



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Теория механизмов и машин»

П. П. Анципорович

В. К. Акулич

Е. М. Дубовская

ДИНАМИКА МАШИННОГО АГРЕГАТА

Методическое пособие

Минск

БНТУ

2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теория механизмов и машин»

П. П. Анципорович
В. К. Акулич
Е. М. Дубовская

ДИНАМИКА МАШИННОГО АГРЕГАТА

Методическое пособие
для студентов-заочников
машиностроительных специальностей

М и н с к
Б Н Т У
2012

УДК 621.01(075.4)

ББК 34.41я7

А74

Рецензенты:

А. М. Статкевич, М. В. Логачев

Анципорович, П. П.

А74 Динамика машинного агрегата : методическое пособие для студентов-заочников машиностроительных специальностей / П. П. Анципорович, В. К. Акулич, Е. М. Дубовская. – Минск : БНТУ, 2012. – 33 с.

ISBN 978-985-550-019-4.

Методическое пособие представляет собой текст лекций по одному из основных разделов дисциплины «Теория механизмов и машин». Рассматривается методика составления динамической модели машин и определения закона движения.

Рекомендуется для студентов-заочников машиностроительных специальностей.

УДК 621.01(075.4)

ББК 34.41я7

ISBN 978-985-550-019-4

© Анципорович П. П., Акулич В. К.,
Дубовская Е. М., 2012

© Белорусский национальный
технический университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

1. Классификация сил и моментов сил, действующих на звенья машины. Механическая характеристика машины	4
2. Динамическая модель машинного агрегата.....	7
2.1 Приведенный момент сил.....	8
2.2 Приведенный момент инерции	9
2.3 Уравнения движения звена приведения.....	12
3. Режимы движения машинного агрегата	14
4. Определение закона движения звена приведения.....	16
5. Неравномерность вращения звена приведения при установившемся режиме движения. Задача ограничения колебаний угловой скорости звена приведения.....	18
6. Примеры решения задач	21
7. Литература	32

1. Классификация сил и моментов сил, действующих на звенья машины. Механическая характеристика машины

Все силы и моменты сил, действующие на звенья машины, можно разделить на следующие группы:

1. *Движущие силы F_D и движущие моменты M_D* . Это такие силы и моменты сил, работа которых за рассматриваемый промежуток времени положительна.

$$A_D = \int_{S_0}^{S_j} F_D dS \cos \alpha > 0, \quad A_D = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_D d\varphi > 0.$$

В конкретный момент сила является движущей, если угол α между вектором действия силы и направлением движения точки приложения острый (рис. 1).

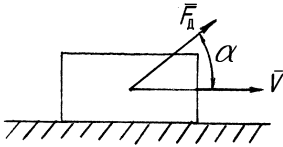


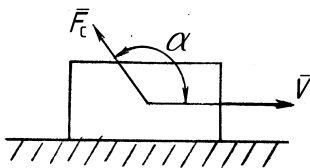
Рис. 1

$$dA = F_D dS \cos \alpha > 0, \quad \text{если } \alpha < 90^\circ.$$

2. *Силы сопротивления F_C и моменты сил сопротивления M_C* . Это такие силы и моменты сил, работа которых за рассматриваемый промежуток времени отрицательна.

$$A_C = \int_{S_0}^{S_j} F_C dS \cos \alpha < 0, \quad A_C = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_C d\varphi < 0.$$

В конкретный момент сила является сопротивлением, если угол α между вектором действия силы и направлением движения точки приложения тупой (рис. 2).



$$dA = F_C dS \cos \alpha < 0, \\ \text{если } \alpha > 90^\circ.$$

Рис. 2

Силы сопротивления разделяются на две категории:

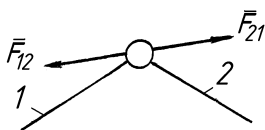
а) **Силы полезного сопротивления** $F_{\text{ПС}}$ и **моменты сил полезного сопротивления** $M_{\text{ПС}}$. Это такие силы и моменты сил, для преодоления которых предназначена машина (сопротивление штамповке, резанию и т.д.).

б) **Силы вредного сопротивления** $F_{\text{ВС}}$ и **моменты сил вредного сопротивления** $M_{\text{ВС}}$ (силы трения, сопротивление окружающей среды).

3. **Силы тяжести звеньев** G . Их работа положительна, если центр масс звена опускается, и отрицательна, если центр масс поднимается. За цикл работа сил тяжести равна нулю.

4. **Силы упругости** $F_y = c\delta$, где c – коэффициент упругости, δ – линейная деформация.

5. **Силы взаимодействия звеньев друг с другом (реакции в кинематических парах)**. Для механизма это силы внутренние, парные, для отдельного звена – внешние.



F_{21} – это реакция со стороны звена 1 на звено 2 (рис. 3, 4).

$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$$

Рис. 3

Определение реакций в кинематических парах является одной из важных задач динамического анализа механизмов, так как при конструировании кинематических пар их размеры, подшипники, места ввода смазки определяются величиной и направлением реакций в кинематических парах.

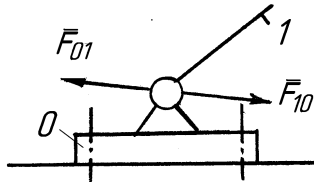


Рис. 4.

Зависимость движущей силы (движущего момента) или силы сопротивления (момента сил сопротивления) от одной из кинематических характеристик машины называется *механической характеристикой*.

Например, для асинхронного двигателя (привода) механическая характеристика имеет вид (рис. 5)

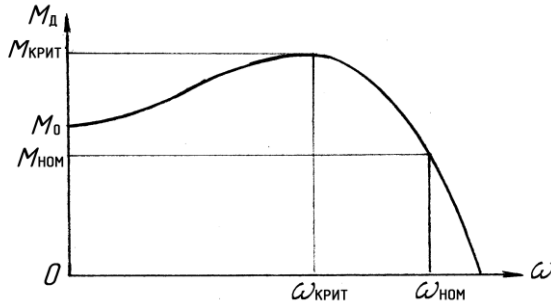


Рис. 5

Для горизонтально-ковочной машины механическая характеристика технологического процесса имеет вид (рис.6)



Рис. 6.

