коэффициентами. На рис. 2, 3 изображены механические модели соответствующие такой ситуации. Первая (рис. 2) состоит из шести одномерных упругих элементов с жёсткостями k_1 и k_2 . Вторая (рис. 3) включает в себя наряду с одномерными упругими элементами угловые элементы с жёсткостью k_2' . Связь между постоянными k_2 и k_2' может быть установлена через условие равенства потенциальной энергии запасённой в элементах при одинаковых смещениях.

В работе [1] проведено численное исследование механических свойств однослойной плоской наноструктуры углерода – графена. Выяснилось, что упругие коэффициенты рассчитанные с применением разных моделей существенно отличаются друг от друга. Они по разному зависят от размеров наноструктуры.

Ниже аналогичное исследование проведено для нанотрубки регулярного строения с границами типа “зигзаг”. На рис. 4–6 приведены соответственно графики коэффициента продольной упругости (модуль Юнга), коэффициента поперечной жёсткости (коэффициент Пуассона) и модуля сдвига. Первые два получены при растяжении трубки, последний – при её кручении. Графики слева взяты из работы [2].

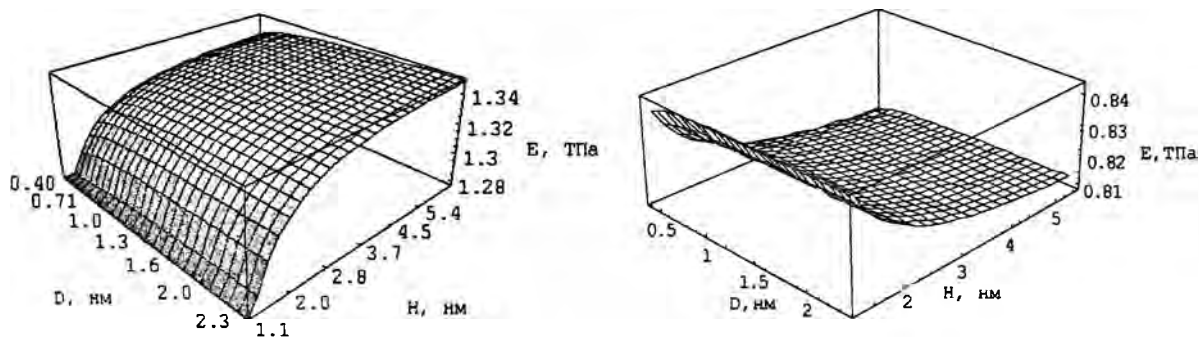


Рис. 4. Модуль продольной упругости

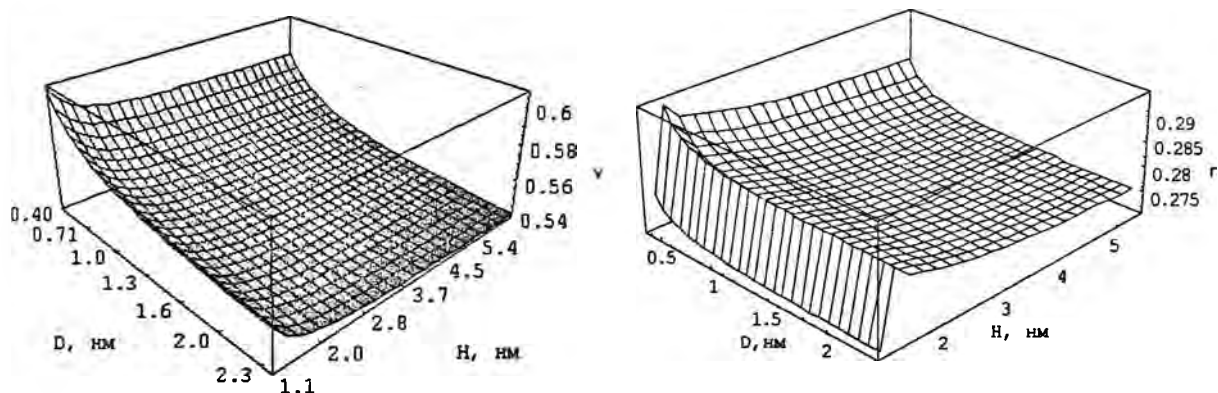


Рис. 5. Коэффициент поперечного сжатия

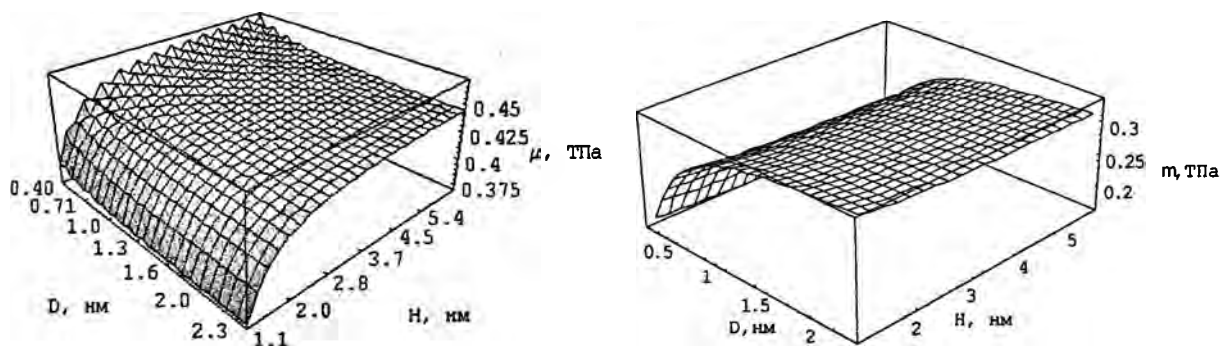


Рис. 6. Модуль сдвига

Наибольшее отличие наблюдается для модуля продольной упругости и модуля сдвига. В случае применения первой модели (рис. 2) оба упругих коэффициента мало зависят от диаметра нанотрубки. Значительно возрастая при изменении её высоты: $1,28 < E_1 < 1,34$ ТПа; $0,375 < \mu_1 < 0,45$ ТПа. Расчёты на основе второй модели (рис. 3) приводят к совершенно другим результатам. Теперь модуль Юнга не возрастает, а убывает с увеличением высоты. Причём изменяется в других пределах — от 0,84 ТПа до 0,81 ТПа. Модуль сдвига наоборот практически не зависит от высоты и растёт с увеличением диаметра нанотрубки. Предел изменения также отличается: $0,2 < \mu_2 < 0,3$ ТПа. Коэффициент поперечного сжатия в обеих моделях ведёт себя сходным образом. Однако значения для второй модели вдвое меньше, чем в случае первой ($0,54 < \nu_1 < 0,6$ против $0,275 < \nu_2 < 0,295$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагорный, Ю.Е., Репченко, В.И., Сыроежкин, С.В., Чижик, С.А. Расчет механических свойств графена в модели валентно-силового поля // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2007. – Вып. 22. – С. 182–186.
2. Майсевич, Е.С., Сыроежкин, С.В. Зависимость механических свойств однослойной нанотрубки с границами типа “зигзаг” от линейных размеров // Известия национальной академии наук Беларуси. Серия физ.-тех. наук. – 2005. – № 5. – С. 104–106.

ТЕСТЕР ЭКСПРЕСС ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ КЛЕЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Ржевуцкий М.В

The article deals with the results of work in designing a tester for making express evaluation of the adhesive joints strength. The working out of design and technology documentation of tester has been conducted by means of the computer-aided design programmer COMPAS 3D. The creation of the solid three-dimensional model allowed to modelize all stages of the process of the adhesive join/ stratification. The utilization of the function of associated design drawings makes easier the preparation of the design documentation. Thanks to the creation of parameterized models of details the process of dimensions changing occurs automatically. The insertion of option «collision of details» allowed to ensure the ensure the displacement accuracy of the unit applies a load.

Сегодня благодаря своей динамичности и наукоемкости клеевая технология обеспечивает получение высококачественных малооперационных видов изделий с улучшенными эксплуатационными и комфортными свойствами в различных технологических процессах. Особенно широкое применение клеевые соединения получили в технологии соединения текстильных материалов. Для обеспечения возможности управления качественными характеристиками необходимо определять показателей прочностных свойств клеевых соединений, которые проводятся методами испытания на разрыв, сдвиг и расслаивание. Наиболее распространенным видом испытаний клеевых соединений текстильных материалов является равномерное расслаивание.

Все методы стандартизованных испытаний на расслаивание предполагают их проведение на разрывной машине, что является основным препятствием для широкого применения метода. Объясняется это тем, что не на всех предприятиях имеется подобное оборудование. Кроме того, указанное оборудование требует достаточно больших средств на свое содержание, в связи с необходимостью осуществления поверки и регулярного техобслуживания. Немаловажным является и высокая стоимость подобного оборудования.

Целью выполняемой работы являлась разработка тестера для проведения экспресс оценки прочности клеевых соединений при производстве верхней одежды.

В соответствии с поставленной целью, для разработки технического задания были рассмотрены и проанализированы методики определения прочности связи между «слоями» различных материалов и применяемое при этом испытательное оборудование.

Выяснено, что во всех методиках в качестве испытательного оборудования используются разрывные машины с различными приспособлениями или без них. Приспособления используются для закрепления образцов и для создания необходимого угла расслаивания. Во всех методах, как основной используется угол расслоения равный 180°.

Что касается размеров образцов, то в данном случае, во всех методах выбираются различные габариты. Проведенные эксперименты с материалами, применяемыми на предприятии, показали, что использование образцов шириной менее 50 мм, приводит к краевому эффекту, когда материал вытягивается в длину, и ширина места расслоения начинает изменяться произвольным образом. Поэтому в разрабатываемом тестере и методике проведения испытаний решено использовать образцы шириной 50 мм.

Так же был определен диапазон скоростей, на которых проводят расслоение образцов, который оказался достаточно широким. В подавляющем большинстве методик предлагается использовать скорость расслоения от 100 до 300 мм/мин. Для обоснованного выбора параметра были проведены эксперименты по изучению влияния скорости расслоения на прочностные характеристики клеевых соединения. В соответствии с полученными значениями испытаний, для разрабатываемого тестера было принято решение выбрать минимальную скорость передвижения подвижного зажима. Для гармонизации с уже действующими методиками, скорость была определена в 100 мм/мин, как наиболее часто применяемая для проведения подобных испытаний.

На основании выполненного анализа были определены основные параметры скорости расслоения, габаритные размеры образцов, требуемый угол расслоения и разработано техническое задание на проектирование тестера для проведения экспресс оценки прочности клеевых соединений дублированных материалов верхней одежды.

Вся конструкторская разработка, была осуществлена путем разработки трехмерных твердотельных моделей как сборочного узла, так и всех деталей, входящих в тестер. Разработка была выполнена при помощи системы автоматизированного проектирования КОМПАС-3D V8 Plus, что позволило провести предварительный анализ работоспособности тестера на стадии проектирования. При этом были выявлены некоторые первоначальные конструктивные ошибки, которые удалось устранить благодаря «режиму контроля соударений» и «проверки пересечений компонентов».

Общий вид разработанного тестера, в исходном положении, при котором образец, подвергаемый расслоению, зафиксирован в зажимах, представлен на рис. 1.

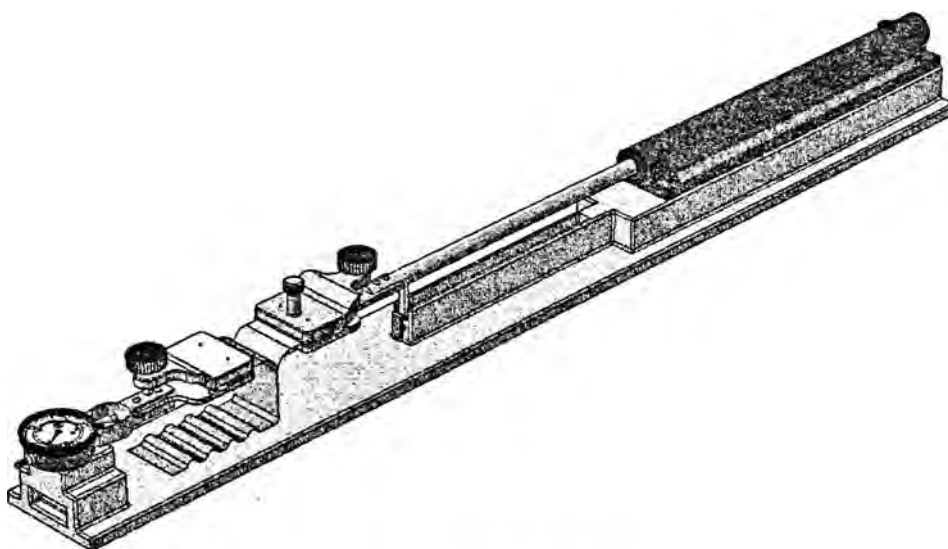


Рис. 1. Общий вид тестера

Применение системы автоматизированного проектирования позволило последовательно проверить все стадии процесса расслоения и перемещения активного и силоизмерительного зажимов. Работа тестера осуществляется следующим образом. Вначале захватив рукоятку, устанавливают рабочий захват в исходное положение, при котором обеспечивается требуемое расстояние между зажимами. Далее образец заправляется в захваты и фиксируется винтами. После этого стопор, удерживающий рабочий захват в исходном положении, отпускают. В результате на плунжер гидроцилиндра начинает давить силовая пружина, вызывая его смещение в осевом направлении, вместе с захватом.

Образец при этом расслаивается или разрывается, в зависимости от характера проводимого испытания, при этом окончательное положение рабочего активного зажима показано на рисунке.

При расслаивании образца силоизмерительное кольцо деформируется, что фиксируется на индикаторе часового типа, благодаря перемещению его штока. Конкретные значения усилия расслоения считываются по шкале индикатора в мм и переводятся в Н при помощи тарировочной таблицы.

Таким образом, разработка конструкции тестера при помощи системы автоматизированного проектирования, позволило на еще стадии проработки конструкторской документации устранить все ошибки и проконтролировать работоспособность изделия.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

Мартыненко Т.М.

The general methods of the resolution of the partial differential equations of the first order for a prescribed of the strain state of thin-walled elastic shells of the given type (momentless or pure moment) are obtained.

Оболочками в теории упругости называются пространственные деформируемые тела, у которых одно измерение (толщина) мало по сравнению с двумя другими. Поэтому даже строгая теория оболочек является приближенной и заключается в построении такой математической модели, которая сводит трехмерную задачу об определении НДС к двумерной. В связи с этим, все двумерные задачи теории оболочек по сути являются приближенными, основанными на введении упрощающих гипотез. Если в качестве таковых взять гипотезы Кирхгофа–Лява, то получаемая при этом разрешающая система уравнений примет такой вид:

– уравнения равновесия [1, с 252, 253, (5,56), (5,57)]; [2, с 42, 44, (7,4), (7,8)]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BT_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial AT_{\beta\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} T_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_\beta \right) + \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + q_\alpha &= 0; \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BT_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial AT_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_\alpha \right) + \frac{N_\beta}{R_\beta} + q_\beta &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BN_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial AN_\beta}{\partial \beta} \right) - \frac{T_\alpha}{R_\alpha} - \frac{T_\beta}{R_\beta} + q_n = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BM_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial AM_{\beta\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right) - N_\alpha &= 0; \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BM_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial AM_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right) - N_\beta &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} = 0.$$

– закон Гука [1, с 248, (5,46)]; [2, с 53, (10.8), (10,9)]:

$$T_\alpha = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta), \quad T_\beta = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha), \quad T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} = S = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \omega;$$

$$M_\alpha = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} (\chi_\alpha + \mu\chi_\beta), \quad M_\beta = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} (\chi_\beta + \mu\chi_\alpha), \quad (3)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = H = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \tau.$$

– условия совместности деформации [1, с 241, (5,34)]; [2, с 34-35, (5,6)_{1,2,3}]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta}(A\chi_\alpha) - \chi_\beta \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B\tau}{\partial \alpha} - \tau \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\omega}{R_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_\beta} \left(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial B\omega}{\partial \alpha} - \varepsilon_\beta \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(B\chi_\beta) - \chi_\alpha \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial A\tau}{\partial \beta} - \tau \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\omega}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial A\omega}{\partial \beta} - \varepsilon_\alpha \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) &= 0; \\ \frac{\chi_\alpha}{R_\beta} + \frac{\chi_\beta}{R_\alpha} + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left(B \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{1}{2} A \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right) + \right. & \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left(A \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) - \frac{1}{2} B \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

где A , B , $\frac{1}{R_\alpha}$, $\frac{1}{R_\beta}$, $\frac{1}{R_{\alpha\beta}}$ – геометрические характеристики срединной поверхности

оболочки. Эта система уравнений позволяет решать задачи теории оболочек двумя путями: в усилиях– моментах и в перемещениях их срединной поверхности. Первый путь сводится к определению усилий – моментов T_α , T_β , S , M_α , M_β , H в полной аналогии с задачами теории упругости в напряжениях, а второй связан с определением перемещений, поэтому система уравнений приводится к решению трех дифференциальных уравнений относительно компонентов вектора перемещений точек срединной поверхности. В обоих случаях разрешающие системы уравнений будут линейными для малых перемещений и иметь переменные коэффициенты, что затрудняет их исследование в общем случае. Поэтому усилия ученых, занимающихся расчетом оболочек, были направлены на поиск возможностей упрощения задач. Получаемые при этом математические модели содержат два типа погрешностей, первая из которых связана с погрешностью основных допущений теории оболочек (гипотез Кирхгофа–Лява) вторая – связана с упомянутой выше погрешностью решений систем (1)–(4).

Общей теории оболочек предшествовала безмоментная теория, которая заключается в пренебрежении всеми моментами M_α , M_β , H . Она значительно более простая и в некоторых случаях дает вполне правильное представление о НДС оболочки. Из (3) следует, что это пренебрежение будет обоснованным, когда мала жесткость оболочки на изгиб:

$$\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \approx 0, \text{ или когда } \chi_\alpha = \chi_\beta = \tau = 0.$$

С учетом равенства нулю изгибных компонентов НДС формулы (1)–(4) приводят к такой разрешающей системе уравнений для определения искомой геометрии безизгибного состояния оболочки:

– уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BT_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial AT_{\beta\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} T_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_\beta \right) + q_\alpha &= 0; \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BT_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial AT_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_\alpha \right) + q_\beta &= 0; \\ \frac{T_\alpha}{R_\alpha} - \frac{T_\beta}{R_\beta} + q_n &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

– закон Гука

$$T_{\alpha} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\alpha} + \mu\varepsilon_{\beta}), \quad T_{\beta} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\beta} + \mu\varepsilon_{\alpha}), \quad T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} = S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega; \quad (6)$$

– условия совместности деформации

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{R_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_{\beta}} \left(\frac{\partial A \varepsilon_{\alpha}}{\partial \beta} - \frac{\partial B \omega}{\partial \alpha} - \varepsilon_{\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = 0; \quad \frac{\omega}{R_{\beta}} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{R_{\alpha}} \left(\frac{\partial B \varepsilon_{\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial A \omega}{\partial \beta} - \varepsilon_{\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) = 0; \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left(B \frac{\partial \varepsilon_{\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\alpha}) - \frac{1}{2} A \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left(A \frac{\partial \varepsilon_{\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}) - \frac{1}{2} B \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый случай соответствует расчету гибкой оболочки (мембраны), а второй – безмоментной оболочке. Оба эти случая описываются одной и той же системой уравнений, но между ними существует определенное различие, так как абсолютно гибкая оболочка (например матерчатая) не в состоянии сопротивляться сжимающим усилиям (в ней появляются складки, т.е. происходит потеря устойчивости формы, а потому расчет подобной оболочки остается достоверным только при растягивающих полях напряжений). Оболочки с конечной жесткостью на изгиб могут находиться в безмоментном НДС как при растягивающих, так и сжимающих усилиях. Они будут терять устойчивость лишь при достижении некоторых критических полей напряжений. Если для абсолютно гибких оболочек безмоментное НДС является единственно возможным, поскольку они не обладают сопротивлением изгибу, то для оболочек с конечной жесткостью на изгиб такое НДС является только одним из возможных состояний, а потому его существование возможно только при выполнении определенных условий, касающихся формы оболочки, характера действующего на нее нагрузки и закрепление краев. Как отмечает ряд авторов [1, 2], оболочки, испытывающие безмоментное НДС, являются наиболее прочными. Поэтому при конструировании оболочек всегда стремятся обеспечить их безмоментное НДС. Этим определяется практическое значение безмоментной теории. Если оболочка изготовлена из пластического материала, то роль изгибных напряжений в ней снижается за счет появления в ней пластической деформации, а в предельном состоянии напряжения рационально спроектированной оболочки мало отличается от безмоментного. Кроме того значение безмоментного НДС заключается в том, что оно входит в качестве одного из элементов в моментную теорию. Уравнения равновесия в безмоментной теории получим на основании уравнений (1), (2) при $M_{\alpha} = M_{\beta} = H = 0$. Тогда из (2) $N_{\alpha} = N_{\beta} = 0$. Таким образом, равенство нулю перерезывающих сил в (5) является следствием определения безмоментного НДС, а не условием выполнения уравнений неразрывности. Кроме того, применение в качестве математических моделей тех или иных расчетных методов решения задач теории оболочек являются результатом использования существующих в настоящее время приближенных методов решения задач математической физики. Обратные геометрические задачи теории тонкостенных упругих оболочек имеют родственную постановку в случае безмоментного и чисто-моментного НДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман, В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 456 с.
2. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.

МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И ГОМОГЕНИЗАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Чигарев А.В., Миронов Д. Н., Каминский Э.

Технические и природные системы имеют, как правило, сложную структуру, в которой можно выделить несколько уровней иерархии. Детальное моделирование геометрических параметров в принципе было возможно всегда, в то время как расчет физических полей, в частности напряженно-деформированного состояния в динамике очень сложен даже для современных суперкомпьютеров, так как практически невозможно точно сформулировать все граничные и начальные условия. Поэтому важными инструментами изучения сложных систем остаются методы, позволяющие сводить исследования данной системы к более простой, в определенном смысле эквивалентной данной системе. Здесь существует два крайних подхода:

1. метод гомогенизации (метод осреднения);
2. метод дискретизации (контрастизации).

Метод гомогенизации нашел широкое применение в описании процессов деформирования и разрушения композиционных неоднородных сред, а также конструкций. Целесообразно применять этот метод в том случае, когда число структурных элементов велико, т.е. масштаб отдельных элементов значительно меньше масштаба тела (системы). При этом считается, что объем и геометрия эквивалентного тела, граничные и начальные условия остаются неизменными, а внутренняя структура заменяется эффективной (гомогенизированной) средой, неизвестные свойства которой подлежат определению. Этот подход, в частности, применим и в теориях сложных, армированных оболочек, других конструкций. Этот подход применяется в тех случаях, когда система (конструкция) имеет сложную граничную геометрию, причем масштаб отдельных элементов значительно меньше масштаба всего тела. Например, такой подход применим в теории оболочек с внешними и внутренними повреждениями.

Из вышесказанного следует, что если конструкция (тело) имеет сложную внутреннюю структуру и геометрию, то можно выделить иерархию структур и проводить операции гомогенизации последовательно. В начале вычисляем эффективные характеристики внутренней структуры, а затем эффективные геометрические характеристики тела в целом. Однако, если масштаб геометрической неоднородности, например, шероховатости, имеет один порядок с масштабом внутренней неоднородности, то тогда сначала находим эффективную геометрию, а затем эффективные внутренние свойства. Ясно, что эффективная среда может служить интегральной оценкой свойств реальной среды соответственно и информация, полученная на основе модели эффективной среды имеет интегральный характер и достаточно удовлетворительна, если разброс между значениями параметров не слишком велик. Например, в принципе можно вычислить эффективные характеристики тела, содержащие трещину, причем эти характеристики могут совпадать с характеристиками той же среды с равномерным распределением микропор, микротрещин или тела с непрерывно изменяющимися характеристиками. Однако с точки зрения надежности первый случай требует более детального исследования. Поэтому, в качестве третьего этапа решения задачи необходимо моделировать эффективным телом с трещиной, что позволит оценить ресурс, а далее рассмотреть систему трещин.

Как правило, макроскопические трещины могут быть надежно обнаружены существующими методами и в этом случае вопрос стоит не о продлении работы поврежденной детали, а о ее замене. В дальнейшем рассмотрим вопросы диагностирования характеристик деталей двигателя, а также прогнозирования слабых мест с точки зрения трещиностойкости.

Второй подход в моделировании сложных систем связан с дискретизацией (контрастизацией) структуры тела, что математически соответствует переходу от распределенной системы, описываемой уравнениями в частных производных к системе с сосредоточенными параметрами описываемыми, обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Процедура дискретизации осуществляется обычно по принципу выделения в сложной системе (конструкции) конструктивных элементов и стягивание их объемов в некоторые характерные точки таким образом, что исходное твердое тело, заменяется системой материальных точек, связанных между собой элементами жесткости. С точки зрения вибрации характерными точками являются центры масс, центры жесткости. Поэтому для каждого структурного элемента двигателя определяем центр масс по обычным формулам

$$\bar{r}_{O_k} = \frac{\int_{V_k} \bar{r}_k \rho_k dV}{\int_{V_k} \rho_k dV}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где k – номер структурного элемента двигателя, ρ_k – плотность k -го элемента, O_k – центр масс k -го элемента.

Чтобы оценить разброс масс от центра масс и неравномерность распределения ее в структурном элементе рассчитывается тензор инерции для каждого k -го элемента

$$I^{(k)} = \begin{pmatrix} I_{1,1}^{(k)} & I_{1,2}^{(k)} & I_{1,3}^{(k)} \\ I_{2,1}^{(k)} & I_{2,2}^{(k)} & I_{2,3}^{(k)} \\ I_{3,1}^{(k)} & I_{3,2}^{(k)} & I_{3,3}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

$$I_{i,j}^{(k)} = \int_{V_k} x_i x_j \rho dV, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leftrightarrow x, \quad 2 \leftrightarrow y, \quad 3 \leftrightarrow z, \quad I_{O_k} = I_{i,j}.$$

Определение центров физико-механической жесткости формально можно задать в виде

$$\bar{r}_{C_k} = \frac{\int_{V_k} \bar{r}_k \lambda_k^* dV}{\int_{V_k} \lambda_k^* dV}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где λ_k^* – представляет собой эффективные коэффициенты упругости, вычисленные для k -того структурного элемента.

Однако определение (3) дает характеристику, которая содержит мало информации об элементах конструкции. Более важным является центр конструкционной жесткости, который содержит информацию не только о распределении материальных коэффициентов жесткости по системе, но и учитывает то, что жесткость конструкции зависит от ее геометрии и распределения приложенных нагрузок.

Как известно, стержни являются широко распространенным элементом конструкции авиационного двигателя. Если стержень однородный, то геометрическая жесткость при кручении вычисляется по формуле.

$$C^* = 2 \iint_S \Phi d\Delta, \quad (4)$$

где Φ – функция напряжений, S – площадь поперечного сечения.

Также имеют место формулы:

$$\tau_{xz} = G_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

где $\alpha = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \omega_z d\Delta$ – срезной угол закручивания напряженного сечения на единицу длины стержня.

В случае, если сечение представляет собой многосвязную область, то геометрическая жесткость вычисляется по формуле [λ]:

$$C^* = 2 \left(\iint_S \Phi d\Delta + \sum_{k=1}^n C^* S_k \right),$$

где индекс k относится к сечению k – того элемента плоскостью перпендикулярной оси стержня. Из энергетических соображений следует, что геометрическая жесткость положительна.

Мембранная аналогия Прандтля для задачи о равновесии мембраны, закрепленной по нагруженному контуру Γ и нагруженной поверхностной нагрузкой P , сводится к граничной задаче для уравнения Пуассона.

Можно показать, что геометрическая жесткость сечения со структурными элементами связана с объемом депланированного объема формулой

$$V = \frac{P}{2T} C^*, \quad (4)$$

где T - интенсивность сил напряжения.

Аналогично и при кручении.

Мембранная аналогия позволяет делать некоторые оценки о распределении напряжений по сечению.

Как следует из (5) геометрическая жесткость имеет размерность момента инерции площади (L^4). В случае круглого поперечного однородного сечения геометрическая жесткость при кручении равна полярному моменту инерции. Для сечений отличных от кругового отождествление геометрической жесткости с полярным моментом инерции ошибочно.

Имеет место оценка

$$C^* \leq I_p, \quad (7)$$

где I_p – полярный момент инерции и равенство возможно только для кругового сечения.

Теорема Помса утверждает, что при заданной площади стержень круглого сечения имеет наибольшую жесткость. Более точная оценка имеет вид

$$C^* \leq \frac{4I_x I_y}{I_x + I_y}, \quad I_p = I_x + I_y, \quad (8)$$

где I_x, I_y – моменты инерции относительно осей x и y площади S .

Влияние накопления повреждений на поведение собственных частот деталей двигателя

Заменим реальную распределенную систему, состоящую из n деталей дискретной системой материальных точек, координаты которых находятся в центрах инерции, связанных элементами жесткости, равным эффективным л коэффициентам упругости. При накоплении повреждений изменяются физико-механические характеристики системы в зависимости от уровня поврежденности. Пусть в некоторый начальный момент времени уровень поврежденное™ равен нулю, а коэффициенты упругости определяются тензором Λ^0 . Деталь (конструкция) должна быть исключены из эксплуатации, когда уровень поврежденности равен единице и коэффициенты упругости определяются тензором Λ^k . Изменение δ в зависимости от времени t , определяется кинетическими уравнениями, которые в общем виде можно записать следующим образом

$$\frac{d\delta}{dt} = f(\delta, \sigma_{i,j}, T, t, \dots), \quad (9)$$

или

$$\frac{d\delta}{dn} = f(\delta, \sigma_{i,j}, T, n, \dots). \quad (9)$$

Зависимость тензора эффективных коэффициентов упругости от поврежденности $\delta(t)$ запишем в виде

$$\Lambda(\delta) = (1 - \delta)\Lambda^o + \delta\Lambda^k. \quad (10)$$

Будем считать, что в общем случае массы системы совершают поступательные и вращательные движения, поэтому в общем случае инерционные свойства системы описываются тензором инерции M . В процессе эксплуатации двигателя при воздействии термосиловых нагрузок происходит изменение масс деталей двигателя, что сказывается на характере распределения собственных частот. Положим, что зависимость тензора M от δ имеет вид аналогичный (11):

$$M(\delta) = (1 - \delta)M^o + \delta M^k. \quad (12)$$

Лагранж..... системы в момент t запишется в виде

$$L = \frac{1}{2}[(M\bar{q}, \bar{q}) - (\Lambda\bar{q}, \bar{q})], \quad \bar{q} = (q_1, \dots, q_m), \quad (13)$$

где \bar{q} – вектор обобщенных координат, $\dot{\bar{q}}$ – вектор обобщенных скоростей. Линейные колебания описываются уравнениями Лагранжа II рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

или в матрично-векторной форме

$$M\ddot{\bar{q}} + \Lambda\bar{q} = 0, \quad A = \|I_{\alpha\beta}\|, \quad \Lambda = \left\| \frac{\partial^2 W(0)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right\|, \quad (15)$$

где $W(q_\alpha)$ – потенциальная энергия упруго деформированной системы.

Если в начальном состоянии отсутствуют начальные деформации и напряжения, то система будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия, определяемого условием

$$\frac{\partial W(0)}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Общее решение системы (15) представляется в виде

$$\bar{q} = \sum_{\alpha=1}^m u_\alpha (C_{1\alpha} \cos \omega_\alpha t + C_{2\alpha} \sin \omega_\alpha t) \quad (17)$$

где u_α – собственные векторы системы, ω_α – собственные частоты системы. Собственные частоты располагаются в порядке возрастания

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\min(\Lambda\bar{q}, \bar{q})}{(M\bar{q}, \bar{q})}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\max(\Lambda\bar{q}, \bar{q})}{(M\bar{q}, \bar{q})}}. \quad (18)$$

Имеют место равенства

$$[M_{(\delta)}\bar{u}_\alpha(\alpha), \bar{u}_\alpha(\delta)] = 1, \quad \omega_\alpha^2(\delta) = [\Lambda(\delta)\bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)], \quad \omega_\alpha^2(\delta)Mu_\alpha(\delta) = \Lambda(\delta)u_\alpha(\delta). \quad (19)$$

Сформулируем задачи идентификации на основе частотного анализа. Пусть на основе измерений получены оценки собственных частот системы в зависимости от поврежденности.

Требуется на основе имеющегося спектра частот оценить изменение упругих свойств, масс, геометрии деталей двигателя. Однако получить замкнутую систему уравнений для одновременной оценки коэффициентов упругости, плотности и геометрии не удастся.

Поэтому будем поочередно решать задачи идентификации упругих коэффициентов и масс деталей.

Пусть при эксплуатации жесткость системы Λ не изменяется, т. е. упругие модули не зависят от поврежденности, а тензор инерции M изменяется. Продифференцировав первое и второе уравнения (19) по δ считая, что $\Lambda \equiv const$, а $M = M(\delta)$ имеем

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = 2 \left(\Lambda \bar{u}_k(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right), \quad (20)$$

$$[(M_2 - M_1) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] + 2 \left\{ M(\delta) \bar{u}_\alpha(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right\} = 0. \quad (21)$$

Учитывая третье соотношение (19) второе равенство примет вид:

$$2\omega_\alpha^{-2}(\delta) \left[\Lambda \bar{u}_\alpha(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right] = -[(M_2 - M_1) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)],$$

тогда (20) преобразуется к виду

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = \omega_\alpha^2(\delta) [(M_1 - M_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] \geq 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) является основой для построения алгоритма идентификации масс полиалитов двигателя.

Аналогичным образом дифференцируя первые два соотношения (19) с учетом, что $M = const$, а $\Lambda = \Lambda(\delta)$, тогда получим

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = [(\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{u}_k(\delta), \bar{u}_k(\delta)] + 2 \left[\Lambda(\delta) \bar{u}_\alpha(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right]. \quad (23)$$

$$2 \left[M \bar{u}_k(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right] = 0. \quad (24)$$

После замены в (23) $\Lambda(\delta) \bar{u}_\alpha(\delta)$ на $\omega_\alpha^2(\delta) M \bar{u}_\alpha(\delta)$ с учетом (24) получим

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = [(\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] \geq 0. \quad (25)$$

Соотношение (25) является основной для идентификации упругих модулей.

