



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный  
технический университет**

---

**Кафедра «Организация упаковочного производства»**

**И. И. Карпунин**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УПАКОВОЧНОМУ  
ПРОИЗВОДСТВУ**

**Учебно-методическое пособие**

**Минск  
БНТУ  
2013**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Организация упаковочного производства»

И. И. Карпунин

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УПАКОВОЧНОМУ  
ПРОИЗВОДСТВУ

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности 1-36 20 02  
«Упаковочное производство»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
Республики Беларусь по образованию в области  
машиностроительного оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2013

УДК 621.798-047.58-048.34 (075.8)

ББК 30.61я7

К26

**Р е ц е н з е н т ы :**

кафедра «Основы научных исследований и проектирования»  
учреждения образования «Белорусский государственный аграрный  
технический университет» (зав. кафедрой доктор технических наук,  
профессор *В. Н. Дашков*);

доктор физико-математических наук, профессор кафедры Юнеско  
«Энергосбережение и возобновляемые источники энергии»  
Белорусского национального технического университета *А. Г. Рекс*

**Карпунин, И. И.**

К26 Моделирование и оптимизация технологических процессов при-  
менительно к упаковочному производству : учебно-методическое  
пособие для студентов специальности 1-36 20 02 «Упаковочное  
производство» / И. И. Карпунин. – Минск : БНТУ, 2013. – 124 с.  
ISBN 978-985-550-217-4.

Предназначено для студентов специальности 1-36 20 02 «Упаковочное  
производство». На основе литературных источников в пособии изложены  
процессы моделирования технологических процессов применительно к упа-  
ковочной отрасли.

УДК 621.798-047.58-048.34 (075.8)

**ББК 30.61я7**

ISBN 978-985-550-217-4

© Карпунин И. И., 2013

© Белорусский национальный  
технический университет, 2013

## *Содержание*

1. Введение в моделирование технологии производства в упаковочной отрасли .....	6
2. Цели моделирования и задачи оптимизации .....	7
3. Математическое и физическое моделирование .....	9
4. Особенности математического моделирования в упаковочном производстве .....	13
4.1. Простейшие механические модели вязкоупругого поведения .....	15
4.2. Две корректные постановки начально-краевых задач в обобщенной модели Кельвина–Фойгта .....	17
5. Составление математического описания объекта применительно к упаковочному производству .....	18
5.1. Классификация математических моделей .....	18
5.2. Параметры моделей и фазовые переменные .....	23
6. Основные понятия системного подхода к созданию математических моделей .....	25
7. Метод линейного программирования .....	31
7.1. Математическая формулировка .....	31
7.2. Примеры задач о максимальном парасочетании .....	32
7.2.1. Максимальное сочетание пар .....	32
7.2.2. Максимальный поток .....	32
7.2.3. Понятие минимизации функции .....	33
7.2.4. Игра с нулевой суммой .....	34
7.3. Решение задач оптимизации .....	35
7.4. Условия Каруша–Куна–Таккера .....	38
Постановка задачи .....	39
8. Моделирование и оптимизация экструзионных процессов в упаковочном производстве .....	40
8.1. Планирование модельных экспериментов для упаковочного производства .....	42
8.2. Использование пакета MATLAB для моделирования технологических процессов упаковочного производства .....	43
8.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности конечного цилиндра для составления алгоритма .....	43
8.3.1. Особенность построения математических моделей для описания термодинамических процессов .....	43
8.3.2. Составление алгоритма .....	44

8.4. Составление программы .....	46
8.5. Анализ моделирования и расчетов .....	47
8.6. Методы, применяемые для анализа и моделирования экструзионных процессов.....	47
Описание и моделирование процесса движения полимера в одношнековом экструдере.....	48
8.7. Численные методы .....	52
8.7.1. Метод конечных разностей .....	53
8.7.2. Метод конечных элементов.....	54
8.7.3. Метод граничных элементов.....	54
8.8. Методы построения сеток для задач с движущимися границами.....	55
8.9. Моделирование трехмерных потоков двумерными моделями .....	55
8.9.1. Моделирование течения в периодических смесителях при помощи двумерных моделей .....	55
8.9.2. Моделирование потоков в экструдере с помощью двумерных моделей .....	56
8.9.3. О моделировании течения в экструзионной головке с помощью двумерных моделей .....	57
8.10. Трехмерное моделирование.....	58
9. Основные виды математических моделей .....	59
10. Условия моделирования объекта модели и объекта оригинала .....	62
11. Общие положения метода неопределенных множителей Лагранжа.....	64
Критерий оптимальности .....	65
Ограничения .....	66
Оптимизирующие факторы.....	67
Целевая функция .....	68
Примеры применения метода .....	68
12. Целевая функция как критерий оптимальности .....	74
13. Оптимизация методом дифференциального исчисления .....	75
Моделирование и оптимизация упаковки для наименьшего расхода материала при ее производстве.....	77
14. Моделирование и модели .....	78
15. Составление математического описания объекта .....	80
Методы составления математического описания.....	80

16. Выбор метода решения и его реализация в виде алгоритма и моделирующей программы .....	85
17. Блочный принцип построения математических моделей .....	88
18. Численные методы оптимизации нулевого порядка .....	90
19. Классификация методов .....	94
20. Общая характеристика методов нулевого порядка .....	97
21. Метод прямого поиска (метод Хука–Дживса) .....	97
22. Метод деформированного многогранника (метод Нелдера–Мида) .....	100
23. Метод вращающихся координат (метод Розенброка) .....	102
24. Метод параллельных касательных (метод Пауэлла) .....	105
25. Численные методы безусловной оптимизации первого порядка .....	107
Минимизация функций многих переменных.	
Основные положения .....	107
26. Метод наискорейшего спуска .....	109
27. Метод сопряженных градиентов .....	112
28. Численные методы безусловной оптимизации второго порядка .....	115
Особенности методов второго порядка .....	115
29. Метод Ньютона .....	117
Выводы .....	118
Литература .....	120

## 1. ВВЕДЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОИЗВОДСТВА В УПАКОВОЧНОЙ ОТРАСЛИ

Современные методы проектирования и исследования в упаковочном производстве основываются на системном подходе к рассматриваемому объекту. С целью устранения проблемы, т. е. для решения вопросов и задач, связанных с исследованием, разработкой и эксплуатацией оборудования и различных устройств в упаковочном производстве, системным анализом, используют обширный спектр средств и возможности различных наук и практических сфер деятельности.

Системный подход имеет методологическую основу – моделирование, что позволяет использовать его в упаковочном производстве. Это представляет собой способ изучения процессов, явлений и устройств, применимых к различным процессам, которые можно использовать на упаковочном производстве. При этом исследуется не сам объект – оригинал, а какая-то промежуточная вспомогательная система, которая находится в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом и способна в процессе познания на известных этапах в определенных отношениях замещать изучаемый объект и также в процессе ее исследования в конечном итоге давать информацию о самом объекте. Такая промежуточная вспомогательная система называется *моделью реальной системы* – оригинала.

В наше время (при появлении ЭВМ и Интернета) широкое распространение получила идея математического моделирования. В результате математическая модель объекта является исходной базой для проведения его оптимизации.

Использование методов моделирования и оптимизации применительно к упаковочному производству позволяет:

повысить качество технологических расчетов и проектирования в целом, целенаправленно переходить к автоматизированному проектированию оборудования для упаковочного производства и последующему качественному его изготовлению;

улучшить стабильность работы технологического оборудования в оптимальном режиме по энерготехнологическим и экономическим показателям;

организовать производство с применением кибернетики с целью его устойчивого самоуправления;

рассчитать и обеспечить надежность работы установок в технологическом процессе упаковочного производства;

решить проблему создания безотходных, экологически чистых технологий в упаковочной отрасли.

Целью пособия является облегчение учебной работы студентов при изучении дисциплины «Моделирование и оптимизация технологических процессов в упаковочном производстве».

## **2. ЦЕЛИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Воспроизведение моделью функций или свойств оригинала может преследовать различные цели:

- практические, прикладные (обычно связаны с разработкой, проектированием оригинала);

- научные (изучаются закономерности процессов, явлений, особенности функционирования новых и сложных объектов, систем);

- учебные (демонстрационные модели, к которым относятся макеты, схемы, чертежи и другие наглядные пособия).

В инженерной деятельности моделирование имеет целью решение творческих вопросов и используется:

- для раскрытия и углубленного исследования механизма явлений и взаимодействия их частей;

- установления технологических режимов и создания инженерных методов расчета;

- определения конструктивных параметров машин и аппаратов;

- оптимизации процессов и аппаратов, их режима работы;

- определения переходных характеристик, выбора средств автоматизации и создания систем управления.

Процессы химической технологии – это сложные физико-химические системы, имеющие двойственную детерминированно-стохастическую природу, переменные в пространстве и во времени. Участвующие в них потоки вещества, как правило, многофазные и многокомпонентные. В ходе протекания процесса в каждой точке фазы и на границах раздела происходит перенос импульса, энергии, массы. Весь процесс в целом протекает в аппарате с конкретными геометрическими характеристиками, в свою очередь оказывающими влияние на характер этого процесса [1, 2].



Существенная особенность химико-технологических процессов состоит в том, что совокупность составляющих их явлений носит детерминированно-стохастическую природу, проявляющуюся в наложении стохастических особенностей гидродинамической обстановки в аппарате на процессы массо- и теплопереноса и химического превращения. Это объясняется случайным взаимодействием составляющих компонентов фаз (соударением частиц, их дроблением, коалесценцией, случайным блужданием по объему аппарата) или случайным характером геометрии граничных условий в аппарате (случайное расположение элементов беспорядочно уложенной насадки, зерен катализатора, производственная ориентация межфазной границы движущихся сред и т. п.).