2. Динамическая модель машинного агрегата

Машинный агрегат - это совокупность двигателя, передаточных механизмов и исполнительного механизма.

На рис. 7, а показана кинематическая схема прессы.

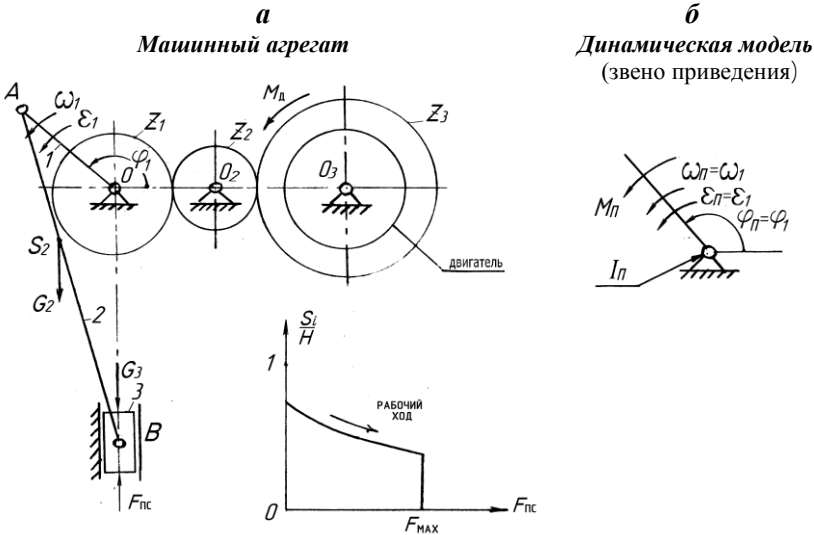


Рис. 7.

Данный машинный агрегат нагружен рядом сил и моментов сил, действующих на звенья, обладающие массами и моментами инерции. Воздействие сил и моментов сил на эти массы вызывает движение звеньев по каким-то законам движения. Определение их является одной из задач динамического исследования машины.

С другой стороны, может быть поставлена обратная задача — определение массово-геометрических и силовых характеристик, обеспечивающих заданный закон движения.

Определить законы движения звеньев сложной многомассовой системы достаточно трудно. Для упрощения решения вместо исследования машины рассматривают её **динамическую модель**, которая представляет собой условное звено (**звено приведения**) с таким же законом движения, как и у одного из звеньев машины. Звено приведения может иметь, например, вид кривошипа 1. К нему предъявля-

ется главное требование, чтобы его функция положения, угловая скорость и угловое ускорение были такими же, как и у кривошипа.

Для того чтобы имело место равенство законов движения, к звену приведения необходимо приложить приведенный момент сил M_{Π} и приписать приведенный момент инерции I_{Π} . Параметры M_{Π} и I_{Π} являются *динамическими характеристиками* звена приведения.

Операции по определению динамических характеристик называются операциями приведения сил и масс.

2.1. Приведенный момент сил

Приведенный момент сил M_{Π} – это такой условный момент сил, который надо приложить к звену приведения, чтобы развиваемая им мгновенная мощность P_{Π} была равна сумме мгновенных мощностей $\sum P_i$ всех сил и моментов сил, действующих на звенья машины, т.е.

$$P_{\Pi} = \sum P_i,$$

или

$$M_{\Pi} \omega_1 = \sum M_i \omega_i + \sum \bar{F}_i \bar{V}_i.$$

Откуда

$$M_{\Pi} = \frac{\sum M_i \omega_i + \sum \bar{F}_i \bar{V}_i}{\omega_1}.$$

Скалярное произведение $\sum \bar{F}_i \bar{V}_i$ выражается как

$$\sum \bar{F}_i \bar{V}_i = \sum F_{ix} \dot{x}_i + \sum F_{iy} \dot{y}_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_{\Pi} &= \frac{\sum M_i \omega_i + \sum F_{ix} \dot{x}_i + \sum F_{iy} \dot{y}_i}{\omega_1} = \\ &= \sum M_i i_{i1} + \sum F_{ix} x'_i + \sum F_{iy} y'_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i_{j1} = \frac{\omega_j}{\omega_1}$, $x'_j = \frac{\dot{x}_j}{\omega_1}$, $y'_j = \frac{\dot{y}_j}{\omega_1}$ – передаточные функции.

Приведенный момент сил представляется в виде алгебраической суммы:

$$M_{\Pi} = M_{\Pi}^{\text{Д}} + M_{\Pi}^{\text{С}},$$

где $M_{\Pi}^{\text{Д}}$ – приведенный момент движущих сил;

$M_{\Pi}^{\text{С}}$ – приведенный момент сил сопротивления.

Для машинного агрегата (см. рис. 7, а)

$$M_{\Pi}^{\text{Д}} = M_{\text{Д}} i_{\text{Д}1},$$

$$M_{\Pi}^{\text{С}} = F_{\text{ПС}} i_{31} - G_3 i_{31} - G_2 y'_{S_2}.$$

Приведенный момент сил можно определить, используя отрезки плана скоростей. Например, приведенный момент сил сопротивления от силы $F_{\text{ПС}}$ равен

$$M_{\Pi}^{\text{С}} = F_{\text{ПС}} \cdot \frac{V_B}{\omega_1} = F_{\text{ПС}} \cdot \frac{pb \cdot \mu_V}{pa \cdot \mu_V} \cdot l_{OA} = F_{\text{ПС}} \cdot \frac{pb}{pa} \cdot l_{OA}, \quad (2)$$

где $\omega_1 = \frac{V_A}{l_{OA}}$.

Из выражения (2) видно, что в связи с отсутствием в нем масштабных коэффициентов, допускается построение планов в произвольном масштабе.