Формула (22) говорит о том, что с ростом поврежденности, вследствие уменьшения инерционных свойств системы элементов двигателя, собственные частоты колебаний увеличиваются, а из формулы (25) следует, что снижение жесткости элементов вследствие накопления повреждений, ведет к уменьшению частот собственных колебаний. Таким образом, при термосиловых нагрузках на элементы двигателя идет процесс накопления повреждений, ведущий к уменьшению массы и к уменьшению жесткости элементов двигателя, однако при вибродиагностических испытаниях частотный анализ может не дать информацию об изменении физико-механических характеристик деталей двигателя. Условием такой ситуации является равенство изменения распределения частот вследствие изменения массы и жесткости, которое следует из сравнения соотношений (22) и (25). \approx

$$[(\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] = -\omega_\alpha^2(\delta) [(M_1 - M_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] \quad (26)$$

Это возможно, если полная энергия остается постоянной:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_\alpha^2}{2}(M_1 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) - \frac{1}{2}(\Lambda_1 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) = \\ = \frac{\omega_\alpha^2}{2}(M_2 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) - \frac{1}{2}(\Lambda_2 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) = const. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда следует, что жесткость и масса системы остаются неизменными на каждой из собственных частот.

Учет диссипации энергии при виброиспытаниях системы

Учет внутреннего трения при вибрации обычно осуществляется добавлением диссипативных сил в уравнения динамики (2.15) вследствие чего получаем

$$M \ddot{\bar{q}} + \Lambda \bar{q} = -D \bar{q}, \quad (28)$$

где D – матрица коэффициентов вязкости, элементы которой зависят от поврежденности δ .

Как известно корни характеристического уравнения для уравнения (28) имеют отрицательные действительные части, т. е. спектр частот смещается с мнимой оси для уравнения (15) в комплексную плоскость для уравнения (28). Решение имеет вид

$$q = (C_1 + iC_2) \bar{u}_1 e^{(\alpha + \beta)t} + (C_1 - iC_2) \bar{u}_2 e^{(\alpha - i\beta)t}, \quad (29)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Известно, что накопление макроскопических повреждений проявляется как рост вязкости деформируемого тела, поэтому для матрицы D можно принять зависимость от δ в виде

$$D(\delta) = D_1(1 - \delta) + \delta D_2, \quad D_1 \geq D_2. \quad (30)$$

Соответствующим образом можно оценить как будет изменяться распределение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. Учет вязкости может быть связан с изменением коэффициентов теплопроводности в силу термовязкой аналогии.

В дальнейшем основное внимание будет уделено оценкам изменения инерционных и жесткостных характеристик при вибрационных испытаниях, поэтому вопрос об оценках коэффициентах вязкости рассматриваться не будет, хотя вопросы учета ползучести, релаксации при термосиловых нагрузках актуальны.

Учет связей элементов системы и распределение собственных частот двигателя

Корпус двигателя представляет собой оболочку и накладывает ограничения на степени свободы элементов двигателя при вибрации. Если рассматривать колебания системы в цилиндрической системе координат, то оболочка накладывает связи на крутильные колебания, продольные смещения и смещения в радиальном направлении.

Пусть связь имеет вид

$$\bar{S} \bar{q} = 0, \quad (31)$$

где $\bar{S} = (S_1, S_2 \dots S_n) \neq 0$ – вектор с постоянными компонентами.

Как известно, при наложении одной связи число степеней свободы уменьшается на единицу, т. е. одна из обобщенных координат, например, q_x может быть выражена через остальные q_2, \dots, q_n .

$$q_1 = \frac{\sum_{k=2}^n S_k q_k}{S_1}. \quad (32)$$

При наличии связей уравнения вибрации системы получаются из вариационного принципа на условный экстремум. При этом собственные частоты системы с учетом связей смещаются в сторону возрастания, причем максимальная ω_n остается неизменной. Функция распределения $f(\Omega^2)$ новых частот Ω может быть получена в виде

$$f(\Omega^2) = \sum_{k=2}^n (\omega_k^2 - \Omega^2)^{-1} \cdot L_k^2, \quad (33)$$

где L_k^2 – элементы матрицы $L = P^T \cdot S$, P^T – матрица транспортированная по отношению к P , P – матрица определяющая невырожденную замену переменных $\bar{q} = P\bar{Q} \cdot \bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ – вектор нормальных координат.

На рис. 1 изображен график функции распределения частот Ω .

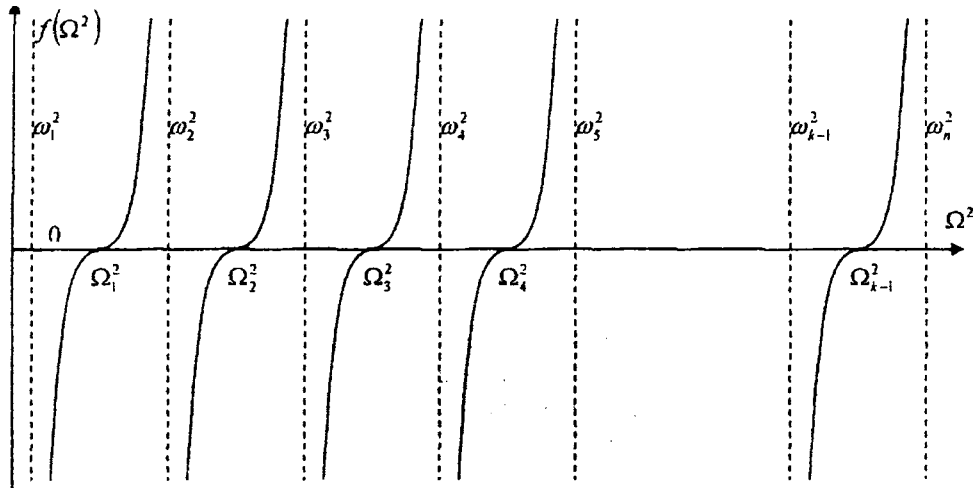


Рис. 1.

Из рис. 1 видно, что корни уравнения т. е. собственные частоты системы со связью находятся между соответствующими абсциссами асимптот

$$\omega_m^2 < \Omega_{m-1}^2 < \omega_{m+1}^2. \quad (34)$$

Если какое-либо значение $L_k = 0$, то член $(\omega_k^2 - \Omega^2)$ с этим параметром исчезает из рассмотрения, а все остальные корни Ω^2 располагаются между оставшимися корнями ω_i .

Таким образом, сочетание методов гомогенизации и дискретизации позволяет в принципе получить оценки изменения некоторых физико-механических свойств деталей сложной системы, какой является двигатель. Собственная частота (или спектр) новой детали может быть измерена или оценена теоретически, множество собственных частот деталей образует спектр собственных частот систем, который уточняется при сборке за счет наложения связей на каждую деталь. Система в сборе может быть протестирована методами вибродиагностики на прохождение системы через локальные резонансы отдельных деталей с наложенными связями, что позволяет создать частотный портрет новой системы. При дальнейших проверках будут получаться новые портреты, из которых методами идентификации можно получить оценки уровня накопления повреждений и получить оценки остаточного ресурса по жесткости, массе, геометрии. Принципиальная возможность этого следует из уравнений построенной математической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С., Балтич, О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – Киев: Наукова думка, 1981. – 218 с.
2. Абрамов, С.К. Резонансные методы исследования динамических свойств пластмасс. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978. – 136 с.
3. Теоретическая механика
4. Коцаньда С. Усталостное растрескивание металлов. – М.: Металлургия, 1990. – 622 с.
5. Sobczyk K. Stochastic dynamics of engineering systems. Mechanics of 21 st Century – ICTAM 04 – Proceeding, 1-42.

КОМПОНОВОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАНСМИССИОННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Максимов С.А., Альгин В.Б.

While modeling transmission, two main types of models are used: a kinematic scheme and a CAD assembly. Both types have their own advantages and disadvantages as well. The kinematic scheme is flat and it doesn't contain special data to calculate loads. The CAD assembly – quite the contrary – is too detailed and it is rather hard to create this kind of model. This paper presents new type of model, taking position in-between the kinematic scheme and the CAD assembly.

При проектировании трансмиссий применяют два наиболее распространённых типа моделей: кинематическая схема и трёхмерная сборка. Кинематическая схема отображает принцип действия механизма и воспроизводит основные его функции. Однако для определения сил в зацеплениях передач или реакций в опорах валов кинематической схемы недостаточно. Необходимую информацию может предоставить трёхмерная сборка, полученная в системе твердотельного моделирования. Она является уже результатом работы конструктора и содержит избыточные данные, неприципиальные для проведения большинства расчётов. Универсальность трёхмерной сборки, как способа описания конструкций, на этапе расчётов можно отнести к ее недостаткам. Система твердотельного моделирования рассматривает любую конструкцию как набор соединённых между собой твёрдых тел. Что именно это за тела: зубчатые передачи, опоры или валы, — системе не важно, таким образом, нет возможности использовать трёхмерную сборку для автоматизации расчётов, специфических именно для трансмиссий. Кроме того, создание и редактирование трёхмерной сборки трансмиссии — это весьма трудоёмкий процесс, требующий времени и привлечения высококвалифицированного персонала.

Возникает потребность в создании специализированного пакета, позволяющего создавать модели редукторных узлов, которые отражали бы только основные характеристики, необходимые для проведения расчетов. Другим требованием к подобному пакету является наличие трехмерной визуализации модели и простого удобного пользовательского интерфейса, что позволило бы работать в данном пакете специалистам любого уровня. Такой программный инструмент моделирования должен позволять инженеринговым компаниям разрабатывать системы и виртуально тестировать их до того, как последние покинут экран компьютера, сводя на нет необходимость в физическом тестировании. Внедрение анализа на самых первых стадиях процесса проектирования позволит повысить надежность проектирования, в то же время обеспечение совместимости с другими пакетами облегчит обмен информацией.

Подобные программные продукты уже существуют, например, APM WinMachine [6], модуль T-FLEX Расчеты/Зубчатые передачи [5], MechSoft [4], GearTrax [2] и другие. Их основная особенность состоит в том, что они позволяют моделировать лишь некоторый набор типовых схем, и это существенно ограничивает инженера в его работе. Поэтому одним из дополнительных требований к программному обеспечению является возможность моделирования произвольных механизмов, в том числе и планетарных.

Универсальной методики кинематического расчёта произвольного планетарного механизма не существует, есть лишь методики расчётов для типовых схем. Метод относительных полярных координат [7] подходит для расчёта сложных механизмов, при условии, что они состоят из цилиндрических зубчатых колёс, то есть не охватывает такие механизмы, как, например, конический дифференциал.

Таким образом, для рассматриваемого класса задач необходимо разработать соответствующие методические положения и ПО.

Очевидно, что между кинематической схемой и трёхмерной сборкой существует слишком большой пробел, для восполнения которого вводится еще один способ формального описания структуры трансмиссии – компоновочная схема. В рамках данного подхода в работах [1], [3] описано понятие компоновочной схемы, апробированы отдельные методические положения и элементная база.

В данной статье представлен новый вариант внутренней структуры данных, которая позволяет моделировать более широкий спектр механизмов, например, дифференциалы, бипланетарные механизмы и т.д. Это, в свою очередь, требует уточнения понятия компоновочной схемы, новой более совершенной методики расчётов и соответствующего программного обеспечения.

Компоновочная схема определяется как трёхмерный объект, отражающий особенности конструкции, необходимые для проведения расчетов нагрузок, которые обусловлены компоновкой узла (например, реакций подшипниковых опор). С точки зрения графического представления этот объект близок к эскизному проекту узла. Однако он не только отражает конфигурацию и необходимые размеры, но и содержит в себе комплекс методов для проведения расчетов нагрузок и анимации.

Структура трансмиссии описывается набором конструктивных элементов с заданными параметрами, и матрицей связи, в которой указывается не только наличие связи между двумя элементами, но и её параметры. Методика кинематического расчёта основана на применении формулы Виллиса. Силовой расчёт позволяет определять моменты, силы в зацеплениях, а также реакции в опорах.

Программное обеспечение (пакет «Assembling») представляет собой трёхмерный редактор компоновочной схемы с функциями расчётов. Библиотека конструктивных элементов включает в себя прямозубые и косозубые цилиндрические зубчатые колёса с внутренним и с внешним зацеплением, конические зубчатые колёса, опоры, муфты, элементы корпуса, тормоза, мотор, водило и элемент корпуса конического дифференциала. Также в ПО встроен редактор валов, позволяющий создавать ступенчатые валы с внешним и внутренним профилем. Для более удобного просмотра конструкции механизма можно сделать разрез вала (рис. 1).

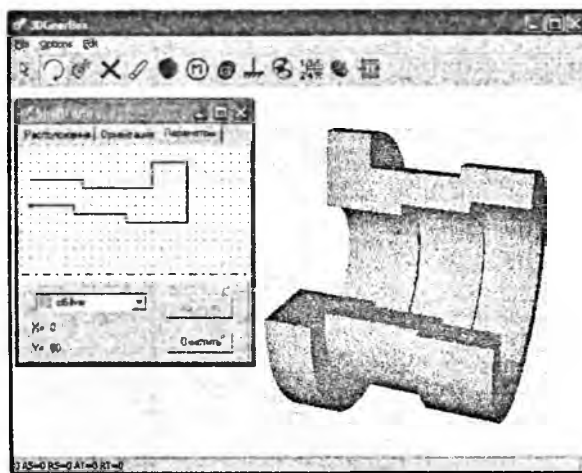


Рис. 1. Редактор валов

Гибкая структура данных для представления конструкции трансмиссии позволяет моделировать механизмы различной степени сложности и не ограничиваться типовыми схемами. Так, например, при помощи данного программного обеспечения был успешно смоделирован ведущий мост автомобиля МАЗ (рис. 1), коробка передач МЗКТ (рис. 2), бипланетарный механизм, применяемый в полировочных устройствах (рис. 3), планетарный механизм с замкнутой кинематической цепью (рис. 4) и др.

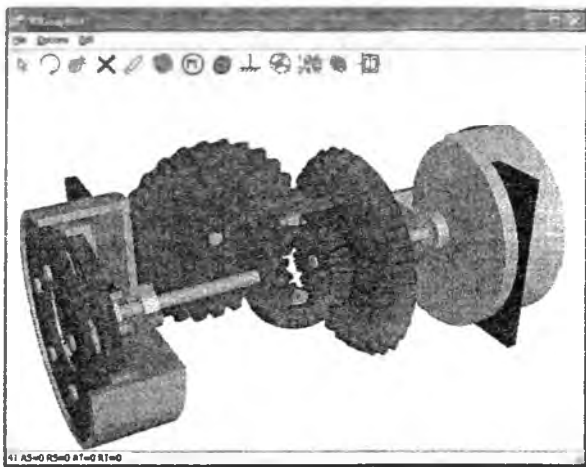


Рис. 1. Ведущий мост автомобиля

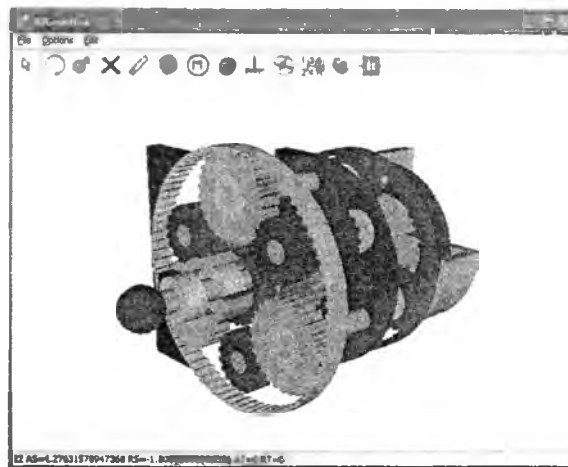


Рис. 2. Планетарная коробка передач

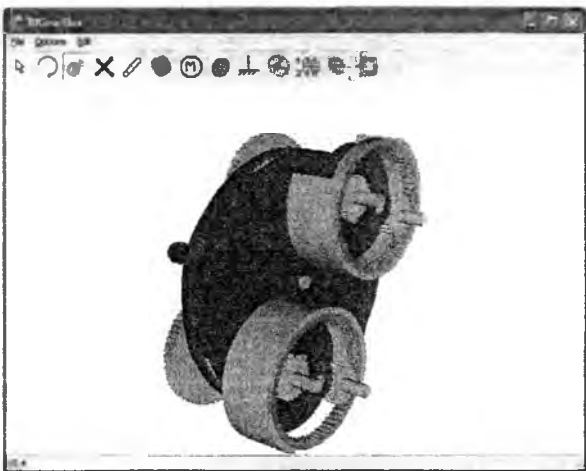


Рис. 3. Бипланетарный механизм
поливочного устройства

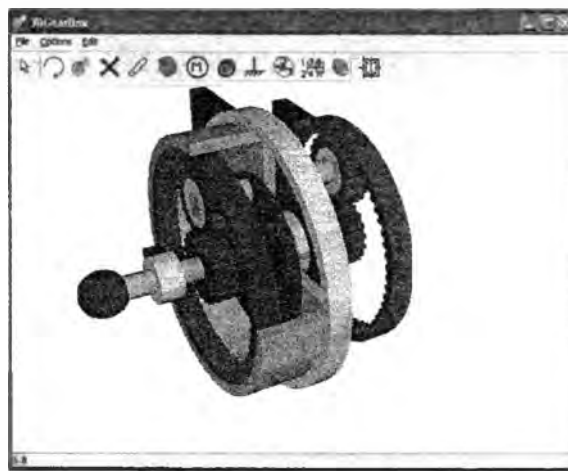


Рис. 4. Планетарный механизм
с замкнутой кинематической цепью

После того, как определена конструкция механизма, выполняются расчёты. Результаты силового расчёта (силы в зацеплениях и реакции в опорах) отображаются на экране разноцветными стрелками с подписанными числовыми значениями (рис. 6). Также можно запустить анимацию и визуально оценить работу механизма.

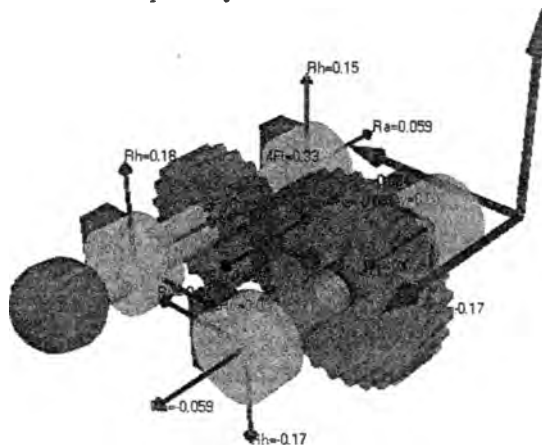


Рис. 6. Визуализация результатов расчётов

Новая доработанная структура данных компоновочной схемы сделала её более универсальной, расширился спектр моделируемых узлов. Создана методика кинематического расчёта произвольного планетарного механизма.

Разработанное программное обеспечение, основанное на введенном классе объектов «компоновочная схема», позволяет в короткие сроки создавать подробную объемную модель трансмиссии и производить с ее помощью необходимые кинематические и силовые расчёты, сопровождающиеся анимацией. Предусмотрена возможность экспортировать модель сложного зубчатого механизма в систему твердотельного моделирования SolidWorks.

Программное обеспечение используется для проектирования узлов трансмиссий автомобилей и тракторов. Оно может применяться при моделировании кинематики роботов и других машиностроительных объектов со сложными кинематическими связями и движениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кинематический и динамический расчет трансмиссионных систем на основе регулярных структурных компонентов / В.Б. Альгин, О.В. Дробышевская, С.В. Ломоносов, С.А. Максимов, В.М. Сорочан, Б.Н. Широков // Межведомственный сборник научно-методических статей «Теоретическая и прикладная механика». – Минск: БНТУ, 2006. – Вып. 21. – С. 67–77.

2. Колчин, И. Проектирование изделий с использованием современных методов инжиниринга [Электрон. ресурс] / САПР и графика. – 2001. № 4 – Режим доступа: <http://www.sapr.ru/Archive/SG/2001/4/28/>. – Дата доступа: 27.09.2007.

3. Максимов С. Моделирование и расчёт узлов трансмиссии / Автоматизация. – 2005. – № 3. – С. 13.

4. Официальный сайт компании Микро Экспресс Инт'л [Электрон. ресурс] / Режим доступа: www.microexp.com.by. – Дата доступа: 27.09.2007.

5. Официальный сайт компании Топ Системы [Электрон. ресурс] / Режим доступа: <http://www.tflex.ru/> – Дата доступа: 27.09.2007.

6. Шелофаст Вадим, Шелофаст Владимир Проектирование приводов вращения в среде АРМ WinMachine / [Электрон. ресурс] / САПР и графика. – 2006. №11. – Режим доступа: <http://www.sapr.ru/article.aspx?id=16906&iid=782>. – Дата доступа: 27.09.2007.

7. Moise V. Tabără I.A. The kinematics analyses of the planetary cylindrical gears using the independent contours method / Proceedings of 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18–21, 2007. – 4 p.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИЗНОСА ВО ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

It is necessary to construct hodographs of reactions for estimation of distribution of wearing in elements of turning kinematic pairs. However if both parts of pairs are mobile, the real picture of expected wearing can be received, having presented reaction in mobile systems of the coordinates connected with corresponding parts. The features of definition of reactions in mobile systems of coordinates are represented in this article .

Надежность и долговечность машин и механизмов в значительной мере зависит от работы тех кинематических пар, в которых трение существенно влияет на процесс изнашивания их контактирующих поверхностей. В связи с этим для проектирования оптимальной с точки зрения эксплуатационных показателей машины весьма актуальным является рациональный выбор геометрических параметров, материалов кинематических пар и смазки с учетом износа их элементов. Для правильного выбора материалов, мест подвода смазки и расчета на износостойкость важно знать форму и площадь поверхностей трения и распределение износа.

Наглядную графическую картину в виде эпюр распределения износа по элементам кинематических пар можно получить на основании построения годографов соответствующих реакций [2]. Но при этом нужно учитывать конструктивное оформление кинематической пары. Так, во вращательной кинематической паре, в которой оба звена являются подвижными (например, в кинематической паре кривошип – шатун), реальную картину силового нагружения и ожидаемого износа контактирующих элементов можно получить, если построить годограф соответствующей реакции с привязкой его к одному из подвижных звеньев, т.е. в подвижной системе координат, связанной с данным звеном. Для этого нужно иметь ориентацию соответствующего вектора реакции в локальной подвижной системе координат.

В качестве примера рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 1). Пусть в результате силового расчета определены реакции во вращательных парах A и B - R_{21} и R_{23} для цикла установившегося движения. Используя метод преобразования координат в матричной форме [1], найдем ориентацию этих векторов по отношению к подвижной системе координат $X_2Y_2Z_2$, связанной с шатуном 2. Для этого нужно определить соответствующие углы наклона векторов \bar{R}_{21} и \bar{R}_{23} по отношению к оси X_2 .

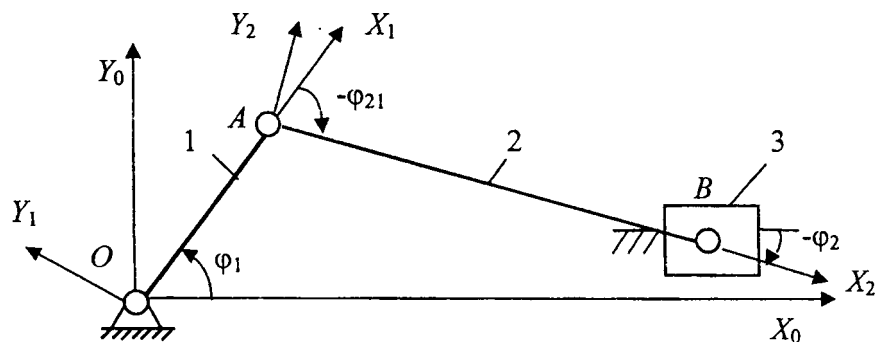


Рис. 1. Кривошипно-ползунный механизм

Матрица M_{02} перехода от системы координат $X_2Y_2Z_2$ к неподвижной системе $X_0Y_0Z_0$ может быть получена в виде

$$M_{02} = M_{01} M_{12},$$

где M_{01} – матрица перехода от системы $X_1Y_1Z_1$, связанной с кривошипом 1, к системе $X_0Y_0Z_0$;

M_{12} – матрица перехода от системы $X_2Y_2Z_2$ к системе $X_1Y_1Z_1$.

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{12} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 & l_1 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$M_{02} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & l_1 \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & l_1 \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_1$ или $\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$.

Для преобразования координат векторов используются матрицы поворота 3×3 . В рассматриваемом случае

$$A_{02} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота A_{20} при переходе от системы $X_0Y_0Z_0$ к системе $X_2Y_2Z_2$ получается путем транспонирования:

$$A_{20} = A_{02}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, проекции векторов \bar{R}_{21} и \bar{R}_{23} в системе координат $X_2Y_2Z_2$ получаются из соотношений:

$$R_{21}^{(2)} = A_{20} R_{21}^{(0)}, \quad R_{23}^{(2)} = A_{20} R_{23}^{(0)}$$

или

$$\begin{bmatrix} R_{21}^{X_2} \\ R_{21}^{Y_2} \\ R_{21}^{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{21}^{X_0} \\ R_{21}^{Y_0} \\ R_{21}^{Z_0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} R_{23}^{X_2} \\ R_{23}^{Y_2} \\ R_{23}^{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{23}^{X_0} \\ R_{23}^{Y_0} \\ R_{23}^{Z_0} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} R_{21}^{X_2} &= R_{21}^{X_0} \cos \varphi_2 + R_{21}^{Y_0} \sin \varphi_2, \\ R_{21}^{Y_2} &= -R_{21}^{X_0} \sin \varphi_2 + R_{21}^{Y_0} \cos \varphi_2, \\ R_{23}^{X_2} &= R_{23}^{X_0} \cos \varphi_2 + R_{23}^{Y_0} \sin \varphi_2, \\ R_{23}^{Y_2} &= -R_{23}^{X_0} \sin \varphi_2 + R_{23}^{Y_0} \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Тогда углы наклона векторов \bar{R}_{21} и \bar{R}_{23} по отношению к оси X_2 (рис. 2) определяются на основании следующих выражений:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{R_{21}} &= \frac{R_{21}^{X_2}}{R_{21}}, & \sin \varphi_{R_{21}} &= \frac{R_{21}^{Y_2}}{R_{21}}; \\ \cos \varphi_{R_{23}} &= \frac{R_{23}^{X_2}}{R_{23}}, & \sin \varphi_{R_{23}} &= \frac{R_{23}^{Y_2}}{R_{23}}. \end{aligned}$$

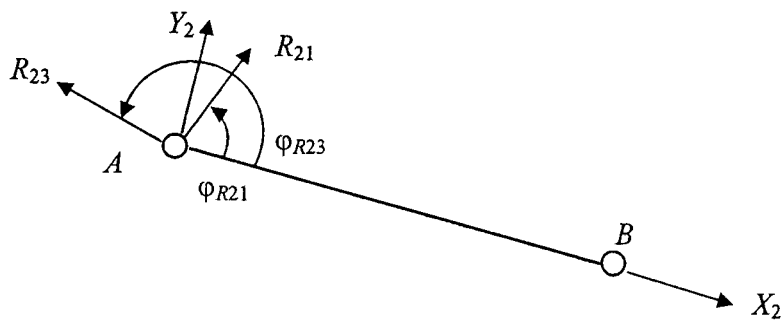


Рис. 2. Представление реакций в подвижной системе координат

Для расчета ожидаемого износа элементов кинематических пар рычажных механизмов необходимо предварительно выполнить кинематический и силовой расчет механизма с учетом неравномерности движения звеньев для ряда последовательных положений в течение цикла установившегося движения. Зная величины и направление реакций в кинематических парах, можно по известной методике, например [1], определить количественные показатели изнашивания для каждого элемента пары за расчетное число циклов работы.

В частности, учитывая, что при установившемся движении цикличность процессов определяется обобщенной скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ как некоторой функцией обобщенной координаты φ – угла поворота приводного вала машины, то износ за один цикл установившегося движения машины ($\varphi = \varphi_{ц}$) можно определить по формуле

$$u = k \int_0^{\varphi_{ц}} p \frac{v_{ск}}{\omega} d\varphi.$$

Величина $\frac{v_{ск}}{\omega}$ представляет собой аналог скорости скольжения (передаточную функцию). Если звенья 1 и 2 образуют вращательную кинематическую пару, то

$$\frac{v_{ск}}{\omega} = \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega} \right| r = |i_1 - i_2| r,$$

где r – радиус цилиндрических элементов пары; $i_1 = \frac{\omega_1}{\omega}$ и $i_2 = \frac{\omega_2}{\omega}$ – передаточные функции звеньев 1 и 2 (по отношению к начальному звену, которому приписывается обобщенная координата).

Коэффициент износа может быть вычислен по формуле

$$k = \frac{J_u}{p_{ср}},$$

где J_u – интенсивность изнашивания (износ, приходящийся на единицу пути трения), $p_{ср}$ – среднее значение давления p . Величина J_u является функцией физико-математических свойств материала и определяется на основании опытных данных [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филонов, И.П., Анципорович, П.П., Акулич, В.К. Теория механизмов, машин и манипуляторов. – М.: Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.
2. Теория механизмов и механика машин / Под ред. К.В.Фролова. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. школа, 2001. – 496 с.
3. Филонов, И.П., Анципорович, П.П., Акулич, В.К., Булгак, Т.И. Повышение долговечности трущихся элементов вращательных кинематических пар механизмов машин на основе моделирования их износа // Современные методы проектирования машин: Респ. межведомств. сб. науч. тр. В 7 т. – Минск: УП «Технопринт», 2004. – Вып. 2. – Т. 4.
4. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. Кн. 1 / Под ред. И.В. Крагельского и В.В.Алишина. – М.: Машиностроение, 1978 – 400 с.
5. Лукичев Д.М., Тимофеев, Г.А. Расчет износа элементов кинематических пар с использованием ЭЦВМ. – М.: МВТУ, 1984. – 36 с.

КОМПЛЕКСНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ ОФСЕТНОЙ ПЕЧАТНОЙ МАШИНЫ

Зязюля В.Н., Вихренко В.С., Юденков В.С.

This paper is devoted to the building of complex modeling environment on the basis of SolidWorks, VisualNastran and Matlab/Simulink packages. Possibility of creation of such an environment is demonstrated on the example of model offset printing machine with the printing cylinder angular velocity stabilization system. Connection and exchange information between the mechanical model in visualNastran and the automatic control system in Simulink was made by means of VNPlantBlock.

Для проектирования и исследования свойств различных механизмов существует ряд программных пакетов, таких как MSC.Adams, MSC.VisualNastran и др. В настоящее время практически каждое устройство оснащается системами автоматического управления. Однако вышеприведенные программы позволяют реализовывать управление параметрами механизмов лишь на очень примитивном уровне (с помощью таблицы значений либо формулы). Поэтому для моделирования систем управления применяются более специализированные программные модули, такие как Simulink, являющийся частью пакета Matlab. Simulink позволяет разрабатывать самые разнообразные системы управления, в том числе и системы автоматического управления электроприводами на основе электродвигателей постоянного тока с обратными связями. Нагрузка на валу электродвигателя в Simulink аппроксимируется на основе коэффициентов, вычисленных по приведенному моменту инерции управляемого механизма и моменту сопротивления. Описанные пакеты могут рассматриваться как взаимодополняющие, если найти средства, позволяющие объединить их в единую комплексную среду моделирования. И такая возможность существует. Программные пакеты VisualNastran и Simulink способны взаимодействовать друг с другом при помощи интегрированного в VisualNastran библиотечного модуля VNPlantBlock.

Механизм работы подобного комплекса (рис. 1) можно описать следующим образом. В разработанную модель системы управления в Simulink вставляется блок VNPlantBlock. В его свойствах указывается путь к предварительно созданной в VisualNastran механической модели механизма. Указываются входные и выходные параметры моделирования (например, входной величиной для Simulink может быть момент на валу двигателя, а выходной величиной – скорость выходного звена механизма). При запуске модели в VisualNastran загружается механическая модель, а в Simulink – модель системы управления. Далее программы работают по очереди. Через блок VNPlantBlock считывается величина выходного параметра механической модели (скорость выходного звена) и передается в Simulink, где на основании математической модели вычисляется значение входного параметра (момент на валу двигателя). Далее блок VNPlantBlock передает значение момента в VisualNastran, где и моделируется механизм с приложенным моментом в течение заданного шага по времени. Такой пошаговый обмен данными продолжается на всем временном отрезке моделирования системы.

Для иллюстрации метода рассмотрим модель офсетной печатной машины с системой стабилизации скорости вращения печатного цилиндра.

Механическая модель печатной машины (рис. 2) строится при помощи пакета трехмерного твердотельного моделирования SolidWorks. Применение этого пакета вызвано тем, что VisualNastran обладает лишь базовыми средствами создания геометрических тел с помощью примитивов. SolidWorks же дает пользователю полный инструментарий для создания пространственных тел любой конфигурации, в том числе и элементов зубчатых, ременных и цепных передач. Данный пакет также обладает обширной библиотекой стандартных изделий Toolbox, включая стандартизованные по ГОСТ детали. SolidWorks также обладает возможностью передавать данные непосредственно в VisualNastran с помощью соответствующего

меню. После трансляции модели в VisualNastran остается определить виды кинематических пар в модели, указать свойства материалов деталей. Далее необходимо установить необходимые измерители и устройства контроля за наблюдаемыми и контролируемыми величинами. Модель сохраняется в файл (*.wm3).

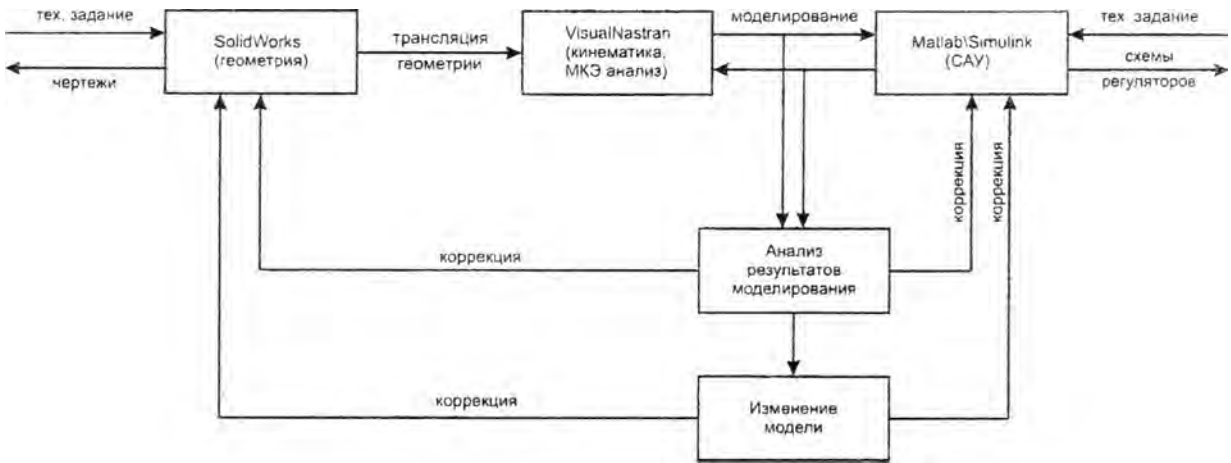


Рис. 1. Схема комплексной среды моделирования

В качестве системы стабилизации скорости вращения печатного цилиндра применим двухконтурную систему автоматического регулирования на основе двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и отрицательными обратными связями по току и скорости. Регулятор скорости – пропорциональный, регулятор тока – пропорционально-интегральный. Структурная схема системы управления в случае моделирования только в Simulink имеет вид, представленный на рис. 3.