Подобного рода системы характеризуются чрезвычайно сложным взаимодействием составляющих их фаз и компонентов, вследствие чего их изучение с позиций классических детерминированных законов переноса и сохранения становится невозможным. Ключ к решению этой проблемы дает метод математического моделирования, базирующийся на стратегии системного анализа, сущность которой заключается в представлении процесса как сложной взаимодействующей иерархической системы с последующим качественным анализом ее структуры, разработкой математического описания и оценкой неизвестных параметров. Так, например, при рассмотрении явлений, возникающих в процессе движения частиц, капель или пузырьков газа в сплошной жидкой среде, выделяют пять уровней иерархии эффектов:

1. Совокупность явлений на атомарно-молекулярном уровне;
2. Эффекты в масштабе надмолекулярных или глобулярных структур;
3. Множество физико-химических явлений, связанных с движением единичного включения дисперсной фазы, с учетом химических реакций и явлений межфазного энерго- и массопереноса;
4. Физико-химические процессы при включениях, перемещающихся в сплошной фазе;
5. Совокупность процессов, определяющих макрогидродинамическую обстановку в аппарате. Такой подход позволяет наиболее полно установить совокупность явлений всего процесса и связей между ними.

Под математическим моделированием понимают изучение свойств объекта на математической модели. Его целью является определение оптимальных условий протекания процесса, управление им на основе математической модели и перенос результатов на объект.

Метод математического моделирования применяют при изучении свойств процессов, для которых имеется достаточно точное математическое описание [2]. В зависимости от степени полноты математического описания можно выделить два предельных случая:

1) известна полная система уравнений, описывающая все основные стороны моделируемого процесса, и все числовые значения параметров этих уравнений.

Построенная на основе физических представлений модель должна верно, качественно и количественно описывать свойства моделируемого процесса, т. е. она должна быть адекватна моделируемому процессу;

2) полное математическое описание процесса отсутствует. Этот второй случай типичен для решения кибернетических задач, в которых приходится иметь дело с управлением процессами при наличии неполной информации об объекте и действующих на него возмущениях. При отсутствии достаточной информации об исследуемых явлениях их изучение начинается с построения простейших моделей, но без нарушения основной (качественной) специфики исследуемого процесса.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Моделирование* – это создание модели проектируемой или исследуемой системы или объекта с целью изучения их свойств или поведения в тех или иных условиях. Применение моделей обусловлено тем, что эксперименты с реальными системами обычно требуют слишком больших затрат средств и времени.

Моделирование можно подразделить:

- на физическое;
- математическое.

*Физические модели* – одинаковые или сходные по физической природе с оригиналом. Исследования проводятся на стендах, установках, макетах. Физические модели строят на основании теории

подобия. Самый простой пример подобия – пространственное подобие, когда модель отличается от оригинала только размерами. Пространственное моделирование широко применяется в строительстве и архитектуре, при расстановке оборудования в цехах, изучении условий освещения.

Достоинством физического моделирования является более полное, по сравнению с математическим моделированием, воспроизведение свойств исследуемого процесса, системы или объекта. Недостатки – высокая стоимость моделей сложных объектов, меньшая универсальность метода, так как при изменении параметров исследуемого процесса необходимо переделывать или заново создавать модель, что связано с большими материальными и временными затратами.

Построение любой математической модели начинают с физического описания объекта моделирования. При этом выделяют элементарные процессы, протекающие в объекте моделирования и подлежащие отражению в модели, и формулируют основные допущения, принимаемые при их описании. В свою очередь, перечень учитываемых элементарных процессов определяет совокупность явлений, которые включают в математическую модель.

Обычно при математическом моделировании объектов химической технологии принимаются во внимание следующие элементарные процессы:

- 1) движение потоков фаз;
- 2) массообмен между фазами;
- 3) теплопередача;
- 4) изменение агрегатного состояния (испарение, конденсация, растворение и т. д.);
- 5) химические превращения.

Полнота математического описания элементарных процессов в модели зависит от их роли во всем химико-технологическом процессе, степени изученности, глубины взаимосвязи элементарных процессов в объекте и желаемой точности всего описания. Взаимосвязь элементарных процессов может быть чрезвычайно сложной. Поэтому на практике часто делают различные допущения относительно характера связей, что позволяет избежать необходимости введения в модель недостаточно изученных зависимостей и, следовательно, излишнего усложнения описания.

Математическое моделирование представляет собой метод исследования объектов и процессов реального мира с помощью их приближенных математических описаний – математических моделей [3, 15, 16]. При математическом моделировании физика исследуемого процесса при переходе к модели не сохраняется. Математическое моделирование основывается на изоморфизме уравнений, т. е. их способности описывать различные по своей природе явления. Метод математического моделирования основан на идентичности математических описаний процессов, протекающих в моделируемой системе и модели.

Потребность в моделировании возникает, когда исследование самого объекта в реальности невозможно, например, при его разработке, когда объект слишком мал или велик, расположен очень далеко, когда продолжительность исследуемого процесса превышает продолжительность жизни исследователя и т. д., а также затруднительно и дорого, требует много времени. От модели не требуется, чтобы она повторяла поведение объекта во всех деталях; она должна удовлетворительно воспроизводить те характеристики оригинала, которые подлежат изучению. Модель может быть принципиально более простой, чем оригинал.

Основная особенность моделирования как метода познания состоит в том, что сведения, необходимые для предсказания характеристик одних объектов, получают путем изучения других, имеющих иные размеры, параметры и в некоторых случаях – даже иную физическую природу. Первые объекты называют при этом оригиналами, а вторые – моделями.

Модель должна быть сходна с оригиналом и в то же время отлична от него. Степень соответствия (СС) может меняться в пределах от нуля до единицы. Значение  $СС = 0$  указывает на отсутствие какой бы то ни было связи между моделью и оригиналом. Значение  $СС = 1$  свидетельствует о полной тождественности модели и оригинала. В обоих случаях нельзя говорить о моделировании. Количественное определение степени соответствия весьма сложно и не всегда возможно, но это понятие позволяет производить сопоставление разных моделей для одного объекта [1].

Математическое моделирование включает три взаимосвязанных этапа:

1. Составление математического описания изучаемого объекта;
2. Выбор метода решения системы уравнений математического описания и реализация его в форме моделирующей программы;
3. Установление соответствия (адекватности) модели объекту.

На этапе составления математического описания предварительно выделяют основные явления и элементы в объекте и затем устанавливают связи между ними. Далее для каждого выделенного элемента и явления записывают уравнения (или систему уравнений), отражающие его функционирование. Кроме того, в математическое описание включают уравнения связи между различными выделенными явлениями. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы алгебраических, дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений [3, 4].

Этап выбора метода решения и разработки моделирующей программы подразумевает выбор наиболее эффективного метода решения из имеющихся (под эффективностью имеют в виду быстроту получения и точность решения) и реализацию его сначала в форме алгоритма решения, а затем – в форме программы, пригодной для расчета на ЭВМ.

Для проверки адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерений на объекте в ходе процесса с результатами предсказания модели в идентичных условиях. Этап установления адекватности модели является заключительным в последовательности этапов, выполняемых при ее разработке.

На рис. 3.1 изображена общая схема разработки математической модели. При построении математической модели реальное явление упрощается, схематизируется и полученная схема, в зависимости от сложности явлений, описывается с помощью того или иного математического аппарата.

От правильности учета в модели характерных черт рассматриваемого процесса зависят успех исследования и ценность полученных результатов моделирования. В модели должны быть учтены все наиболее существенные факторы, влияющие на процесс, и вместе с тем она не должна быть загромождена множеством мелких, второстепенных факторов, учет которых только усложнит математический анализ и сделает исследование либо чрезмерно громоздким, либо вообще нереализуемым.

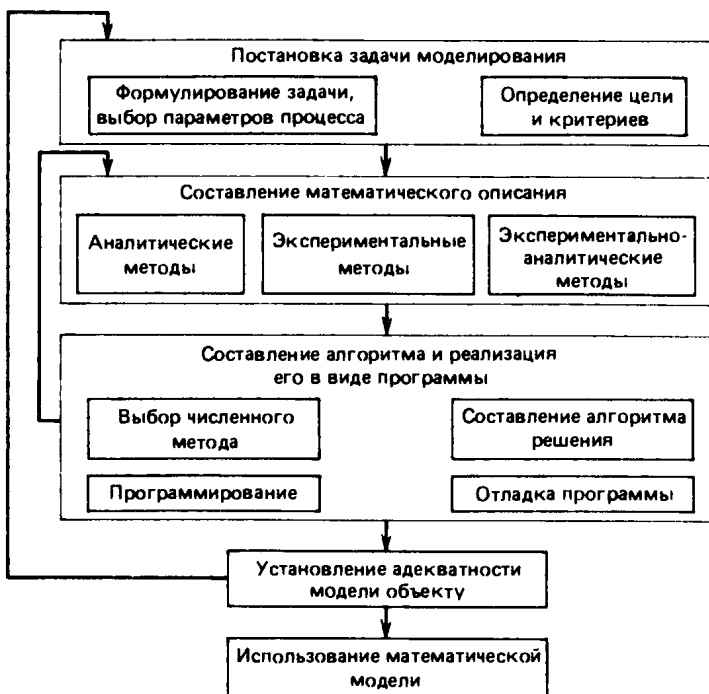


Рис. 2.1. Этапы разработки математической модели

#### 4. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТА В УПАКОВОЧНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Наличие математической модели объекта дает возможность провести его оптимизацию.

*Оптимизацией* называется операция получения наилучших результатов в данных условиях.

С математической точки зрения задача оптимизации заключается в отыскании таких значений регулируемых параметров объекта, которые при наложенных ограничениях дают экстремум некоторого критерия эффективности.

Целью инженерной оптимизации технических систем и объектов является определение условий, обеспечивающих наивысшую эффективность проектных решений и эксплуатационных приемов.

Постановка задачи оптимизации в упаковочном производстве предполагает существование конкурирующих свойств объекта: количество продукции — качество продукции; капитальные затраты — эксплуатационные затраты и т. п. При оптимизации определяются сочетания значений параметров и свойств объекта, которые соответствуют наилучшему варианту из числа возможных. Для количественной оценки и сравнения различных вариантов используется критерий оптимальности (целевая функция).