2.1. Приведенный момент инерции

Приведенным моментом инерции I_{Π} называется такой условный момент инерции, которым должно обладать звено приведения,

чтобы его кинетическая энергия T_{Π} была равна сумме кинетических энергий всех звеньев машины:

$$T_{\Pi} = \sum T_i.$$

Для вращающегося звена приведения

$$\frac{I_{\Pi} \omega_1^2}{2} = \sum T_i,$$

откуда

$$I_{\Pi} = \frac{2 \sum T_i}{\omega_1^2}.$$

Кинетическая энергия звеньев определяется в зависимости от характера их движения:

а) для вращающегося звена (кривошипа, зубчатого колеса)

$$T = \frac{I_O \omega^2}{2},$$

где I_O – момент инерции звена относительно оси вращения;

б) для поступательно движущегося звена

$$T = \frac{mV^2}{2},$$

в) для звена, совершающего плоскопараллельное движение (шатун)

$$T = \frac{mV_S^2}{2} + \frac{I_S \omega^2}{2},$$

где V_S – скорость центра масс звена;

I_S – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс.

Для машинного агрегата (см. рис. 7, а), в котором I_P – момент инерции ротора двигателя, I_O , I_{O_2} , I_{O_3} , I_{Z_1} – осевые моменты инерции вращающихся звеньев относительно осей вращения, m_2 , m_3 – массы звеньев 2 и 3, I_{S_2} – центральный момент инерции звена 2, сумма кинетических энергий равна

$$\sum T_i = \frac{I_P \omega_D^2}{2} + \frac{I_{O_3} \omega_D^2}{2} + \frac{I_{O_2} \omega_{Z_2}^2}{2} + \frac{I_{Z_1} \omega_1^2}{2} + \frac{I_O \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_{S_2}^2}{2} + \frac{I_{S_2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_B^2}{2}.$$

Тогда

$$I_{\Pi} = I_P U_{D1}^2 + I_{O_3} U_{D1}^2 + I_{O_2} U_{21}^2 + I_{Z_1} + I_O + m_2 \left[\left(\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{x}}_{S_2} \right)^2 + \left(\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{v}}_{S_2} \right)^2 \right] + I_{S_2} i_{21}^2 + m_3 i_{31}^2. \quad (3)$$

Приведенный момент инерции I_{Π} представляется в виде

$$I_{\Pi} = I_{\Pi}^I + I_{\Pi}^{II},$$

где I_{Π}^I – постоянная составляющая приведенного момента инерции, в которую входят слагаемые, содержащие постоянные передаточные функции (от ротора двигателя, зубчатых колес, кривошипа, маховика),

$$I_{\Pi}^I = I_P U_{D1}^2 + I_{O_3} U_{D1}^2 + I_{O_2} U_{21}^2 + I_{Z_1} + I_O.$$

I_{Π}'' – переменная составляющая приведенного момента инерции, в которую входят слагаемые, содержащие переменные передаточные функции, равная

$$I_{\Pi}'' = m_2 \left[\left(x_{S_2}'^2 + y_{S_2}'^2 \right) \right] + I_{S_2} i_{21}^2 + m_3 i_{31}^2 = A + B + C, \quad (4)$$

где $A = m_2 \left[\left(x_{S_2}'^2 + y_{S_2}'^2 \right) \right]$; $B = I_{S_2} i_{21}^2$; $C = m_3 i_{31}^2$.

В ряде расчетов требуется определение производной, которую получают, дифференцируя I_{Π}'' по обобщенной координате φ_1 , т.е.

$$\frac{dI_{\Pi}''}{d\varphi_1} = 2 \left[m_2 \left(x_{S_2}' x_{S_2}'' + y_{S_2}' y_{S_2}'' \right) + I_{S_2} i_{21} i_{21}' + m_3 i_{31} i_{31}' \right].$$

2.1. Уравнения движения звена приведения

Уравнения движения – это уравнения взаимосвязи силовых, массово-геометрических и кинематических характеристик звена приведения, т.е. связи между приведенным моментом сил M_{Π} , приведенным моментом инерции I_{Π} и кинематическими характеристиками ω_1 и ε_1 .

Уравнения движения существуют в двух формах:

а) Уравнение движения в энергетической форме

Уравнение движения в энергетической форме записывается на основании теоремы об изменении кинетической энергии

$$T_i - T_0 = \sum A,$$

при этом $\sum A = A_{\text{д}} + A_{\text{ПС}} + A_{\text{ВС}} + A_{\text{ТЯЖ}} + A_{\text{у}}$,

где $A_{\text{Д}}$ – работа движущих сил; $A_{\text{ПС}}$ – работа сил полезного сопротивления; $A_{\text{ВС}}$ – работа сил вредного сопротивления; $A_{\text{ТЯЖ}}$ – работа сил тяжести; $A_{\text{У}}$ – работа сил упругости.

Для звена приведения

$$\frac{I_{\text{П}j} \omega_j^2}{2} - \frac{I_{\text{П}0} \omega_0^2}{2} = A_{\text{Д}} + A_{\text{С}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_{\text{П}}^{\text{Д}} d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_{\text{П}}^{\text{С}} d\varphi, \quad (5)$$

где $A_{\text{Д}}$ – работа движущих сил, равная $A_{\text{Д}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_{\text{П}}^{\text{Д}} d\varphi$; (6)

$A_{\text{С}}$ – работа сил сопротивления, равная $A_{\text{С}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_{\text{П}}^{\text{С}} d\varphi$. (7)

б) Уравнение движения в дифференциальной форме

На основании теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме можно записать

$$dT = M_{\text{П}} d\varphi,$$

откуда

$$M_{\text{П}} = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{I_{\text{П}} \omega^2}{2}\right)}{d\varphi}.$$

После дифференцирования имеем

$$M_{\text{П}} = I_{\text{П}} \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\text{П}}}{d\varphi}.$$

Учитывая, что

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

уравнение движения в дифференциальной форме окончательно приобретает вид

$$M_{\Pi} = I_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi}. \quad (8)$$

В приведенный момент сил входят M_{Π}^D и M_{Π}^C , которые могут зависеть от различных параметров. Например, в рассматриваемой машине (рис. 7) с асинхронным двигателем $M_{\Pi}^D = f_1(\omega, \varphi)$, а $M_{\Pi}^C = f_2(\omega, \varphi)$. В общем случае $M_{\Pi} = f(\omega, \varphi, t)$, и решение уравнения аналитическими методами не всегда возможно, поэтому его выполняют численными методами с использованием ЭВМ.