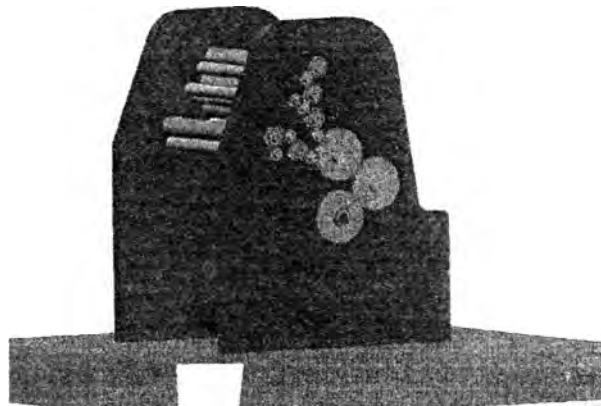


Рис. 2. Модель печатной машины в VisualNastran

Система управления описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
 4T_{\mu} \dot{X}_4 &= K_{PC} T_1 \dot{U}_3 - \frac{1}{J_{PP}} K_{PC} K_{OC} K_1 T_1 (X_2 - M_c) - \frac{1}{C_e T_{\gamma} R_{\gamma}} K_{OT} K_1 T_1 (C_e X_3 - C_e^2 X_1 - R_{\gamma} X_2) + \\
 &+ U_3 K_{PC} - K_{OC} K_{PC} X_1 - \frac{1}{C_e} K_{OT} X_2; \\
 T_{\mu} \dot{X}_3 &= K_{\Pi} X_4 - X_3; \\
 T_{\gamma} R_{\gamma} \dot{X}_2 &= C_e X_3 - C_e^2 X_1 - R_{\gamma} X_2;
 \end{aligned}$$

$$J_{\text{пр}} \dot{X}_1 = X_2 - M_c.$$

На схеме использовано операторное представление и приняты следующие обозначения:

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 – переменные состояния системы управления;

U_3 – задающее воздействие по скорости;

$K_{\text{pc}}, K_1, K_{\text{п}}, K_{\text{от}}, K_{\text{oc}}$ – коэффициенты усиления регулятора скорости, регулятора тока, тиристорного преобразователя, обратных связей по току и скорости, соответственно;

$T_1, T_{\text{я}}, T_{\mu}$ – постоянные времени регулятора тока, якорной цепи двигателя и малая некомпенсированная постоянная времени, соответственно;

M_c – момент сопротивления;

$R_{\text{я}}$ – активное сопротивление якорной цепи;

C_e – конструктивный коэффициент двигателя;

s – оператор Лапласа.

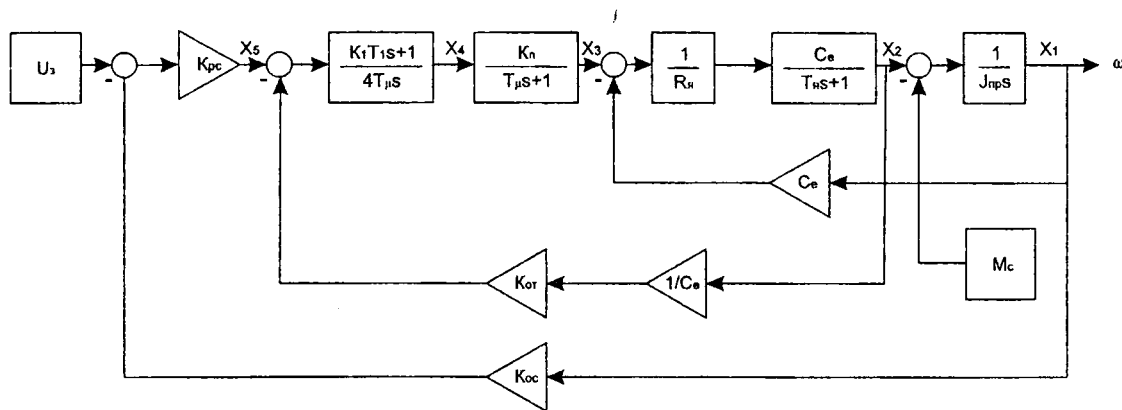


Рис. 3. Структурная схема системы стабилизации скорости

Следующий шаг – объединение механической модели и модели системы стабилизации скорости. Блок VNPlantBlock из библиотеки VisualNastran внедряется в систему управления в Simulink. Далее в окне параметров блока указываем путь к файлу модели (*.wm3) и указываем входную величину для блока – момент и выходную величину – скорость вращения печатного цилиндра. После этих операций запускаем модель на расчет. VisualNastran самостоятельно вычисляет приведенный момент инерции на валу двигателя, а также учитывает заданные возмущающие воздействия на механизм. Поэтому необходимости их учета в Simulink нет. Дополнительно в систему до и после блока VNPlantBlock добавлены два звена, согласующие единицы измерения момента и скорости между VisualNastran (Нмм и градус/с) и Simulink (Нм и рад/с).

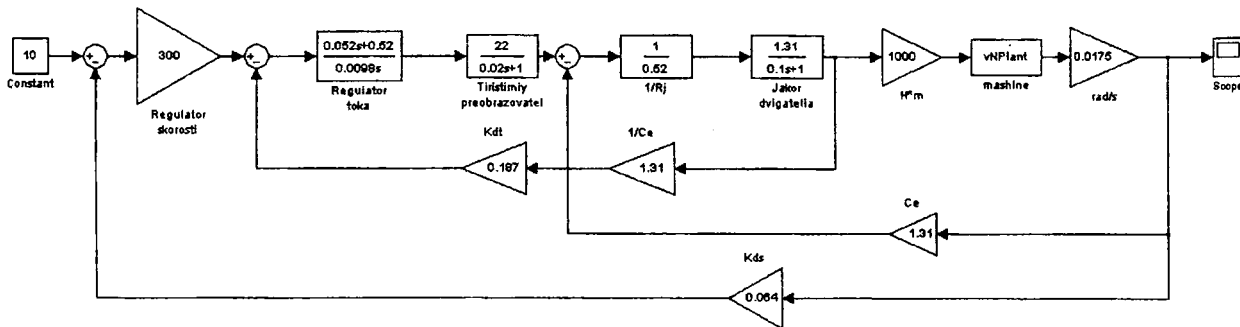


Рис. 4. Система управления с внедренным блоком VNPlant

График изменения скорости печатного цилиндра, полученный при совместном моделировании механической части машины и системы стабилизации скорости, приведен на рис. 5. По графику видно, что переходный процесс проходит с перерегулированием и заканчивается примерно через 0,3 с. Установившаяся угловая скорость вращения печатного цилиндра при моменте сопротивления $M_c=20$ Нм составляет 155,7 рад/с, т.е. отклонение от номинальной скорости вращения двигателя 157 рад/с составило 1,3 рад/с или 0,8%.

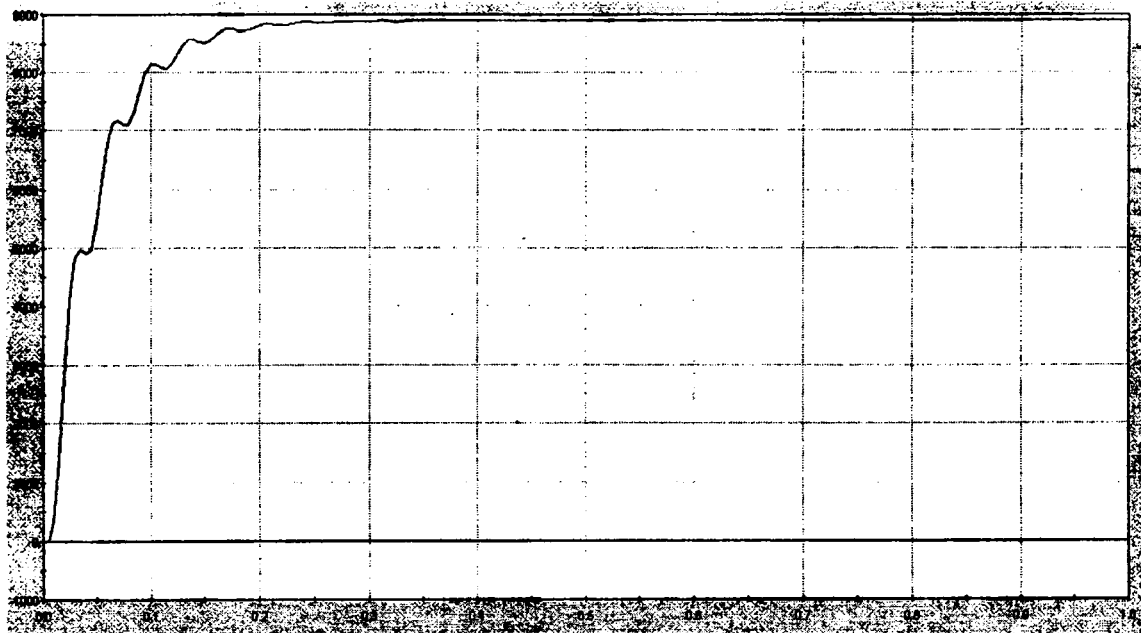


Рис. 5. Результаты моделирования процесса начала работы печатной машины

Полученные в ходе моделирования данные в дальнейшем могут быть использованы для оптимизации системы управления в соответствии с необходимыми критериями.

Таким образом, предлагаемый комплексный подход к моделированию электромеханических систем позволяет сократить временные затраты на моделирование, повысить наглядность процесса, оценивать качество работы системы управления с более высокой точностью, так как приведенный момента инерции механизма, трудоемкость вычисления которого напрямую зависит от сложности конфигурации моделируемого устройства, вычисляется в пакете Nastran.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин, А.В., Постников, Ю.В. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 512 с.
2. Рычков, С.П. MSC.visualNASTRAN для Windows. – М.: ИТ Пресс, 2004. – 552 с.
3. Алямовский, А.А. и др. SolidWorks. Компьютерное моделирование в инженерной практике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 800 с.

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СЕНСОР ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ШУМОПОДОБНЫМ СИГНАЛОМ

Колешко В. М., Гулай А. В.

Modes of electroacoustic and acoustoelectric converting of random signals by piezoelectric sensor as a flat piezoelement are studied. The wave equation for distribution of mechanical shift along the thickness of the given element, taking into account the acoustic voltage (vibration radiation mode) and the controlled mechanical shift (reception mode) are presented in a form of Furier stochastic integral. The solvations of the equation have a view of the relations between spectral densities of piezoelement shift and voltage on electrodes. The dependence of the given relation (spectrum transformation coefficient) from the frequency of random signal and piezoelectric sensor parameters are analyzed.

Задачи моделирования пьезоэлектрического сенсора для контроля шумоподобным сигналом

Ряд эффективных методов контроля в различных областях техники, медицины, мониторинга основан на возбуждении и приеме случайных акустических сигналов, имеющих широкий спектр частотных составляющих. В частности, на основе введения шумоподобных акустических колебаний в различные среды разработаны методы контроля качества для технологии микросистем [1], а также способы и оборудование для диагностики в медицине [2]. Контроль осуществляется как с использованием объемных акустических колебаний, так и с помощью поверхностных акустических волн [3].

В качестве электроакустических и акустоэлектрических преобразователей для излучения и приема шумоподобных сигналов применяются пьезоэлектрические сенсоры различного конструктивно-технологического исполнения [4]. Существенной проблемой при использовании указанных колебаний является получение достаточно высокой эффективности работы пьезопреобразователя в широком диапазоне частот. Эта задача обусловлена неравномерностью спектральной характеристики пьезопреобразователя, а также наличием потерь в его материале. Необходимая для излучения пьезоэлектрическим сенсором мощность может быть достигнута за счет объединения массива автономных излучателей в интеллектуальную адаптивную решетку, концентрирующую акустические колебания в заданном направлении. Реализация данного решения требует использования интеллектуальных технологий формирования излучаемого сигнала и обработки получаемой информации.

Повышение информативности, точности, достоверности акустического контроля при введении случайных колебаний достигается за счет достаточно длительного корреляционного накопления непрерывных шумоподобных сигналов и их адаптивной фильтрации. Детализация и точность визуализации структурных аномалий контролируемых объектов существенно возрастает в случае применения фильтрации сигналов нелинейного взаимодействия акустических волн от различных источников на границах раздела сред. Алгоритм обработки принимаемых сигналов, несущих полезную информацию о качестве контролируемого объекта, в данном случае реализуется при помощи интеллектуальной системы распознавания образов.

Основными компонентами пьезоэлектрических сенсоров являются, в частности, плоские пьезоэлементы (пластины, диски, кольца), совершающие механические колебания по толщине (рис. 1). Спектральная характеристика таких элементов зависит как от параметров материала, так и от их геометрических размеров. С учетом вышеизложенного представляет значительный интерес математическое моделирование работы пьезоэлектрического сенсора в режиме излучения и приема широкополосных акустических колебаний. В частности, важной для практики задач является определение спектральных полос наиболее эффективной

работы пьезоэлектрического сенсора в режиме преобразования шумоподобного акустического сигнала [5].

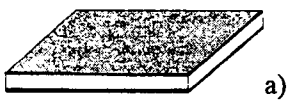

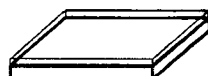

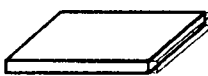






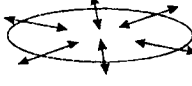
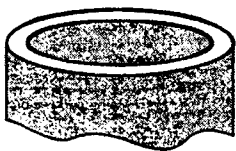



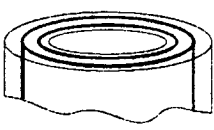
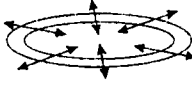
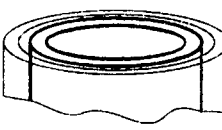
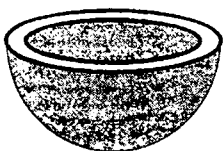
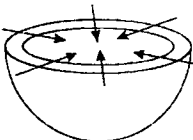
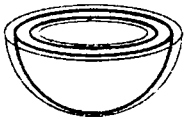
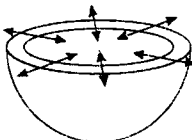

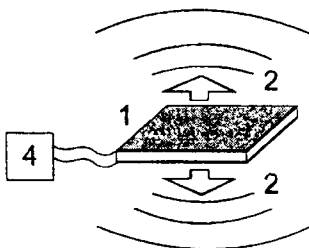
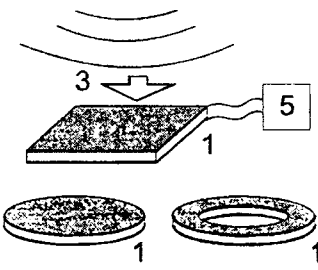
	Конструкция	Поляризация	Деформация	Колебания
Плоский	 а)			
				
	 б)			
				
Цилиндрический	 в)			
				
				
Сферический	 г)			
				
 д)		 е)		

Рис. 1. Конструкции пьезоэлектрического сенсора (а-г) и его работа в режиме излучения (д) и приема (е) шумоподобных акустических сигналов:
 1 – пьезоэлектрический элемент; 2, 3 – излучаемый и принимаемый акустический сигнал; 4 – электронная система возбуждения шумоподобного сигнала; 5 – схема обработки принимаемого шумоподобного сигнала

Следует отметить, что для возбуждения случайных акустических колебаний пьезоэлектрических сенсоров разработана гамма шумовых ультразвуковых генераторов с различной шириной спектра выходного электрического напряжения [6]. Генерация электрического шума производится, например, за счет лавинного пробоя $p-n$ перехода полупроводникового прибора при его обратном включении. В задающих каскадах генераторов применяются также ферромагнитные элементы, в которых происходит скачкообразное смещение границ доменов при медленном перемагничивании. Достаточно мощные генераторы шума для возбуждения пьезоэлектрических элементов выполняются на основе формирования случайной и псевдослучайной последовательности импульсов.

Излучение шумоподобного акустического сигнала с помощью пьезоэлектрического сенсора

При подаче на пьезоэлектрический сенсор электрического сигнала сила, вызывающая продольные механические колебания по толщине, существует только на основаниях пьезоэлемента, при этом возникающее акустическое давление равно:

$$P_z(z, t)|_{z=0} = -d_{33}\mu E_z(z, t)|_{z=0} = -d_{33}\mu U(t)/d, \quad (1)$$

где d_{33} – пьезомодуль; μ – модуль упругости; $E_z(z, t)$ – компонента напряженности возбуждающего электрического поля вдоль координаты z , перпендикулярной плоскости пьезоэлемента; $U(t)$ – возбуждающее электрическое напряжение; t – время; d – толщина пьезоэлемента [7].

Электрическое напряжение широкого спектра частот можно представить в виде стохастического интеграла Фурье

$$u_z(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_z(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2)$$

при этом спектр Фурье электрического напряжения в пьезоэлементе $U_z(z, \omega)$ интерпретируется как обобщенная случайная вектор-функция частоты ω , удовлетворяющая соотношению

$$\langle U_z^*(z, \omega) U_z(z, \omega') \rangle = S_{u_z}(z, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (3)$$

где $\delta(\omega - \omega')$ – дельта-функция; $S_{u_z}(z, \omega)$ – спектральная плотность электрического напряжения (здесь и далее звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина).

Используя известную зависимость между деформацией и акустическим давлением [8], можно записать

$$\partial \xi_z(z, t) / \partial z = d_{33} u_z(z, t) / d, \quad (4)$$

где $\xi_z(z, t)$ – механическое смещение пьезоэлемента вдоль координаты z . Подставляя (2) в (4) получим выражение для механического смещения в виде:

$$\xi_z(z, t) = d_{33} / d \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} U_z(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_z(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (5)$$

где $\Xi_z(z, \omega)$ – функция спектра Фурье механического смещения пьезоэлемента, удовлетворяющая соотношению

$$\left\langle \Xi_z^*(z, \omega) \cdot \Xi_z(z, \omega') \right\rangle = S_{\xi_z}(z, \omega) \cdot \delta(\omega - \omega'), \quad (6)$$

$S_{\xi_z}(z, \omega)$ – спектральная плотность механического смещения.

В приведенном выше анализе частотной зависимости механического смещения учтено влияние только одного основания пьезоэлемента на процесс возбуждения акустических колебаний, в данном случае не учитывалось распространение колебаний от этого основания по толщине пьезоэлемента, а также отражение колебаний от другого основания. Чтобы установить распределение механического смещения по толщине пьезоэлемента, решалось волновое уравнение, которое для пьезоэлемента с учетом акустических потерь имеет вид:

$$\rho \partial^2 \xi_z(z, t) / \partial t^2 = \bar{\mu} \partial^2 \xi_z(z, t) / \partial z^2 \quad (7)$$

при граничных условиях:

$$S_{u_z}(z, \omega) |_{z=0} = -S_{u_z}(z, \omega) |_{z=d} = S_u(\omega). \quad (8)$$

Здесь ρ – плотность материала; $\bar{\mu} = \mu + j\omega\eta$ – эффективный модуль упругости среды с потерями; η – эффективная вязкость среды.

Решение уравнения (7) при граничных условиях (8) и с учетом выражения (5) позволяет определить спектр Фурье механического смещения пьезоэлемента:

$$\Xi_z(z, \omega) = d_{33} U(\omega) \sin(\bar{k}(z - d/2)) / \bar{k}d \cos(\bar{k}d/2), \quad (9)$$

где $\bar{k} = \omega(\bar{\mu} / \rho)^{-1/2}$ – обобщенное волновое число, являющееся комплексной величиной при учете потерь: $\bar{k} = k - j\alpha$; $k = \omega/c$ – волновое число для среды без потерь; c – скорость распространения акустических колебаний в пьезоэлементе; α – коэффициент поглощения акустических колебаний в материале пьезоэлемента, связанный с эффективной вязкостью среды.

Учитывая (6), получим выражение для спектральной плотности механического смещения в следующем виде:

$$S_{\xi_z}(z, \omega) = A \left\{ \sin^2[k(z - d/2)] + \text{sh}^2[\alpha(z - d/2)] \right\}, \quad (10)$$

где $A = S_u(\omega) d_{33}^2 / d^2 (k^2 + \alpha^2) [\cos^2(kd/2) + \text{sh}^2(\alpha d/2)]$.

Поскольку значение коэффициента поглощения α для наиболее широко распространенных пьезоэлектрических материалов, например, пьезокерамики, значительно меньше волнового числа k , с достаточной степенью точности можно записать выражение для спектральной плотности механического смещения без учета акустических потерь в материале пьезоэлемента:

$$S_{\xi_z}(z, \omega) |_{\alpha=0} = B \sin^2(k(z - d/2)), \quad (11)$$

где $B = S_u(\omega)d_{33}^2 / k^2 d^2 \cos^2(kd/2)$. Выражения (10), (11) характеризуют распределение спектральной плотности механического смещения по толщине пьезоэлемента в первоначальный момент после приложения к электродам шумоподобного электрического напряжения.

С течением времени спектральная плотность механического смещения в любой точке вдоль оси пьезоэлемента будет определяться суммой парциальных частотных составляющих спектра шумовых колебаний, возникающих на основаниях пьезоэлемента $z = 0$ и $z = d$, многократно прошедших по объему преобразователя и отразившихся от его оснований. Без учета потерь в материале пьезоэлемента сумма парциальных частотных составляющих спектра колебаний, возникающих у разных оснований пьезоэлемента, дает узел в точке $z = (d/2)$ ($S_{\xi_z}(z, \omega)|_{z=d/2} = 0$) с установлением в пьезоэлементе режима стоячей волны. Например, в результате однократного отражения колебаний от оснований пьезоэлемента спектральная плотность механического смещения равна:

$$S_{\xi_z}(z, \omega)|_{\alpha=0} = 2B \sin^2(k(z-d/2)). \quad (12)$$

Анализируя аналогичным образом результирующие значения спектральной плотности механического смещения после двух, трех и большего числа отражений, можно сделать вывод, что и при многократном суммировании спектров отраженных колебаний в пьезоэлементе в точке $z = d/2$ существует обязательный узел.

Рассмотренный режим излучения акустических колебаний пьезопреобразователя характерен при симметричной механической нагрузке со стороны обоих оснований без учета затухания в материале преобразователя. На практике обычно одна сторона плоского пьезоэлемента граничит со средой или материалом, в котором возбуждаются акустические колебания, а другая – с демпфером или отражающей накладкой, что приводит к возникновению режима бегущей волны. Однако, учитывая, что амплитуда частотных составляющих спектра бегущих волн много меньше амплитуды частотных составляющих спектра стоячих колебаний, для анализа реального режима работы пьезопреобразователя с достаточной степенью точности применимы выражения для спектральной плотности механического смещения (10), (11).

Используя выражения (5) и (9), можно найти распределение акустического давления по толщине пьезоэлемента $p_z(z, t) = \mu \sigma_z(z, t) = \mu \partial \xi_z(z, t) / \partial z$, где $\sigma_z(z, t)$ – механическая деформация. Спектральная плотность акустического давления в пьезоэлементе равна:

$$S_{p_z}(z, \omega) = A\mu^2(k^2 + \alpha^2) \{ \cos^2[k(z-d/2)] + \text{sh}^2[\alpha(z-d/2)] \}, \quad (13)$$

или без учета акустических потерь:

$$S_{p_z}(z, \omega)|_{\alpha=0} = B\mu^2 k^2 \cos^2(k(z-d/2)). \quad (14)$$

Для проведения анализа эффективности возбуждения пьезопреобразователем широкополосных акустических колебаний введем понятие коэффициента трансформации спектра, равного отношению спектральных плотностей колебательного смещения основания пьезоэлемента и электрического напряжения на электродах:

$$\Psi_{\xi/u} = S_{\xi_z}(z, \omega) / S_U(\omega) d_{33}^2. \quad (15)$$

Подставив в (15) значение $S_{\xi_z}(z, \omega)$ из (10), получим:

$$\Psi_{\xi/u} = \left[\sin^2(kd/2) + \text{sh}^2(\alpha d/2) \right] / d^2(k^2 + \alpha^2) \left[\cos^2(kd/2) + \text{sh}^2(\alpha d/2) \right], \quad (16)$$

или без учета потерь:

$$\Psi_{\xi/u} |_{\alpha=0} = (1/d^2 k^2) \text{tg}^2(kd/2). \quad (17)$$

Результаты расчета коэффициента трансформации спектра для разных значений kd (частоты колебаний, скорости распространения, толщины пьезоэлемента) в случае $\alpha = 0$ представлены на рис. 2. В качестве примера здесь же показана дополнительная шкала частот для пьезоэлектрического преобразователя из пьезокерамики ЦТС-19 ($c \approx 3,3 \cdot 10^3$ м/с) толщиной 0,001 м. Эффективность излучения пьезопреобразователем акустических колебаний широкого спектра частот максимальна вблизи значений $kd = (2n - 1)\pi$, которые соответствуют нечетным гармоническим составляющим основной резонансной частоты пьезоэлемента $f_n = c(2n - 1)/(2d)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ Для сенсора на основе пьезокерамики ЦТС-19 эти частоты равны 1,65; 4,94; 8,23, ... МГц. Следует отметить, что по мере увеличения параметра kd полоса эффективного возбуждения шумоподобных колебаний значительно сужается.

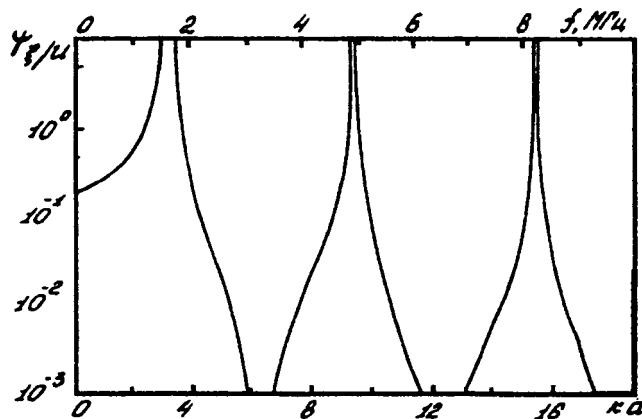


Рис. 2. Зависимость коэффициента трансформации спектра пьезоэлектрического сенсора от частоты колебаний и параметров пьезоэлемента при возбуждении шумоподобного акустического сигнала

Отсутствие эффективного возбуждения акустических колебаний вблизи четных гармонических составляющих основной резонансной частоты можно объяснить следующим образом. В данном режиме силы, вызывающие механические колебания, действуют на оба основания пьезоэлемента с электродами, так как на них происходит электромеханическое преобразование. При этом четные гармонические составляющие в пьезоэлементе существовать не могут, поскольку на этих частотах волны, возникшие на разных основаниях, гасят друг друга.

Режим приема пьезоэлектрическим сенсором шумоподобного акустического сигнала

При анализе работы пьезопреобразователя в режиме приема будем считать, что акустические колебания, распространяющиеся во внешней среде, действуют только на одно из его

оснований ($z = 0$). Для установления распределения механического смещения по толщине пьезоэлемента решаем волновое уравнение (7) с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \xi_z(z, t)|_{z=0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_z(0, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \\ (\partial \xi_z(z, t) / \partial z)|_{z=d} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где $\Xi_z(0, \omega)$ – функция спектра Фурье возникающего механического смещения основания пьезоэлемента, удовлетворяющая условию:

$$\langle \Xi_z^*(0, \omega) \Xi_z(0, \omega') \rangle = S_{\xi_z}(0, \omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (19)$$

$S_{\xi_z}(0, \omega)$ – спектральная плотность механического смещения основания пьезоэлемента.

Решение волнового уравнения (7) позволяет определить распределение спектральной плотности механического смещения по толщине пьезоэлемента в режиме приема:

$$S_{\xi_z}(z, \omega) = C[\cos^2(k(z-d)) + \text{sh}^2(\alpha(z-d))], \quad (20)$$

где $C = S_{\xi_z}(0, \omega) / [(\cos^2(kd) + \text{sh}^2(\alpha d))]$. Без учета акустических потерь в материале пьезоэлемента выражение (20) имеет вид:

$$S_{\xi_z}(z, \omega)|_{\alpha=0} = D \cos^2(k(z-d)), \quad (21)$$

где $D = S_{\xi_z}(0, \omega) / \cos^2(kd)$.

Рассчитаем электрическое напряжение $U(t)$, возникающее на электродах пьезоэлемента в первоначальный момент после воздействия на одно из оснований акустических колебаний внешней среды. Для этого используем уравнение пьезоэффекта для одномерного случая [9]:

$$E_z(z, t) = \varepsilon_0 \varepsilon D_z(z, t) - h_{33} \sigma_z(z, t), \quad (22)$$

где $D_z(z, t)$ – компонента электрического смещения вдоль координаты z ; ε – относительная диэлектрическая проницаемость; ε_0 – электрическая постоянная; h_{33} – пьезоконстанта. Учитывая, что $D_z(z, t)$ равно поверхностной плотности свободных зарядов, а за счет пьезоэффекта на электродах преобразователя возникают связанные заряды, в данном случае принимаем $D_z(z, t) = 0$. Проинтегрировав уравнение (22) по z от 0 до d , получим выражение для определения электрического напряжения на электродах пьезоэлемента:

$$U(t) = h_{33} [\xi_z(z, t)|_{z=d} - \xi_z(z, t)|_{z=0}]. \quad (23)$$

Переходя к спектральной плотности электрического напряжения, получим:

$$S_u(\omega) = Ch_{33}^2 (\text{ch}(\alpha d) - \cos(kd))^2, \quad (24)$$

или без учета акустических потерь:

$$S_u(\omega)|_{\alpha=0} = 4Dh_{33}^2 \sin^4(kd/2). \quad (25)$$

Как источник электрических сигналов пьезоэлектрический сенсор в режиме приема аналогичен конденсатору, емкость которого равна емкости заторможенного пьезоэлемента C_0 . Учитывая это, можно найти ток $J(t) = C_0 \partial U(t) / \partial t$, а также спектральную плотность тока $S_J(\omega)$, протекающего через пьезопреобразователь в режиме короткого замыкания:

$$S_J(\omega) = -Ch_{33}^2 \omega^2 (\text{ch}(\alpha d) - \cos(kd))^2. \quad (26)$$

Без учета потерь выражение (26) упрощается:

$$S_J(\omega)|_{\alpha=0} = -4Dh_{33}^2 \omega^2 \sin^4(kd/2). \quad (27)$$

С целью анализа эффективности процесса приема широкополосных акустических колебаний определим коэффициент трансформации спектра, равный отношению спектральной плотности электрического напряжения, возникающего на электродах, к спектральной плотности колебательного смещения основания пьезоэлемента:

$$\psi_{u/\xi} = S_u(\omega) / S_{\xi Z}(0, \omega) h_{33}^2. \quad (28)$$

Подставив в (28) значение $S_u(\omega)$ из (24), получим:

$$\psi_{u/\xi} = [(\text{ch}(\alpha d) - \cos(kd))^2] / [\cos^2(kd) + \text{sh}^2(\alpha d)], \quad (29)$$

или без учета акустических потерь:

$$\psi_{u/\xi}|_{\alpha=0} = 4 \sin^4(kd/2) / \cos^2(kd). \quad (30)$$

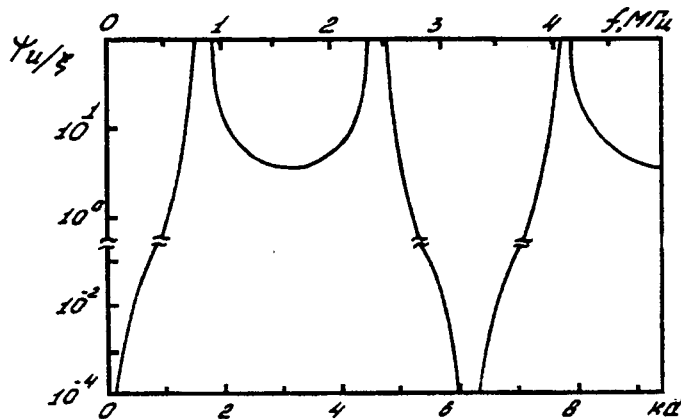


Рис. 3. Зависимость коэффициента трансформации спектра пьезоэлектрического сенсора от частоты колебаний и параметров пьезоэлемента в режиме приема шумоподобного акустического сигнала

Результаты расчета значений $\psi_{u/\xi}$ при разных kd для случая $\alpha = 0$ приведены на рис. 3, здесь же показана дополнительная шкала частот для конкретных параметров пьезоэлемента (ЦТС-19; $c \approx 3,3 \cdot 10^3$ м/с; $d = 0,001$ м). Эффективность приема пьезопреобразователем акустических колебаний широкого спектра частот максимальна вблизи значений $kd = (2n-1)\pi/2$, которые соответствуют частотам $f_n = c(2n-1)/4d$. Для пьезоэлемента, рассматриваемого в качестве примера, эти частоты составляют 0,82; 2,47; 4,11, ... МГц. Отличия режима приема от условий возбуждения объясняются тем, что в режиме приема сила, вызывающая акустические колебания, действует только на одно основание пьезоэлемента, граничащее со средой, из которой приходит шумоподобный акустический сигнал, в то время как излучение колебаний происходит симметрично обеими плоскостями пьезоэлемента.

Заключение

Таким образом, проведено моделирование режимов возбуждения и приема пьезоэлектрическим сенсором шумоподобных акустических колебаний. Решено волновое уравнение для плоского пьезоэлемента в случае представления электрического напряжения на его электродах (режим возбуждения) и механического смещения его основания (режим приема) в виде стохастического интеграла Фурье. Определены коэффициенты трансформации спектра широкополосных акустических колебаний в указанных режимах в зависимости от параметров пьезопреобразователя и частоты колебаний. Установлены частотные полосы наиболее эффективного возбуждения и приема шумоподобных акустических сигналов с помощью пьезоэлектрического сенсора. С учетом полученных результатов анализа работы пьезоэлектрического элемента в режиме преобразования широкополосных сигналов производится моделирование интеллектуальных систем распознавания образов для контроля, диагностики, мониторинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко, В. М., Гулай, А. В. и др. Авт. свид. СССР № 1276465, 1311887, 1441462.
2. Колешко, В. М., Гулай, А. В. и др. Авт. свид. СССР № 1567203, 1711888, 1801463.
3. Колешко, В. М., Гулай, А. В. и др. Авт. свид. СССР № 605170, 658468, 842567, 879448, 1262317, 1291829.
4. Колешко, В. М., Гулай, А. В. и др. Авт. свид. СССР № 605118, 1731493.
5. Колешко, В. М., Гулай, А. В. Излучение и прием пьезопреобразователем акустического шума // XVII Российская научно-техническая конференция с международным участием «Неразрушающий контроль и диагностика». Сборник тезисов докладов, Екатеринбург, 5–11 сент. 2005 г. – Екатеринбург, 2005. – С. 68.
6. Колешко, В. М., Гулай, А. В. и др. Авт. свид. СССР № 1058743, 1232436, 1276369, 1538382, 1650148, 1695945, 1803148.
7. Королев, М. В. и др. О работе резонансных пьезопреобразователей в режиме излучения и приема // Дефектоскопия. – № 12. – 1981. – С. 42–59.
8. Лепендин, Л. Ф. Акустика. – М.: Высшая школа, 1978. – 448 с.
9. Свердлин, Г. М. Прикладная гидроакустика. – Л.: Судостроение, 1976. – 280 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ОСНОВАНИЯ ДВУХ ТИПОВ ЛЕСОПИЛЬНЫХ РАМ

Гмырак А.С., Вихренко В.С.