*Критерий оптимальности* — это главный признак, по которому судят о том, насколько хорошо функционирует данная система, работает данный процесс, насколько хорошо решена задача оптимизации [4, 5].

В общем случае формулировка задачи оптимизации включает выбор критерия оптимальности, установление ограничений, выбор оптимизирующих факторов в запись целевой функции.

Для современного подхода к оптимизации характерна формализация задачи. Задача формулируется стандартным образом, после чего дальнейшее ее решение проводится на основе четкого однозначного алгоритма.

Формализация, во-первых, позволяет единообразно решать задачи из самых различных областей. Во-вторых, формализованные задачи приспособлены для решения на электронно-вычислительных машинах. Применение вычислительной техники обеспечивает возможность перебора большого числа вариантов и выбора из них наилучшего, поэтому формализация приводит к резкому повышению эффективности процедуры решения задачи.

В результате задача распадается на три основных этапа:

- 1) формулирование задачи, приведение ее к одной из стандартных форм;
- 2) нахождение оптимальных условий на основе алгоритма оптимизации;
- 3) реализация оптимальных условий на практике.

Эти методы решения на первом и втором этапах взаимно противоположны: второй этап, как правило, целиком формализован на основе алгоритма решения, а первый этап неформален и связывает конкретные особенности объекта с общим методом решения.

Если задача оптимизации плохо сформулирована, то совершенно правильное ее решение даст результат неверный для практики.

Иногда именно хорошая формулировка задачи определяет успех оптимизации в целом. Таким образом, на этапе формулирования задачи применительно к упаковочному производству приходится учитывать физико-химические особенности процесса, его экономичность, общее развитие промышленности, рыночную конъюнктуру и множество других обстоятельств.

#### **4.1. Простейшие механические модели вязкоупругого поведения**

Известно, что упругие тела и вязкие жидкости при деформировании существенно различаются своими свойствами. Упругие деформируемые тела после снятия приложенных нагрузок возвращаются к своему естественному, или недеформированному, состоянию. В отличие от них несжимаемые вязкие жидкости совсем не имеют тенденции после снятия нагрузки возвращаться в исходное состояние. Кроме того, напряжения в упругом теле связаны непосредственно с деформациями, в то время как напряжения в вязкой жидкости зависят (за исключением гидростатической составляющей) от скоростей деформации, что следует учитывать при переработке полимеров в упаковочном производстве.

Поведение материала, которое объединяет в себе оба эти свойства – и упругости и вязкости, называют вязкоупругим. Упругое тело и вязкая жидкость занимают крайние противоположные точки в широком спектре вязкоупругих сред.

Линейную вязкоупругость для одномерного состояния удобно трактовать при помощи механических моделей, которые наглядно демонстрируют поведение различных вязкоупругих материалов [40–42]. Эти модели строятся из таких механических элементов, как линейно-упругая пружина с модулем упругости  $E$  (массой этой пружины пренебрегают) и вязкий элемент (демпфер) с коэффициентом вязкости  $h$  (вязкий элемент представляет собой поршень, движущийся в цилиндре с вязкой жидкостью).

Как показано на рис. 4.1, сила  $G$ , растягивающая пружину, связана с ее удлинением  $\varepsilon$  формулой

$$\sigma = G\varepsilon.$$



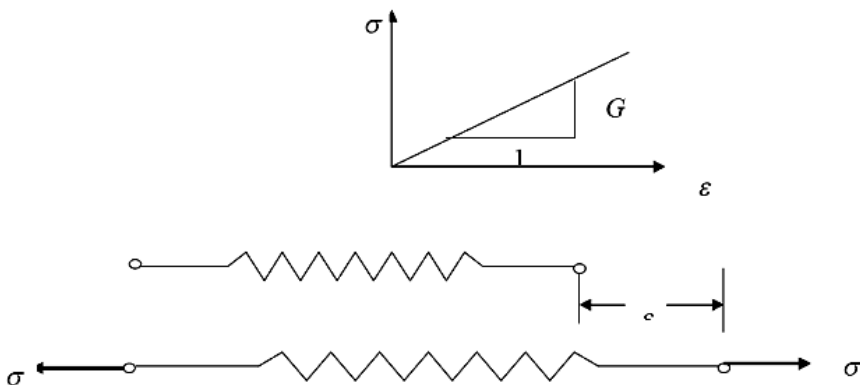


Рис. 4.1. Линейный упругий элемент

Подобное же соотношение существует и для демпфера:

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon},$$

где  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ . Можно придать общность этим моделям и устранить размерные эффекты, если в качестве  $\sigma$  рассматривать напряжение, а в качестве  $\varepsilon$  – относительную деформацию.

Модель Максвелла вязкоупругого тела является комбинацией пружины и вязкого элемента (демпфера), соединенных последовательно.

Модель Кельвина или Фойгта представляет собой параллельное соединение тех же элементов. Соотношение между напряжением и деформацией (фактически содержащее также и их скорости) для модели Максвелла дается формулой

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}.$$

Для модели Кельвина соотношение между напряжением и деформацией задается формулой

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}.$$

По существу эти уравнения являются определяющими уравнениями вязкой упругости в одномерном случае.

Простые модели Максвелла и Кельвина не дают точного полного описания поведения реальных сред. Усложненные модели обладают большей гибкостью в отражении процессов в фактических материалах.

Четырехпараметрическая модель состоит из двух упругих и двух вязких элементов и представляет собой последовательно соединенные узел Максвелла и узел Кельвина.

Данная модель способна описать все три основных типа поведения вязкоупругой среды. Так, она объединяет в себе мгновенную упругую реакцию (за счет свободного элемента  $G_m$ ), вязкое течение (за счет свободного вязкого элемента  $h_m$ ) и, наконец, запаздывающую упругую реакцию (за счет узла Кельвина). Предполагается, что для описания вязкоупругих свойств плавающей ледяной пластины можно использовать данную линейную четырехпараметрическую модель.

#### 4.2. Две корректные постановки начально-краевых задач в обобщенной модели Кельвина–Фойгта

*Об обобщенной модели Кельвина–Фойгта.*

Как уже отмечалось ранее, движение несжимаемой жидкости в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , с локальной границей  $\partial\Omega$  на промежутке времени  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , описывается с системой уравнений в форме Коши [41–44].

В данной системе

$v(x, t)$  – вектор скорости частицы в точке  $x$  в момент времени  $t$  и  $v_1, \dots, v_n$  – компоненты  $v$ ;

$p = p(x, t)$  – давление жидкости в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;

$f = f(x, t)$  – вектор внешних сил (их также называют объемными), действующих на жидкость.

Через  $\operatorname{div} \sigma$  обозначен вектор, координаты которого являются дивергенцией строк матрицы:

$$\sigma = (\sigma_{ij}(x)),$$

где  $\sigma$  – девиатор тензора напряжений.

В литературных источниках [40, 42–44] рассматриваются среды, удовлетворяющие обобщенной математической модели Кельвина–Фойгта (порядка  $L = 1, 2, \dots$ ). Она описывается определяющим соотношением.

Предполагается, что корни многочлена вещественны, отрицательны и различны. Требование вещественности и отрицательности продиктовано физическим смыслом задачи, а требование различности корней наложено исключительно ради простоты и сокращения вычислений.

## **5. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УПАКОВОЧНОМУ ПРОИЗВОДСТВУ**

### **5.1. Классификация математических моделей**

Математические (с использованием компьютеров) модели, в силу своей логичности и строго формального характера, позволяют выявить основные факторы, определяющие свойства изучаемых систем, и исследовать их реакции на внешние воздействия и изменения параметров. Часто математические модели использовать проще и удобнее, чем натуральные (физические). Они позволяют проводить вычислительные эксперименты, реальная постановка которых затруднена или невозможна. Изучение основных принципов математического моделирования является неотъемлемой частью подготовки специалистов в технических областях деятельности. Дисциплины, связанные с изучением основных аспектов моделирования объектов и систем, в обязательном порядке входят в соответствующие учебные планы, являясь компонентами образовательных стандартов.

Задачей любого исследования, выполненного научными методами, является установление связей между воздействием на некоторый объект природы или техники и его реакцией на это воздействие. Этому предшествует выделение объекта из окружающего мира, с которым он связан очень большим числом связей, и выявление тех связей или воздействий, которые наиболее существенны с точки зрения предпринимаемого исследования. Именно поэтому оно является отправной точкой моделирования применительно к упаковочному производству.

При исследовании некоторого природного явления очень важен выбор причин и следствий. Это предполагает первичный анализ явления и его замену более упрощенным объектом – моделью явления. Важность предварительного анализа особенно проявляется, когда

явление воспроизводится в лабораторных условиях и связи, кажущиеся не очень важными, не просто игнорируются, а исключаются.

**Модель** – это упрощенный образ изучаемого явления, создаваемый для исследования связей между такими его характеристиками, которые нас интересуют в данный момент. Иногда переход к исследованию других характеристик приводит к целесообразности использования совершенно не похожих моделей, хотя исследуемое явление остается одним и тем же. Классификация математических моделей представлена на рис. 5.1.

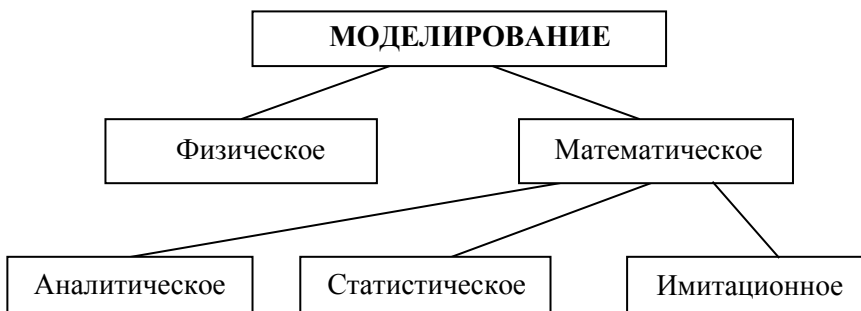


Рис. 5.1. Классификация видов моделирования

Принято различать физическое и математическое моделирование. Первое из них требует создания, обычно в специальных лабораториях, опытной установки, имитирующей объективность процесса. При этом физическая модель обычно имеет меньшие размеры, чем натуральный объект, но не исключено и обратное положение. Помимо пространственного масштабирования возможно и масштабирование времени, т. е. на модели можно за сравнительно короткое время изучить явление, протекающее в природе долгие годы, и, наоборот, внимательно рассмотреть мгновенно протекающий процесс.