В ряде случаев имеют место более простые зависимости. Например, если приведенный момент инерции $I_{\Pi} = const$ (имеются только вращающиеся звенья), уравнение движения имеет вид:

$$M_{\Pi} = I_{\Pi} \frac{d\omega}{dt}.$$

3. Режимы движения машинного агрегата

Весь промежуток работы машины от ее включения до полной остановки можно разделить на три стадии (режима) (рис. 8) – разгон (разбег), установившееся движение, выбег (останов).

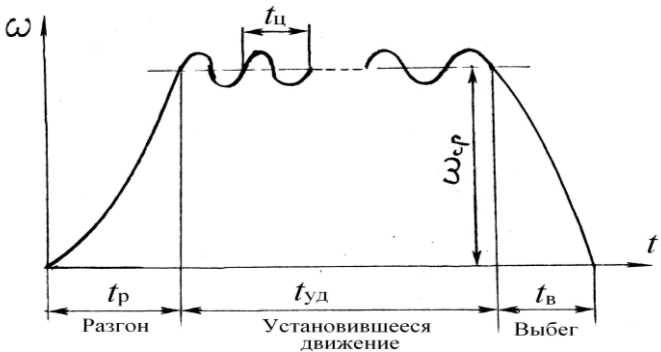


Рис. 8.

Разгон характеризуется изменением угловой скорости звена приведения от нуля до номинальной скорости $\omega = \omega_{\text{ном}} = \omega_{\text{ср}}$.

Так как $\omega_0 = 0$ ($T_0 = 0$), уравнение движения в этом случае принимает вид

$$\frac{I_{\Pi} \omega_i^2}{2} = \int_0^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\text{Д}} d\varphi + \int_0^{\varphi_i} M_{\Pi}^{\text{С}} d\varphi. \quad (9)$$

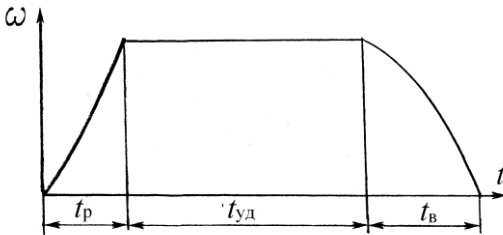
Из выражения (9) видно, что угловая скорость растет.

Режим установившегося движения характеризуется тем, что параметры движения повторяются через какой-то промежуток времени $t_{\text{ц}}$ (время цикла).

Кинетическая энергия в начале и в конце цикла одинакова, т.е. $\Delta T_{\text{ц}} = 0$. Отсюда вытекает, что за цикл имеет место равенство

$$A_{\text{ДЦ}} + A_{\text{СЦ}} = 0, \text{ т.е. } A_{\text{ДЦ}} = -A_{\text{СЦ}}.$$

За произвольный промежуток времени уравнение движения имеет общий вид (5).



Одной из разновидностей установившегося движения является равномерное движение, когда в любой момент времени $\omega = \text{const}$ (рис. 9.)

Рис. 9.

Выбег характеризуется тем, что $M_{\Pi}^{\text{Д}}$ на этом участке равен нулю ($M_{\Pi}^{\text{Д}} = 0$), и угловая скорость уменьшается от номинального значения до нуля. Накопленная к началу выбега кинетическая энергия расходуется на преодоление сил сопротивления. Уравнение движения в этом случае приобретает вид

$$-T_0 = A_C,$$

$$-\frac{I_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_{\Pi}^C d\varphi.$$

В некоторых машинах и приборах отсутствует режим установившегося движения (реле, контакторы, фотоаппараты и др.)

4. Определение закона движения звена приведения

Рассмотрим случай, когда $M_{\Pi}^D = f_1(\varphi)$, $M_{\Pi}^C = f_2(\varphi)$, $I_{\Pi} = f_3(\varphi)$. Тогда из уравнения движения в энергетической форме (5) получим

$$\omega_i = \sqrt{\frac{I_{\Pi 0} \omega_0^2 + 2(A_D + A_C)}{I_{\Pi i}}}. \quad (10)$$

В выражении (10) работы A_D и A_C определяются по формулам (6) и (7).

Выражение (10) представляет собой зависимость угловой скорости от обобщенной координаты $\omega_i = f(\varphi)$.

Для получения зависимости от времени $\omega_i = f(t)$ воспользуемся тем, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, тогда $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$. После интегрирования

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega}$$

получим

$$t_i = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega} \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой зависимость $t_i = f(\varphi)$.

Рассматривая совместно выражения (10) и (11) и исключая параметр φ , получим зависимость $\omega_i = f(t)$.

Если динамические характеристики зависят не только от обобщенной координаты, а и от других параметров (t, ω) , то для определения закона движения звена приведения используют дифференциальное уравнение движения

$$M_{\Pi}^D + M_{\Pi}^C = I_{\Pi} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi}.$$

Если известна ω , то отсюда можно найти

$$\varepsilon = \frac{M_{\Pi}^D + M_{\Pi}^C - \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi}}{I_{\Pi}}.$$

Определить закон движения можно также, используя диаграмму энергомасс, как зависимость $T(I_{\Pi})$. Для установившегося режима движения диаграмма энергомасс представляет собой замкнутую кривую (рис. 10).

$$\text{Так как } T = \frac{I_{\Pi} \omega^2}{2}, \text{ то } \omega = \sqrt{\frac{2T}{I_{\Pi}}}.$$

Тогда с учетом масштабных коэффициентов μ_T , μ_I и координат точек диаграммы x_i , y_i получим

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu_T y_i}{\mu_I x_i}} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi_i},$$

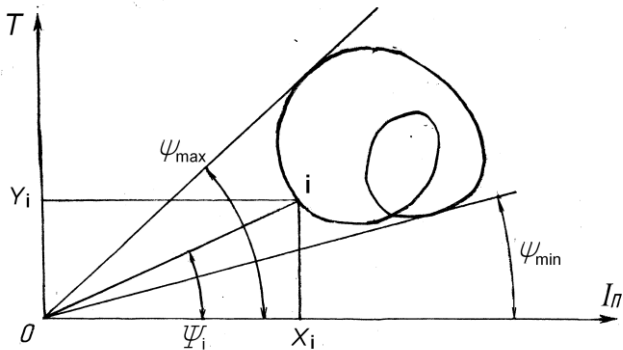


Рис. 10

где ψ_j – угол наклона луча, проведенного из начала координат в i -тую точку диаграммы.