Log frames of two types (with a central slider-crank mechanism and translation motion of the saw frame and with a non-central slider-crank mechanism and plane motion of the saw frame) are considered. The analytical expressions for kinematic characteristics are deduced. The dynamic forces on the log frame basements are calculated and compared with each other. Calculations are performed within program package MathCAD.

В настоящее время лесопильные рамы (ЛПР), характеризующиеся высокой производительностью при распиловке бревен, широко используются в большинстве лесоперерабатывающих комплексов как на территории Республики Беларусь, так и за ее пределами. В отличие от других устройств деревообработки ЛПР не претерпели кардинальных изменений за прошедшие десятилетия. В основе большинства из них лежит та или иная модификация кривошипно-ползунного механизма (КПМ). Наибольшее распространение получили ЛПР с центральным КПМ и поступательным движением пильной рамки (рис 1а). Это, в первую очередь, связано с простой конструкции и относительно небольшими затратами на их производство.

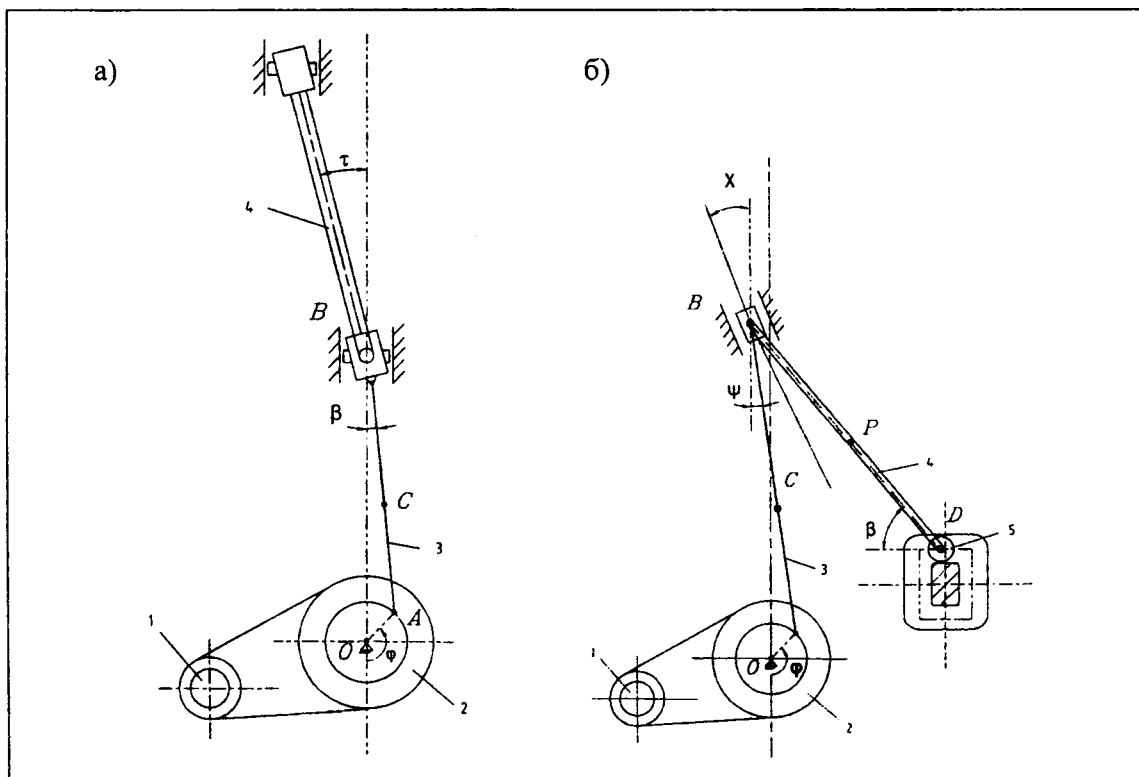


Рис. 1. Кинематические схемы лесопильных рам:

а) с центральным КПМ, б) с нецентральным КПМ,

1 – двигатель, 2 – кривошип, совмещенный с маховиком, 3 – шатун, 4 – пильная рамка, 5 – ролик

Однако существует ряд неблагоприятных эффектов, в частности, большие динамические нагрузки на опорные и соединительные узлы, сильная вибрация, давление бревна на пилы при холостом ходе при непрерывной подаче. Эти эффекты накладывают ряд ограничений на ресурс работы и производительность лесопильных рам. В связи с этим разработаны и внедрены в производство ЛПР с применением нецентральных КПМ [1] (рис. 1, б) и исполь-

зованием прогрессивных материалов (в частности, антифрикционных и легких сплавов). Они характеризуются пониженной вибрацией, меньшими нагрузками на соединительные звенья и меньшими эксплуатационными издержками, но пока не получили массового распространения ввиду их относительно высокой стоимости.

Исследование динамики лесопильных рам позволяет выявить достоинства и недостатки их различных схем, а также моделировать поведение ЛПР при различных нагрузках.

В качестве объектов исследования выбраны два типа лесопильных рам:

1) С центральным КПМ и поступательным движением пильной рамки (рис. 1, а).

2) С нецентральным КПМ и плоскопараллельным движением пильной рамки (рис. 1, б).

Динамика ЛПР с центральным КПМ подробно исследована [2–4]. Поэтому остановимся на детальной разработке программно-математической модели модификации ЛПР 2-го типа, и сопоставим результаты вычисления динамических реакций основания в обоих случаях.

Особенностью ЛПР 2-го типа является то, что в процессе работы пильная рамка 4 изменяет угол наклона к вертикали, что позволяет увеличить подачу на один оборот кривошипа. Точка D движется по прямоугольной траектории с закругленными углами против хода часовой стрелки. Рабочий ход соответствует движению точки D вниз по левой направляющей, в конце рабочего хода точка D выходит на нижнюю горизонтальную прямую, и пильная рамка резко уходит вперед по направлению подачи бревна, обеспечивая возможность непрерывной подачи при отсутствии давления бревна на полотно пилы во время холостого хода пильной рамки. В этом состоит одно из преимуществ конструкции.

На основании принципа Даламбера для ЛПР 1-го типа уравнения динамических реакций (V – вертикальная составляющая, H – горизонтальная составляющая, M_O – реактивный момент, приведенный к оси вращения кривошипа) принимают вид:

$$V(t) = m_2 \ddot{y}_C + m_3 \ddot{y}_B + m_4 \ddot{y}_P, \quad (1)$$

$$H(t) = m_2 \ddot{x}_C + m_4 \ddot{x}_P, \quad (2)$$

$$M_O(t) = m_2 \ddot{x}_C (R \cos \varphi + (l/2) \cos \beta) - m_2 \ddot{y}_C (R/2) \sin \varphi - m_4 \ddot{y}_P (L/2) \sin \tau. \quad (3)$$

где $x_C = (R/2) \sin \varphi$, $y_C = (l/2) \sqrt{1 - (R/l)^2 \sin^2 \varphi} - R \cdot \cos \varphi$,
 $y_B = R \cos \varphi + l \sqrt{1 - (R/l)^2 \sin^2 \varphi}$, $y_P = y_B + (L/2) \cos \tau$.

Здесь m_i – масса i -го звена, R – радиус кривошипа, L – длина пильной рамки, l – длина шатуна, τ – угол наклона пильной рамки к вертикальной оси, φ – угол поворота кривошипа.

Для ЛПР 2-го типа уравнения динамических реакций имеют вид:

$$V(t) = m_2 \ddot{y}_C + m_3 \ddot{s}_b \cos \chi + m_4 \ddot{y}_B + m_5 \ddot{y}_D, \quad (4)$$

$$H(t) = m_2 \ddot{x}_C - m_3 \ddot{s}_b \sin \chi + m_4 \ddot{x}_P + m_5 \ddot{x}_D, \quad (5)$$

$$M_O(t) = M_O(\Phi_B) + M_O(\Phi_{C_x}) + M_O(\Phi_{P_x}) + M_O(\Phi_{D_x}) + M_O(\Phi_{C_y}) + \\ + M_O(\Phi_{P_y}) + M_O(\Phi_{D_y}) - M_C^\Phi + M_P^\Phi \quad (6)$$

где $x_C = R \cos \varphi - l/2 \sin \psi$, $x_P = L/2 \cos \beta - s_B \sin \chi$, (7)

$$y_C = R \sin \varphi + l/2 \cos \psi, \quad y_P = b + s_B \cos \chi - L/2 \sin \beta, \\ y_D = b + s_B \sin \chi - L \cdot \sin \beta. \quad (8)$$

$$M_O(\Phi_{x_C}) = m_2 \ddot{x}_C (R \sin \chi + l/2 \cos \psi), \quad M_O(\Phi_B) = m_3 \ddot{s}_b h, \\ M_O(\Phi_{x_P}) = m_4 \ddot{x}_P (b + s_B \cos \chi - L/2 \sin \beta), \quad M_O(\Phi_{x_D}) = m_5 \ddot{x}_D y, \quad M_O(\Phi_{y_D}) = m_5 \ddot{y}_D x, \\ M_O(\Phi_{y_C}) = m_2 \ddot{y}_C (R \cos \varphi - l/2 \sin \psi), \quad M_O(\Phi_{y_P}) = m_4 \ddot{y}_P (L/2 \cos \beta - s_B \sin \chi), \\ M_P^\Phi = m_4 \cdot L^2 \cdot \ddot{\beta} / 12, \quad M_C^\Phi = -m_2 l^2 \ddot{\psi} / 12 \quad (9)$$

Здесь m_i – масса i -го звена, R – радиус кривошипа, L – длина пильной рамки, l – длина шатуна, β – угол наклона пильной рамки к горизонтальной оси, φ – угол поворота кривошипа (маховика), ψ – угол наклона шатуна к вертикальной оси, s_B – перемещение точки B по направляющей O_1S (рис. 2).

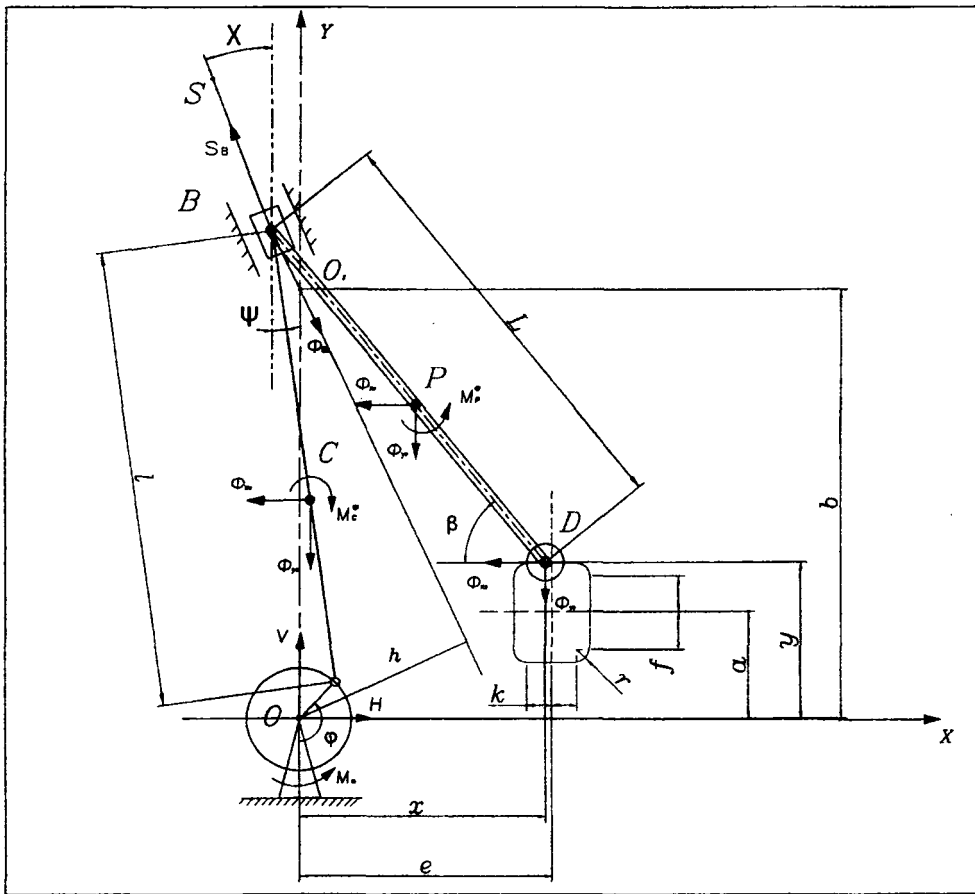


Рис. 2. Схема распределения сил инерции в ЛПР с нецентральной КПМ

Перемещение пильной рамки и колеса шарнирной подвески D непосредственно связано с перемещением s_B точки B , откладываемым от точки O_1 (пересечения направляющей ползуна B с осью Oy) по оси O_1S . s_B находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} -R \cos \varphi + l \cos \psi &= b + s_B \cos \chi, \\ R \sin \varphi - l \sin \psi &= s_B \sin \chi, \end{aligned} \quad (10)$$

исключив для этого с помощью тригонометрической единицы угол ψ и решив полученное квадратное уравнение:

$$s_B = \sqrt{(R \cos(\varphi + \chi) + b \cos \chi)^2 - R^2 - 2bR \sin \varphi - b^2 + l^2} - R \cos(\varphi + \chi) - b \cos(\chi). \quad (11)$$

Из условия компоновки механизма перед радикалом выбран положительный знак. Из второго уравнения системы (10) находим функции угла ψ :

$$\sin \psi = (R \sin \varphi - s_B \sin \chi) / l, \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - (R \sin \varphi - s_B \sin \chi)^2 / l^2}.$$

Для нахождения положения точки D и угла β как функций угла φ запишем

$$b + s_B \cos \chi - L \sin \beta = y, \quad L \cdot \cos \beta - s_B \sin \chi = x, \quad (12)$$

где x и y – координаты точки D (рис 3).

Точка D движется по сложной траектории, состоящей из 8 последовательно соединенных участков. Зависимость положения точки D и угла β от перемещения s_B получим, решая систему уравнений (12) для каждого участка в отдельности. Отметим, что для участков 1 и 5 заданы x -координаты токи D , 3 и 7 – y -координаты, а участки 2, 4, 6 и 8 заданы уравнениями

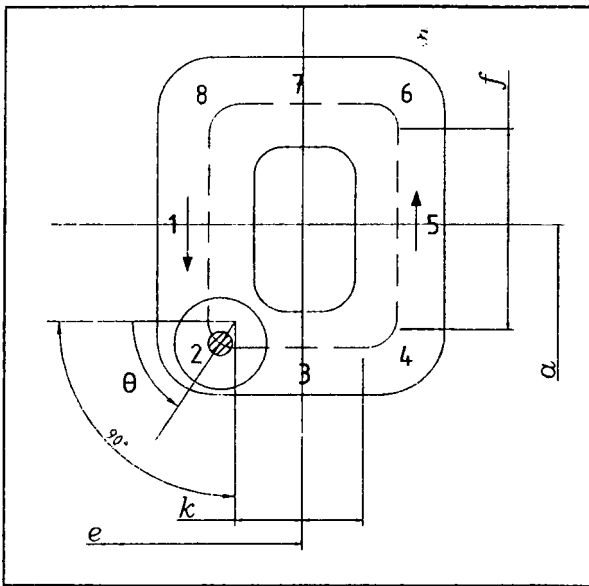


Рис. 3. Разбиение траектории движения точки D на участки

соответствующих дуг окружности радиуса r .

Рассмотрим в качестве примера вычисление на первых двух участках:

Участок 1

Для x_1 -координаты точки D (нижний индекс обозначает номер участка) справедливо соотношение (r – радиус скругления траектории точки D)

$$x_1 = e - k - r.$$

Второе уравнение системы (12) перепишем в виде

$$\cos \beta_1 = (x_1 - s_B \sin \chi) / L,$$

$$\sin \beta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1}.$$

Тогда из первого уравнения системы (12)

$$y_1 = s_B \cos \chi + b - L \sin \beta_1. \quad (13)$$

Участок 2

Координаты точки D выражаются через угол θ_2 , который откладывается против хода часовой стрелки (рис 3):

$$x_2 = e - k - r \cos \theta_2, \quad y_2 = a - f - r \sin \theta_2.$$

Значения тригонометрических функций угла β найдем из системы уравнений (12):

$$\cos \beta_2 = (x_2 - s_B \sin \chi) / L, \quad \sin \beta_2 = (b + s_B \cos \chi - y_2) / L.$$

Закон изменения угла θ_2 получим из системы уравнений (12), исключив из нее угол β с помощью тригонометрической единицы. Результат представим в виде

$$A_3 = A_1 \cdot \sin \theta_2 - A_2 \cdot \cos \theta_2, \quad (14)$$

где $A_1 = b + s_B \cos \chi - a + f$, $A_2 = s_B \sin \chi + e - k$, $A_3 = (L^2 - A_1^2 - A_2^2 - r^2) / 2r$.

Переходя в уравнении (14) к амплитудно-фазовому представлению, запишем окончательно его решение

$$\theta_2 = \arccos \left(A_1 / \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \right) + \arcsin \left(A_3 / \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \right). \quad (15)$$

Вывод формул на участках 3, 5, 7 и 4, 6, 8 аналогичен выводу на участках 1 и 2.

Полученные результаты представляются в виде функциональных массивов

$$x = x_1, \dots, x_8; \quad y = y_1, \dots, y_8; \quad \sin \beta = \sin \beta_1, \dots, \sin \beta_8; \quad \cos \beta = \cos \beta_1, \dots, \cos \beta_8, \quad (16)$$

которые интегрируются в вычислительный пакет MathCAD [5] и выполняется их программно-аналитическая обработка. Подстановка полученных результатов в выражения (4) – (9) позволяет найти искомые реакции.

Результаты вычисления реакций как функций времени за один оборот кривошипа представлены на рис. 4 и 5. Полный оборот кривошипа осуществляется за время $t = 2\pi / \omega = 0.291$ с. Угловая скорость кривошипа $\omega = 21.4$ рад/с принята постоянной. Все величины на рисунках даны в единицах системы СИ. Геометрические характеристики и массы звеньев ЛПР двух типов приняты равными:

- 1) $R = 0.4$ м, $l = 1.2$ м, $L = 1.48$ м, $\tau = 11$, $m_1 = 1250$ кг, $m_2 = 20$ кг, $m_3 = 2.5$ кг, $m_4 = 332$ кг .
 2) $R = 0.2$ м, $l = 1.8$ м, $L = 1.48$ м, $\gamma = 11$, $b = 1.6$ м, $k = 0.02$ м, $f = 0.1238$ м, $e = 0.3$ м,
 $a = 0.3562$ м, $m_1 = 650$ кг, $m_2 = 20$ кг, $m_3 = 2.5$ кг, $m_4 = 224$ кг, $m_5 = 8$ кг .

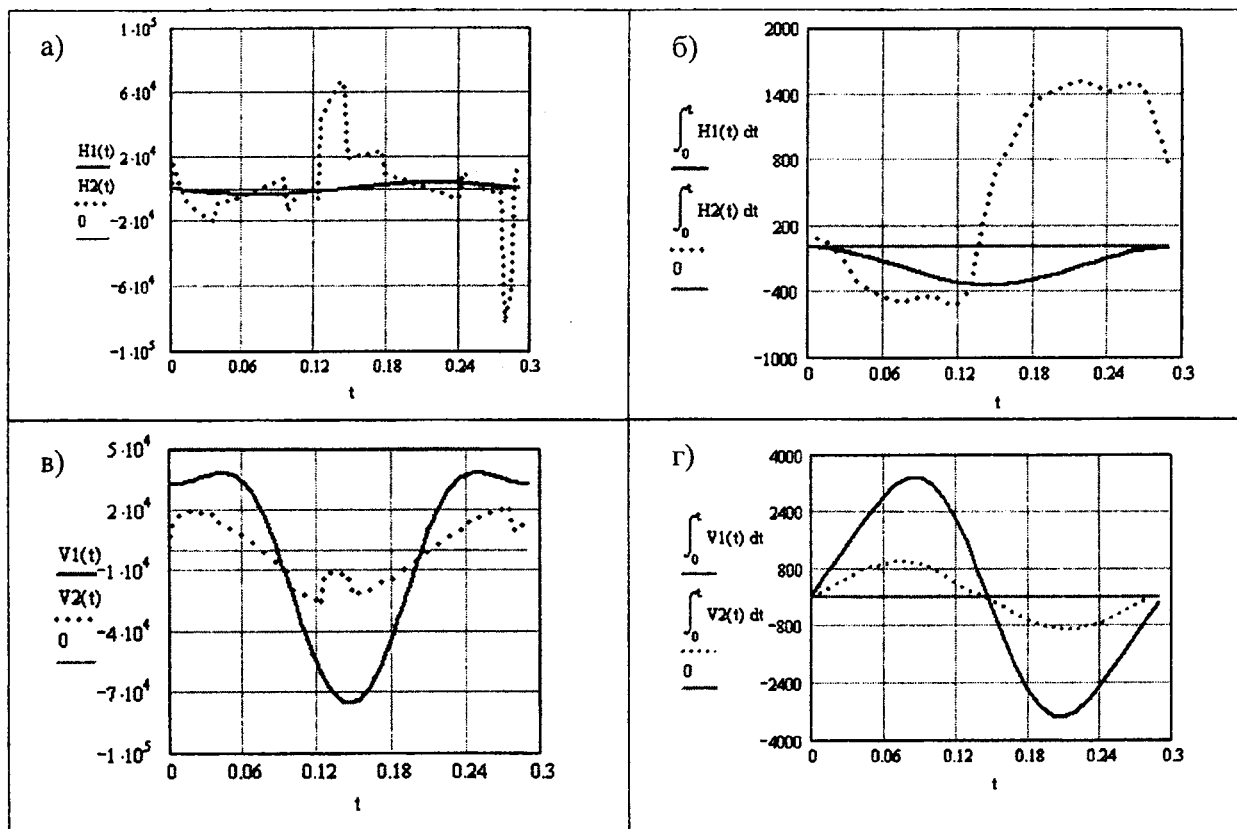


Рис. 4. Графики зависимости реакций и их импульсов от времени.

$H1, H2$ и $V1, V2$ – горизонтальная и вертикальная реакции ЛПР 1-го и 2-го типа, соответственно

Таким образом, можно отметить, что лесопильная рама с центральным кривошипно-ползунным механизмом (1-й тип) воздействует на основание с силами, изменяющимися по закону, близкому к синусоидальному как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях, причем горизонтальная составляющая существенно меньше вертикальной. Момент сил инерции также не велик. С другой стороны, вертикальная составляющая воздействия на основание лесопильной рамы с нецентральным кривошипно-ползунным механизмом и плоско-параллельным движением пильной рамки (2-й тип) в два – три раза меньше, чем в случае рамы 1-го типа, но максимальные значения горизонтальной составляющей реакции основания сравнимы с таковыми вертикальной реакции для рамы 1-го типа. По суммарной реакции $R = \sqrt{H^2 + V^2}$ ЛПР второго типа оказывается существенно меньше нагруженной (рис. 5а), но этот выигрыш обусловлен в основном меньшим весом ее пильной рамки и укороченным кривошипом, а не кинематическими особенностями.

Следует иметь в виду, что воздействие на основание определяется не столько силой, сколько ее импульсом. Поскольку большие значения реакций лесопильной рамы 2-го типа достигаются лишь на малых промежутках времени, можно утверждать, что ее воздействие на основание во время работы будет заметно ниже, чем рамы первого типа, что и демонстрируется рис. 4, б и г. На рис. 5, б показана зависимость от времени импульса E , равного корню квадратному из суммы квадратов импульсов горизонтальной и вертикальной реакций.

В рассматриваемой плоской постановке задачи реакции основания могут быть приведены к равнодействующей. На рис. 5, г показана зависимость от времени расстояния h от линии действия равнодействующей реакции основания до оси вращения кривошипа.

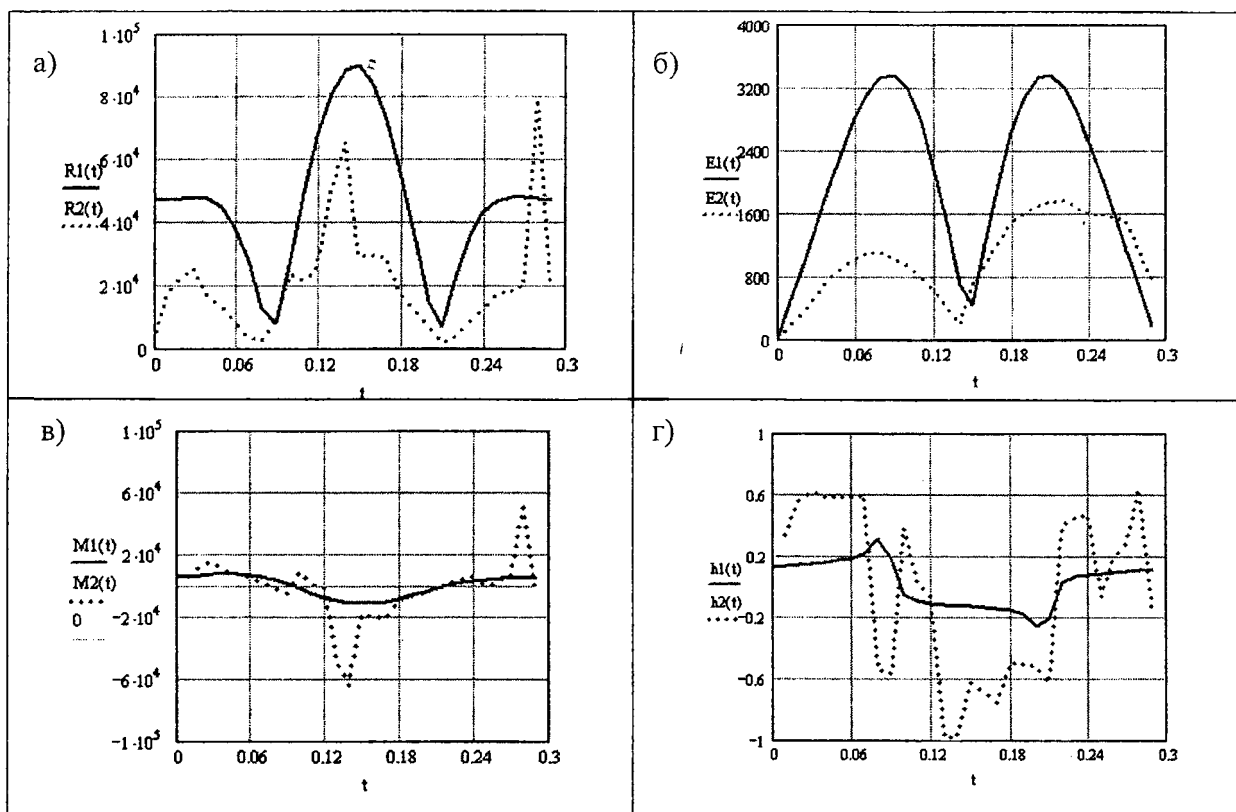


Рис. 5. Графики зависимостей суммарных реакций (R), суммарного импульса (E), реактивного момента (M) и смещения (h) равнодействующей реакции от времени.

Несмотря на несомненные достоинства ЛПР 2-го типа, следует все же отметить, что большие максимальные значения горизонтальной составляющей реакции основания говорят о недостаточном совершенстве ее конструкции и необходимости модернизации. В частности, необходима замена направляющей в виде прямоугольника со скругленными углами на плавно изменяющуюся (например, эллипсоидальную) направляющую.

Разработанные математические модели лесопильных рам и возможность использования профессионального пакета MathCAD обеспечивают возможность исследования различных режимов работы этих механизмов, что может существенно сократить финансовые, материальные и временные затраты при проектировании их модернизированных вариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. <http://www.wood.ru>; <http://www.nszavod.ru>.
2. Агапов, А.И. Динамика процесса пиления древесины на лесопильных рамах. – Горький: ГГУ, 1999.
3. Матвейко, А.П., Федоренчик, А.С. Технология и машины лесосечных работ. – Минск: БГТУ, 2002.
4. Амалицкий, В.В. Деревообрабатывающие станки и инструменты. – М.: Академия, 2007.
5. Дьяконов, В.М. Специальный справочник по MathCAD. – СПб.: Петербург, 2006.

КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С НЕКРУГЛЫМИ КОЛЕСАМИ

Горбач Н.И., Яровенко Д.В.

В работе рассмотрена кинематика двух типов зубчатых передач с эллиптическими колесами. Получены формулы для угловой скорости и углового ускорения ведомого колеса, на основании которых построены графики зависимости указанных угловых характеристик от угла поворота ведущего колеса, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Конструктивно такие передачи можно осуществить зубчатыми эллиптическими колесами с одинаковыми геометрическими параметрами.

Известно, что эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до фокусов F и F' имеет одно и тоже значение $2a$, где a – большая полуось эллипса (рис. 1)

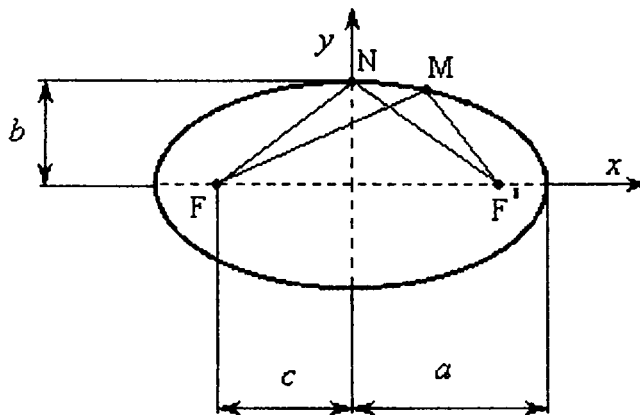


Рис. 1

Рассмотрим некоторые геометрические соотношения.

Расстояние между фокусами FF' называется фокусным расстоянием. Оно обозначается $2c$, т.е. $FF' = 2c$.

Так как $FF' < FM + F'M$, то $2c < 2a$, т.е. $c < a$.

Из определения эллипса следует, что

$$FM + F'M = FN + F'N = 2a, \text{ где } FN = F'N, \text{ из } \Delta FON \quad (FN)^2 = c^2 + b^2.$$

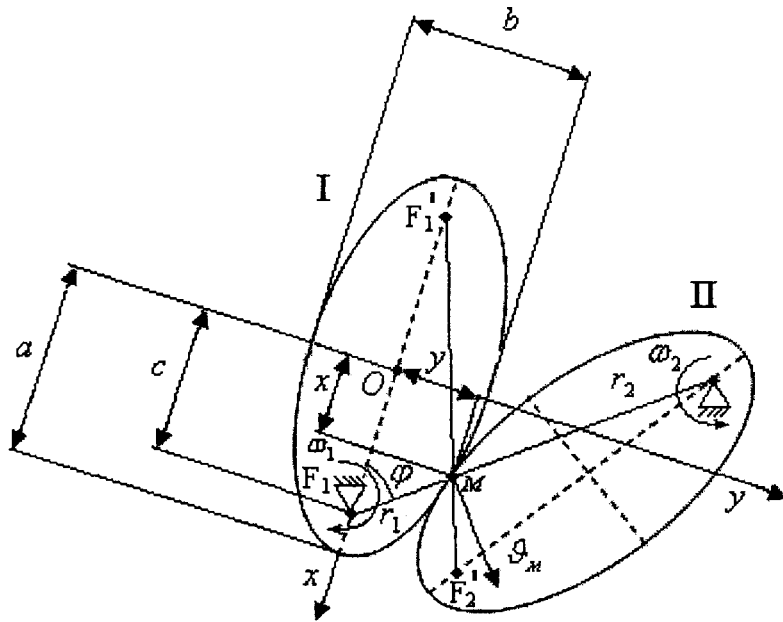


Рис. 2

Пусть колесо 1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси, проходящей через фокус F_1 . Угол, образованный большой осью эллиптического колеса 1 и прямой, соединяющей оси вращения F_1 и F_2 колес 1 и 2, обозначим φ . Колесо 2 по отношению к колесу 1 расположить так, чтобы выполнялось условие $F_1F_2 = F_1'F_2' = 2a$.

Скорость точки M касания колес перпендикулярна прямой F_1F_2 и равна $\vartheta_M = \omega_1 F_1M = \omega_2 F_2M$, где $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$.

$$\text{Тогда } \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}. \quad (2)$$

Из антипараллелограмма $F_1F'F_2F_2'$ следует, что $F_1M = F_2'M = r_1$ и $F_1'M = F_2M = r_2$.

$$\text{Тогда } r_1 + r_2 = 2a, \text{ откуда } r_2 = 2a - r_1. \quad (3)$$

Из $\Delta F_1F'M$ по теореме косинусов определяем $F_1'M$:

$$(F_1'M)^2 = (F_1M)^2 + (F_1F')^2 - 2(F_1M)(F_1F')\cos\varphi. \quad (4)$$

С учетом равенства (3) уравнение (4) представим в виде

$$(2a - r_1)^2 = r_1^2 + 4c^2 - 2r_1\cos\varphi. \quad (5)$$

Из равенства (5) с учетом соотношения (1) после преобразований получим

$$r_1 = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}. \quad (6)$$

$$\text{Тогда } r_2 = 2a - \frac{b^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{2a^2 - 2acc\cos\varphi - b^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{a^2 - 2acc\cos\varphi + c^2}{a - c\cos\varphi}. \quad (7)$$

Закон изменения угловой скорости колеса 2 с учетом значений r_1 и r_2

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 b^2 (a - c\cos\varphi)}{(a - c\cos\varphi)(a^2 - 2acc\cos\varphi + c^2)} = \omega_1 \frac{b^2}{a^2 - 2acc\cos\varphi + c^2}, \quad (8)$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Рассмотрим другой способ определения r_1 , используя каноническое уравнение эллипса, выбрав начало координат X и Y в центре эллипса. Выразим координаты точки M в этих осях:

$$\begin{aligned} x &= c - r_1 \cos \varphi, \\ y^2 &= r_1^2 - (c - x)^2 = r_1^2 (1 - \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим значения X и Y в каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(c - r_1 \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{r_1^2 (1 - \cos^2 \varphi)^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$r_1^2 - \frac{2cb^2 r_1 \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} = \frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что это выражение можно заменить тождеством

$$\left(r_1 - \frac{cb^2 \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} \right)^2 = \frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} + \frac{c^2 b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi^2}, \quad (12)$$

добавив в левую и правую части уравнения (11) квадрат выражения $\frac{cb^2 \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$.