Таким образом, при физическом моделировании в упаковочном производстве используется сама система либо подобная ей.

Однако физическому моделированию присущи недостатки прежде всего экономического характера. Созданию физической модели предшествуют работы по ее проектированию, изготовлению узлов и деталей, монтажу и наладке, оснащению вспомогательным оборудованием. Любая лабораторная установка требует площадей для ее

размещения и персонала для обслуживания, потребляет энергетические и материальные ресурсы при эксплуатации. Кроме того, диапазон изменений исследуемых характеристик на физических моделях обычно невелик и ограничивается не только разумностью затрат на проведение опытов, но и возможностями конструкционных материалов, из которых изготовлена модель.

Математическое моделирование в упаковочном производстве предполагает эксперименты с математическими моделями явлений. В отличие от физической модели, которая материальна, математическая модель является логическим объектом. Математическая модель – это упрощенный образ изучаемого явления, записанный с помощью математической символики. Процесс моделирования состоит из математических экспериментов, сущность которых основана на выполнении различных операций над математическими моделями. Обычно это решение систем уравнений или логических задач различного вида и сложности.

Таким образом, математическое моделирование – процесс установления соответствия математической модели  $M$  реальной системе  $S$  и исследование полученной модели с целью изучения характеристик реальной системы.

Применение математического моделирования позволяет исследовать объекты, реальные эксперименты над которыми затруднены или невозможны, т. е. дороги и требуют сложного дорогостоящего оборудования и много времени.

В свою очередь, выделяют следующие виды математического моделирования: аналитическое, статистическое, имитационное. На основе протекания различных технологических процессов в упаковочном производстве к нему применимы указанные виды математического моделирования.

Аналитическое моделирование заключается в том, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде математических соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, логических и т. д.). Аналитическая модель может быть исследована аналитическим методом, когда устанавливаются явные зависимости, получаются точные решения. Если математические зависимости, составляющие модель, сложно или невозможно решить аналитически, то прибегают к численным методам, когда получаются приближенные решения. В самых сложных случаях

аналитическую модель исследуют качественно, т. е. в явном виде находят не само решение, а его некоторые свойства.

Статистическое моделирование – это обработка статистических данных о системе (модели) с целью получения ее искомым характеристик.

Имитационное моделирование – это воспроизведение на ЭВМ (имитация) процесса функционирования исследуемой системы с соблюдением логической и временной последовательности протекания процессов, что позволяет узнать данные о состоянии системы или отдельных ее элементов в определенные моменты времени. Для имитации процесса обычно формулируется алгоритм (программа для ЭВМ), что позволяет проводить вычислительные эксперименты. В соответствии с указанными видами моделирования различают и математические модели – аналитические, статистические и имитационные.

Часто вместо термина «статистические» употребляют понятие «эмпирические модели». Математическое моделирование получило особенно широкое распространение в связи с возросшими вычислительными возможностями современных компьютеров. Этот вид моделирования свободен от многих недостатков, которыми страдает физическое моделирование. Прежде всего это гораздо более экономичный и удобный способ познания. Все эксперименты проходят над нематериальным объектом, существующим в виртуальной действительности.

Затратами здесь можно считать использование вычислительных ресурсов и умственного труда человека-исследователя. При математическом моделировании диапазон изменения исследуемых параметров лимитируется только здравым смыслом и правилами математики.

Безусловно, создание математической модели и работа с ней требуют определенных затрат, но их объем обычно не идет ни в какое сравнение с затратами на создание и эксплуатацию лабораторных установок. Однако следует отметить, что в настоящее время все еще не удается полностью отказаться от услуг физического моделирования, особенно в естественных науках, поскольку некоторые параметры исследуемых процессов могут быть определены только экспериментально. Однако полагают, что при использовании математического моделирования затраты уменьшаются в среднем в несколько раз.

В целом при математическом моделировании более развита теоретическая основа. Если при физическом моделировании она про-

является, как правило, при выдвижении исходной гипотезы и осмыслении полученных опытных данных, то при математическом моделировании, кроме того, необходимо формализовать (перевести на язык математики и логики) изучаемые свойства, теоретически обосновать аналогию между моделью и реальным явлением, правильно интерпретировать и обобщить результаты математического эксперимента. Без этого математическое моделирование перестает быть достоверным источником информации о реальных явлениях.

*Математическая модель* – это совокупность математических объектов – чисел, переменных, матриц, множеств и т. д., а также соотношений между ними. Эта совокупность отражает наиболее важные, с точки зрения исследователя, свойства описываемого объекта. Математическое моделирование заключается в математических экспериментах, сущность которых основана на выполнении различных операций над математическими моделями.

В результате моделирования прогнозируются характеристики исследуемого объекта (процесса, вещества, технического устройства, системы), проводится его оптимизация, оцениваются возможности вариантов и т. д.

Помимо разделения моделей на приведенные выше классы по принципиальным методам работы с ними (аналитические, статистические и имитационные) существуют иные виды классификации.

В зависимости от целей дальнейшего использования все математические модели можно отнести к одному из двух крупных видов. При исследовании принципов работы исследуемого объекта, характера протекающих процессов, как правило, используются математические модели, отображающие закономерности функционирования объектов. Такие модели называются *функциональными*. Обычно они представляют собой системы уравнений различного типа. Функциональные модели используются при проектировании объектов и систем.

Однако при конструкторских разработках наиболее важными являются расположение объектов в пространстве, геометрические формы объектов, связи отдельных частей объектов между собой и др. Здесь преобладают математические модели, отражающие структурные характеристики. Такие модели называются *структурными*. Они чаще всего представляются в виде матриц, таблиц, списков, графов и пр. Структурные модели используются при конструировании объектов.

При разработках информационных систем преобладают математические модели первого вида, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать именно такие модели. Структурные модели [36] обычно используются в системах автоматизированного проектирования.

Все функциональные математические модели можно отнести к одному из двух классов по свойствам моделируемых объектов и виду используемого для анализа математического аппарата.

Объекты, процессы или системы, на функционирование которых существенное влияние оказывают случайные возмущающие факторы и воздействия, описываются *стохастическими (вероятностными)* моделями. При работе с такими моделями обычно используют математический аппарат теории вероятностей, информационно-статистический или информационно-энтропийный подходы.

Объекты (системы), для которых предполагается, что их поведение можно описать однозначно или где можно игнорировать влияние случайных факторов, анализируются с помощью *детерминированных* моделей. При работе с ними, как правило, используют методы классической математики и математической физики.

## 5.2. Параметры моделей и фазовые переменные

Среди свойств объекта, отражаемых в математических моделях, следует различать воздействия на объект и его реакцию на эти воздействия. Количественное выражение этих величин осуществляется с помощью *параметров*. Любой процесс или объект исходя из внешних признаков может быть условно изображен в виде, представленном на рис. 5.2.



Рис. 5.2. Условное изображение объекта моделирования



При этом воздействия описываются *входными параметрами*  $X_i$ , а реакция объекта моделирования – *выходными параметрами*  $y_j$ . Последние характеризуют состояние объекта исследования и определяются суммарным воздействием входных параметров.

Среди входных параметров, в свою очередь, можно выделить:

– *внешние параметры*; их значения могут быть измерены, но возможность воздействовать на них отсутствует;

– *управляющие параметры*; на них можно оказывать прямое воздействие в соответствии с теми или иными требованиями, что позволяет управлять процессом;

– *возмущающие параметры*; они изменяются случайным образом и недоступны для измерения.

Можно привести следующий пример. Для аудиосистемы внешним параметром является уровень (напряжение) входного сигнала, который можно измерить, но обычно нельзя регулировать. Управляющими параметрами здесь являются коэффициенты усиления, которые можно произвольно менять в некоторых пределах. Возмущающими параметрами в данном примере следует считать появление случайных помех в канале передачи. В качестве выходных параметров аудиосистемы выступают, например, выходная мощность сигнала, потребляемая мощность, величина искажений выходного сигнала и прочее.

Пусть объект характеризуют  $n$  входных и  $m$  выходных параметров.

Тогда векторы этих параметров можно обозначить таким образом:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n); Y = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Поскольку свойства объекта зависят от входных параметров, имеет место зависимость

$$Y = F(X). \quad (5.1)$$

Приведенная система соотношений является примером математической модели объекта.

Наличие математической модели вида (5.1) позволяет легко оценивать выходные параметры по известным значениям вектора  $X$ . Однако существование данной зависимости не означает, что она известна и может быть представлена именно в таком явном относи-

тельно вектора  $Y$  виде. Как правило, такую математическую модель удается получить только для очень простых объектов. Типичной является ситуация, когда математическое описание процессов в исследуемом объекте задается в форме системы уравнений, в которой фигурирует вектор фазовых переменных  $V$ .

Фазовые переменные характеризуют физическое состояние объекта, а их изменения во времени выражают переходные процессы в объекте. Наиболее типичным примером фазовых переменных (для упомянутой выше аудиосистемы) являются величины электрического тока и напряжения, поскольку с их помощью можно описать все входные и выходные параметры данного устройства. При моделировании механических систем фазовыми переменными являются силы и скорости, для гидравлических систем – давления и расходы и т. д.