Если провести касательные к диаграмме, то можно определить максимальную и минимальную скорость и соответствующие им положения звена приведения.

$$\omega_{\min}^{\max} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_j} \operatorname{tg} \psi_{\min}^{\max}} \quad (12)$$

5. Неравномерность вращения звена приведения при установившемся режиме движения.

Задача ограничения колебаний угловой скорости звена приведения

Из приведенного ранее выражения (5) с учётом (6) и (7) следует, что

$$\omega_j = \sqrt{\frac{I_{\Pi 0} \omega_0^2 + 2 \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_{\Pi}^D d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} M_{\Pi}^C d\varphi \right)}{I_{\Pi}^I + I_{\Pi}^{II}}} \quad (13)$$

Из выражения (13) вытекает, что при установившемся режиме движения имеют место колебания угловой скорости ω_j , обусловленные двумя причинами:

- 1) несовпадением законов изменения сил сопротивления и движущих сил в каждый момент времени ($M_{\Pi}^D \neq -M_{\Pi}^C$) (рис. 11, а);
- 2) непостоянством приведенного момента инерции I_{Π} (рис. 11, б).

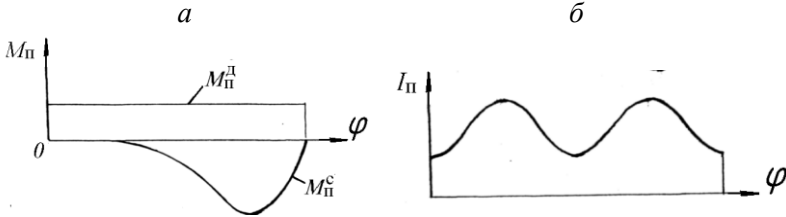


Рис. 11.

Колебания угловой скорости при установившемся движении характеризуются коэффициентом неравномерности движения

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (14)$$

где

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (15)$$

В выражениях (14) и (15) ω_{\max} , ω_{\min} и $\omega_{\text{ср}}$ - соответственно максимальная, минимальная и средняя угловые скорости звена привода (рис. 12).

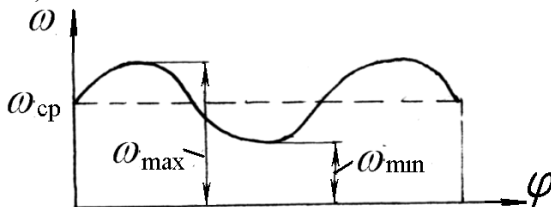


Рис. 12.

Колебания угловой скорости оказывают неблагоприятное влияние на протекание технологических процессов и работу оборудования. Поэтому при проектировании машин ставится задача ограничения колебаний угловой скорости до значений, задаваемых максимально допустимым коэффициентом неравномерности движения δ для соответствующего класса машин: $\delta = 0,05 \dots 0,2$ – для прессового оборудования; $\delta = 0,02 \dots 0,05$ – для металлорежущих станков; $\delta = 0,01 \dots 0,005$ – для электрогенераторов; $\delta < 0,005$ – для авиационных двигателей.

Из (13) видно, что уменьшить колебания угловой скорости можно двумя способами:

1) использованием регулируемого привода для обеспечения $M_{\Pi}^D = -M_{\Pi}^C$, что практически не применяется;

2) увеличением постоянной составляющей приведенного момента инерции I_{Π}' , что достигается установкой дополнительной вращающейся массы – маховика. Маховик представляет собой либо сплошной диск, либо тонкостенный обод со спицами.

Установим связь между задаваемым коэффициентом неравномерности движения δ и требуемой величиной постоянной составляющей I_{Π}' . Для этого запишем величину наибольшего перепада кинетической энергии постоянной составляющей приведенного момента инерции:

$$\begin{aligned} \Delta T_{I_{\max}} &= \frac{I_{\Pi}' \omega_{\max}^2}{2} - \frac{I_{\Pi}' \omega_{\min}^2}{2} = \frac{I_{\Pi}' (\omega_{\max} - \omega_{\min})(\omega_{\max} + \omega_{\min})}{2 \omega_{\text{ср}}} \\ &= I_{\Pi}' \delta \omega_{\text{ср}}^2, \end{aligned}$$

откуда

$$I_{\Pi}' = \frac{\Delta T_{I_{\max}}}{\delta \omega_{\text{ср}}^2}. \quad (16)$$

Величина $\Delta T_{I_{\max}}$ может быть получена различными методами / 2 /.

Если в машине имеются вращающиеся части, создающие приведенный момент инерции $I_{\Pi}^0 < I_{\Pi}^1$, то необходимо установить маховик, момент инерции которого равен

$$I_M = I_{\Pi}^1 - I_{\Pi}^0.$$

Определение постоянной составляющей I_{Π}^1 и момента инерции маховика I_M является задачей динамического синтеза машинного агрегата.

6. Примеры решения задач

Пример 1. К звеньям зубчатого механизма (рис. 13, а) приложены моменты $M_1 = 40$ Н·м и $M_3 = 120$ Н·м. Числа зубьев колёс: $Z_1 = 15$, $Z_2 = 30$, $Z_3 = 60$. Моменты инерции звеньев: $I_1 = 0,06$ кг·м², $I_2 = 0,12$ кг·м², $I_3 = 0,16$ кг·м². Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса 1 через 2 с после начала движения.

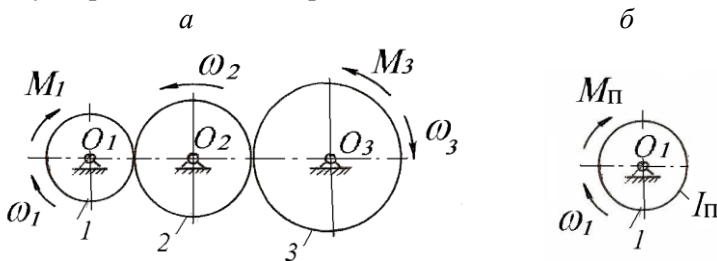


Рис. 13

Вводим звено приведения, имеющее вид колеса 1 (рис. 13, б) с приведенным моментом инерции I_{Π} , к которому приложен приведенный момент сил M_{Π} .