Преобразуем правую часть уравнения (12)

$$\frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} + \frac{c^2 b^4 \cos^2 \varphi}{(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi)^2} = \frac{b^4}{(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi)} \left(1 + \frac{c^2 \cos^2 \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} \right) = \frac{a^2 b^4}{(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi)^2}. \quad (13)$$

Подставим полученное выражение в правую часть уравнения (12), после преобразований получим

$$r_1 = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi}, \quad (6')$$

что соответствует полученному первым способом.

Хотя второй способ несколько более громоздкий, но этот способ является более общим и позволяет выразить радиусы r_1 и r_2 зацеплений эллиптических колес с осями вращения в центрах эллипсов, что будет показано ниже. Анализируя выражение (8) угловой скорости ω_2 видим, что при постоянной угловой скорости ω_1 колеса 1 угловая скорость ω_2 второго колеса является величиной непостоянной и зависит от угла φ , который в свою очередь является функцией времени. Поэтому продифференцировав по времени выражение (8), найдем закон изменения углового ускорения колеса 2

$$\varepsilon_2 = - \frac{2ac(a^2 - c^2) \sin \varphi}{(a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2)^2} \omega_2^2. \quad (14)$$

Проведем анализ кинематики данного механизма на основе полученных законов изменения угловой скорости ω_2 (8) и углового ускорения ε_2 уравнение (14)

1. Угловая скорость вращения второго колеса ω_2 будет достигать максимального значения при наименьшей величине знаменателя уравнения (8). Это условие достигается при $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ (рис. 3).

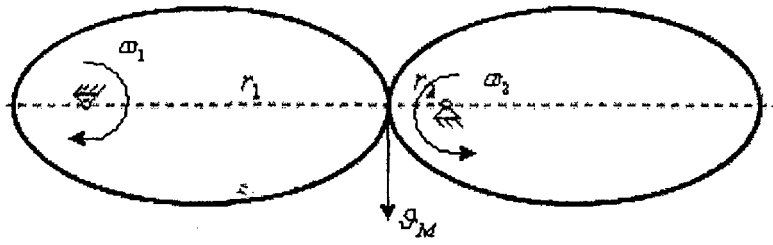


Рис. 3.

В этом случае

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cdot 1 + c^2} = \omega_1 \frac{(a-c)(a+c)}{(a-c)^2} = \omega_1 \frac{a+c}{a-c} = \omega_{\max};$$

$$r_1 = a + c; \quad r_2' = a - c.$$

2. Минимальное значение ω_2 будет при $\varphi = \pi$, $\cos\varphi = -1$ (рис. 4).

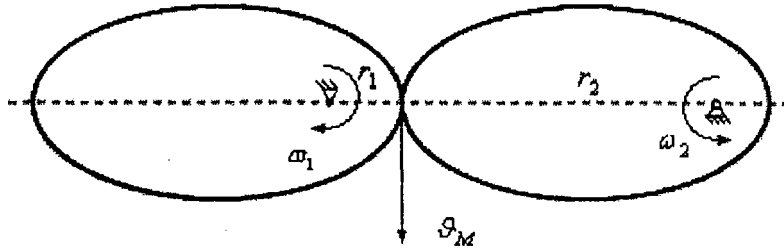


Рис. 4.

В этом случае

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cdot (-1) + c^2} = \omega_1 \frac{a-c}{a+c} = \omega_{\min};$$

$$r_1 = a - c; \quad r_2 = a + c.$$

3. Определим величину угла φ , при котором выполняется условие $\omega_2 = \omega_1$. С учетом этого из уравнений (1) и (8) получим

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cos\varphi + c^2} = 1 \text{ или } a^2 - c^2 = a^2 - 2ac \cos\varphi + c^2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{c}{a} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{c}{a} \text{ и } r_1 = r_2 = a \text{ (рис. 5).}$$

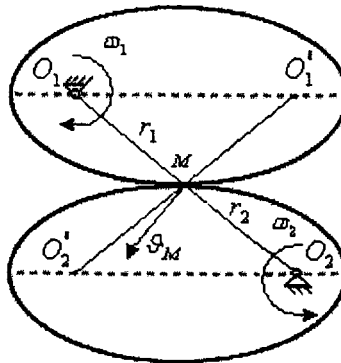


Рис. 5

Угловое ускорение ε_2 в положениях $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, т.е. когда угловая скорость ω_2 принимает экстремальное значение, равно 0.

Для построения графиков изменения угловой скорости ω_2 и углового ускорения ε_2 колеса 2 рассмотрим числовой пример – задачу 14.6 из сборника задач по теоретической механике И.В. Мещерского.

Задана угловая скорость ведущего колеса $\omega_1=9\pi$ рад/с, полуоси эллипсов $a = 25$ см, $b = 15$ см.

$$\text{Значение } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ см.}$$

При этих данных запишем формулы (8) и (14):

$$\omega_2 = \frac{81\pi}{41 - 40 \cos \varphi}; \quad (8')$$

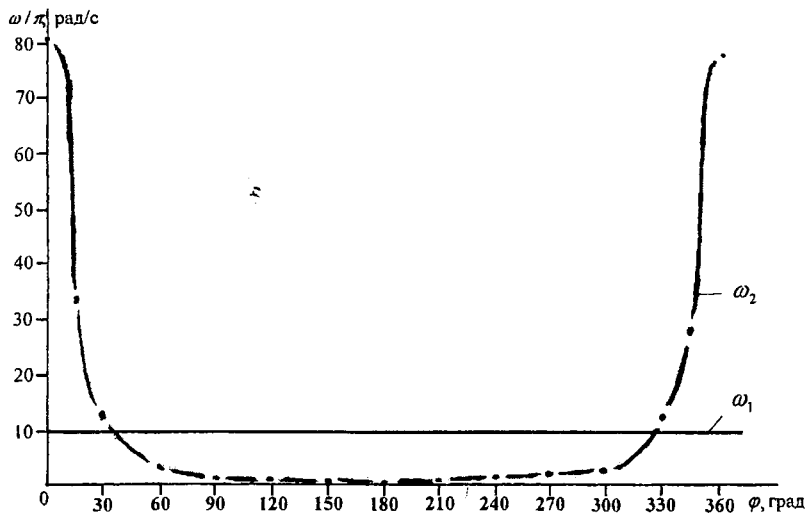
$$\varepsilon_2 = \frac{29160\pi^2 \sin \varphi}{(41 - 40 \cos \varphi)^2}. \quad (14')$$

Вычисления сведем в табл. 1.

Таблица 1.

φ , град	ω_2/π , рад/с	ε_2/π^2 , рад/с ²
0	81	0
15	34,28	-1351,7
30	12,7	-360,5
60	3,86	-57,3
90	1,97	-17,3
120	1,33	-6,8
150	1,08	-2,5
180	1,0	0
210	1,08	2,5
240	1,33	6,8
270	1,97	17,3
300	3,86	57,3
330	12,7	360,5
345	34,28	1351,7
360	81	0

На основании результатов вычислений построены графики ω_2 и ε_2 (рис. 6).



Б)

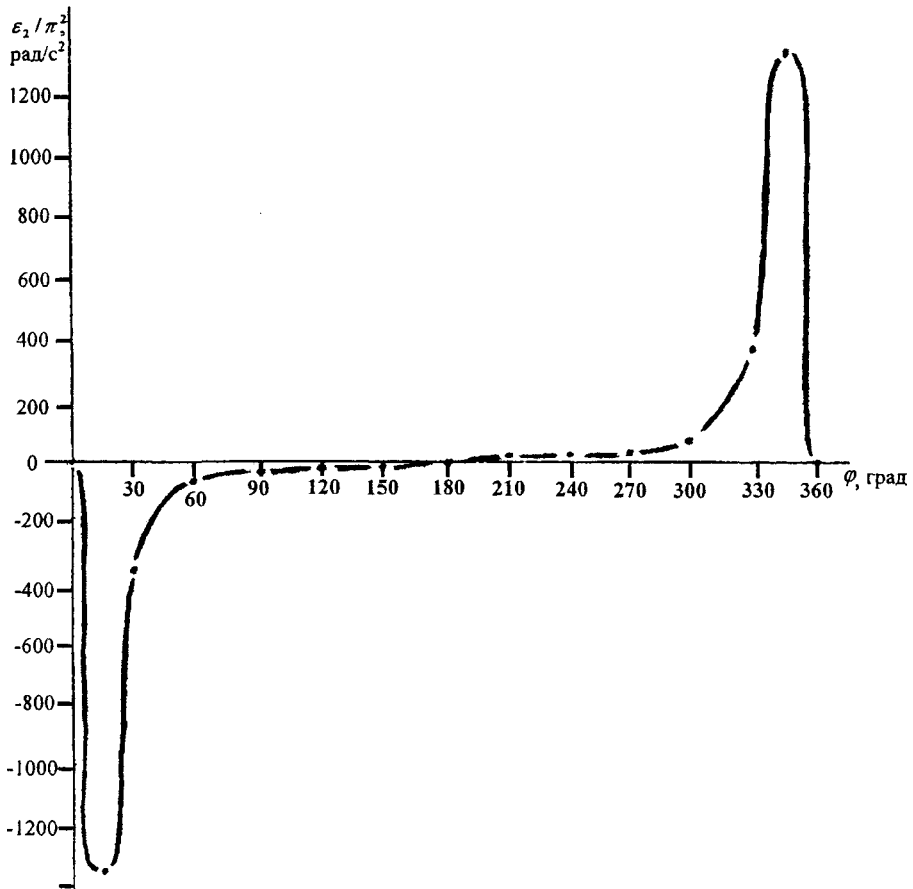


Рис. 6

Из приведенных графиков видно, что угловая скорость колеса 2 в пределах угла φ поворота колеса 1 от 90° до 270° практически остается постоянной и составляет примерно одну десятую часть от угловой скорости колеса 1 (рис. 6а). Угловое ускорение ε_2 колеса 2 в пределах этих углов значительно меньше максимального значения (рис. 6б), т.е. в пределах указанных значений углов работа передаточного механизма будет более плавной.

Теперь рассмотрим зубчатое зацепление эллиптических колес второго типа, т.е. оси вращения помещены в точках O_1 и O_2 пересечения осей эллипсов с полуосями, равными a и b , причем $O_1O_2 = a + b$ (рис. 7)

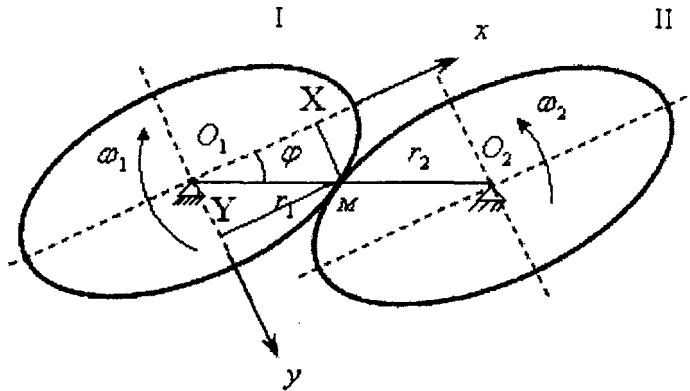


Рис. 7

Скорость точки M касания колес

$$v_M = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{\omega_1 r_1}{a + b - r_1}, \text{ где } r_2 = O_1O_2 - r_1.$$

Координаты точки M в осях XO_1Y

$$x = r_1 \cos \varphi; \quad y = r_1 \sin \varphi.$$

Уравнение эллипса в этих осях:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{r_1^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1. \quad (15)$$

Решив уравнение (15) относительно r_1 , получим

$$r_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (16)$$

Тогда угловая скорость колеса 2

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\omega_1 ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \left(a + b - \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}} \right)} = \\ &= \frac{\omega_1 ab}{(a + b) \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} - ab}. \end{aligned} \quad (17)$$

Проведём анализ кинематики механизма:

1. ω_2 принимает максимальное значение при $\varphi = 0$ (рис. 8)

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 ab}{(a + b)b - ab} = \frac{\omega_1 ab}{ab + b^2 - ab} = \frac{\omega_1 a}{b} = \omega_{\max} \quad (18)$$

$$r_1 = a; \quad r_2 = b$$

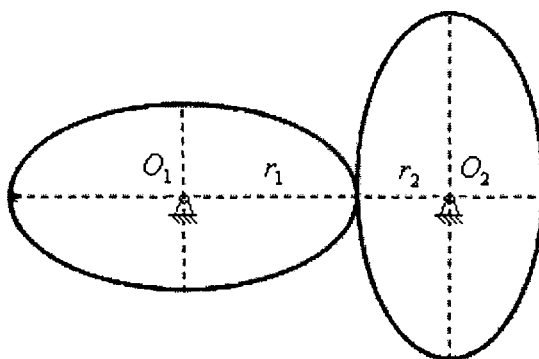


Рис. 8

2. ω_2 принимает минимальное значение при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 9)

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 ab}{(a+b)a - ab} = \frac{\omega_1 ab}{a^2 + ab - ab} = \frac{\omega_1 b}{a} = \omega_{\min}; \quad (19)$$

$$r_1 = b; \quad r_2 = a.$$

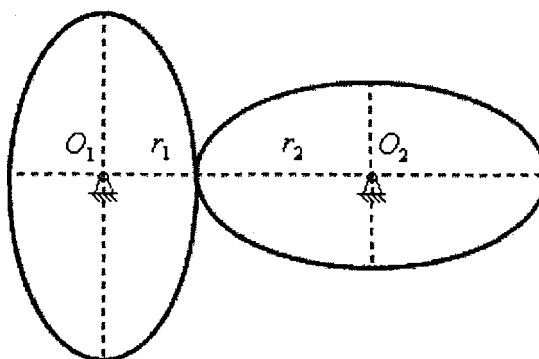


Рис. 9

Из выражения (17) видно, что при постоянной угловой скорости ω_1 колеса 1 угловая скорость ω_2 колеса 2 зависит от угла φ поворота колеса 1, а, следовательно, является функцией времени.

Определим угловое ускорение ε_2 , зададимся числовым значением и построим графики зависимости $\omega_1(\varphi)$, $\omega_2(\varphi)$, $\varepsilon_2(\varphi)$.

Продифференцировав по времени выражение (17), после преобразований получим:

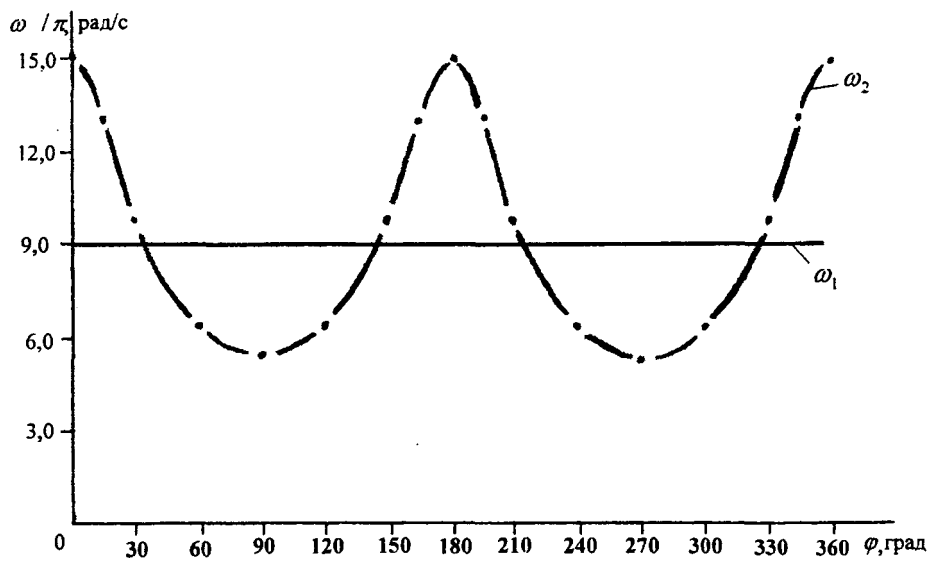
$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = - \frac{\omega_1^2 ab(a+b)^2(a-b)\sin 2\varphi}{((a+b)\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} - ab)^2 \cdot 2\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (20)$$

Примем значения ω_1 , a и b такими же, как и для первого типа зацепления, рассмотренного выше, т.е. $\omega_1 = 9\pi$ рад/с, $a = 25$ см, $b = 15$ см.

Перепишем уравнения (17) и (20) с учетом принятых числовых значений

$$\omega_2 = \frac{675\pi}{8\sqrt{225 \cos^2 \varphi + 625 \sin^2 \varphi} - 75}; \quad (17')$$

a)



б)

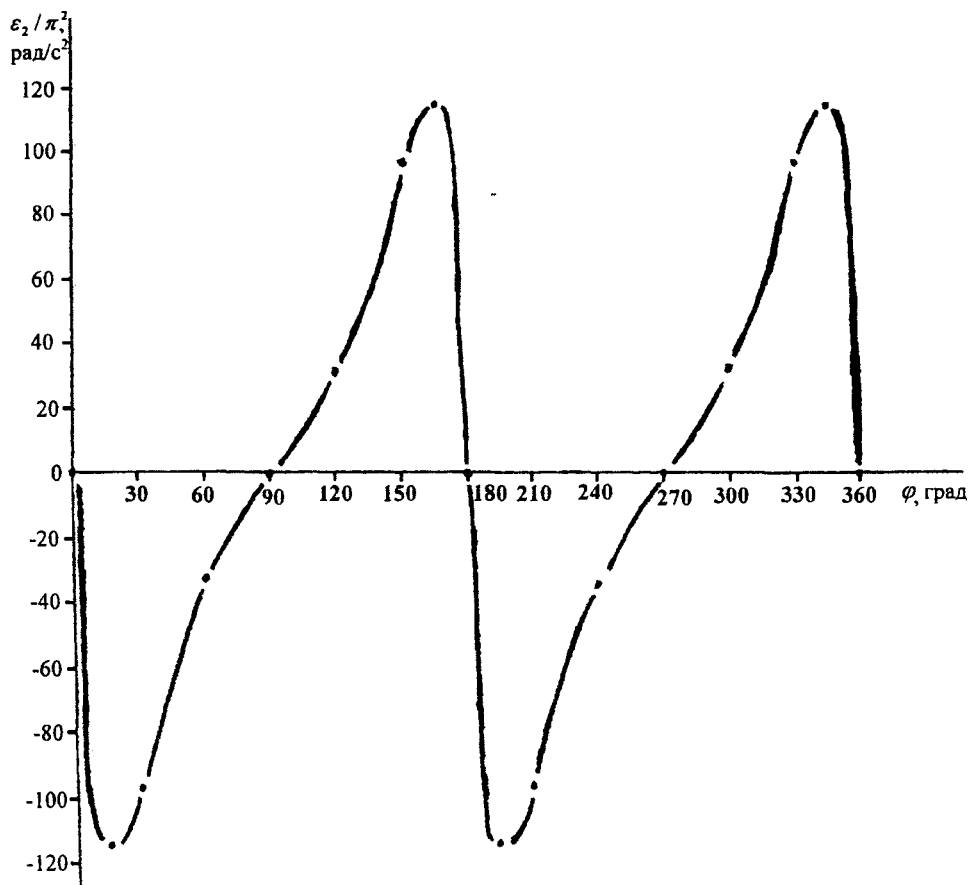


Рис. 10

$$\varepsilon_2 = - \frac{9720000\pi^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{225 \cos^2 \varphi + 625 \sin^2 \varphi} (8\sqrt{225 \cos^2 \varphi + 625 \sin^2 \varphi} - 75)^2}. \quad (20')$$

Вычисления ω_2 и ε_2 сведем в табл. 2.

Таблица 2

φ , град	ω_2/π , рад/с	ε_2/π^2 , рад/с ²
0	15	0
15	13,0	-113,43
30	9,75	-97,44
60	6,23	-31,32
90	5,4	0
120	6,23	31,32
150	9,75	97,44
165	13,0	113,43
180	15	0
195	13,0	-113,43
210	9,75	-97,44
240	6,23	-31,32
270	5,4	0
300	6,23	31,32
330	9,75	97,44
345	13,0	113,43
360	15	0

ВЫВОД

Из рассмотренных примеров видно, что главное отличие некруглых зубчатых колёс от круглых в том, что для зацеплений с некруглыми зубчатыми колёсами передаточное отношение не остаётся постоянным, а, следовательно, при $\omega = \text{const}$ ведущего колеса, ведомое колесо вращается неравномерно. При этом угловая скорость ведомого колеса изменяется по гармоническому закону для первого типа зацепления с периодом 2π , а для второго с периодом равным π . Отношение максимальной угловой скорости к минимальной в первом случае равно 81, а во втором – 2,78.

Угловое ускорение для первого типа зацепления при некоторых углах φ поворота ведущего колеса достигает больших значений и превышает максимальные значения угловых скоростей для зацепления второго типа примерно в 12 раз. Поэтому зубчатая передача второго типа характеризуется более плавной работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Фитматгиз, 1963. – 872 с.
2. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТОСТИ В КУРСЕ «КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ И ТРИБОЛОГИЯ»

Кравчук А.С., Житкова М.А.

A methodical generalization of a rod model of roughness was made in the paper.

В настоящее время перед высшей школой стоят традиционные задачи подготовки компетентных, высококвалифицированных, творчески активных специалистов, которые будут решать все более сложные производственные проблемы на современном научном уровне.

Творческий потенциал молодого специалиста является одной из важнейших характеристик личности и для его раскрытия необходима гибкая методология учебного процесса, в которой, наряду с изложением известных фактов и идей, приводятся примеры их творческого переосмысления.

Именно систематизация знаний полученных студентами на других предметах, в частности, «Соппротивление материалов», «Механика необратимых деформаций» и их применение для обобщения теоретических моделей в другой области наиболее эффективно показывают студентам методику и технику исследовательской работы.

В данной статье изложена основная идея авторской разработки учебного курса «Контактные задачи и трибология» на примере изложения стержневой модели шероховатости Демкина Н.Б. – Крагельского И.В. и ее последующего обобщения на основе применения более сложных моделей деформирования стержневых выступов. Это демонстрирует принципы формирования курса, способа преобразования студенческих знаний из различных фундаментальных разделов механики в знания, умения и навыки решения контактных задач, возникающих при расчетах наиболее распространенных узлов.

Так при изложении темы «Основы стержневой модели шероховатости Демкина Н.Б. и Крагельского И.В.» сначала рассматриваются технологические предпосылки возникновения шероховатости, даются определения некоторых параметров шероховатости в соответствии с ГОСТ2789-73 "Шероховатость поверхности" и излагается методический подход, использованный Демкиным Н.Б. и Крагельским И.В. при построении модели с изотропными упругими характеристиками стержней, имитирующих выступы шероховатости. Далее используя простейшие уравнения деформирования стержней, демонстрируются возможности творческого обобщения. Теоретические знания, полученные на лекции, закрепляются во время соответствующей лабораторной работы.

Технологические предпосылки возникновения шероховатости [5]. На образование шероховатости оказывают влияние условия обработки деталей, точность станка, жесткости технологической системы и т.п. Это относится не только шероховатости поверхностей, обработанных наиболее распространенным способом - резанием, но и к поверхностям, обработанных пластическим деформированием, а также электрофизическими методами обработки. Например, при точении наружной цилиндрической поверхности теоретический профиль в осевом сечении состоит из ряда дуг, соответствующих форме вершины резца. Фактически же на него налагается случайная величина, и реальный профиль поверхности имеет иной вид. Это происходит по тому, что при точении резец захватывает частицы металла с поверхности либо вырывает их. В некоторые моменты времени под действием усилий прижимающих слою металла к поверхности инструмента, и высоких температур, развивающихся в зоне резания, эти слои привариваются к резцу, образуя нарост. Последний в процессе резания непрерывно изменяет свои размеры, очертание, и шероховатость обработанной поверхности претерпевает значительные изменения.

Кроме перечисленных причин образования неровностей, существует еще одна - вибрация станка, инструмента, детали. Автоколебания связаны с сущностью процесса резания, в частности с трением поверхности инструмента об обрабатываемую поверхность.

Основные предположения, используемые при построении стержневой модели. При построении модели шероховатости предполагается, что шероховатость взаимодействует с идеально ровной жесткой (недеформируемой) поверхностью. При деформации поверхность движется вертикально. Выступы, имитирующие шероховатость, могут деформироваться только в направлении, нормальном к ровной поверхности. Основания выступов закреплены. При построении модели используется кривая Аббота или кривая опорной поверхности. Основной методической находкой используемой Демкиным Н.Б. и Крагельским И.В. [2, 3, 6] в своих исследованиях является использование степенной аппроксимации кривой Аббота в системе координат связанной с вершиной максимального выступа высотой H_{max} (рис. 1):

$$\eta_s(\varepsilon) = b(\varepsilon)^\lambda, \quad (1)$$

где $\varepsilon = v/H_{max}$ – относительная высота сечения профиля шероховатости, v – абсолютная высота сечения, $\eta_s(\varepsilon)$ – относительная область контакта (рис. 1).

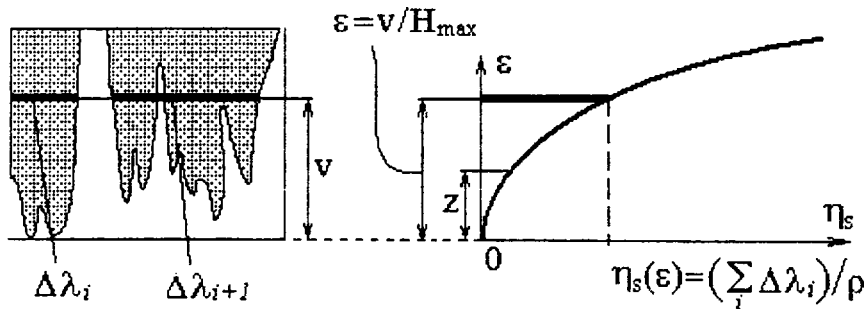


Рис. 1. Степенная аппроксимация кривой Аббота

Пусть n_z – это число выступов которые выше уровня z и n_ρ – число всех пиков на трассе ρ . Тогда функция $\varphi(z) = \frac{n_z}{n_\rho}$ определяет относительное число пиков, которые имеют контакт с твердой ровной поверхностью. Для стержневых выступов данная функция имеет вид [2, 3, 6]:

$$\varphi(z) = \eta_s. \quad (2)$$

Пусть ε относительное сближение твердой гладкой поверхности и основания пиков. Приращение среднего давления $d\bar{p}$ для текущего уровня z ($0 \leq z \leq \varepsilon$) определяется давлением $p(\varepsilon - z)$, приложенным на выступах высотой z , деформированных до уровня ε , и приращением $d\varphi(z)$ относительного числа выступов высотой z [2, 3, 6]:

$$d\bar{p} = p(\varepsilon - z) d\varphi(z).$$

Интегрируя, получаем полное среднее давление \bar{p} , необходимое для достижения сближения ε (1), (2):

$$\bar{p} = \int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon - z) \cdot \phi'(z) dz = b \cdot \chi \cdot \int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon - z) \cdot (z)^{\chi-1} dz. \quad (3)$$

В случае упругого деформирования шероховатости давление определяется по формуле [2, 3, 6]:

$$p(\varepsilon - z) = E \cdot (\varepsilon - z). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) и вычисляя интеграл, получаем решение задачи для стержневой модели Демкина Н.Б. и Крагельского И.В. [2, 3, 6] (рис. 2):

$$\bar{p} = \frac{b \cdot E}{\chi + 1} \cdot \varepsilon^{\chi+1}$$

Некоторые методические обобщения стержневой модели Демкина Н.Б. и Крагельского И.В. Для упругой композиционной шероховатости рассматривается следующее выражение для среднего давления:

$$\bar{p} = b \cdot \chi \cdot \int_0^{\varepsilon} \langle p_i(\varepsilon - z) \rangle \cdot (z)^{\chi-1} dz, \quad (5)$$

$$\langle p_i(\varepsilon - z) \rangle = \langle E \rangle (\varepsilon - z), \quad \langle E \rangle = \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot E_i,$$

где $\langle E \rangle$ – средний модуль упругости основания, $\gamma_{i,(i=1..k)}$ – концентрация компонент с модулем упругости $E_{i,(i=1..k)}$. Таким образом получаем:

$$\bar{p} = \frac{b \cdot \langle E \rangle}{\chi + 1} \cdot \varepsilon^{\chi+1}$$

Многие материалы особенно при высоких температурах характеризуются нелинейной связью напряжений и деформаций. Установлена пригодность некоторых упрощенных аналитических моделей. В частности широкое распространение в инженерных расчетах получил нелинейный материал со степенным законом связи напряжений и деформаций. В этом случае $p(\varepsilon - z)$ имеет вид [4]:

$$p(\varepsilon - z) = \sigma_{ЭТ} \left(\frac{\varepsilon - z}{\varepsilon_{ЭТ}} \right)^{\alpha},$$

где $\sigma_{ЭТ}$, $\varepsilon_{ЭТ}$ – характерные величины напряжений и деформаций, которые вместе с показателем степени α определяются из эксперимента.

Исходя из (3) получаем следующее значение для среднего давления (рис. 2):

$$\bar{p} = \frac{b \cdot \chi \cdot \sigma_{ЭТ}}{(\varepsilon_{ЭТ})^{\alpha}} \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - z)^{\alpha} \cdot (z)^{\chi-1} dz,$$

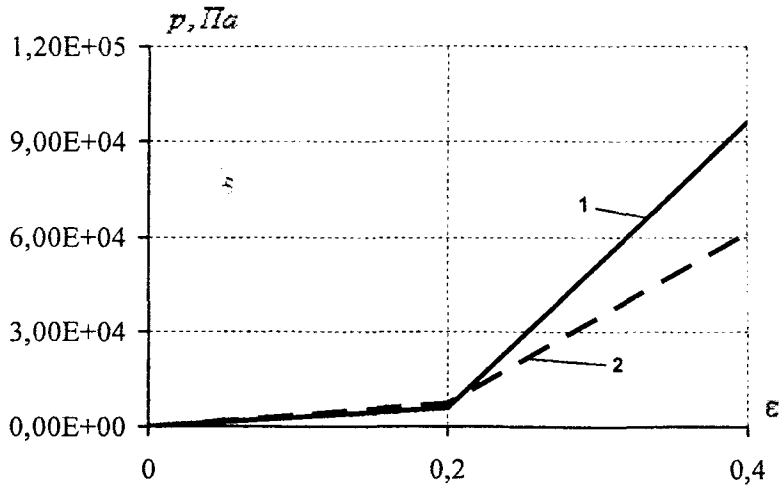


Рис. 2. Зависимость среднего давления \bar{p} от относительного сближения ε ($\chi = 3, b = 1.5$):

1 – упруго деформируемая шероховатость $E = 1 \cdot 10^{11}$ Па; 2 – нелинейно деформируемая шероховатость $\sigma_{ЭТ} = 5 \cdot 10^8$ Па, $\varepsilon_{ЭТ} = 5 \cdot 10^{-8}$ Па, $\alpha = 0.05$;

Для нелинейной композиционной шероховатости рассматривается выражение для среднего давления в виде (5). Однако $\langle p_i(\varepsilon - z) \rangle$ определяется следующим уравнением:

$$\langle p_i(\varepsilon - z) \rangle = \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot \sigma_{ЭТ,i} \left(\frac{\varepsilon - z}{\varepsilon_{ЭТ,i}} \right)^{\alpha_i},$$

где $\gamma_i (i=1..k)$ – концентрация компонент с характерными величинами напряжений $\sigma_{ЭТ,i}$, деформаций $\varepsilon_{ЭТ,i}$ и показателем степени α_i .

Многие материалы, особенно полимеры, обладают зависящей от времени связью между напряжениями и деформациями. В этом случае можно использовать уравнения вязкоупругого поведения единичного стержня [1, 7]:

$$p(t) = E \cdot \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) d\tau \right),$$

$$E \cdot \varepsilon(t) = p(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \cdot p(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где $R(t, \tau)$ – наследственное ядро релаксации, $\Gamma(t, \tau)$ – ядро ползучести.

Используя соотношения (3) и (6) получаем уравнение для определения изменения относительного сближения $\varepsilon(t)$ в случае постоянно действующего давления \bar{p}

$$\bar{p} = b \cdot E \cdot \chi \cdot \int_0^{\varepsilon(t)} \left[(\varepsilon(t) - z) - \int_0^t R(t, \tau) \cdot (\varepsilon(\tau) - z) d\tau \right] \cdot (z)^{\chi-1} dz.$$

После очевидных преобразований получаем:

$$p = \frac{b \cdot E}{\chi + 1} \varepsilon(t)^{\chi + 1} - \frac{b \cdot E}{\chi + 1} \left[\int_0^t R(t, \tau) \cdot \varepsilon(\tau)^{\chi + 1} d\tau \right]. \quad (7)$$

Обращая оператор в (7), учитывая (6), получаем:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{p \cdot (\chi + 1)}{b \cdot E} \left(1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right) \right)^{\frac{1}{\chi + 1}}.$$

Заключение

В результате изучения темы «Основы стержневой модели шероховатости Демкина Н.Б. и Крагельского И.В.» студент должен получить представление о физических явлениях и процессах происходящих в области контакта деталей машин, изучить топографические характеристики микро-геометрии шероховатых поверхностей взаимодействующих деталей машин, а также научиться использовать параметры реальной шероховатости поверхностей при теоретической оценке контактной жесткости сопряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г., Старовойтов, Э.И., Яровая, А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Демкин, Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 227 с.
3. Демкин, Н.Б. Теория контакта реальных поверхностей и трибология // Трение и износ. – 1995. – Т. 16, № 6. – С. 1003–1025.
4. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
5. Кравчук, А.С., Чигарев, А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.
6. Крагельский, И.В., Добычин, М.Н., Комбалов, В.С. Основы расчета на трение и износ. – М.: Машиностроение. 1977. – 526 с.
7. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М: Стройиздат, 1968. – 418 с.

ОБУЧЕНИЕ INTERNET-ТЕХНОЛОГИЯМ В КУРСЕ «ИНФОРМАТИКА»

Анципорович П.П., Алейникова О.И., Булгак Т.И., Луцко Н.Я.