На практике довольно часто встречаются случаи, когда объект настолько сложен, что его структура либо неизвестна совсем, либо ее корректное математическое описание невозможно. В таких случаях исследователь вынужден игнорировать внутренние процессы, протекающие в объекте, и анализировать лишь влияние входных параметров на выходные. При этом модели получаются путем обработки статистических данных и относятся к классу статистических. Однако в литературе имеется еще одно название для таких математических моделей – модели типа *черного ящика*.

## **6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА К СОЗДАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

Системный подход как новая методология науки и практики сложился ко второй половине XX столетия. Он является качественно новым подходом в изучении, проектировании и создании систем. Формирование системного подхода в качестве самостоятельного исследовательского направления обусловлено общей тенденцией развития науки и общества, которая сложилась к настоящему времени.

Центральным понятием системного анализа является понятие *система*.

При построении математических моделей принципиальное значение имеют свойства систем. Помимо рассмотренных выше видов классификации систем на детерминированные и стохастические, дискретные и непрерывные следует выделить еще ряд характерных признаков.

*Динамические* системы характеризуются тем, что их выходные параметры в данный момент времени определяются характером входных воздействий в прошлом и настоящем (зависит от предыстории). В противном случае системы называют *статическими* [4, 6].

Если параметры системы изменяются во времени, то она называется *нестационарной*, противоположным понятием является понятие *стационарной* системы.

Различают системы *линейные* и *нелинейные*. Для линейных систем реакция на сумму двух или более различных воздействий эквивалентна сумме реакций на каждое возмущение в отдельности, для нелинейных это условие не выполняется.

Можно выделить следующие основные определения и свойства системы:

- система есть совокупность элементов (подсистем); при определенных условиях элементы сами могут рассматриваться как системы, а исследуемая система – как элемент более сложной системы;
- связи между элементами в системе превосходят по силе связи этих элементов с элементами, не входящими в систему; это свойство позволяет выделить систему из среды;
- для любой системы характерно существование *интеграционных* качеств, которые присущи системе в целом, но не свойственны ни одному ее элементу в отдельности: систему нельзя сводить к простой совокупности элементов;
- система всегда имеет цели, для которых она функционирует и существует.

В качестве примера можно привести следующее. Если в качестве системы рассматривать экструдер, то входящие в него детали являются элементами системы (подсистемами), т. е. состоят из элементов – подсистем более низкого уровня. Методология системного подхода при решении задач анализа систем состоит в следующем. Задача расчленяется на подзадачи анализа элементов системы. Причем каждый из элементов должен рассматриваться не сам по себе, а во взаимодействии с другими элементами. Решение подзадач должно происходить при условии обеспечения общих целей функционирования всей системы.

При создании математических моделей использование системного подхода предполагает выделение нескольких уровней абстракции при описании объекта (системы). Объединение уровней, родственных по характеру используемого математического аппарата, приводит к образованию нескольких уровней в иерархии функциональных моделей. Наиболее наглядно это можно продемонстрировать на примере моделирования технических объектов.

В качестве примера моделей разного уровня, описывающих один и тот же процесс, рассмотрим нагрев твердого тела.

Если некоторое твердое тело рассматривать как единую систему, нагревающуюся под действием теплового потока, то процесс можно описать с помощью простого балансового уравнения

$$T = T_0 + \frac{1}{C_p \rho} Q, \quad (6.1)$$

где  $T$  – конечная температура тела;

$T_0$  – его начальная температура;

$C_p, \rho$  – теплоемкость и плотность материала тела;

$Q$  – количество теплоты, полученной телом, отнесенное к его объему.

Будем считать модель (6.1) моделью верхнего, самого общего уровня абстракции.

Допустим, нас интересует не только конечная температура объекта, но и ее изменение во времени, т. е. кинетика процесса нагрева. Тогда следует перейти к более подробному описанию процесса, например, в таком виде:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{C_p \rho} q(\tau), \quad (6.2)$$

где  $q(\tau)$  – тепловой поток, отнесенный к единице объема тела;

$\tau$  – время.

Для решения приведенного уравнения следует указать закон изменения во времени теплового потока  $q(\tau)$  и задать начальную температуру тела:

$$T|_{\tau=0} = T_0.$$

Полученное решение позволит определить изменение температуры тела во времени.

Заметим, что модели (6.1) и (6.2) рассматривают тело как единое целое и в них не входят пространственные координаты.

Наконец, если исследователю важно провести анализ изменения температуры не только во времени, но и в различных точках пространства, то следует перейти к еще более подробной детализации процесса. Примем для простоты, что тело имеет форму длинного тонкого стержня. Если пренебречь всеми размерами стержня, кроме его длины, модель можно представить в виде следующего уравнения:

$$\frac{\delta T}{\delta \tau} = \frac{\lambda}{C_{\rho} \rho} \left( \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \right), \quad (6.3)$$

которое следует дополнить начальными и граничными условиями, описывающими протекание процесса, например такими:

$$T|_{x=0} = f_1(\tau);$$

$$T|_{x=l} = f_2(\tau);$$

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x),$$

где  $x$  – пространственная координата;

$\tau$  – время;

$l$  – длина стержня.

Решение данной модели позволит определить температуру в любой точке стержня в любой момент времени.

Проследим, как изменяется вид уравнений математической модели процесса при переходе от одного уровня абстракции к другому.

Модель процесса, представленная на верхнем уровне простейшим алгебраическим уравнением (6.1), усложняется на втором уровне абстракции и принимает вид обыкновенного дифференци-

ального уравнения (6.2). Переход к третьему, самому подробному, уровню приводит к необходимости использовать дифференциальное уравнение с частными производными (6.3). Однако за счет усложнения модели мы получаем дополнительную информацию о процессе. Если в первом случае мы можем определить лишь конечную температуру моделируемого объекта, то во втором имеем возможность проследить процесс во времени, считая температуру одинаковой во всем объеме тела. Модель третьего уровня уже позволяет исследовать распределение температуры и во времени, и в пространстве.

Безусловно, в данном примере дается чрезвычайно упрощенный подход к описанию процесса, т. е. не рассматривается отдача тепла нагретым телом в окружающую среду. В модели (6.3) процесс рассматривается лишь по одной координате, а реальные тела имеют конечные размеры по всем пространственным координатам. Можно добавить и другие условия, не учтенные в примере. Учет этих условий должен привести к появлению новых членов в уравнениях и значительно усложнить их. Однако усложнение математической модели делает ее более адекватной, более приближенной к реальности, хотя и ухудшает ее экономичность [20, 21].

При моделировании технических объектов часто рассмотренные выше модели и уровни абстракции называются следующим образом. Модель вида (6.3) называют моделью *микроуровня*, вида (6.2) – моделью *макроуровня*, вида (6.1) – *мегауровня*. При этом характерно следующее.

1. На микроуровне абстракции используют математические модели, описывающие физическое состояние и процессы в сплошных средах. Для моделирования применяют аппарат математической физики. Особенностью этих математических моделей является отражение процессов, протекающих в непрерывных пространстве и времени. Типичными математическими моделями этого уровня являются уравнения гидродинамики, теплопереноса, диффузии, упругости. Они представляют собой системы дифференциальных уравнений с частными производными. В них независимыми переменными являются время и пространственные координаты. Такие математические модели часто называют моделями с *распределенными параметрами*, поскольку в них параметры и фазовые переменные зависят от координат точек пространства. Если в таких уравнениях

время как независимая переменная отсутствует, то они описывают *стационарный* процесс и называются стационарными. Исследование таких моделей сводится к решению краевых задач. Следует заметить, что, несмотря на полноту описания процесса, возможности применения таких моделей ограничены. Попытки исследовать с их помощью процессы в многокомпонентных средах не всегда успешны из-за чрезмерных вычислений [18, 22, 23].

2. На макроуровне производится укрупнение дискретизации пространства по функциональному признаку, т. е. выделяются характерные зоны, в которых процесс можно считать не зависящим от пространственных координат. Математические модели на этом уровне представляются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений [24], где в качестве независимой переменной присутствует только время. Данные модели называют моделями с *сосредоточенными параметрами*. При рассмотрении стационарного процесса на данном уровне математические модели получают вид систем алгебраических уравнений. Математические модели данного уровня являются универсальными и пригодными к исследованию как динамических, так и статических режимов процесса.

3. На мегауровне с помощью дальнейшего абстрагирования от характера физических процессов удастся еще более упростить модель. Обычно в ней фигурируют только фазовые переменные, относящиеся к внешним связям объекта. Типичными моделями этого уровня являются балансовые соотношения в виде систем алгебраических уравнений [19].

Таким образом, системный подход, как новая методология науки и практики, является качественно новым подходом в изучении, проектировании и создании систем. Формирование системного подхода в качестве самостоятельного исследовательского направления обусловлено общей тенденцией развития науки и общества, которая сложилась к настоящему времени. При этом особым значением системного анализа является понятие *система*.

При построении математических моделей принципиальное значение имеют свойства систем [18]. Помимо рассмотренного выше деления систем на детерминированные и стохастические, дискретные и непрерывные еще существует классификация по ряду характерных признаков.

## 7. МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Линейное программирование** — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения экстремальных задач на множествах  $n$ -мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств [5].

Линейное программирование является частным случаем выпуклого программирования, которое, в свою очередь, является частным случаем математического. Одновременно оно — основа нескольких методов решения задач целочисленного и нелинейного программирования. Одним из обобщений линейного программирования является дробно-линейное программирование.

Многие свойства задач линейного программирования можно интерпретировать также как свойства многогранников и таким образом геометрически формулировать и доказывать их.

### 7.1. Математическая формулировка

Нужно определить максимум линейной целевой функции (линейной формы)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

при  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Иногда на  $x_i$  также накладывается некоторый набор ограничений в виде равенств, но от них можно избавиться, последовательно выражая одну переменную через другие и подставляя ее во всех остальных равенствах и неравенствах (а также в функции  $f$ ).

Такую задачу называют «основной» или «стандартной» в линейном программировании.