Так как в зубчатых механизмах $I_{\Pi} = const$, то дифференциальное уравнение движения звена приведения (8) принимает вид

$$I_{\Pi} \varepsilon_1 = M_{\Pi},$$

откуда угловое ускорение

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Pi}}{I_{\Pi}}. \quad (17)$$

Приведенный момент сил определяем из равенства мгновенных мощностей:

$$M_{\Pi} = \frac{\sum P_i}{\omega_1} = \frac{M_1 \omega_1 - M_3 \omega_3}{\omega_1} = M_1 - M_3 U_{31}. \quad (18)$$

В формуле (18) мощность $M_1 \omega_1$ берётся со знаком «плюс», так как направления M_1 и ω_1 совпадают, а мощность $M_3 \omega_3$ – со знаком «минус», так как направления M_3 и ω_3 противоположны.

Учитывая, что

$$U_{31} = U_{32} U_{21} = \left(-\frac{z_2}{z_3}\right) \left(-\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_1}{z_3} = \frac{15}{60} = 0,25,$$
$$U_{21} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{15}{30} = -0,5,$$

находим по формуле (18)

$$M_{\Pi} = 40 - 120 \cdot 0,25 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приведенный момент инерции находим из равенства кинетических энергий

$$I_{\Pi} = \frac{2 \sum T_i}{\omega_1^2} = \frac{2}{\omega_1^2} \left(\frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} \right) = I_1 + I_2 U_{21}^2 +$$
$$+ I_3 U_{31}^2 = 0,06 + 0,12 \left(-0,5 \right)^2 + 0,16 \left(0,25 \right)^2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда по формуле (17)

$$\varepsilon_1 = \frac{10}{0,1} = 100 \text{ рад/с}^2.$$

Угловая скорость звена привода

$$\omega_1 = \omega_{10} + \varepsilon_1 t = 0 + 100 \cdot 2 = 200 \text{ рад/с}.$$

Пример 2. Движение механизма начинается из положения, изображённого на рис. 14, а. К кривошипу 1 приложен движущий момент $M_1 = 90 \text{ Н}\cdot\text{м}$, а к ползуну 3 – сила сопротивления $F_3 = 1000 \text{ Н}$. Длины звеньев: $l_{OA} = 0,08 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,24 \text{ м}$. Момент инерции кривошипа относительно оси вращения $I_1 = 0,05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, масса ползуна $m_3 = 5 \text{ кг}$, массой шатуна 2 пренебречь. Определить, с каким угловым ускорением начнет вращаться кривошип 1.

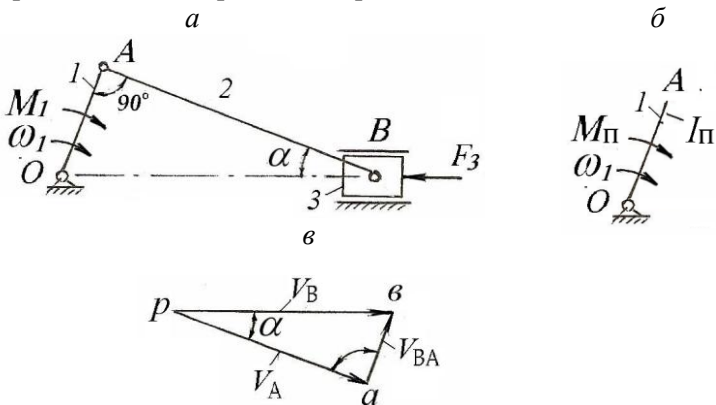


Рис. 14

Вводим звено привода, имеющее вид кривошипа 1 (рис. 14, б) с приведенным моментом инерции I_{Π} , к которому приложен приведенный момент сил M_{Π} .

Так как рассматривается момент начала движения, когда $\omega_1 = 0$, то дифференциальное уравнение движения звена привода (8) принимает вид

$$I_{\Pi} \varepsilon_1 = M_{\Pi},$$

откуда угловое ускорение

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Pi}}{I_{\Pi}} \quad (19)$$

Приведенный момент сил определяется из равенства мгновенных мощностей

$$M_{\Pi} = \frac{\sum P_i}{\omega_1} = \frac{M_1 \omega_1 - F_3 V_B}{\omega_1} = M_1 - F_3 \frac{V_B}{\omega_1}. \quad (20)$$

В формуле (20) мощность $M_1 \omega_1$ берётся со знаком «плюс», так как направления M_1 и ω_1 совпадают, а мощность $F_3 V_B$ – со знаком «минус», так как направления \vec{F}_3 и \vec{V}_B противоположны.

Предварительно для определения передаточной функции $\frac{V_B}{\omega_1}$ строим план скоростей (рис. 14, в) согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \\ \vec{V}_B &= \vec{V}_{B_0} + \vec{V}_{BB_0}, \end{aligned}$$

где $\vec{V}_A \perp OA$, $\vec{V}_{BA} \perp AB$, $\vec{V}_{B_0} = 0$, $\vec{V}_{BB_0} \parallel X$.

Согласно выражению (2) при построении плана скоростей применять конкретный масштабный коэффициент не требуется, т.е.

$$\frac{V_B}{\omega_1} = \frac{pb}{pa} \cdot l_{OA}.$$

Из построений вытекает, что $\angle apb = \angle ABO = \alpha$. Из $\triangle OAB$ находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_{OA}}{l_{AB}} = \frac{0,08}{0,24} = 0,3333; \text{ откуда } \alpha = 18,43^\circ.$$

Так как в Δpab $\cos \alpha = \frac{pa}{pb}$, то $\frac{pb}{pa} = \frac{1}{\cos \alpha}$ и

$$\frac{V_B}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot l_{OA} = \frac{0,08}{0,9487} = 0,08433 \text{ м.}$$

Подставляя значение $\frac{V_B}{\omega_1}$ в формулу (20), получаем

$$M_{\Pi} = 90 - 1000 \cdot 0,08433 = 5,67 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из равенства кинетических энергий находим приведенный момент инерции

$$\begin{aligned} I_{\Pi} &= \frac{2 \sum T_i}{\omega_1^2} = \frac{2}{\omega_1^2} \left(\frac{l_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_3 V_B^2}{2} \right) = l_1 + m_3 \left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)^2 = \\ &= 0,05 + 5 \cdot (0,08433)^2 = 0,08556 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Подставляя значения M_{Π} и I_{Π} в формулу (19), находим угловое ускорение

$$\varepsilon_1 = \frac{5,67}{0,08556} = 66,3 \text{ рад/с}^2.$$

Пример 3. Силы и массы машины приведены к валу А (рис. 15). Приведенный момент инерции равен постоянной величине $I_{\Pi} = 3,14 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, приведенный движущий момент M_{Π}^D изменяется в соответствии с диаграммой *a*, а приведенный момент сопротивления M_{Π}^C – по диаграмме *б*. Полагая, что при $\varphi = 0$ угловая скорость вала равна $\omega_0 = 0$, определить угловую скорость ω_y установившегося движения вала А.