The given article is devoted to features of training the Internet-technologies in discipline "Informatics". Authors have created the electronic simulator applied in laboratory works. The fragment of the electronic instruction is shown.

Глобальная сеть Internet – сообщество, состоящее из разноплановых сетей, объединяющих миллионы компьютеров, программ, баз данных, файлов и людей. Все составные части сообщества находятся во взаимодействии и постоянном развитии. Это привело к тому, что сегодня Internet – самый массовый и оперативный источник информации, идеальная среда для получения новых файлов и программ, самое прогрессивное средство общения и коммуникации, благоприятная среда для бизнеса, идеальный инструмент рекламы, громадный простор для творчества, великолепное пространство для шопинга, крупнейший источник развлечений.

Овладение Internet-технологиями студентами машиностроительного факультета начинается в третьем семестре при изучении дисциплины «Информатика». В лекционном курсе представляется характеристика глобальной сети и её компонентов, рассматривается структура и топология локальных компьютерных сетей и принципы их объединения, уделяется внимание Всемирной паутине WWW (World Wide Web), характеризуются Web-браузер Internet Explorer и технологии его использования для получения информации.

Полученные знания студенты закрепляют на лабораторных работах. В электронный практикум, используемый в учебном процессе по курсу «Информатика» на машиностроительном факультете, включена инструкция-тренажер «Internet». Электронная инструкция – составной документ, созданный с помощью текстового процессора Word. Для обеспечения размещения информации в окне любого размера в удобном для чтения виде он сохраняется на диске в виде Web-страницы. Студент открывает инструкцию к лабораторной работе и размещает ее справа на экране монитора в виде вертикального столбца, оставив слева две трети экрана для выполнения указанных в инструкции действий. Выполняя упражнения, студент, загрузив Web-браузер Internet Explorer, знакомится с его инструментарием, открывает Web-сайт БНТУ по URL-адресу, осуществляет переходы по гиперссылкам, прорабатывает технологии сохранения Web-ресурса и отдельного графического объекта, учится работать одновременно с несколькими открытыми сайтами.

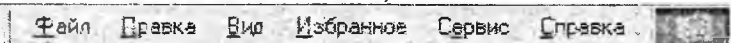
Фрагмент электронной инструкции к лабораторной работе имеет вид

1. Загрузите **Internet Explorer**, открыв специальную папку  – **Internet Explorer**, расположенную на **Рабочем столе**.


2. Изучите окно . Найдите и запомните следующие элементы окна:

2.1  – пиктограмма окна;


2.2  – заглавие окна выделено цветом, что означает активность окна;


2.3  – строка **Меню** с фирменным знаком Microsoft, вращающимся при поиске Web-ресурса;


2.4  – **Панель инструментов**, на которой расположены кнопки;

 – Назад;

 – Вперед;

 – Остановить, нажатие которой отменяет поиск Web-ресурса;

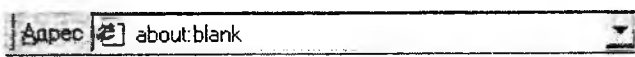
 – Обновить, нажатие которой позволяет обновить активную Web-страницу;

 – Домой, нажатие которой позволяет перейти на домашнюю Web-страницу;

2.5  – Панели обозревателя;

2.6  – Адресная строка.

3. Откройте Web-сайт БНТУ по URL-адресу www.bntu.by. Для этого:

3.1 выполните LC в поле 

3.2 наберите URL-адрес www.bntu.by и нажмите Ввод.

4. Установите в качестве стартовой страницы сеанса (домашней страницы) главную страницу Web-сайта БНТУ. Для этого:

4.1 Сервис – Свойства обозревателя...;

4.2 перейдите на вкладку Общие;


4.3 нажмите кнопку 

4.4 в окне Адрес проверьте URL-адрес;

4.5 нажмите кнопку 

5. Перейдите по гиперссылке  на Web-странице БНТУ, установив курсор на гиперссылку  и выполнив LC.

6. Изучите информацию о нашем факультете.


7. Перейдите на домашнюю Web-страницу, нажав кнопку  – Домой.

8. Откройте Web-сайт по адресу www.open.by.

9. Перейдите по гиперссылке 

10. Сохраните открытую Web-страницу в папке, имя которой совпадает с Вашей фамилией, в файле Погода_Ф_N.htm. Для этого:

10.1 Файл – Сохранить как...;

10.2 в окне  укажите имя папки, имя файла Погода_Ф_N, тип файла html, вид кодировки Кириллица;

10.3 нажмите кнопку .


11. Вернитесь назад на главную Web-страницу Web-сайта open.by

12. Сохраните любой рисунок серии **ЛУЧШИЕ ФОТКИ (ФОТКИ.BY)** в папке, имя которой совпадает с Вашей фамилией, в файле Рисунок_Ф_N.jpg. Для этого:

12.1 установите курсор мыши на рисунок;

12.2 выполните RC;

12.3 выберите пункт **Сохранить рисунок как...** ;

12.4 в окне  укажите имя папки, имя файла Рисунок_Ф_N, тип файла jpg;

12.5 нажмите кнопку .

Особое внимание в учебном процессе уделено технологиям поиска информации по технической тематике. В качестве поисковой системы используется Google.com, в котором студент осуществляет поиск по ключевым словам. Например, если требуется собрать информацию о марках и свойствах сталей, то в текстовом поле набирается фраза «Инструментальная углеродистая сталь». Результат поиска в виде совокупности гиперссылок на Web-ресурсы обрабатывается обучаемым с целью создания требуемого документа.

Наблюдение за учебной деятельностью студентов, освоивших Internet-технологии, показывает явное повышение эффективности их работы. В короткие сроки удается получить более глубокие знания для внедрения инновационных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов, А., Вихарев, И. Интернет. – СПб.: Питер, 2003. – 367 с.
2. Леонтьев, В.П. Новейшая энциклопедия Интернет. – М.: Олма-Пресс, 2003. – 607 с.

КОНЦЕПЦИЯ РАЗРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В УО «ВГТУ»

Локтионов А.В.

Conception of creating information manuals at study of the theoretical mechanics. Are given an estimation and recommendations for use machine and without machine programmed of the control of knowledge of the students, the conditions are stated which should answer process of mastering and quality of preparation at independent work of the students.

Основное отличие электронных учебных пособий от традиционных печатных изданий и электронных книг заключается в обязательном наличии интерактивного взаимодействия между студентом и компьютером. Представление материала в гипертекстовой форме, его чтение и анализ не могут быть осуществлены без специальных программных средств, обеспечивающих поддержку связей, ссылок, или гиперссылок. Поэтому гипертекстом часто называют как саму форму организации текстового материала, так и технологию, без которой такая организация невозможна.

На кафедре Теоретической механики и ТММ УО «ВГТУ» проводится работа по созданию электронных учебных пособий. На основе учебного пособия для студентов высших учебных заведений «Теоретическая механика. Статика, кинематика, динамика», авторы Локтионов А.В., Крыгина Л.Г., в редакторе *Word* разработаны гипертекстовые электронные учебники [1-4].

На кафедре учебный процесс организован таким образом, чтобы в наибольшей степени обеспечивалось глубокое понимание студентом читаемой дисциплины. При этом преподаватели свободны в разработке и применении новых подходов, технологий обучения и приемов воспитания студентов. Переход на новые формы обучения и контроля направлен на практическое решение поставленных задач.

Все виды программного контроля можно разбить на две группы: безмашинный программированный контроль (с помощью программированных карточек) и машинный программный контроль (с помощью контролирующих машин).

Как при безмашинном программированном способе контроля, так и в случае применения машинного контроля главным является качество составленных программ, вопросов и ответов. Основное же различие между указанными группами проявляется в ходе проведения контроля, обработки результатов и доведения результатов контроля до студентов. Кроме того, при машинном программированном контроле можно проводить самообучение студентов, т.е. осуществить диалог «студент-машина». Критика в адрес машинного контроля обычно вызывается недостаточно продуманными программами, применяемыми в этих контролируемых машинах.

Традиционный контроль по вопросам и билетам с необходимостью индивидуальной оценки качества работы каждого студента весьма трудоемок по времени. Большой расход времени на проверку текущего и итоговых знаний студентов по традиционному способу – с помощью вопросов и билетов – может быть существенно сокращен за счет унификации многих контрольных операций и широкого использования технических средств контроля.

Программированный контроль предусматривает разработку единой программы контроля и единых критериев оценки знаний студентов. Программированный контроль позволяет преподавателю за короткое время проверить знания группы студентов, автоматизировать

многие контрольные операции, как то: постановку вопросов, анализ ответов, регистрацию результатов контроля, проведение многократного контроля с целью самообучения студентов.

Преподаватель при оценке знаний студентов и приеме расчетно-графических работ физически и по времени не в состоянии задать каждому студенту 10-15 вопросов, чтобы проверить его подготовку по соответствующему разделу курса. Только машинный контроль знаний студентов обеспечивает охват всего нужного материала, ускоряется процесс оценки знаний студентов и приема расчетных работ. Главным элементом машинного контроля – контрольные карточки (тесты). Их составление – чрезвычайно трудоемкая работа. При их составлении следует избегать случайных и бессмысленных ответов, профанирующих предмет, ограничивая неверные ответы лишь типичными ошибками, наблюдаемыми при ответах студентов. Машинный контроль должен составлять лишь часть общего контроля текущей успеваемости студентов. Главная же роль контролирующих машин состоит в том, что «разговор» с машиной вынуждает студента систематически изучать теоретический материал, упражняться в решении примеров, что положительно влияет на результаты сессии. Однако, определяющая роль принадлежит преподавателю, только он вправе выносить окончательную оценку знаний студентов.

Для активизации обучения в Витебском государственном технологическом университете используются также тестовый контроль и программированные задачи по всем разделам курса теоретической механики. Разработаны соответствующие методические указания, а также тестовые программы по разделам «Статика», «Кинематика», позволяющие проконтролировать уровень теоретических знаний студента с помощью ЭВМ [5, 6]. Основная цель методических указаний [5, 6] – помочь студентам при самостоятельной, внеаудиторной работе по освоению курса теоретической механики (разделы «Статика», «Кинематика») и преподавателям при работе со студентами на консультациях и практических занятиях. Не подменяя учебную и методическую литературу, они являются дополнительным материалом в усвоении курса теоретической механики. Указания охватывают все темы разделов курса «Теоретической механики». Для повторения теоретического материала студент должен воспользоваться учебной литературой по теоретической механике.

Программированные материалы целесообразно использовать для диагностирования знаний студентов и активизации их участия в учебном процессе. При этом достигается следующее: активизация мысленной деятельности студентов, обеспечение полноты систематического и итогового контроля знаний, сокращение времени контроля и повышение объективности оценки уровня знаний студента. Студенты, давшие неправильные ответы, должны разобрать допущенные ими ошибки и повторно пройти тот же контроль.

Применение текущего тестового и программированного контроля позволяет не только оценивать усвоение знаний отдельными студентами, но и получать определенные критерии, характеризующие уровень знаний в контролируемой группе и лекционном потоке. Данные формы контроля могут использоваться при проведении занятий, промежуточных контрольных опросах, защите расчетных работ, а также олимпиад по курсу теоретической механики.

Для активизации обучения в Витебском государственном технологическом университете используются тестовый контроль и программированные задачи по всем разделам курса теоретической механики. Разработаны соответствующие методические указания и учебные пособия [3–10]. По результатам проведенной работы можно сделать следующие выводы:

- электронные учебные и методические пособия позволяют в течение учебного года систематически контролировать преподавателю знания студентов по изучаемой дисциплине, а студентам самостоятельно готовиться к тестовому и программированному контролю знаний;

- тестирование является прогрессивной формой контроля уровня знаний студента, особенно на промежуточном этапе; использование тестовых программ позволяет охватить широкий круг теоретических и практических вопросов, ускорить процесс оценки уровня знаний и повысить его объективность;

– тестирование должно применяться вместе с традиционными методами контроля и оценки знаний.

В целях текущего контроля учебной работы студентов проводятся аудиторские контрольные работы. Издано с грифом Министерства образования Республики Беларусь учебное пособие «Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ» [7].

Программированные материалы целесообразно использовать для усвоения и контроля знаний студентов. При этом достигается активизация мысленной и творческой деятельности, обеспечение полноты и сокращение времени контроля знаний, проверка степени осмысленности ответа. Студенты, которые неправильно ответили на вопросы, устранив и осмыслив ранее обнаруженные ошибки, должны повторно пройти контроль. Программированная оценка знаний студентов позволяет экономить время преподавателей и эффективно его использовать при работе со студентами. Комплексные задачи для самостоятельного решения могут использоваться при защите расчетных заданий, проведении олимпиад и как экзаменационные задачи.

Для приобретения навыков самостоятельного решения задач по статике, кинематике и динамике курса теоретической механики студентами дневной и заочной форм обучения в настоящее время подготовлены учебные пособия, в которых приведены краткие сведения по теории, основные формулы и уравнения, необходимые для решения задач статики, кинематики и динамики. Разумеется, учебные пособия не исключают необходимости глубокого изучения теории. В соответствующих местах пособия даются методические указания к решению задач и приводятся по каждой теме подробные решения. Они составлены в полном соответствии с программой курса теоретической механики и могут использоваться студентами как механических, так и технологических специальностей [8-10, 14].

Для тестового контроля знаний студентов по разделу «Динамика» курса «Теоретической механики» издано пособие [14]. В пособии изложены рабочая программа, тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика», а именно две задачи динамики, колебания точки, центр массы механической системы, теорема об изменении количества движения, кинетический момент. В пособии даны примеры выполнения задач по динамике для студентов механических специальностей заочной формы обучения, изложены основные понятия высшей математики в задачах курса теоретической механики, представлены дифференциальные уравнения и колебательное движение материальной точки. [11-14].

Применение различных форм и видов самостоятельной работы студентов, а также своевременный контроль способствует повышению эффективности учебно-воспитательного процесса и создает прочный фундамент в сфере их дальнейшей профессиональной деятельности. Использование компьютеров для решения и контроля прикладных задач по курсу теоретической механики повышает качество подготовки инженерных специальностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Локтионов, А.В. Разработка электронного учебника с использованием компьютерных технологий / А.В. Локтионов, А.В. Гусаков // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск, 2005. – № 18. – С. 160–163.

2. Локтионов, А.В. Оценка программного обеспечения при разработке электронных учебных пособий / А.В. Локтионов, А.В. Гусаков // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск, 2006. – № 20. – С. 85–91.

3. Локтионов, А.В., Крыгина, Л.Г. Теоретическая механика. Динамика: учебное пособие для студентов технических специальностей вузов: учебное пособие. – Витебск: ВГТУ, 2004. – 171 с.

4. Локтионов, А.В., Крыгина, Л.Г. Теоретическая механика. Статика и кинематика: учебное пособие. – Витебск: ВГТУ, 2005. – 174 с.

5. Локтионов, А.В., Сяборов, В.В. Теоретическая механика: методические указания. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Статика» для студентов механических и технологических специальностей. – Витебск, 2004. – 47 с.
6. Локтионов, А.В., Сяборов, В.В. Теоретическая механика: методические указания. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Кинематика» для студентов механических и технологических специальностей. – Витебск, 2006. – 42 с.
7. Локтионов, А.В., Крыгина, Л.Г. Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ: учебное пособие. – Витебск: ВГТУ, 1998. – 189 с.
8. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Статика» курса теоретической механики: метод. указания / Сост. А.В. Локтионов, Л.Н. Буткевич. – Витебск: ВГТУ, 1997. – 90 с.
9. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Кинематика» курса теоретической механики: метод. указания / Сост. А.В. Локтионов, Л.Н. Буткевич. – Витебск: ВГТУ, 1998. – 84 с.
10. Локтионов, А.В. Теоретическая механика. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика»: учебное пособие. – Витебск: ВГТУ, 2005. – Ч. 2. – 205 с.
11. Теоретическая механика: методические указания по выполнению контрольных заданий для студентов заочного отделения инженерно-строительных, транспортных, машиностроительных и приборостроительных специальностей (с примерами их выполнения) / Сост. А. В. Локтионов. – Витебск: ВТИЛП, 1981. – 64 с.
12. Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных специальностей высших учебных заведений / Сост. Л.И. Котова [и др.]. – Москва: Высш. школа, 1989. – 111 с.
13. Методические указания «Основные понятия высшей математики в задачах курса теоретической механики» для студентов механических и технологических специальностей / Сост. А.В. Локтионов, Л.Г. Крыгина. – Витебск: ВГТУ, 1996. – 33 с.
14. Локтионов, А.В. Теоретическая механика. Тестовый контроль и программированные задачи по разделу «Динамика»: пособие. – Витебск: ВГТУ, 2007. – Ч. 1. – 227 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Витебский государственный технологический университет

Локтионов Анатолий Васильевич

Зав. кафедрой «Теоретической механики и ТММ», д.т.н., профессор
210035, Витебск, пр-т Московский, 72, (0212) 47-90-62

ДАСЛЕДАВАННЕ ПАЛЁЎ СІЛ ІНЕРЦЫІ ПРЫ КАЧЭННІ АДНАРОДНЫХ ЦЫЛІНДРЫЧНЫХ ЦЕЛ

Русан С.І.

Special cases rocking on a plane, the convex and concave surfaces are considered. For research of fields of forces of inertia in case of non-uniform rocking the method of two centers for the first time is used.

Агульныя заўвагі. Мадэль даследавання

Сфармуляваная ў загалюўку задача актуальна пры вывучэнні пытанняў зносу паверхняў у планетарных і дыферэнцыяльных механізмах, пры даследаванні сіл, якія ўзнікаюць на паверхнях узаемадзеяння ў некаторых тыпах здрабняльных машын, пры вывучэнні напружана-дэфармаванага стану цыліндрычных цел і г. д. Мяркуецца, што паверхні цыліндрычных цел і паверхні качэння маюць пастаянны радыус крывізны, а працэс качэння адбываецца без слізгання. Маса цел прыводзяцца да іх нармальнага сячэнняў (кругоў), праведзеных праз цэнтры мас. Маса адзінкі сячэння роўна $m' = \rho \cdot l$, маса ўсяго цела $m = \pi r^2 m'$, дзе ρ – удзельная маса; r – радыус цыліндра; l – яго даўжыня.

Ніжэй разгледжаны прыватныя выпадкі качэння, апісаны для іх адпаведныя палі сіл інерцыі і знойдзены іх галоўныя вектары і галоўныя моманты. У выпадку нераўнамернага качэння цыліндраў упершыню ў дынамічных разліках выкарыстоўваецца метада двух імгненнага цэнтраў паскарэнняў, апісаны ў рабоце [1]. Устаноўленая ніжэй інтэнсіўнасць сіл інерцыі можа быць выкарыстана для даследавання напружана-дэфармаванага стану цыліндраў, а знойдзеныя галоўныя вектары і галоўныя моманты – для вывучэння іх сілавога ўзаемадзеяння з іншымі цэламі.

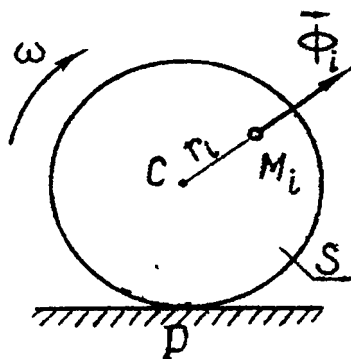
Раўнамернае качэнне па плоскасці

У гэтым выпадку, як і пры вярчальным руху вакол нерухомай восі, ўзнікае восесіметрычнае поле адцэнтрабежных сіл інерцыі, інтэнсіўнасць якіх узрастае ад цэнтра C да перыферыі па лінейнаму закону (рыс. 1):

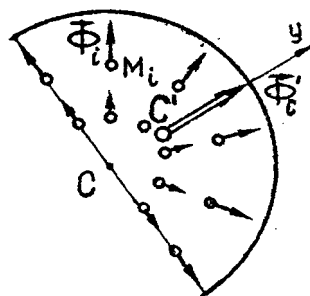
$$\Phi_i = m' r_i \omega^2. \quad (1)$$

Формула (1) апісвае інтэнсіўнасць сіл інерцыі ў сячэнні на акружнасці радыуса $r_i = \text{const}$. Назавём яе *эквісілавой*. У цыліндры эквісілавой акружнасці адпавядае *эквісілавая паверхня*. Знойдзем галоўны вектар сіл інерцыі, якія дзейнічаюць на палову сячэння і нагружаюць яго

дыяметр (рыс. 2): $\Phi_C = \frac{m}{2} a_C = \frac{1}{2} \pi r^2 l \rho \cdot y_C \omega^2 = \frac{2}{3} \rho l r^3 \omega^2$. Сіла Φ_C імкнецца раскалоць цыліндр.



Рыс. 1.



Рыс. 2

Раўнамернае качэнне па выпуклай паверхні

У артыкуле [1] паказана, што імгненны цэнтр паскарэнняў Q_0 у гэтым выпадку пры любых геаметрычных параметрах сістэмы застаецца ў межах адрэзка CP (рыс. 3). Пры $r_1 \rightarrow \infty$ Q_0 знаходзіцца ў цэнтры C сячэння S , як пры качэнні па плоскасці; пры $r_1 \rightarrow 0$ супадае з пунктам P і плоскі рух сячэння пераходзіць у вярчальны вакол восі, што праходзіць праз імгненны цэнтр скорасцей P . Для значэнняў $0 < r_1 < \infty$ палажэнне імгненнага цэнтра паскарэнняў Q_0 вызначаецца па формуле [1]:

$$C Q_0 = \alpha r, \quad (2)$$

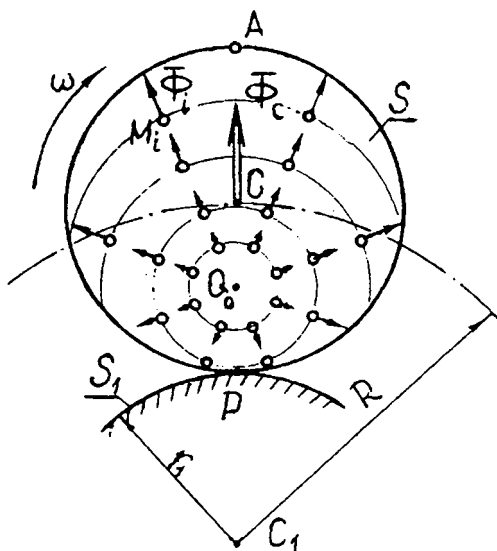
дзе $\alpha = \frac{r}{R}$.

Знойдзены такім чынам пункт Q_0 адначасова з'яўляецца і цэнтрам адцэнтрабежных сіл інерцыі. Найбольшага значэння інтэнсіўнасць сілы інерцыі дасягае ў пункце A . Тут яна можа (калі $\alpha = 1$) у два разы перавышаць значэнне сілы інерцыі пры качэнні цыліндра па плоскасці. Такім чынам, інтэнсіўнасць сілы інерцыі ў выпадку раўнамернага качэння цыліндра па выпуклай паверхні змяняецца ў межах ад нуля да $2m'r\omega^2$. Размеркаванне сіл інерцыі ў

сячэнні цыліндра паказана на рысунку 3.1 пры $r_1 = r$ ($\alpha = \frac{1}{2}$). Галоўны вектар сіл інерцыі змешчаны на восі сіметрыі адпаведнага поля і вылічваецца па формуле

$$\Phi_C = \pi \alpha \rho l r^3 \omega^2, \quad (3)$$

дзе $0 < \alpha < 1$. Як відаць з формулы (3.2), велічыня Φ_C залежыць не толькі ад размераў цыліндра і вуглавой скорасці ω , але і ад радыуса паверхні качэння r_1 .



Рыс. 3

Раўнамернае качэнне па ўвагнутай паверхні

Качэнне па ўвагнутай паверхні магчыма пры ўмове, што яе радыус крывізны большы, чым радыус цыліндра ($r_1 > r$). Пры гэтым каэфіцыент α у формуле (2) мяняецца ад значэнняў блізкіх да нуля (пры вельмі вялікіх радыусах r_1) да бесканечнасці пры $r_1 \rightarrow r$. У апошнім выпадку неабмежавана ўзрастаюць нармальныя паскарэнні, а значыць, і адцэнтра-бежныя сілы інерцыі. Далей разгледзім качэнне цыліндра па паверхні радыуса $r_1 = 2r$. Пункт C_1 у гэтым выпадку знаходзіцца на контуры сячэння S , г. зн. $R = r$, $\alpha = 1$, $C Q_0 = r$, а імгненны цэнтр паскарэнняў Q_0 (ён жа і цэнтр поля адцэнтрабежных сіл інерцыі) супадае з пунктам C_1

(рис. 5). Пакуль цэнтр Q_0 застаецца ў межах сячэння на адрэзку CA (рис. 4), найбольшае значэнне сілы інерцыі, як і ў папярэднім выпадку, не перавышае велічыні $2m'r\omega^2$. Такая інтэнсіўнасць цяпер мае месца ў пункце P . Эквісільваыя паверхні Φ_i , канцэнтрычныя з паверхняй качэння S_1 , паказаны на рис. 5. Галоўны вектар Φ_C вылічваецца па формуле (3), у якой $\alpha = 1$. Ён таксама можа неабмежавана ўзрастаць, а разам з ім і ціск цыліндра на паверхню качэння. Заўважым, што пры $r_1 = 2r$ любы пункт контура сячэння S апісвае прамалінейную траекторыю, якая супадае з дыяметрам паверхні качэння.

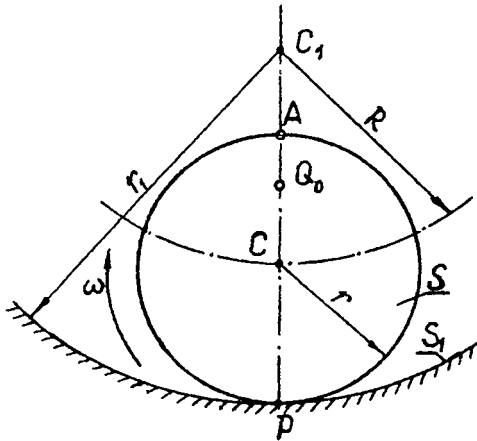


Рис. 4

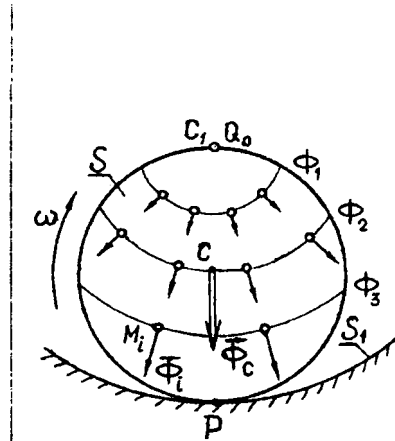


Рис. 5

Нераўнамернае качэнне ($\epsilon \neq 0$)

Способ прадстаўлення поля паскарэнняў і адпаведных сіл інерцыі па формуле з чатырох складнікаў, якая выражае тэарэму Рывальса і звычайна прымяняецца ў гэтым выпадку, неаглядны і непрыдатны для практычнага аналізу задачы. Больш эфектыўным магло б стаць выкарыстанне для даследавання сіл інерцыі «класічнага» імгненнага цэнтра паскарэння Q . Але яго палажэнне залежыць ад зменных кінематычных характарыстык качэння ω і ϵ , што таксама пры $\epsilon \neq 0$ ускладняе задачу аналізу паскарэнняў і сіл інерцыі. Альтэрнатывай згаданым спосабам з'яўляецца выкарыстанне двух цэнтраў паскарэнняў, палажэнне якіх залежыць толькі ад пастаянных геаметрычных параметраў сістэмы. Такімі цэнтрамі служаць ужо вядомыя пункты P і Q_0 – імгненныя цэнтры адпаведна вярчальнага і дацэнтрабежнага паскарэнняў. Абодва яны пры любых параметрах паверхняў цела і качэння знаходзяцца на прамой, якая вызначаецца адрэзкам CP (рис. 6). Размеркаванне інтэнсіўнасці сіл інерцыі адносна цэнтра Q_0 пры $\epsilon = 0$ разглядалася вышэй. Пункт P заўсёды супадае з імгненным цэнтрам скорасцей. Адносна яго вярчальныя паскарэнні размяркоўваюцца таксама, як і скорасці. Такім чынам, па метаду двух цэнтраў паскарэнне любога пункта M знаходзіцца як геаметрычная сума дацэнтрабежнага і вярчальнага паскарэнняў:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\text{дц}} + \vec{a}_M^{\text{вр}}, \quad (4)$$

дзе $a_M^{\text{дц}} = \omega^2 M Q_0$, $a_M^{\text{вр}} = \epsilon \cdot MP$.

Адпаведна формуле (5.1) вызначаецца і інтэнсіўнасць поля сіл інерцыі:

$$\vec{\Phi}_M = \vec{\Phi}_M^{\text{дц}} + \vec{\Phi}_M^{\text{вр}}. \quad (5.2)$$

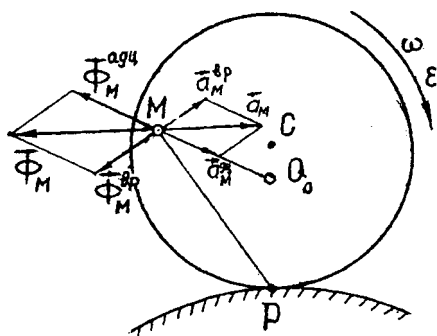
У формуле (5) адцэнтрабежны і вярчальныя скланікі роўны: $\Phi_M^{\text{дц}} = m'a_M^{\text{дц}}$, $\Phi_M^{\text{вр}} = m'a_M^{\text{вр}}$. Вектары, якія ўваходзяць у формулы (4), (5), паказаны на рис. 6. Як відаць з формулы (5), інтэнсіўнасць поля сіл інерцыі ў выпадку нераўнамернага качэння знаходзіцца па метаду суперпазіцыі двух цэнтральных палёў: поля адцэнтрабежных сіл інерцыі з цэнтрам у пункце Q_0 і поля вярчальных сіл інерцыі з цэнтрам у пункце P . Структура адцэнтрабежных палёў разгледжана ў папярэдніх прыватных выпадках. Поле вярчальных сіл інерцыі ствараецца

вуглавим паскарэннем ε і мае структуру, адваротную да поля вярчальных паскарэнняў (рыс. 7). Эквіславыя лініі абазначаны літарай Φ'_i . Найбольшага значэння інтэнсіўнасць поля вярчальных сіл інерцыі дасягае ў пункце A : $\Phi'_A = 2m'\varepsilon r$. Пры нераўнамерным качэнні галоўны вектар сіл інерцыі роўны:

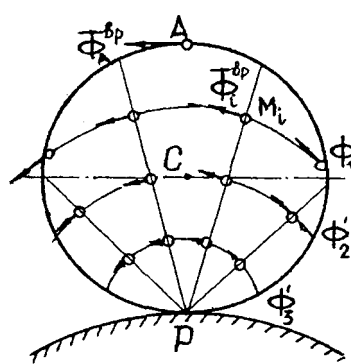
$$\vec{\Phi}_C = \vec{\Phi}_C^{\text{адц}} + \vec{\Phi}_C^{\text{вр}},$$

дзе $\Phi_C^{\text{адц}} = ma_C^{\text{адц}}$, $\Phi_C^{\text{вр}} = ma_C^{\text{вр}}$, $a_C^{\text{адц}} = \omega^2 \cdot CQ_0$, $a_C^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot CP$. Вектары $\vec{\Phi}_C^{\text{вр}}$ і $\vec{\Phi}_C^{\text{адц}}$ узаемна перпендыкулярны. Галоўны момант вярчальных сіл інерцыі адносна пункта P ва ўсіх прыватных выпадках знаходзіцца па формуле:

$$M_P(\vec{\Phi}_i^{\text{вр}}) = \frac{3}{2} mr^2 \varepsilon.$$



Рыс. 6



Рыс. 7

Заклучэнне. Прывядзем асноўныя рэзультаты аналізу палёў сіл інерцыі.

1. Пры раўнамерным качэнні цыліндра па плоскасці, як і ў выпадку раўнамернага вярчальнага руху вакол цэнтральнай восі, утвараецца восесіметрычнае поле адцэнтрабежных сіл з абмежаваным значэннем яго максімальнай інтэнсіўнасці. Галоўны вектар і галоўны момант сіл інерцыі роўны нулю. У дыяметральным сячэнні цыліндра дзейнічае сіла $\Phi_C = \frac{2}{3} \rho l r^3 \omega^2$, якая імкнецца яго раскалоць.

2. Пры раўнамерным качэнні цыліндра па выпуклай паверхні ствараецца невосесіметрычнае поле адцэнтрабежных сіл інерцыі, максімальная інтэнсіўнасць якога ў два разы большая, чым у выпадку раўнамернага вярчальнага руху. Галоўны вектар сіл інерцыі накіраваны ў бок знешняй нармалі да траекторыі цэнтра мас цыліндра і знаходзіцца па формуле: $\Phi_C = \alpha m r \omega^2$, дзе пры $r = \text{const}$ $0 < \alpha < 1$. Галоўны момант роўны нулю.

3. У выпадку раўнамернага качэння цыліндра па ўвагнутай паверхні інтэнсіўнасць цэнтральнага поля сіл інерцыі пры набліжэнні цэнтра крывізны паверхні качэння да восі цыліндра неабмежавана ўзрастае (пры $\omega = \text{const}$). Гэтак жа змяняецца і галоўны вектар Φ_C .

4. Пры нераўнамерным качэнні цыліндра для даследавання палёў сіл інерцыі мэта-згодна прымяняць метады двух цэнтраў: цэнтра адцэнтрабежных сіл Q_0 і цэнтра вярчальных сіл P . Тады інтэнсіўнасць поля сіл інерцыі знаходзіцца шляхам суперпазіцыі двух цэнтральных палёў.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика изучения кинематических характеристик качения колеса / С. И. Русан // Теоретическая и прикладная механика. Межведомственный сборник научно-методических статей. – 2004. – № 17. – С. 174 – 178.

АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА И ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ КОЛЛИЗИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТРЕХ ПЛАНАРНЫХ ПОЗИЦИОНЕРОВ НА ОДНОМ СТАТОРЕ

В.В. Поляковский, В.В. Жарский, Г.Н. Алехнович

The motion program building approach the goal of which is collateral control of several actuators bringing the affix the desired dynamical and accuracy properties, should be implemented in the way to avoid actuators collisions. The algorithm which enables this is described in the paper. It is based on a geometrical representation of actuators movement and takes into consideration the priority system which is also dynamically built to furnish the system the maximal productivity.

Расчетная модель системы перемещения построенная на трех планарных ЛШД, в дальнейшем называемых координатными позиционерами КП1, КП2 и КП3 показано на рис. 1.