## 7.2. Примеры задач о максимальном парасочетании

### 7.2.1. Максимальное сочетание пар

Рассмотрим задачу о максимальном парасочетании в двудольном графе: есть несколько значений  $a$  и  $c$ . Нужно объединить максимальное число пар.

Введем переменные  $x_{ij}$ , которые соответствуют паре из  $i$ -го значения и  $j$ -го значения и удовлетворяют ограничениям:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1;$$

$$x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{ni} \leq 1;$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} \leq 1$$

с целевой функцией

$$f = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{nm}.$$

Можно показать, что среди оптимальных решений этой задачи найдется целочисленное. Переменные, равные 1, будут соответствовать парам, которые следует объединить.

### 7.2.2. Максимальный поток

Пусть имеется граф (с ориентированными ребрами), в котором для каждого ребра указана его пропускная способность и заданы две вершины: сток и исток. Для каждого ребра нужно указать, сколько через него будет протекать жидкости (не больше его пропускной способности), так чтобы максимизировать суммарный поток из истока в сток (жидкость не может появляться или исчезать во всех вершинах, кроме стока и истока).

В качестве переменных  $x_i$  возьмем количество жидкости, протекающей через  $i$ -е ребро. Тогда

$$0 \leq x_i \leq c_i,$$

где  $c_i$  – пропускная способность  $i$ -го ребра.

Это неравенство надо дополнить равенством количества вытекающей и вытекающей жидкости для каждой вершины, кроме стока и истока. В качестве функции  $f$  естественно взять разность между количеством вытекающей и втекающей жидкости в истоке.

Обобщение предыдущей задачи — максимальный поток минимальной стоимости. В этой задаче даны стоимости для каждого ребра и нужно среди максимальных потоков использовать поток с минимальной стоимостью. Задача сводится к двум задачам линейного программирования: сначала нужно решить задачу о максимальном потоке, а потом добавить к ней ограничение

$$f(x) \geq m,$$

где  $m$  — величина максимального потока, и решить задачу с новой функцией  $f(x)$  — стоимостью потока.

Эти задачи могут быть решены быстрее, чем общими алгоритмами решения задач линейного программирования, за счет особой структуры уравнений и неравенств.

### 7.2.3. Понятие минимизации функции

Для понятия смысла минимизации целевой функции приведем следующий пример. Имеется некий однородный груз, который нужно перевести с  $n$  складов на  $m$  заводов. Для каждого склада  $i$  известно, сколько в нем находится груза  $a_i$ , а для каждого завода известна его потребность  $b_j$  в грузе. Стоимость перевозки пропорциональна расстоянию от склада до завода (все расстояния  $c_{ij}$  от  $i$ -го склада до  $j$ -го завода известны). Требуется составить наиболее дешевый план перевозки.

Решающими переменными в данном случае являются  $x_{ij}$  — количество груза, перевезенного из  $i$ -го склада на  $j$ -й завод. Они удовлетворяют ограничениям

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} \leq a_i;$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj} \geq b_j.$$

Целевая функция, которую надо минимизировать, имеет вид

$$f(x) = x_{11}c_{11} + x_{12}c_{12} + \dots + x_{nm}c_{nm}.$$

#### 7.2.4. *Игра с нулевой суммой*

Есть матрица  $A$  размера  $n \times m$ . Первый игрок выбирает число от 1 до  $n$ , второй – от 1 до  $m$ . Затем они сверяют числа и первый игрок получает  $a_{ij}$  очков, а второй ( $-a_{ij}$ ) очков ( $i$  – число, выбранное первым игроком,  $j$  – вторым). Нужно найти оптимальную стратегию первого игрока.

Пусть в оптимальной стратегии, например первого игрока, число  $i$  нужно выбирать с вероятностью  $p_i$ . Тогда оптимальная стратегия является решением следующей задачи линейного программирования:

$$0 \leq p_i \leq 1;$$

$$p_1 + \dots + p_n = 1;$$

$$a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \dots + a_{ni}p_n \geq c \quad (i=1, \dots, m),$$

в которой нужно максимизировать функцию

$$f(p_1, \dots, p_n, c) = c.$$

Значение  $c$  в оптимальном решении будет математическим ожиданием выигрыша первого игрока в наихудшем случае.

#### *Алгоритмы решения*

Наиболее известным и широко применяемым на практике для решения общей задачи линейного программирования (ЛП) является симплекс-метод. Несмотря на то, что симплекс-метод является достаточно эффективным алгоритмом, показавшим хорошие результаты при решении прикладных задач ЛП, он является алгоритмом с экспоненциальной сложностью [5, 7]. Причина этого состоит в комбинаторном характере симплекс-метода, последовательно переби-

рающего вершины многогранника допустимых решений при поиске оптимального решения.

Первый полиномиальный алгоритм, метод эллипсоидов, был предложен в 1979 году советским математиком Л. Хачияном, разрешившим таким образом проблему, долгое время остававшуюся нерешенной. Метод эллипсоидов имеет совершенно другую, некомбинаторную природу, нежели симплекс-метод. Однако в вычислительном плане этот метод оказался неперспективным. Тем не менее сам факт полиномиальной сложности задач привел к созданию целого класса эффективных алгоритмов ЛП — методов внутренней точки, первым из которых был алгоритм Н. Кармаркара, предложенный в 1984 году. Алгоритмы этого типа используют непрерывную трактовку задачи ЛП, когда вместо перебора вершин многогранника решений задачи ЛП осуществляется поиск вдоль траекторий в пространстве переменных задачи, не проходящих через вершины многогранника. Метод внутренних точек, который в отличие от симплекс-метода обходит точки из внутренней части области допустимых значений, использует методы логарифмических барьерных функций нелинейного программирования, разработанные в 1960-х годах Фиако (Fiacco) и МакКормиком (McCormick).

### 7.3. Решение задач оптимизации

При решении ряда технических задач выражение для критерия оптимальности может быть представлено в виде линейной функции от входящих в него оптимизирующих переменных. При этом на оптимизирующие переменные также могут быть наложены некоторые ограничивающие условия в форме линейных равенств или неравенств. Для решения оптимизационных задач в такой постановке используется метод линейного программирования [7].

Целевая функция записывается в виде линейной зависимости от оптимизирующих параметров

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \quad (7.1)$$

где  $c_j$  – заданные постоянные коэффициенты.

Накладываемые ограничения в виде равенств и неравенств также должны быть представлены в линейной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases} \quad (7.2)$$

В сокращенной записи имеем

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \geq b_j,$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Коэффициенты  $c_i$  и  $a_{ji}$  в системе (7.2) являются действительными числами и могут быть положительными и отрицательными, среди них могут быть и равные нулю. Число ограничений типа равенств не должно превышать общего числа оптимизирующих переменных. Число неравенств может быть произвольным.

В задачах линейного программирования обычно предполагают, что оптимизирующие переменные неотрицательны, т. е.  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Также считают, что все величины  $b_m$  в выражениях (7.2) отличны от нуля и положительны. Если какое-либо значение  $b_m$  окажется отрицательным, то умножая правую и левую части соответствующего выражения на  $-1$ , его приводят к виду, когда правая часть становится положительной. Если какая-либо величина  $b_m$  оказывается равной нулю, то в левую и правую части соответствующего выражения (7.2) добавляется слагаемое  $x_{n+1}$ , что делает величину  $b_m$  отличной от нуля. При этом считают, что добавленное слагаемое вошло и в выражение (7.1), но с нулевым коэффициентом ( $c_{n+1} = 0$ ), что не изменяет выражения для целевой функции.

Оптимальным решением задачи линейного программирования является такая совокупность значений независимых переменных, которая удовлетворяет условиям (7.2) и обеспечивает, в зависимости от постановки задачи, минимальное или максимальное значение целевой функции (7.1).

Обычно считают, что оптимум достигается при максимальном значении функции (7.1). Случай, когда требуется найти минималь-

ное значение функции (7.1), может быть сведен к задаче максимизации путем изменения знаков у всех коэффициентов  $C_i$ , т. е.

$$\max (C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n) = -\min (-C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n).$$

Решение задачи оптимизации целевой функции (7.1) при двух оптимизирующих параметрах  $x_1$  и  $x_2$  наиболее просто и может быть осуществлено графически. В качестве примера рассмотрим функцию

$$F = 3x_1 + 5x_2,$$

которую нужно максимизировать при ограничении

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8 \text{ и } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Очевидно, что при наложенных ограничениях оптимальные значения  $x_1$  и  $x_2$ , соответствующие максимуму целевой функции, не могут находиться за пределами заштрихованной области (рис. 7.1), ограниченной прямой  $2x_1 + 4x_2 = 8$  и координатными осями. Минимальная величина целевой функции для координат заштрихованной области

$$F = 3x_1 + 5x_2 = 0,$$

что соответствует показанной на рис. 7.1 пунктирной прямой, проходящей через начало координат.

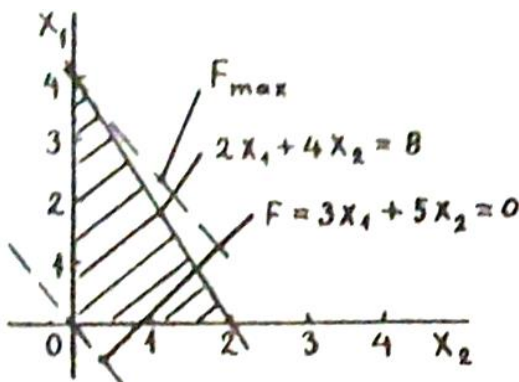


Рис. 7.1. Решение задачи оптимизации целевой функции

Имеется семейство прямых, параллельных данной, каждая из которых соответствует различным значениям функции  $F$ . Как показано на рис. 7.1, наибольшее возможное значение  $F$  соответствует пунктирной прямой, проходящей через точку с координатами  $x_2 = 0$  и  $x_1 = 4$ . Таким образом, окончательно имеем

$$F_{\max} = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 12.$$

В рассмотренном примере максимальное значение функция принимает на одной из вершин контура, ограничивающего область допустимых значений оптимизирующих параметров. Данное обстоятельство является характерным для такого типа задач. Иногда возможны случаи, когда решению задачи соответствует бесконечный набор значений оптимизирующих переменных. Геометрическая интерпретация таких вариантов заключается в том, что одна из границ многоугольника области возможных изменений переменных параллельна линии  $F$ , определяемой выражением критерия оптимальности.