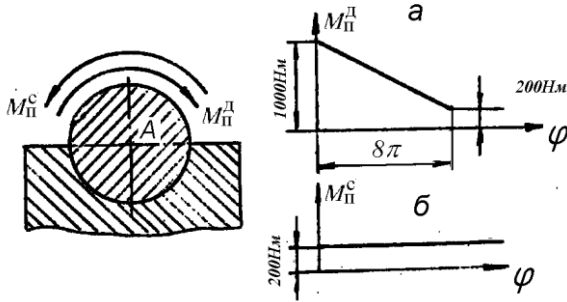


Рис. 15.

Установившееся движение наступает при равенстве $M_{\Pi}^D = |M_{\Pi}^C|$, когда $\varphi_1 = 8\pi$ рад. Уравнение движения в энергетической форме для данного положения имеет вид

$$\frac{I_{\Pi} \omega_y^2}{2} = A_D + A_C \quad (21)$$

где
$$A_D = \int_0^{8\pi} M_{\Pi}^D d\varphi, \quad A_C = \int_0^{8\pi} M_{\Pi}^C d\varphi.$$

Учитывая, что интегралы можно интерпретировать как площади фигур, работа A_D определяется как площадь трапеции с учетом единиц измерения

$$A_D = \frac{1}{2} (200 + 1000) \cdot 8\pi = 4800 \pi \text{ Дж}.$$

Аналогично работа A_C вычисляется как площадь прямоугольника:

$$A_C = -200 \cdot 8\pi = -1600\pi \text{ Дж}.$$

Тогда из выражения (21) угловая скорость установившегося движения равна

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2(A_D + A_C)}{I_{\Pi}}} = \sqrt{\frac{2(4800\pi - 1600\pi)}{3,14}} = 80 \text{ рад/с}.$$

Пример 4. В установившемся движении машинного агрегата диаграмма изменения его кинетической энергии T в зависимости от приведенного момента инерции I_{Π} представляет собой отрезок прямой mn , параллельный оси T и равный $mn = 45$ мм (рис. 16.). Координаты точки m : $x_m = 100$ мм, $y_m = 80$ мм. Определить коэффициент неравномерности движения, если масштабные коэффициенты $\mu_T = 10$ Дж/мм и $\mu_I = 1$ кг·м²/мм.

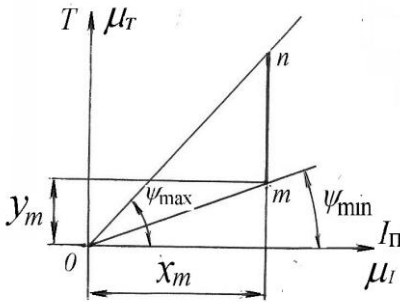


Рис. 16.

Коэффициент неравномерности движения определяется как

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (22)$$

где ω_{\max} , ω_{\min} и $\omega_{\text{ср}}$ — соответственно максимальная, минимальная и средняя угловые скорости звена привода.

Диаграмма энергомасс позволяет найти ω_{\max} и ω_{\min} (12):

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_I} \operatorname{tg} \psi_{\max}} = \sqrt{\frac{2\mu_T \cdot y_n}{\mu_I \cdot x_n}} = \sqrt{\frac{2\mu_T \cdot (y_m + mn)}{\mu_I \cdot x_m}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot (80 + 45)}{1 \cdot 100}} = 5 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2 \mu_T}{\mu_I} \cdot \frac{y_m}{x_m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{1} \cdot \frac{80}{100}} = 4 \text{ рад/с.}$$

Средняя угловая скорость

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} = \frac{5 + 4}{2} = 4,5 \text{ рад/с.}$$

Подставляя значения ω_{\max} , ω_{\min} и $\omega_{\text{ср}}$ в формулу (22), получим

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{5 - 4}{4,5} = 0,222.$$

Пример 5. Маховик 1 тормозится стержнем 2, прижимаемым к ободу маховика силой $F = 100 \text{ Н}$ (рис. 17.). Угловая скорость маховика перед началом торможения равна $\omega_0 = 80 \text{ рад/с}$. Определить, сколько оборотов n сделает маховик до полной остановки, если его момент инерции $I = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, диаметр $D = 0,4 \text{ м}$, $I_{AB} = I_{BC}$ и коэффициент трения обода маховика о стержень $f = 0,2$. Трением в подшипниках пренебречь.

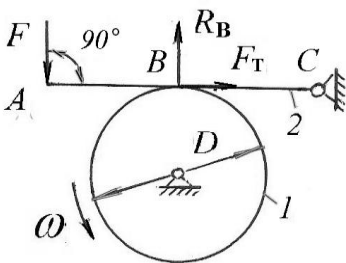


Рис. 17.