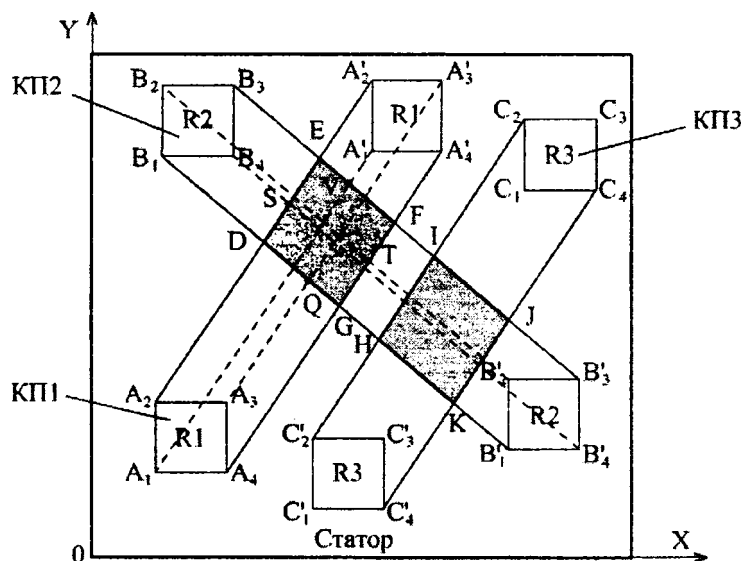


Рис. 1. Расчетная модель анализа коллизий трех планарных позиционеров на одном статоре

Внешний прямоугольный контур, показанный на рис.1, определяет рабочую зону на статоре, выход за границы которой в процессе перемещения позиционеров не возможен. Прямоугольники $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ определяют область, которую в начальный или в данный момент времени занимают соответственно КП1, КП2 и КП3. Квадратные, а в общем случае прямоугольные области позиционеров, это по сути дела их проекции на рабочую плоскость статора. Прямоугольники $A'_1A'_2A'_3A'_4$, $B'_1B'_2B'_3B'_4$ и $C'_1C'_2C'_3C'_4$ определяют геометрическое место конечного положения соответственно КП1, КП2 и КП3.

Предполагается, что проекции инструмента, в общем случае инструментальных роботов R1, R2, R3, установленных соответственно на КП1, КП2 и КП3, не выходят за контуры площади позиционера.

В дальнейшем в работе будет рассматриваться геометро-кинематический анализ движения трех планарных позиционеров на одном статоре при их линейном перемещении между соответствующими двумя точками с постоянной скоростью [2]. Геометрически зоны перемещения позиционеров в работе принято описывать их так называемыми шлейфами, которые представляют собой геометрическую область, в которой осуществляется движение позиционера при переходе из начального положения в конечное. Так, для позиционера КП1 в соответствии с рис. 1 шлейфом является фигура в виде шестиугольника $A_1A_2A'_2A'_3A'_4A_4$.

Геометрическая область, образованная пересечением шлейфов позиционеров является зоной, в которой возможно столкновение позиционеров (общая зона). Так, для КП1 и КП2 общей зоной является четырехугольник DEFG.

Из анализа расчетной модели следует, что при совместном движении координатных позиционеров КП1, КП2 и КП3 возможны различные ситуации:

– коллизии в одновременном движении позиционеров полностью отсутствуют, когда шлейфы движения, построенные по начальным и конечным положениям позиционеров не пересекаются;

– коллизии в движении позиционеров возможны, если шлейфы пересекаются. В этом случае для бесколлизийного движения позиционеров необходимо формировать и обеспечивать при движении необходимые условия, построенные на правиле приоритетов, устанавливающим очередность вхождения позиционеров КП1, КП2 и КП3 для каждой пары позиционеров в их общую зону;

– особые случаи коллизий, которые включают критические зоны, возникающие при некоторых частных конфигурациях, при которых полное движение позиционеров от начальной до конечной точки не возможно, или возможно при особых условиях.

Разработанный вычислительный алгоритм анализа и предотвращения коллизий основан на том, что каждый позиционер представляется его проекцией на плоскость статора в виде геометрического места, ограниченного подвижным четырехугольником.

Не нарушая общности решения поставленной задачи по предотвращению коллизий, нами разработан и реализован алгоритм анализа коллизий трех планарных позиционеров КП1, КП2 и КП3, имеющих форму квадрата с длиной стороны L , при их прямолинейном движении между начальными и конечными положениями.

Параметрические уравнение перемещения любой точки позиционера в выбранной системе координат XOY (рис.2) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t, \end{cases} \quad (1)$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – скорость позиционера на траектории в виде прямой.

При этом уравнение траектории будет иметь вид:

$$y = k \cdot x + b, \quad (2)$$

где $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_x}{v_y}$ – угловой коэффициент траектории движения.

Если заданы начальная и конечная точки перемещения, то постоянные параметры прямой (2) рассчитываются по формулам:

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad b = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0, \quad (3)$$

где x_0, y_0 – координаты начальной точки перемещения; x_1, y_1 – координаты конечной точки перемещения.

В этом случае значения v_x и v_y будут определяться по формулам:

$$\begin{cases} v_x = v \cdot \cos \varphi \\ v_y = v \cdot \sin \varphi, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} \arctg\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right), \text{ если } y_1 - y_0 \geq 0, \\ 180 + \arctg\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right), \text{ если } y_1 - y_0 < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, по заданным начальным и конечным точкам движения позиционеров однозначно определяем уравнения их траекторий.

Так, для позиционера КП1 уравнение траектории будет иметь вид:

$$y = k_1 \cdot x + b_1, \quad (6)$$

где коэффициенты k_1 и b_1 определяются по формулам (3).

Это уравнение можно записать в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0^{(1)} + v_x^{(1)}t, \\ y = y_0^{(1)} + v_y^{(1)}t, \end{cases} \quad (7)$$

где $v_x^{(1)}$ и $v_y^{(1)}$ определяются по формуле (4).

Аналогичные выражения можно записать и для траекторий перемещений позиционеров КП2 КП3.

Как следует из рис. 1, областью, в которой возможно столкновение позиционеров является геометрическое место пересечения их шлейфов движения. Так, общей зоной для позиционеров КП1 и КП2 является четырехугольник DEFG, для КП2 и КП3 – HIJK. При движении позиционеров производится анализ их местоположения относительно этих участков. При этом алгоритм построен таким образом, что при нахождении одного из позиционеров в общей зоне другому вход в нее запрещен. Далее алгоритм анализа и предотвращения коллизий рассмотрим на примере движения позиционеров КП1 и КП2.

Для позиционера КП1 точкой входа в запрещенную зону является точка Q, точкой выхода – точка V. Позиционер КП2 входит в запрещенную зону в точке S и выходит в точке T. Координаты этих точек определяются из следующих выражений:

$$X_S = \frac{b_{B_4B'_4} - b_{A_2A'_2}}{k_1 - k_2}, \quad Y_S = \frac{b_{B_4B'_4} - b_{A_2A'_2}}{k_1 - k_2} \cdot k_1 + b_{A_2A'_2}; \quad (8)$$

$$X_T = \frac{b_{B_2B'_2} - b_{A_1A'_1}}{k_1 - k_2}, \quad Y_T = \frac{b_{B_2B'_2} - b_{A_1A'_1}}{k_1 - k_2} \cdot k_1 + b_{A_1A'_1}; \quad (9)$$

$$X_Q = \frac{b_{A_3A'_3} - b_{B_1B'_1}}{k_2 - k_1}, \quad Y_Q = \frac{b_{A_3A'_3} - b_{B_1B'_1}}{k_2 - k_1} \cdot k_2 + b_{B_1B'_1}; \quad (10)$$

$$X_V = \frac{b_{A_1A'_1} - b_{B_3B'_3}}{k_2 - k_1}, \quad Y_V = \frac{b_{A_1A'_1} - b_{B_3B'_3}}{k_2 - k_1} \cdot k_2 + b_{B_3B'_3}; \quad (11)$$

где X_S, Y_S – координаты точки S; X_T, Y_T – координаты точки T; X_Q, Y_Q – координаты точки Q; X_V, Y_V – координаты точки V;

$b_{A_1A'_1}, b_{A_2A'_2}, b_{A_3A'_3}, b_{A_4A'_4}, b_{B_1B'_1}, b_{B_2B'_2}, b_{B_3B'_3}, b_{B_4B'_4}$ – постоянные параметры реализуемой прямолинейной траектории, выражаемые через прямые $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, A_4A'_4, B_1B'_1, B_2B'_2, B_3B'_3, B_4B'_4$ соответственно.

k_1, k_2 – угловые коэффициенты реализуемой прямолинейной траектории позиционеров КП1 и КП2 соответственно.

При разработке алгоритма принято следующее правило приоритетов: преимущество при движении имеет тот позиционер, который первым войдет в общую зону. Для определения моментов времени, в которые позиционеры войдут в общую зону, используем следующие соотношения:

$$t_{1in} = \frac{\sqrt{(X_Q - X_{A_3})^2 + (Y_Q - Y_{A_3})^2}}{V_1}, \quad t_{2in} = \frac{\sqrt{(X_S - X_{B_4})^2 + (Y_S - Y_{B_4})^2}}{V_2}; \quad (12)$$

где X_{A_3}, Y_{A_3} – координаты точки A_3 ; X_{B_4}, Y_{B_4} – координаты точки B_4 ;

V_1, V_2 – скорость движения позиционеров КП1 и КП2 соответственно.

Сравнивая значения t_{1in} и t_{2in} , определяем позиционер, который имеет приоритет. Предположим, что $t_{1in} < t_{2in}$. Тогда приоритет движения имеет позиционер КП1, т.е. он может двигаться без остановок.

Позиционер КП2 не может войти в общую зону пока в ней находится позиционер КП1. Момент времени, в который позиционер КП1 покинет общую зону определяется из следующего соотношения:

$$t_{1out} = \frac{\sqrt{(X_{A_1} - X_V)^2 + (Y_{A_1} - Y_V)^2}}{V_1}. \quad (13)$$

Если $t_{2in} < t_{1in}$, то позиционер КП2 должен остановиться на время

$$\Delta t = t_{out1} - t_{in2}. \quad (14)$$

В момент времени $t = t_{in2} + \Delta t$ позиционер КП2 может продолжить свое движение.

Аналогично производится расчет временных характеристик входа и выхода позиционеров КП1, КП2 и КП3 в другие общие зоны. Дальнейший совместный анализ этих временных характеристик позволяет формировать диаграмму движения $S(t)$ в виде графика перемещения соответствующего позиционера во времени.

Представленный выше алгоритм был использован при разработке программы интерактивной визуализации бесколлизийного движения трех планарных позиционеров на одном статоре. Интерактивная визуализация была разработана в среде Macromedia Flash MX 2004. Интерфейс разработанной программы представлен на рис.2.

Движение позиционеров А, В, С осуществляется в пределах прямоугольной рабочей зоны – статора. Начальное и конечное положение позиционеров на статоре задается при помощи мыши. Для задания скорости позиционеров имеются специальные окна. В нижнем правом углу в реальном масштабе времени синхронно с перемещениями позиционеров отображаются их циклограмма движения, отражающая перемещение позиционеров относительно их начальной точки движения.

Интерактивная работа пользователя с программой визуализации осуществляется в такой последовательности:

- пользователь задает скорости движения позиционеров;
- устанавливает с помощью мыши начальные и конечные положения позиционеров А, В, С на рабочем поле статора;
- нажатием на кнопку Play активизируется визуализация циклического движения позиционеров из начальных положений в конечное при управлении движением по разработанному алгоритму предотвращения коллизий, который формирует текущее состояние позиционеров и согласованных диаграмм движения.

Избежание коллизий трех индукторов на статоре

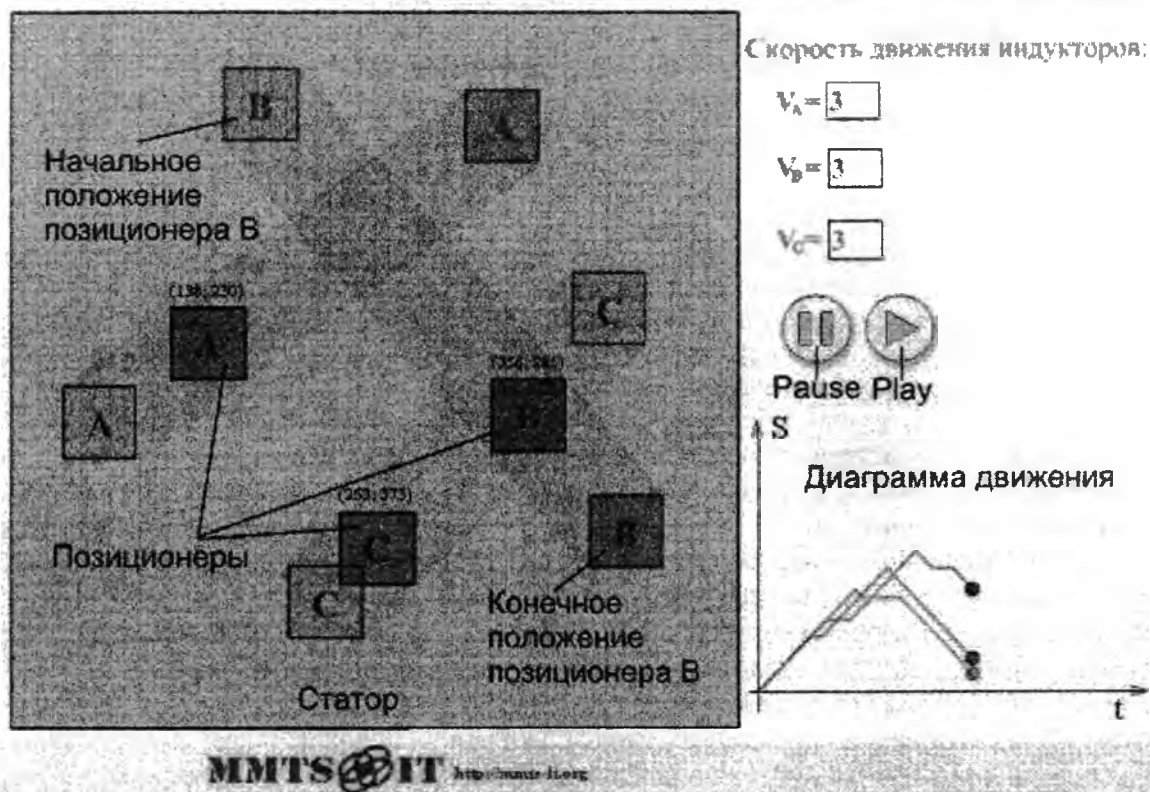


Рис. 2. Интерфейс интерактивной визуализации для исследования трех планарных ЛШД на одном статоре

Разработанная программа интерактивной визуализации предназначена для программирования бесколлизийной работы трех планарных позиционеров на одном статоре. При некоторой доработки разработанная программа на базе алгоритма бесколлизийного движения трех планарных позиционеров может быть встроена в общий программный комплекс системы управления класса оборудования, в котором используется совместная работа трех планарных позиционеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Ahranovich, S.Karpovich, K.Zimmermann, J.Zentner Multicoordinate Positioning System for Industrial Equipment Design Method // Proceedings of 51st International Scientific Colloquium Ilmenau (Germany), September 11-15, 2006 TU-Ilmenau, 2006. – p. 139–140
2. Онегин, Е.Е., Зенькович, В.А., Битно, Л.Г. Автоматическая сборка ИС – Минск: Выш. школа, 1990. – 383 с.
3. Межинский, Ю.С. Построение систем перемещения для гибкого автоматизированного оборудования – Минск: «Технопринт», 2002. – 120 с.

ИДЕЛИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ CALS-ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Чигарева О.А., Чигарев В.А.

Доказано [1], что прибыли предприятий напрямую зависят от динамических характеристик производства – способности изменять номенклатуру и объемы производимой продукции (по отношению к динамическим характеристикам спроса, сферы реализации, конкурентов и поставщиков ресурсов). Гибкие системы производства, поддерживаемые компьютерными сетевыми системами, позволяют сделать экономически выгодными производство даже единичных изделий [2].

С учетом этого одним из перспективных средств повышения конкурентоспособности отечественных машиностроительных предприятий является внедрение CALS-технологий (англ. *Continuous Acquisition and Life cycle Support* – непрерывная информационная поддержка поставок и жизненного цикла) на основе реинжиниринга и анализа эффективности бизнес-процессов предприятия.

Ранее существовало представление о CALS-технологиях, как о чисто теоретическом процессе планирования, не связанном с фактическим процессом производства. Это объясняется [3] невозможностью внедрения на тот момент сквозного компьютеризированного планирования и проектирования продукции. Основная сложность заключалась в отсутствии единой платформы разработки для предприятий и, как следствие, в невозможности унифицировать форматы передачи данных.

На данный момент существует множество специализированных программных продуктов, предназначенных для внедрения CALS-технологий на предприятии любой направленности и масштаба. Современное понятие внедрения CALS-технологий подразумевает объединение всего предприятия в единую информационную сеть с единой для всех программных пакетов платформой и едиными форматами передачи данных.

В основе современного внедрения CALS-технологий лежит комплексное применение на всех этапах производственного цикла продукции информационных систем, покрывающих два основных функциональных направления:

- 1) инженерное;
- 2) управленческое и экономическое.

Системообразующая и интегрирующая роль в информационном пространстве предприятия принадлежит двум типам информационных систем – ERP (англ. - *Enterprise Resource Planning*) и PDM (англ. – *Product Data Management*). ERP – системы объединяют подсистемы, обеспечивающие управленческую и экономическую функциональность (управление материальными потоками, управление финансовыми потоками, учет затрат, ведение бухгалтерского учета и др.) PDM – системы обеспечивают интеграцию инженерного программного обеспечения (CAD/CAM/CAE) в рамках единого информационного пространства предприятия.

Благодаря интеграции таких систем в производство можно достичь:

- повышения производительности;
- гибкости производственных процессов;
- уменьшения производственных затрат;
- стабильность и качества производимой продукции;
- “понимания” процесса в целом;
- уменьшения времени производственного цикла;

- своевременного обнаружения источников брака (производственного несоответствия).

Это достижимо благодаря:

- объединению в общую информационную сеть всех уровней предприятия;
- возможности применению устройств и производственных систем в любой последовательности;
- компьютерное управление процессами обработки, монтажа и транспортировки материала;
- обмен информацией и данными через общий интерфейс предприятия.

Внедрение CALS-технологий происходит с учётом всех особенностей структуры предприятия. Следовательно, сколько предприятий, столько и различных архитектур PDM/ERP.

Данная статья является обзорной – в ней рассматривается идеализированная схема организации CALS-технологии для машиностроительного предприятия. Схематично представленные ключевые моменты функционирования CALS-технологии на производстве помогут в понимании такого рода систем. В большей степени нас интересуют компоненты PDM системы – технологии конструирования продукции и организации производственного процесса. ERP система будет рассматриваться только с точки зрения взаимодействия с PDM.

Само внедрение современных CALS-технологий на предприятии становится возможным благодаря сетевому объединению (сетизации) единичных компьютеров и их полной интеграции с процессом производства. Такое объединение называется CIM (англ. *Computer Integrated Manufacturing* – компьютерное интегрированное производство). Система CIM включает все действия поддерживаемые компьютерами, связанные с производством: от конструирования, производства продукции и до контроля качества рис. 1.

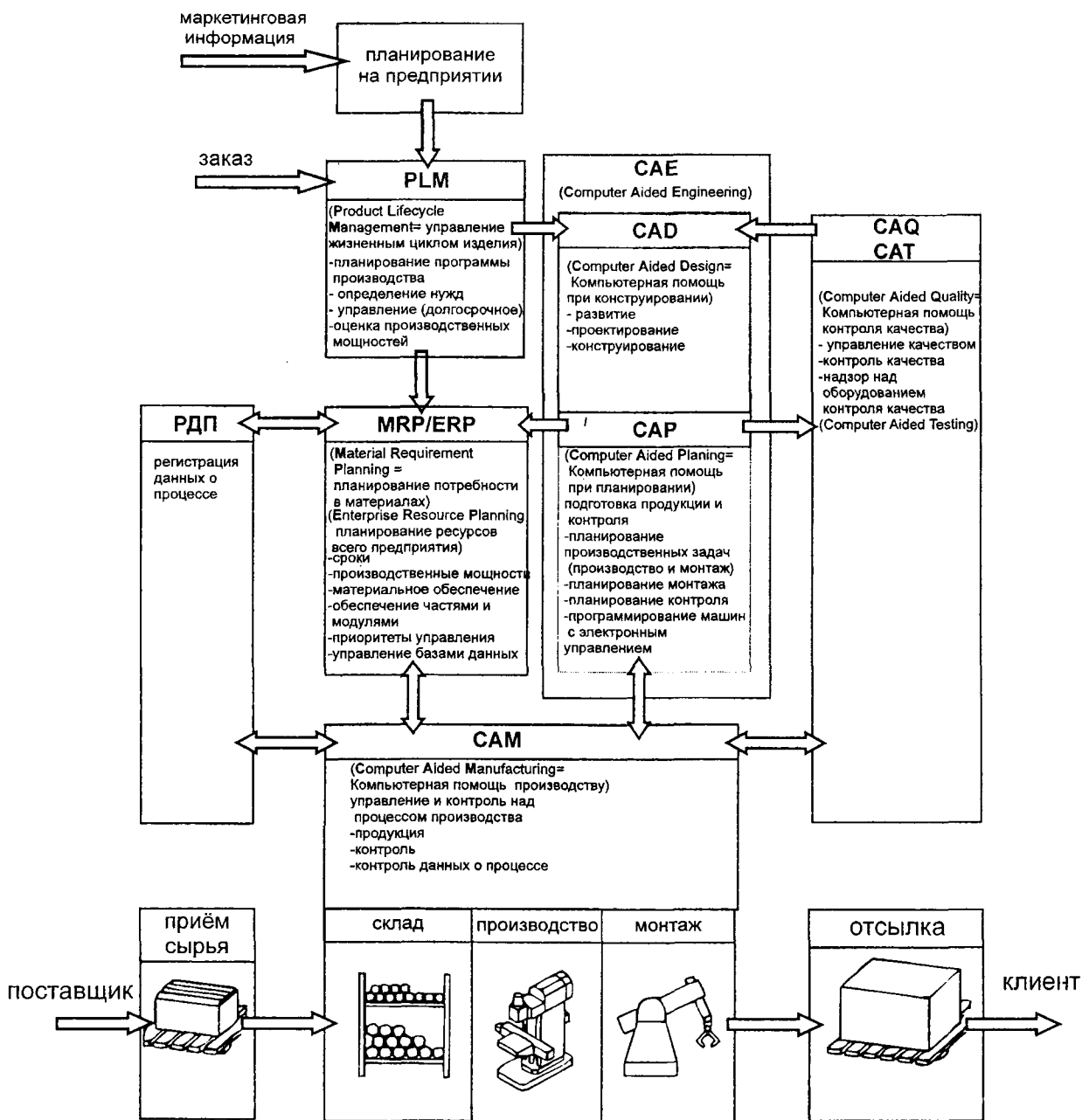


Рис. 1. Обмен информацией между элементами CALS-технологии посредством CIM [4]

Структура компьютерных сетей сильно зависит от факторов определяющих деятельность предприятия, в основном от ассортимента производимой продукции и структуры организации предприятия. Поэтому, не существует универсальной структуры сети. Каждая сеть уникальна и приспособляется для специфических нужд предприятия. Однако каждая сеть обладает присущими всем корпоративным сетям элементами. А именно, общей для всех компьютеров базой данных и иерархическим принципом их взаимодействия.

Чтобы добиться высокой эффективности системы, данные о процессе, которые на определенной фазе были записаны в базу данных, должны быть доступны для всех последующих уровней процесса производства. Решением этой задачи и определяющим фактором для успеха предприятия является создание интерфейса между всеми компонентами сети.

Благодаря ему происходит эффективный обмен данными между всеми элементами системы от самого начала (приёма сырья) и до самого конца (высылки готовой продукции). Он

позволяет информировать все элементы производства в каждый момент времени в нужной мере. Чаще всего интерфейс разрабатывается организацией, которая внедряет CALS-технологии на производстве.

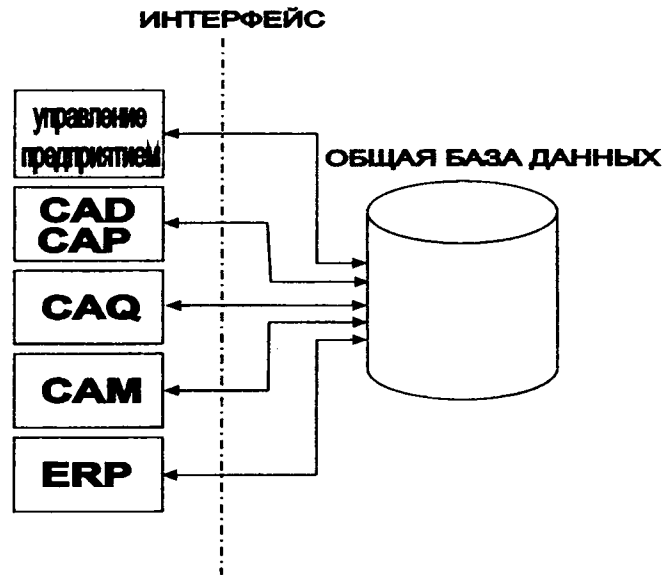


Рис. 2. Взаимодействие всех уровней через интерфейс

Другим важным моментом внедрения CALS-технологии является создание системы сбора данных о производственном процессе. Эти данные собираются со всех производственных уровней и отправляются на компьютер, который регистрирует их. Общая сеть позволяет соединить все отделы предприятия, в том числе отдел кадров, бухгалтерию и администрацию. Благодаря этому управление предприятия имеет гарантированный доступ к наиболее актуальной и исчерпывающей информации о состоянии всех происходящих на предприятии процессов.

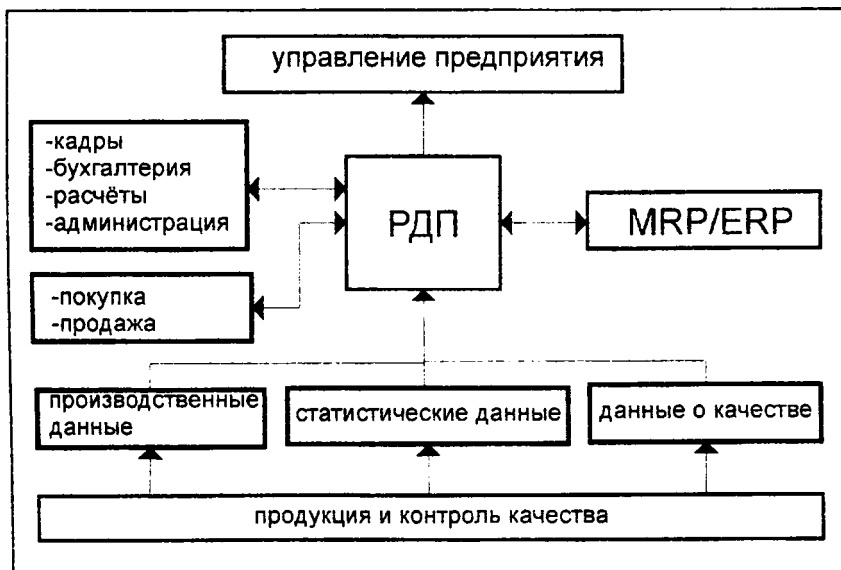


Рис. 3. Интеграция системы РДП (Регистрация Данных о Процессе)

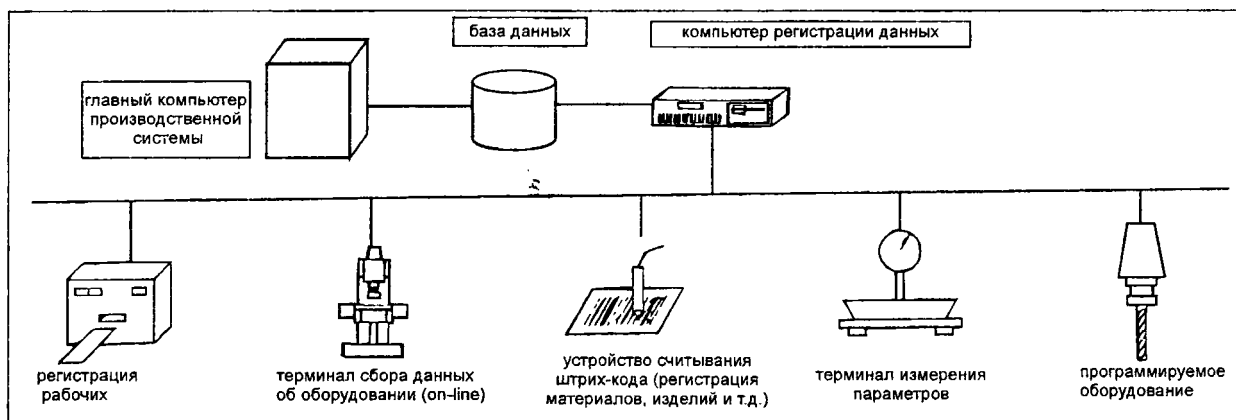


Рис. 4. Регистрация данных через терминалы в режиме on-line

Ниже рассматриваются технологии проектирования и планирования продукции в последовательности соответствующей иерархии распространения данных:

PLM (англ. *Product Lifecycle Management*) — технология управления жизненным циклом изделий. Организационно-техническая система обеспечивающая управление всей информацией об изделии и связанных с ним процессах на протяжении всего его жизненного цикла, начиная с проектирования и производства до снятия с эксплуатации. При этом в качестве изделий могут рассматриваться различные сложные технические объекты (корабли и автомобили, самолеты и ракеты, компьютерные сети и др.).

CAE (англ. — *Computer-Aided Engineering*) — программный пакет, предназначенный для 3-мерного моделирования различными элементами при проектировании различных изделий. Алгоритмически основан на анализе методом конечных элементов. При проектировании изделия данные, полученные при моделировании в CAE, служат основой для изготовления проектной документации в CAD и подготовки производства в CAP, а за тем в CAM (например, генерацию программ обработки деталей для станков с ЧПУ).

CAD (англ. *Computer-Aided Design*) — программный пакет, предназначенный для создания чертежей, конструкторской и/или технологической документации и/или 3D моделей. В современных системах проектирования CAD получает данные из систем твёрдотельного моделирования CAE, и передаёт в CAP для подготовки производства (например, генерации программ обработки деталей для станков с ЧПУ или ГАПС(Гибких Автоматизированных Производственных Систем)).

Функциональная схема любой CAD системы, не зависимо от ориентации на определённую сферу применения, устроена одинаково (рис. 5). Геометрический модуль ответствен за проведение всех вычислений геометрического характера. Результат обработки — это виртуальный образ запроектированного предмета, а так же цифровые данные, преобразованные в NC (англ. — *Numerical Control*) программу управления станками и оборудованием.



Рис. 5. Функциональное устройство CAD систем

CAP (англ. – *Computer-Aided Planing*) – программный пакет, предназначенный для планирования производственного процесса в целом. Является аналитическим центром создания технологического плана производства продукции.

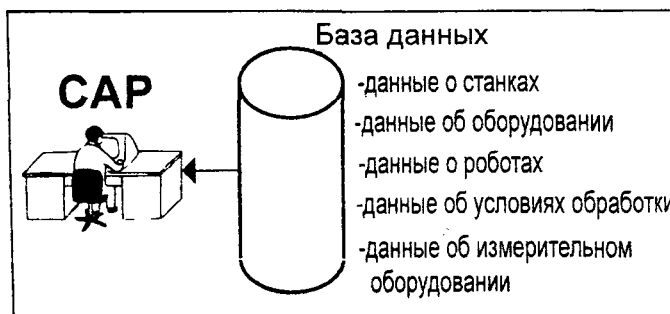


Рис. 6. Данные для CAP из общей базы данных

В определённых случаях установка пакета САР не требуется, так как установленная версия САД обладает необходимой, для непосредственного взаимодействия с САМ, функциональностью. Чаще всего САР применяется на очень больших предприятиях с большим количеством адаптивных сборочных линий и видов выпускаемой продукции.

Данные относительно геометрии и составных частей изделия, необходимые для подготовки технологического процесса получают из системы САД. На основании этих данных генерируются команды и инструкции для процессов производства и монтажа. Появляются планы по обработке, монтажу, использованию оборудования и контролю качества.

Другой важной функцией САР является модификация производственных линий в случае изменения сроков или производственных мощностей, и как следствие, изменение способов и последовательности производства.

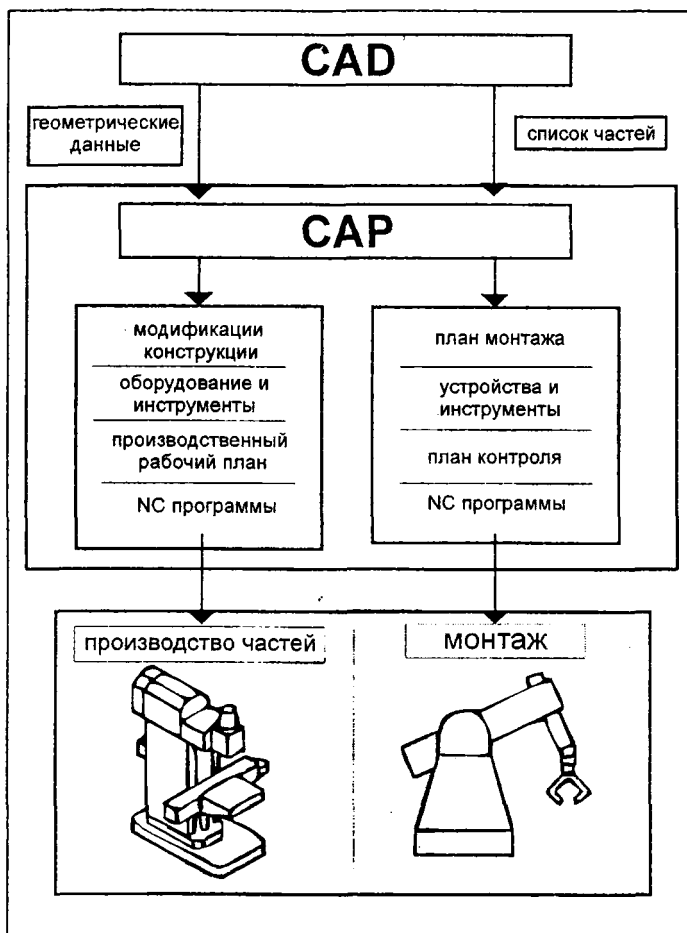


Рис. 7. Подготовки плана производства изделия

САМ (англ. - *Computer-Aided Manufacturing*) – программный пакет, предназначенный для программирования всех устройств предприятия. Обеспечивает комплексное использование компьютерной техники во всём производственном процессе.