При числе оптимизирующих параметров свыше трех получить графическое решение невозможно [5, 8]. Для таких случаев разработаны различные итерационные приемы расчета, которые реализуются на ЭВМ.

#### 7.4. Условия Каруша–Куна–Таккера

В теории оптимизации условия Каруша–Куна–Таккера – необходимые условия решения задачи нелинейного программирования. Чтобы решение было оптимальным, должны быть выполнены некоторые условия регулярности. Метод является обобщением метода множителей Лагранжа. В отличие от него ограничения, накладываемые на переменные, представляют собой не уравнения, а неравенства.

Кун и Таккер обобщили метод множителей Лагранжа (для использования при построении критериев оптимальности для задач с ограничениями в виде равенств) на случай общей задачи нелинейного программирования с ограничениями как в виде равенств, так и неравенств.

## Постановка задачи

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации

$$\min_{x \in X} f(x)$$

при условиях  $g(x) \leq 0, i=1 \dots m$ .

Вильям Каруш в своей дипломной работе нашел необходимые условия в общем случае, когда накладываемые условия могут содержать и уравнения и неравенства. Независимо от него к тем же выводам пришли Гарольд Кун и Альберт Таккер.

*Необходимые условия минимума функции.*

Если

$$\hat{x} \in \arg \min f$$

при наложенных ограничениях — решение задачи, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа  $\lambda \in R_m$  такой, что для функции Лагранжа

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

выполняются условия:  
стационарности

$$\min_x L(x) = L(\hat{x});$$

дополняющей нежесткости

$$\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0, i=1 \dots m,$$

неотрицательности

$$\lambda_i \geq 0, i=1 \dots m.$$



Достаточные условия минимума функции: перечисленные необходимые условия минимума функции в общем случае не являются достаточными. Существует несколько вариантов дополнительных условий, которые делают их достаточными.

Простая формулировка: если для допустимой точки  $\hat{x}$  выполняются условия стационарности, дополняющей нежесткости и неотрицательности, а также  $\lambda_1 > 0$ , то

$$\hat{x} \in \arg \min f.$$

Более слабые условия: если для допустимой точки  $\hat{x}$  выполняются условия стационарности, дополняющей нежесткости и неотрицательности, а также

$$\exists \bar{x}: g_j(\bar{x}) < 0,$$

$$i = 1 \dots m \text{ (условие Слейтера),}$$

то

$$\hat{x} \in \arg \min f.$$

## 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСТРУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В УПАКОВОЧНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Известно, что качество конечного целевого продукта в упаковочном производстве зависит от процессов плавления, течения и смешения полимера. Совершенствование оборудования и процесса производства сегодня требует больших затрат времени и средств.

Обычно при моделировании технологических процессов важной задачей является описание поведения полимера с помощью моделей. В настоящее время в технологии переработки полимеров происходящие процессы в основном смоделированы и связаны с заполнением литевой формы, оценкой ориентации, усадки и короблением изделия и экструзией с учетом вязкости.

При этом только небольшое число трехмерных моделей было применено к изучению реальных процессов.

В настоящее время удачно смоделировано значительное число процессов переработки полимерных материалов для изготовления упаковки, начиная от заполнения литьевой формы, оценки ориентации, усадки и коробления изделия, а также экструзии полимеров с учетом вязкоупругих эффектов.

Оказалось, что применительно к реальным условиям процесса было изучено лишь небольшое число трехмерных моделей. Существенный недостаток моделирования трехмерного процесса состоит в том, что при точном представлении геометрической формы устройства требуется большой объем вычислений и хранения полученных данных [10].

Возникают задачи, которые связаны с движущимися свободными границами и характерны для загрузки расплава, разбухания экструдата, нанесения покрытий и т. д. При условии полного заполнения устройства движущиеся твердые границы появляются в тех местах, где полости, содержащие полимер, во время процесса изменяют форму. Это относится к местам, где находятся вращающиеся лопасти в смесителе периодического действия, или шнек и перемешивающие элементы в одношнековом экструдере. Очень сложным процессом является смешение в двухшнековом экструдере, так как полимер постоянно меняет форму при вращении шнеков, смесительных элементов и головок. Для предсказания конечной морфологии полимеров необходимо рассматривать полное моделирование протекающих процессов в одношнековом и двухшнековом экструдерах. К таким процессам относятся плавление, движение расплава, смешение и течение в головке, что представляет самую сложную задачу при переработке полимеров. Необходимо учитывать теплотехнические процессы. Такие процессы происходят в технической термодинамике [36]. При этом следует включать сварку при соединении потоков и частично заполнение объемов. Моделирование этих указанных протекающих процессов является одной из самых сложных задач при переработке полимеров.

Для решения подобных задач сложные геометрические формы и условия переработки следует упрощать до вида, который уже можно смоделировать при использовании двумерных моделей. В настоящее время использование более мощных компьютеров и техники, новых эффективных методик вычислений делает возможным моделирование трехмерных задач для сложных геометрических форм со сложным (нелинейным) поведением полимеров.

## 8.1. Планирование модельных экспериментов для упаковочного производства

Известно, что для производства упаковки используется различное оборудование. Причем технологический процесс при изготовлении упаковки включает различное воздействие на полимеры: термическую деструкцию, особенности реологического поведения расплава, изменение структуры. При этом моделирование процессов в условиях управления технологическими процессами, с целью экономии энергии, имеет определенное значение. Особое значение экономии энергетических ресурсов следует уделять в упаковочном производстве, когда для изготовления упаковки используется переработка полимеров в процессе экструзии.

Для того чтобы планировать указанные выше особенности упаковочного производства, необходимо на этапе планирования эксперимента знать, к какому классу относится моделируемая система: она динамическая, стохастическая или детерминированная и т. п. Кроме того, необходимо знать режим работы: стационарный или нестационарный, в течение какого промежутка времени следует наблюдать за функционированием системы. Следует также знать объем испытаний (объем повторных экспериментов), который сможет обеспечить требуемую точность оценок исследуемых характеристик.

Планирование модельных экспериментов преследует следующие основные цели:

- уменьшение количества испытаний при соблюдении требований к достоверности, точности и воспроизводимости полученных результатов;

- повышение информации каждого из экспериментов в отдельности.

Из всех допустимых вариантов плана следует выбирать такой, который:

- позволил бы получить наиболее достоверное значение функции отклика при фиксированном числе опытов (стратегическое планирование);

- имеет статистическую оценку функции отклика, полученную при минимальном количестве испытаний (тактическое планирование).

## **8.2. Использование пакета MATLAB для моделирования технологических процессов упаковочного производства**

Одним из важных преимуществ пакета MATLAB является то, что в простейшем случае для его использования достаточно использовать знаки математических операций. Один из важных факторов MATLAB – средство математического моделирования, которое обеспечивает проведение исследований и в упаковочном производстве. Сама же структура пакета позволяет рационально и более эффективно сочетать два основных подхода к созданию аналитической и имитационной моделей.

Моделирование MATLAB представляет средство математического моделирования, позволяющее сполна использовать все современные достижения компьютерных технологий [11, 12, 27]. При этом используются средства визуализации и аудификации данных, имеется возможность обмена полученных данных через Интернет.

Из названия пакета следует, что он ориентирован в основном на обработку массивов данных (векторов и матриц). Так как MATLAB [13] предоставляет в распоряжение пользователя универсальный язык объектно-ориентированного программирования в сочетании с интерактивными средствами отладки программ, его использование для моделирования технологических процессов в упаковочном производстве весьма перспективно [25, 26].

## **8.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности конечного цилиндра для составления алгоритма**

### ***8.3.1. Особенность построения математических моделей для описания термодинамических процессов***

Разработанные методы анализа термодинамики процессов позволяют устанавливать определенную связь между основными параметрами технологии, такими как температура, давление, плотность [28–31, 36]. Математические модели процессов теплопередачи базируются на основе математического аппарата, разработанного в исследованиях теплопроводности в твердых телах [28, 29, 38]. Известно, что все термодинамические функции и теплофизические

характеристики полимеров существенно зависят от температуры и давления [10, 34], а поэтому при построении моделей реальных процессов особое внимание необходимо обращать на правильный выбор средних значений соответствующих характеристик.

### 8.3.2. Составление алгоритма

Для решения дифференциального уравнения теплопроводности бесконечного цилиндра воспользуемся методом сеток, суть которого заключается в разбиении координатной плоскости на равные части и вычислении значения искомой функции в узлах образуемой сетки [14, 15]. Используя значения функции в крайних точках, можно последовательно вычислить ее значение в любой части координатной плоскости. В общем случае, когда температура зависит от координат  $x, y, z$ , дифференциальное уравнение теплопроводности конечного цилиндра имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Заменим частный дифференциал разностным отношением

$$\frac{\Delta T(t, r)}{\Delta t} = a \left( \frac{\Delta \left( \frac{\Delta T(t, r)}{\Delta r} \right)}{\Delta r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta T(t, r)}{\Delta r} \right).$$

Осуществим следующее преобразование функции

$$f(t, r) \rightarrow f(t_i, r_j):$$

$$\frac{\Delta T(t_i, r_j)}{\Delta t} = a \left( \frac{\Delta \left( \frac{\Delta T(t_i, r_j)}{\Delta r} \right)}{\Delta r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta T(t_i, r_j)}{\Delta r} \right).$$

$$\begin{aligned}
\frac{T(t_{i+1}, r_{i+1}) - T(t_i, r_{i+1})}{\Delta t} &= a \left( \frac{\Delta \left( \frac{T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_j)}{\Delta r} \right)}{\Delta r} + \frac{1}{r_j} \cdot \frac{T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_j)}{\Delta r} \right) = \\
&= a \left( \frac{\frac{T(t_i, r_{i+2}) - T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_j)}{\Delta r}}{\Delta r} + \frac{1}{r_j} \cdot \frac{T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_j)}{\Delta r} \right) = \\
&= a \left( \frac{T(t_i, r_{i+2}) - 2T(t_i, r_{i+1}) + T(t_i, r_j)}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j} \cdot \frac{T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_j)}{\Delta r} \right); \\
T(t_{i+1}, r_{i+1}) &= T(t_i, r_{i+1}) + \\
&\quad + \frac{a\Delta t}{\Delta r} \left( \frac{T(t_i, r_{i+2}) - 2T(t_i, r_{i+1}) + T(t_i, r_j)}{\Delta r} + \frac{T(t_i, r_{i+1}) - T(t_i, r_j)}{r_j} \right).
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Затем уравнение (8.1) подготавливают для рекуррентного вычисления в MATLAB V6 и проводят переобозначения.