Исследуется режим выбега, для которого уравнение движения в энергетической форме имеет вид

$$\frac{I \omega^2}{2} - \frac{I \omega_0^2}{2} = \sum A, \quad (23)$$

где $\omega = 0$ (маховик остановился), $\sum A = A_D + A_C$, причем $A_D = 0$

(двигатель отключен). Работу сил сопротивления A_C совершает момент трения M_T :

$$A_C = -M_T \varphi, \quad (24)$$

где φ – угол поворота маховика от начала до конца торможения (в радианах). Для определения M_T находим реакцию R_B и силу трения F_T :

$$\sum M_C = F \cdot l_{AC} - R_B \cdot l_{BC} = 0,$$

откуда

$$R_B = F \cdot \frac{l_{AC}}{l_{BC}} = 100 \cdot 2 = 200 \text{ Н}.$$

$$F_T = f \cdot R_B = 0,2 \cdot 200 = 40 \text{ Н}.$$

$$M_T = F_T \cdot \frac{D}{2} = 40 \cdot \frac{0,4}{2} = 8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В результате из уравнений (23) и (24) находим φ :

$$-\frac{1 \cdot 80^2}{2} = -8\varphi, \quad \text{откуда } \varphi = 400 \text{ рад}.$$

Так как угол, соответствующий одному обороту равен 2π рад, то искомое число оборотов равно

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 64 \text{ об}.$$

Пример 6. Вентилятор, момент инерции которого относительно оси вращения равен $I = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, начинает выбег при угловой скорости $\omega_0 = 100 \text{ рад/с}$. Приведенный момент сил сопротивления изменяется по закону $M_{\Pi}^C = -a\omega^2$, где $a = 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вентилятора уменьшится вдвое.

Рассматривается режим выбега. Так как $M_{\Pi}^D = 0$ и $I_{\Pi} = \text{const}$, дифференциальное уравнение движения вентилятора имеет вид

$$-M_{\Pi}^C = I \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad -a\omega^2 = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Интегрируя, получим

$$\int_0^t dt = -\frac{I}{a} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2},$$

откуда

$$t = -\frac{I}{a} \int_{\omega_0}^{\omega} \omega^{-2} d\omega = \frac{I}{a} \left[\frac{1}{\omega} \right]_{\omega_0}^{\omega} = \frac{I}{a} \cdot \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} \right).$$

Так как $\omega = 0,5 \cdot \omega_0 = 0,5 \cdot 100 = 50$ рад/с, то искомый промежуток времени равен

$$t = \frac{2}{10^{-4}} \cdot \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{100} \right) = 200 \text{ с.}$$

Пример 7. Определить угловое ускорение ε_1 колеса 1 при подъеме груза массой $m = 300$ кг. Движущий момент $M_1 = 300$ Н·м. Числа зубьев колес $z_1 = 20$, $z_2 = 40$. Моменты инерции звеньев $I_1 = 0,05$ кг·м², $I_2 = 0,4$ кг·м². Диаметр барабана $D = 0,4$ м (рис. 18, а).

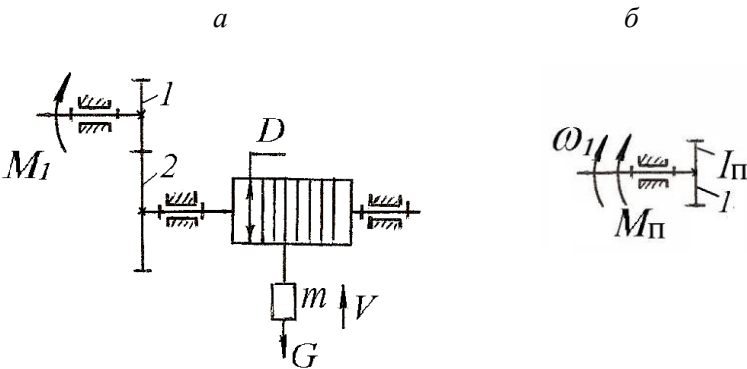


Рис. 18

Динамическая модель имеет вид колеса 1 (рис. 18, б). Угловое ускорение ε_1 следует определять из дифференциального уравнения движения. При $I_{\Pi} = const$ имеем $I_{\Pi} \varepsilon_1 = M_{\Pi}$, откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Pi}}{I_{\Pi}}. \quad (25)$$

Для определения приведенного момента сил M_{Π} используем равенство мгновенных мощностей:

$$M_{\Pi} \omega_1 = M_1 \omega_1 - GV, \quad (26)$$

где $G = mg$ – сила тяжести поднимаемого груза.

Второе слагаемое GV берется со знаком «минус», так как направления силы тяжести G и скорости подъема груза V противоположны.

Из выражения (26)

$$M_{\Pi} = M_1 - mg \frac{V}{\omega_1}. \quad (27)$$

Скорость подъема V равна окружной скорости на барабане. Поэтому

$$\frac{V}{\omega_1} = \frac{\omega_2 \cdot \frac{D}{2}}{\omega_1} = \frac{D |U_{21}|}{2} = \frac{D \frac{z_1}{z_2}}{2} = \frac{0,4 \cdot \frac{20}{40}}{2} = 0,1 \text{ м},$$

и согласно (27)

$$M_{\Pi} = 300 - 300 \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 5,7 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приведенный момент инерции находим из равенства кинетических энергий

$$I_{\Pi} = \frac{2 \sum T_i}{\omega_1^2} = \frac{2}{\omega_1^2} \left(\frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \right) = I_1 + I_2 U_{21}^2 + m \left(\frac{V}{\omega_1} \right)^2.$$

Учитывая, что $U_{21} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{20}{40} = -0,5$, получим

$$I_{\Pi} = 0,05 + 0,4 \cdot 0,5^2 + 300 \cdot 0,1^2 = 3,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда согласно выражению (25)

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\Pi}}{I_{\Pi}} = \frac{5,7}{3,15} = 1,81 \text{ рад/с}^2.$$

Литература

1. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн. – 2-е изд. – М. : Наука, 1975. – 256 с.
2. Динамика машин и механизмов в установившемся режиме движения / П. П. Анципорович [и др.]. – 7-е изд. – Минск : БНТУ, 2011. – 42 с.
3. Филонов, И. П. Теория механизмов, машин и манипуляторов / И. П. Филонов, П. П. Анципорович, В. К. Акулич. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.

Учебное издание

АНЦИПОРОВИЧ Петр Петрович
АКУЛИЧ Валерий Константинович
ДУБОВСКАЯ Елена Михайловна

ДИНАМИКА МАШИННОГО АГРЕГАТА

Методическое пособие
для студентов-заочников
машиностроительных специальностей

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 16.07.2012. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 1,92. Уч.-изд. л. 1,50. Тираж 300. Заказ 885.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.