Важнейшие задачи системы САМ:

- контакт с системами вышестоящими (как САР) и нижестоящими (как DNC);
- связь с операционными базами данных;
- контроль над сроками и производственными мощностями;
- контроль над ходом процесса производства;
- контроль над готовностью устройств;

- контроль над процессом производства (например, вмешательство в случае изменения сроков – перегруппировка процесса производства);
 - мониторинг актуального состояния продукции;
 - обеспечение движения изделий и уборки отходов производства.
- Такова схема взаимодействия САМ с элементами проектирования

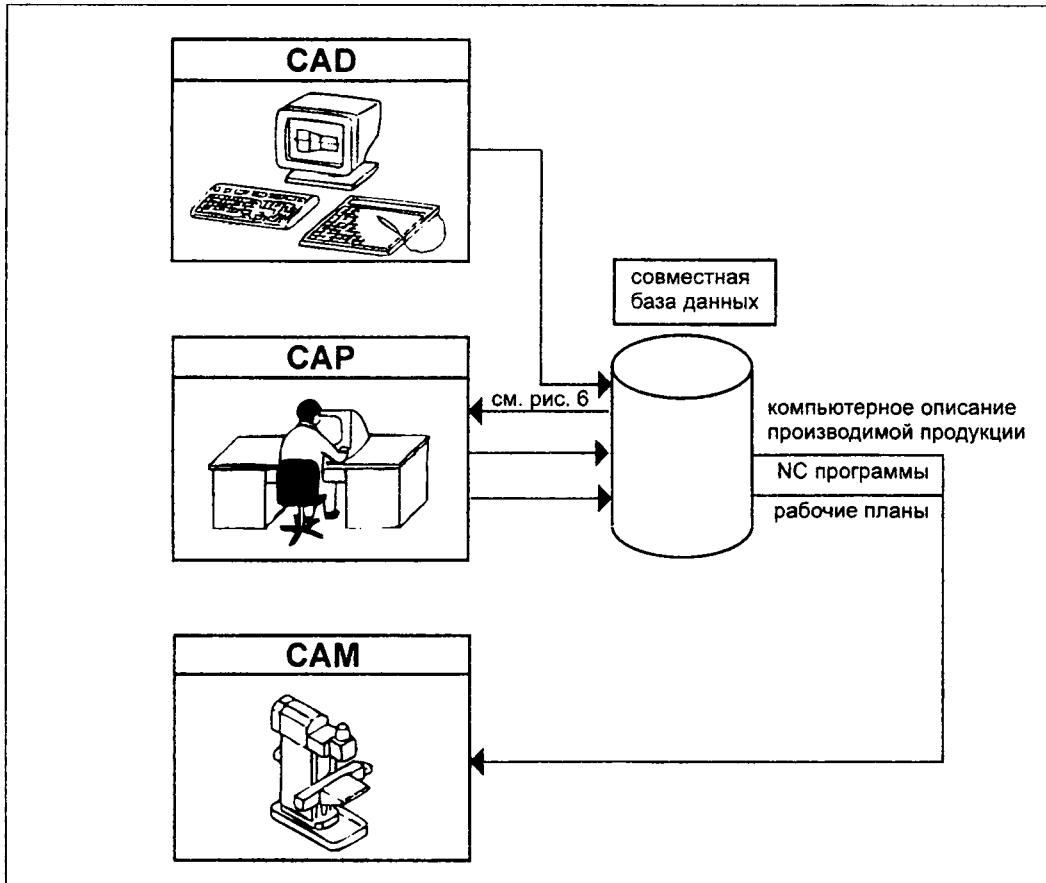


Рис. 8. Связь CAD с CAM

Таким образом, посредством совместной базы данных и уровня CAP, происходит трансформация виртуальной модели в готовый продукт.

Большая система САМ обычно использует один главный компьютер, ответственный за весь процесс производства, и множество централизованных рабочих станций. В случае аварии главного компьютера его задание могут принять (однако, только в ограниченной мере) рабочие станции, используя свои подсистемы. Например, компьютер DNC (англ. *Distributed Numerical Control* – Прямое Числовое программное Управление), хранит только NC программы, администрирует ими, отсылает оборудованию и контролирует работу этой подсистемы. Главный компьютер ответственен за весь процесс производства, управляет и контролирует его ход, пользуясь данными из CAD/CAP, а так же частично из ERP/MRP.

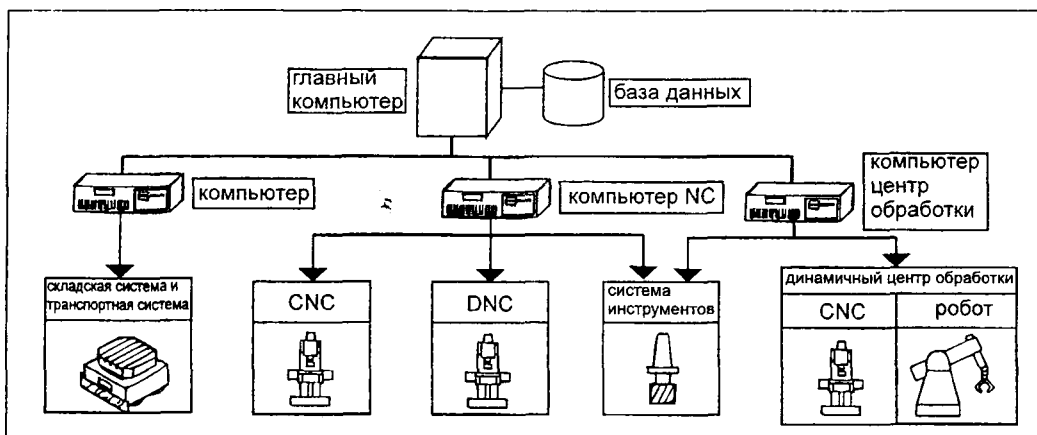


Рис. 9. Система CAM с главным компьютером. CNC (англ. Computer Numerical Control – Числовое Программное Управление (ЧПУ))

Работа CAM тесно связана с работой другого программного пакета CAQ/CAT. CAM и CAQ работают в постоянном взаимодействии друг с другом.

CAQ (англ. – Computer-Aided Quality Assurance) – система автоматизированного контроля качества. Контроль производится на каждом этапе производства. CAT (англ. – Computer-Aided Testing) – система компьютеризированного тестирования конечного продукта, чаще всего является частью системы CAQ.

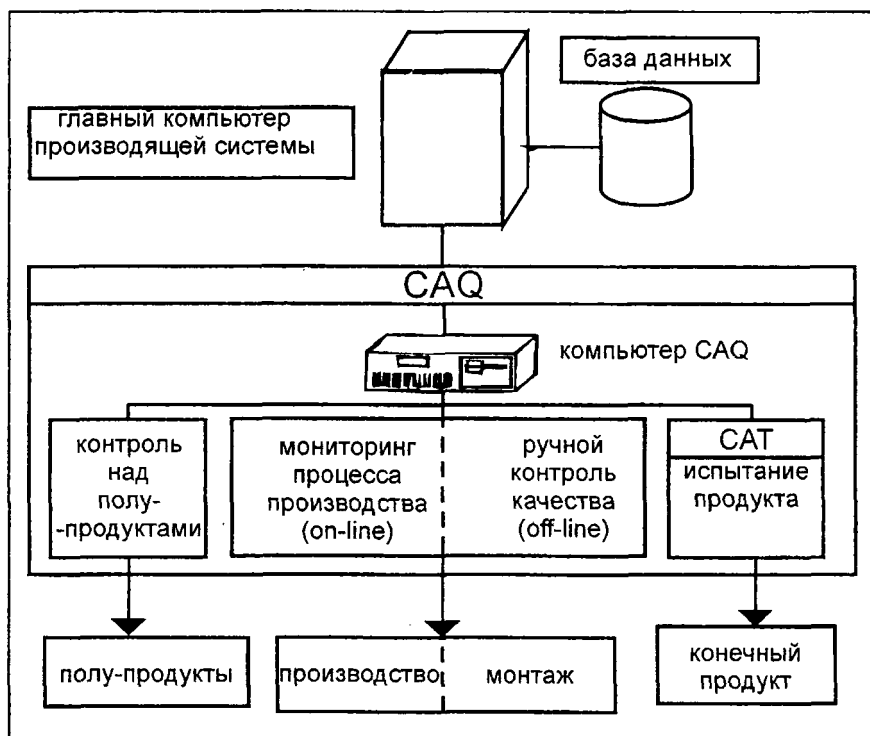


Рис. 10. Полный комплекс обеспечения качества. Полу-продукт – незавершённое изделие

ERP (англ. – *Enterprise Resource Planning*)/MRP (англ. – *Material Requirement Planning*) – информационные системы планирования ресурсов предприятия. Основная задача, которых автоматизация бизнес процессов предприятия, а также управленческих функций. Схематично модель большинства ERP/MRP-систем можно описать следующим образом: в единую базу данных поступают все первичные сведения о деятельности предприятия, и на их основе программа строит различные отчеты, графики, прогнозы, словом, предоставляет полноценную

аналитическую информацию. Хозяйственные операции регистрируются в системе один раз, и их влияние на результативность работы предприятия можно оценить сразу, получив соответствующий отчет. Основная ценность ERP/MRP-системы – в обеспечении информационной интеграции всех функциональных областей деятельности предприятия.

Современная ERP/MRP система включает в себя следующие подсистемы:

- управления запасами;
- управления снабжением;
- управления сбытом;
- управления производством;
- планирование;
- управления сервисным обслуживанием;
- управления цепочками поставок;
- управления финансами.

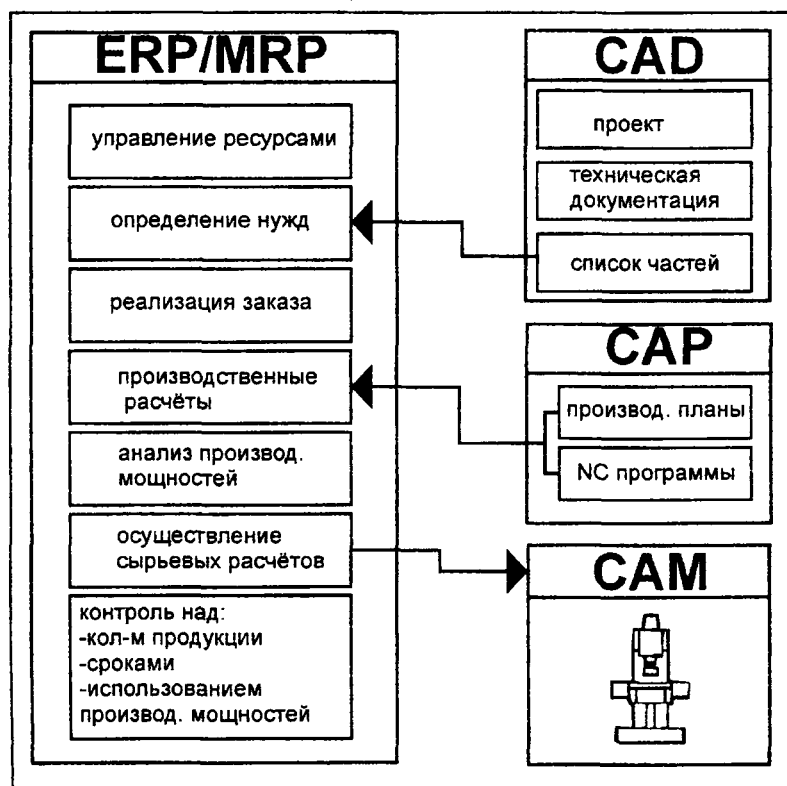


Рис. 11. Обмен информацией системы ERP/MRP с CAD/CAP/CAM

ЛИТЕРАТУРА

1. Корпоративный менеджмент. Лекции по ERP / И.В. Балахонова, С.А. Волчкова, В.А. Копитунов ; www.cfin.ru
2. Внедрение CALS-технологий / Г. Мухтарова; журнал “Директор-инфо” (№ 32, 2005).
3. По результатам проведения Министерством Промышленности РБ семинара “CALS-технологии”.
4. Современные системы управления / В. Дорф ; изд. “Лаборатория базовых знаний”, Москва 2006 г.
5. Автоматизация производства / В.Н. Брюханов, А.Г. Схиртладзе, В.П. Вороненко. – СПб.: Высш. школа, 2006.
6. Автоматизация производства / А.А. Шапарин, А.Д. Чудаков. – М.: Академия, 2005.

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕСА НА РЕЛЬСЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВАГОНА ПО БЕСШПАЛЬНОМУ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМУ ПУТИ

Василевич Ю.В. , Неумержицкий В.В.

Is investigated the stability of wheel on the rail during the motion of railroad car with respect to the sleeperless track railway line.

Экспериментальные исследования, посвященные изучению движения экипажей в кривых и прямых участках пути, свидетельствуют о том, что наибольшие горизонтальные поперечные усилия передаются колесами рельсам на кривых участках пути. Упомянутые усилия, особенно в кривых малого радиуса, могут значительно превосходить нагрузку, возникающую при вилянии экипажа на прямых участках. К тому же, если при извилистом движении экипажа эти силы возникают на коротких отрезках пути, где гребни колес набегают на рельсы, в кривых с радиусом менее 800–600 м гребни некоторых колес при их движении прижаты к наружному рельсу почти на всем протяжении кривой [1; 2]. Действие интенсивной нагрузки на верхнее строение пути (ВСП) способствует образованию в рельсах дефектов контактно-усталостного происхождения. Как отмечено в [1; 2], подавляющее количество аварий и крушений поездов, обусловленных недостатками прочности конструкций пути или подвижного состава, а также потерей их устойчивости, происходит на кривых участках.

Потеря устойчивости колеса на рельсе происходит тогда, когда сила бокового прижатия гребня к рельсу Y (рис. 1), а значит сила трения гребня о рельс становится настолько большой, что катящееся колесо своей поверхностью катания начинает подниматься над поверхностью головки рельса, опираясь гребнем на выкружку его головки, а вертикальное давление колеса на рельс P_1 по своей величине не может преодолеть это трение и прижать колесо обратно к поверхности катания головки рельса.

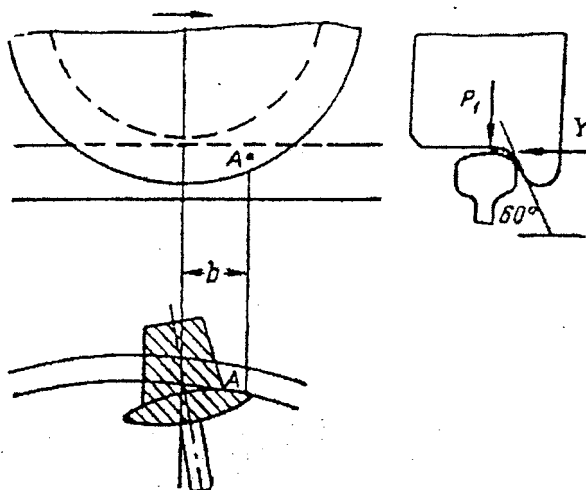


Рис. 1. Начальная стадия вкатывания колеса на рельс

Вкатывание гребня колеса на рельс может не дойти до критического момента (т.е. схода с рельса), если время неблагоприятного соотношения между силами P_1 и Y будет кратковременным; при этом вертикальная сила должна возрасти, а сила бокового прижатия гребня к колесу уменьшиться. В этом случае начавшее подниматься колесо опустится на рельс раньше, чем гребень вкатится на рельс.

Горизонтальные поперечные силы в прямых участках пути возникают вследствие виляния вагона в колее; на участках в кривой – из-за возникающих поперечных боковых сил при вписывании его в кривую. Поперечные силы достигают максимальных значений при взаимодействии направляющих колес с рельсами.

Поскольку направляющая колесная пара движется под углом к радиусу кривой, то, колесо, катящееся по наружному рельсу, набегает на него (рис. 1). Вероятность схода колеса с рельса увеличивается с ростом отношения силы бокового прижатия гребня к рельсу к вертикальному давлению колеса на рельс.

Потеря устойчивости колеса на рельсе может произойти из-за плохого содержания ВСП в кривой. Отступление от технических норм содержания пути на участках в кривой приводит к появлению сильных боковых толчков. Неровности пути в профиле способствуют созданию неблагоприятной ситуации при движении подвижного состава, когда толчки совпадают с некоторой разгрузкой колеса от вертикальной нагрузки. Разгрузка колеса увеличивается в случае большой неровности пути и жесткости рессор.

На устойчивость колеса на рельсе сильно влияет техническое состояние подвижного состава.

Исследуем движение экипажей по круговым кривым.

Рассмотрим движение вагона, имеющего две двухосные тележки, и определим силовую нагрузку на единицу подвижного состава, а также силы, действующие на направляющую колесную пару.

Пусть вертикальная нагрузка, состоящая из полезной нагрузки и тары и приходящаяся на одно колесо, равна $P_{бр}$. Тогда вертикальное давление колес вагона на рельсы будет $8P_{бр}$, а от одной колесной пары $2P_{бр}$.

Принято считать, что в прямых участках пути обе рельсовые нити загружены вертикальными силами одинаково. При движении подвижного состава по кривой возникает центробежная сила, направленная наружу колее. Указанная сила вызывает дополнительное воздействие колес на наружную рельсовую нить. В итоге рельсы наружной нити изнашиваются значительно быстрее внутренней рельсовой нити.

Как известно, центробежная сила

$$I = \frac{mv^2}{R},$$

где m и v – масса и скорость движения экипажа, R – радиус кривой.

Если в кривой оба рельса были установлены в одном уровне, то равнодействующая силы I и силы веса была бы направлена к наружному рельсу, что приводило бы к разгрузке внутреннего рельса и перегрузке наружного. Чтобы уменьшить силы на наружный рельс (следовательно, устранить его перегрузку), достичь равномерности износа рельсов обеих нитей и комфортабельности езды, наружный рельс возвышают в кривой на величину h .

В результате возвышения наружного рельса экипаж на пути несколько наклоняется к горизонту; часть силы веса H будет направлена внутрь кривой, т.е. в противоположную сторону действия центробежной силы. Все это способствует созданию одинаковой на рельс нагрузки. Следовательно, наклон экипажа способствует уравниванию центробежной силы $H / G = h/S_1$, где $G = 8P_{бр}$. S_1 – расстояние между осями рельсов. Исходя из требования выполнения равенства $I = H$, следует формула для расчета возвышения наружного рельса

$$h = 12,5 \frac{v^2}{R}, \quad (1)$$

В круговой кривой железнодорожного пути нормальная составляющая силы веса $N = G \cos \alpha = 8P_{бр.} \cos \alpha$. Нормально действующая к плоскости пути нагрузка, приходящаяся на одну колесную пару, равна $N / 4 = 2 P_{бр.} \cos \alpha$. Поскольку угол α весьма мал, то $\cos \alpha \approx 1$. Тогда $N / 4 = 2P_{бр.}$, т.е. будем считать, что на каждое колесо вагона приходится нормальная к пути нагрузка $P_{бр.}$

На вагон, движущийся со скоростью $v \neq v_{расч.}$, кроме вертикальной нагрузки, будут действовать боковые силы, направленные поперек пути: центробежная сила I и параллельная пути составляющая веса вагона H .

Центробежная сила, действующая на кузов и приложенная в центр его тяжести, рассчитывается по формуле

$$I_k = \frac{P_k v^2}{gR3,6^2}, \quad (2)$$

где P_k – вес кузова с грузом.

Поскольку
$$\frac{H_k}{P_k} = \frac{h}{S_1}, \quad \text{то} \quad H_k = \frac{P_k h}{S_1}. \quad (3)$$

Центробежная сила, действующая на тележку вагона и приложенная на уровне центров осей тележки, определяется по формуле

$$I_T = \frac{P_T v^2}{gR3,6^2}, \quad (4)$$

где P_T – вес тележки.

Суммарная центробежная сила, действующая на вагон, $I = I_k + 2I_T$.

Составляющая веса тележки, параллельная плоскости пути, равна

$$H_T = \frac{P_T h}{S_1}. \quad (5)$$

Таким образом, результирующая параллельная плоскости пути поперечная сила, приходящаяся на одну тележку, рассчитывается по формуле

$$H_{бр.т.} = 0,5 (I_k - H_k) + I_T - H_T. \quad (6)$$

Рассчитаем коэффициент устойчивости колеса на рельсе при движении вагона по виброизолированному участку бесшпального пути в круговой кривой радиуса 400 м. Возвышение наружного рельса в такой кривой составляет 120 мм.

Введем следующие параметры. Вес вагона брутто 60 000 кг, вес вагона с тележками (тара) 35000 кг или 30000 кг, нетто 25 000 кг, вес кузова с грузом 44 880 кг, статическое давление колеса на рельс брутто $P_{ст.} = 7 500$ кг, общий вес одной тележки 7 560 кг, база тележки 2,1 м, диаметр колеса по кругу катания 0,78 м, диаметр шейки оси $d_{ш} = 0,11$ м, $r_{ш} = 0,055$ м; расстояние между кругами катания колес $S_1 = 1520$ мм; неподрессоренный вес, отнесенный на одно колесо, $q = 660$ кг, высота центра тяжести кузова над уровнем головки рельсов $h_{ц} = 2$ м.

Рассчитаем действующие на кузов поперечные силы при скорости движения подвижного состава 65 км/ч. Определим центробежную силу $I_k = 37290$ Н, параллельную пути составляющую веса кузова от его наклона из-за возвышения наружного рельса в кривой $H_k = 35430$ Н; определим поперечные силы, действующие на тележку $I_T = 6280$ Н; результирующую горизонтальную поперечную силу, действующую на тележку $H_{бр.т.} = 1240$ Н; рассчитаем силу трения $F = 18750$ Н; проекцию силы трения на ось направляющей колесной пары $H_1 = 17910$ Н; рамное давление $U_p = 17430$ Н.

В кривой при скорости 65 км/ч примем коэффициент вертикальной динамики $K_d = 0,71$.
 Для вычисления коэффициента η запаса на устойчивость против вкатывания колеса на рельс, подставим численные значения параметров, входящих в формулу [1]

$$\eta = \frac{P_1}{Y_p} \cdot \frac{\mu\beta_1 + (S_2 + b_1) \operatorname{tg}(\beta - \varphi)}{S_2 - (r + R)[\operatorname{tg}(\beta - \varphi) + \mu]} - \frac{P_2}{Y_p} \cdot \frac{\mu b_2 - (S_2 - b_2) \operatorname{tg}(\beta - \varphi)}{S_2 - (r + R)[\operatorname{tg}(\beta - \varphi) + \mu]} - \frac{S_2}{Y_p} \cdot \frac{\left\{ I_2 \mu - I_1 \operatorname{tg}(\beta - \varphi) + \frac{P}{4} [\mu - \operatorname{tg}(\beta - \varphi)] \right\}}{\{S_2 - (r + R)[\operatorname{tg}(\beta - \varphi) + \mu]\}}$$

В итоге получим $\eta = 1,48$.

Следовательно, $\eta = 1,48 > 1$ и схода подвижного состава на участке в кривой по беспшальному пути не произойдет.

Приведем некоторые промежуточные результаты при вычислении коэффициента устойчивости колеса на рельсе соответственно для скорости $v = 70$ км/ч и $v = 80$ км/ч.

Скорость $v = 70$ км/ч:

$I_k = 43240$ Н,	$I_r = 7280$ Н,
$H_k = 35430$ Н,	$H_r = 5970$ Н,
$H_{бр.т.} = 522$ Н,	$F = 18750$ Н
$H_{бр.т.} / 4F = 0,0696$, $a = 136$, $y/4F = 0,74$,	
$Y = 55500$ Н,	$\cos \alpha_1 = 0,95$,
$H_1 = 1788$ Н,	$Y_p = 1974$ Н,
$P_1' = 7651$ Н,	$P_2 = 7349$ Н,
$P_1 = 2795$ Н,	$P_2 = 7349$ Н,

$$\eta = 1,46.$$

Скорость $v = 80$ км/ч:

$I_k = 56480$ Н,	$I_r = 9510$ Н,
$H_k = 35430$ Н,	$H_r = 5970$ Н,
$H_{бр.т.} = 14070$ Н, $a = 125$, $y/4F = 0,82$,	
$Y = 61500$ Н,	$\cos \alpha_1 = 0,95$,
$H_1 = 17880$ Н,	$Y_p = 25740$ Н,
$P_1' = 79060$ Н,	$P_2 = 70940$ Н,

$$\eta = 1,38.$$

Анализ полученных конечных результатов расчета коэффициента η свидетельствует об устойчивом движении подвижного состава.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахунянц, Г.М. Железнодорожный путь. – М.: Транспорт, 1987.
2. Вериго, М.Ф., Коган, А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. – М.: Транспорт, 1986.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статья должна быть оформлена в стандарте Microsoft Word и представлена в распечатанном виде (на лазерном принтере) в одном экземпляре плюс полная электронная версия (на дискете, CD или выслана по электронной почте на адрес tmec@bntu.by, theormech@rambler.ru).

Объем статьи: полное количество страниц (последняя страница статьи должна быть заполнена не менее 75 %), включая рисунки, список литературы.

Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman 12 pt (междустрочный интервал – одинарный) с автоматической расстановкой переносов. Выравнивание текста по ширине. Страницы не нумеруются.

Отступ первой строки абзацев везде постоянный, равный 10 мм.

Поля текста на странице формата А4 (210x297мм): верхнее – 20 мм, нижнее 30 мм, левое и правое 20 мм.

По середине листа прописными буквами (полужирным шрифтом) печатается название статьи. Затем через 1 интервал по середине фамилии и инициалы авторов (полужирным шрифтом). Затем через 1 интервал краткую аннотацию (10 pt курсивом) на английском языке (не более 70 слов) и через один интервал текст статьи с абзаца. По окончании текста статьи через 1 интервал печатается прописными буквами «ЛИТЕРАТУРА» и далее через 1 интервал перечисляются в виде списка источники литературы. Литературные ссылки должны быть оформлены в соответствии с ГОСТом.

Рисунки должны быть выполнены в графическом редакторе или отсканированы и включены в текст статьи. Подрисовочные подписи печатаются шрифтом Times New Roman 10 pt курсивом.

Формулы: выполняются в редакторе формул Microsoft Equation, входящей в состав Microsoft Word, таким же шрифтом что и текст. В формулах и обозначениях латинские буквы набираются курсивом, греческие и русские – прямо.

В отдельном файле (на отдельной странице) указываются полные сведения об авторах (полное имя, организация, должность, уч. степ., уч. звание, адрес, телефон, e-mail).

Не рассматриваются и обратно не высылаются статьи, оформленные с нарушением требований и поступившие позднее установленного срока.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Белорусский национальный технический университет, Минск (12 pt)

О ПРОЕКТИРОВАНИИ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ (12 pt)

Иванов О.И., Смирнов В.И. (12 pt)

Results of investigation of three-dimensional wave movements in the elastic bodies, obtained are submitted on the basis of a method of characteristics of the theory of the differential equations with partial derivatives. The analysis of propagation..... (10 pt)

Цилиндрические соединения с натягом находят широкое использование в машиностроении

..., исключить дополнительные крепления, повысить надежность и снизить трудоемкость изготовления. (12 pt)

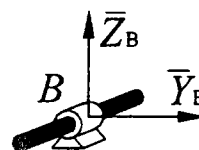


Рис. 1. Цилиндрический шарнир (10 pt)

ЛИТЕРАТУРА (12 pt)

1. Александров, Г.Н. Коронный разряд на линиях электропередачи. – М.: Энергия, 1964. – 288 с.
2. А.с. 513351 СССР. Стабилизатор постоянного тока / С.Г. Перминов // Бюл. изобр. – 1976. – № 17.
3. Результаты перевода пылеугольного котла паропроизводительностью 89 кг/с на сжигании водоугольной суспензии / А.М. Хидиятов, В.В. Осинцев, С.В. Годеев и др. // Теплоэнергетика. – 1987. – № 1. – С. 5–10.
4. Братчиков, В.Н. Золовой износ труб, наклонно расположенных к потоку // Энергетика. – 1959. – № 5. – С. 95–100.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩАЯ МЕХАНИКА

1. Витязь П. А., Высоцкий М. С., Сосновский Л. А.
Об объектах, изучаемых в механике.....3
2. Grabski J., Strzałko J., Kapitaniak T.
Uwzględnienie oporu powietrza
w analizie ruchu rzucanej monety.....13
3. Nemtsov V.B.
Statistical-mechanical description of orientational order tensor
fluctuation by means of fokker-planck equation.....21

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

1. Немировский Ю. В., Романова Т. П.
Моделирование динамического поведения жесткопластической
криволинейной пластины с произвольным свободным отверстием.....26
2. Журавков М. А., Щербаков С.С.
Напряженно-деформированное состояния силовой системы ролик-кольцо в условиях
контактного взаимодействия и объемного деформирования.....35
3. Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В.
Устранение плеоназмов в операторном методе решения первой основной динамической
задачи теории упругости.....41
4. Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В.
Решение второй основной динамической задачи теории упругости методом устранения
лишних элементов.....44
5. Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.
К исследованию граничных значений напряжений при решении плоских
нестационарных задач термоупругости однородных изотропных
тел методом граничных элементов46
6. Клус С. А.
Прочность полых цилиндров при облучении.....49
7. Ширвель П.И.
Решение радиационно-термоупругой задачи для сплошного цилиндра.....55
8. Мартыненко И.М., Казакевич В.А.
Асимптотический метод в теории упругости
кубически анизотропных тел.....64
9. Веремейчик А.И., Даркович С.С., Хвисевич В.М.
Принцип суперпозиции в расчетах статически неопределимых
систем при растяжении-сжатии.....67

КОМПЬЮТИНГ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1. Кравчук А.С., Чашинский А.С., Баркалин В.В., Миклашевич И.А., Юркевич С.Н.,
Случак П.А.
Моделирование разрушения сварного соединения в пакете LSDYNA.....71

2. Журавков М.А., Гляков С.А., Громыко О.В. Определение коэффициентов интенсивности напряжений путем моделирования трещины в ANSYS.....	76
3. Громыко О.В., Гляков С.А., Ци Лихуа Совместное использование ANSYS и ADAMS для динамического моделирования систем.....	80
4. Ковеня Т.А., Пронкевич С.А. Сравнение различных вариантов конечно-элементного моделирования стальной двутавровой балки в среде ANSYS WORKBENCH.....	84
5. Щетько Н. С. Применение ПК “ANSYS” к решению задач строительной аэродинамики.....	89
6. Алферчик А.О. Моделирование маневра «переставка» в ADAMS.....	94
7. Медведев Д.Г., Босяков С.М., Кохан Л.Л. Генерация кинематических моделей механических систем и исследование их движения с применением функций пакета <i>MECHANICAL SYSTEMS</i>	102
8. Скляр О.Н., Босяков С.М., Кохан Л.Л. Расчет скоростей и ускорений элементов составных механизмов с применением пакета <i>MECHANICAL SYSTEMS</i> системы <i>MATHEMATICA</i>	106
9. Журавков М.А., Гляков С.А., Громыко А.О., Громыко О.В. Кинематический и динамический анализ колесно-шагающей машины на основе компьютерных моделей в пакетах ADAMS и VISUALNASTRAN.....	109
10. Литвинов Е.А., Карпович С.Е., Жарский В.В. Компьютерное моделирование прямой и обратной задачи кинематики пространственной системы перемещений с шестью степенями свободы в среде MATLAB/SIMULINK.....	112

БИОМЕХАНИКА

1. Чигарев А.В., Минченя В.Т., Манько А.С., Орловская А.А. Построение механико-математической модели кровеносных сосудов (артерий) человека как многослойной анизотропной оболочки.....	118
2. Крушевский А.Е. Биомеханика многоопорного протеза.....	125
3. Покатилов А.Е., Загrevский В.И. Биомеханический анализ целенаправленного движения спортсмена.....	130
4. Шуляк В.А., Изотова Л.А. Динамика объемной и поверхностной усадки ягод при потере структурной влаги.....	136
5. Доста А.Н., Босяков С.М., Юркевич К.С. Компьютерный анализ напряженно-деформированного состояния ортодонтического аппарата.....	143

6. Покатилов А.Е., Загrevский В.И., Лавшук Д.А. Влияние многосуставных мышц на целенаправленное движение человека.....	147
---	-----

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И СТРУКТУР

1. Никонова Т.В., Михасев Г. И. Устойчивость тонких гофрированных оболочек, лежащих на упругом основании, под действием неоднородного гидростатического давления.....	153
2. Нагорный Ю.Е., Репченков В.И., Чижик С.А. Численное моделирование механического поведения наноструктуры графена, содержащей разрез.....	157
3. Нагорный Ю.Е., Репченков В.И., Чижик С.А. Сравнительный численный анализ механического поведения нанотрубки в случае применения разных механических моделей.....	160
4. Ржевуцкий М.В Тестер экспресс оценки прочности клеевых соединений.....	162
5. Мартыненко Т.М. Математическое моделирование одного класса задач теории оболочек.....	164
6. Чигарев А.В., Миронов Д. Н. , Каминский Э. Методы дискретизации и гомогенизации в динамических задачах сложных механических систем.....	167

МЕХАНИКА МАШИН

1. Максимов С.А., Альгин В.Б. Компоновочные схемы для моделирования трансмиссионных зубчатых механизмов.....	174
2. Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. К вопросу об определении износа во вращательных кинематических парах рычажных механизмов.....	178
3. Зязюля В.Н., Вихренко В.С., Юденков В.С. Комплексное моделирование электромеханических систем на примере офсетной печатной машины.....	182
4. Колешко В. М., Гулай А. В. Пьезоэлектрический сенсор интеллектуальной системы контроля шумоподобным сигналом.....	186
5. Гмырак А.С., Вихренко В.С. Сравнительный анализ динамических реакций основания двух типов лесопильных рам.....	195
6. Горбач Н.И., Яровенко Д.В. Кинематика зубчатых передач с некруглыми колесами.....	201

МЕТОДИКА В МЕХАНИКЕ

1. Кравчук А.С., Житкова М.А. Методическое обобщение стержневой модели шероховатости в курсе «Контактные задачи и трибология».....	211
2. Анципорович П.П., Алейникова О.И., Булгак Т.И., Луцко Н.Я. Обучение INTERNET-технологиям в курсе «Информатика».....	216
3. Локтионов А.В. Концепция разработки информационных учебных пособий при изучении теоретической механики в УО «ВГТУ».....	219
4. Русан С.І. Даследаванне палёў сіл інерцыі пры качэнні аднародных цыліндрычных цел.....	223
5. Поляковский В. В., Жарский В. В., Алехнович Г.Н. Алгоритмы анализа и предотвращения коллизий при движении трех планарных позиционеров на одном статоре.....	227
6. Чигарева О.А., Чигарев В.А. Иделизированная модель cals-технологии для машиностроительного предприятия.....	232
7. Василевич Ю.В., Неумержицкий В.В. Расчет устойчивости колеса на рельсе при движении вагона по бесшпальному железнодорожному пути.....	242
Правила оформления статей.....	246