В результате последовательных вычислений можно получить массив  $T$ , характеризующий температурное поле неограниченного цилиндра в любой момент времени.

1. Сама программа начинается с задания следующих переменных: начального и конечного моментов времени, радиуса цилиндра и числа его разбиений, констант, которые характеризуют тепловые и физические свойства полимера.

2. Вторым этапом является вычисление шага аргументов, используемого для вычисления исходной функции.

3. Третьим этапом являются краевые условия, когда значения искомой функции в начальный момент времени  $t_0 = 0$  изменяются в зависимости от радиуса, при этом температуры стенки литникового канала задаются циклом FOR.

4. Следует иметь в виду, что каждый элемент вектора, который характеризует температурное поле в начальный момент времени, обозначает значение температуры, вычисленное как значение функции распределения, относящейся к циклу. При этом число циклов присвоения значений вектору возрастает вдвое, так как его элементов на один должно быть больше, чем число интервалов разбиений, и на одно значение больше, чтобы можно было вычислить значение массива в центре цилиндра после перехода от внутреннего цикла к внешнему.

5. Пятым условием является то, что каждому элементу вектора, который характеризует температуру стенки канала в любой момент времени, присваивается постоянное значение температуры. Причем число циклов присвоения значений вектору увеличивают на один, так как его элементов должно быть на один больше, чем число интервалов разбиений.

6. С целью вычисления матрицы, определяющей температуру цилиндра по радиусу в любой момент времени, используют два вложенных цикла For. При этом во внутреннем цикле предусматривают изменение радиуса цилиндра с вычислением температурного поля в заданный момент времени.

7. С переходом к внешнему циклу отсчет времени возрастает на единицу, а значение производной температуры по радиусу в любой момент времени равно 0, и поэтому для учета еще одного краевого условия при переходе от внешнего цикла к внутреннему значение последней температуры принимается большим в два раза.

8. После получения матрицы строят график. Для удобства пользования необходимо, чтобы координатные оси были проградуированы соответствующим образом переставлением столбцов в матрице температур, что осуществляется при использовании двух переменных циклов. Затем осуществляется построение графика с градуировкой его осей.

#### **8.4. Составление программы**

Программа для MATLAB V 6.0 R 12 начинается с очищения переменных графических окон функций и окна вывода результата.

Для простоты программы в использовании и приспособлении к любым задачам покажем порядок вычисления:

задаются переменные;  
рассчитываются интервалы изменения температуры и радиуса;  
присваиваются начальные значения температуры стенки в цикле For;  
присваиваются начальные значения температурного поля полимера в цикле;  
рассчитывается матрица температурного поля  $T$  во вложенном цикле For;  
изменяется порядок расположения столбцов путем обработки массива в двойном цикле For;  
строится поверхность, описывающая полученную функциональную зависимость  $T(t, r)$ ;  
подписываются координатные оси:  $x, y, z$  (label).

## 8.5. Анализ моделирования и расчетов

В результате численного решения дифференциального уравнения с помощью составленной программы полученные данные хорошо согласуются с его аналитическим решением.

Результаты, полученные с помощью данной программы, можно использовать для моделирования реальных технологических процессов, связанных с нагреванием и охлаждением цилиндрических каналов применительно к упаковочному производству.

## 8.6. Методы, применяемые для анализа и моделирования экструзионных процессов

При полном описании исследуемого явления задача может иметь аналитическое решение, если некоторое уравнение почти полностью описывает исследуемое явление. С помощью некоторых допущений при ограничении области исследуемой задачи при наличии более реальных положений могут применяться аналитические методы. Для технологии в упаковочном производстве важны предполагаемые значения параметров получаемого изделия, температуры расплава и изменения давления вдоль длины шнека. Однако компьютерное моделирование может дать большую информацию, т. е., например, содержание твердого материала в расплаве и ширину твердой пробки. По мере плавления материала твердая пробка занимает все боль-



шую часть канала. В результате в идеальном случае на выходе из экструдера не должно оставаться твердого полимера.

Из литературных данных известно, что изменение конструкции шнека, материала или условий переработки может привести к совершенно иному профилю границ твердой пробки. Использование процесса моделирования для данного случая указывает на то, что ширина области, занимаемой твердым материалом, снижается значительно медленнее, а само плавление не заканчивается почти до самого конца шнека. Это менее желательный вариант, так как есть вероятность того, что часть материала может не расплавиться и не перемешаться с остальной его массой до самого выхода из экструдера. Если уменьшение содержания твердого материала происходит медленнее, чем снижение давления в шнеке, то в этом случае объем канала уменьшается быстрее, чем объем твердой фазы материала. В результате происходит закупорка канала и резкое ускорение перемещения или разрывы в твердой фазе. Поэтому в настоящее время при конструировании экструзионных систем чаще всего используют аналитические методы для моделирования процесса экструзии.

### ***Описание и моделирование процесса движения полимера в одношнековом экструдере***

Рассмотрим трехмерную математическую модель процессов течения и теплообмена расплавленного полиэтилена в зоне дозирования одношнекового экструдера, учитывая нелинейные свойства материала, вынужденную конвекцию расплава и распространение тепла.

Переработка полимеров и создание для этого оборудования, необходимого для производства упаковки, является одним из важнейших направлений в упаковочной отрасли современной промышленности. При этом особое значение это имеет для переработки пластических масс методом экструзии, основным преимуществом которой является непрерывность процесса и возможность его совмещения с другими технологиями. Наиболее применяемыми машинами для переработки полимеров в технологическом процессе являются одночервячные пластифицирующие экструдеры.

В соответствии с технологическим процессом в зоне пластицирующего экструдера находится только жидкая фаза. Для построения математической модели процессов течения и теплового обмена

полимера в расплавленном состоянии в зоне дозирования винтового канала экструдера (рис. 8.1) применяют следующие упрощающие предположения. Предполагают, что процесс является стационарным при постоянном массовом расходе; винтовой канал разворачивается на плоскость с использованием принципа обращенного движения (рис. 8.2), причем силами массы в сравнении с силами вязкого трения, а также утечками жидкости через зазор пренебрегают. В результате процесс движения и теплообмена полимера в винтовом канале экструдера упрощается, и его можно моделировать тепломассопереносом материала в длинном прямоугольном канале, верхняя стенка которого движется с постоянной скоростью  $v_0$ , равной окружной скорости червяка, под углом нарезки винтовой линии к оси канала.

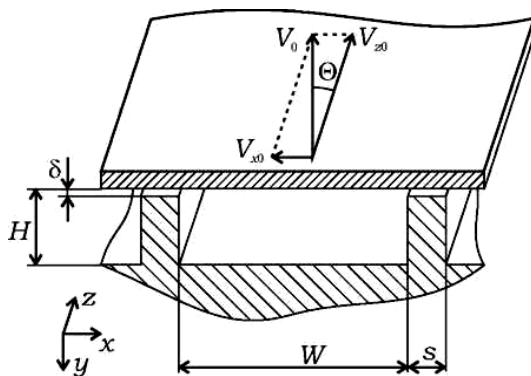


Рис. 8.1. Схема винтового канала экструдера

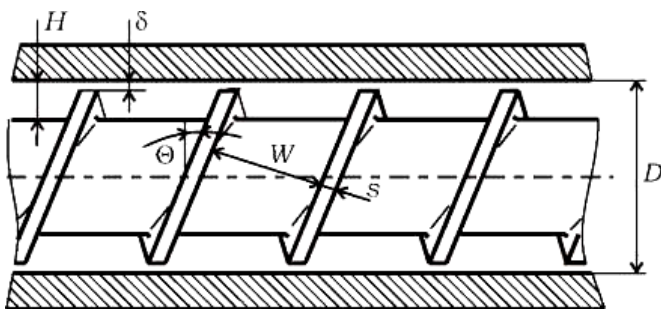


Рис. 8.2. Схема развернутого винтового канала

С учетом указанных выше допущений составляется система дифференциальных уравнений в декартовой системе координат, которая описывает движение и теплообмен полимера в канале червяка и получена на основании законов сохранения массы, количества движения и энергии [45].

Связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций определяется реологическим уравнением состояния. При этом компоненты тензора напряжений для несжимаемой жидкости расположены в декартовой системе координат.

Решение системы в виде полей скорости и температуры осуществляется при заданной геометрии исследуемой области и совокупности краевых условий.

На входе в канал задается известное распределение температуры, а на внутренней поверхности корпуса и на шнеке – распределение температуры, которая определяется условиями технологии при переработке полимерного материала [45–47].

Граничные условия для составляющих скоростей определяются из условия прилипания жидкости к твердым непроницаемым поверхностям: стенкам канала и поверхности раздела фаз (см. рис. 8.2). Сами же расчеты проводятся в режиме заданного расхода.

Задача решается численным методом конечных элементов с помощью программного комплекса ANSYS FLUENT, а разбивка на конечные элементы была произведена в программе ICEM CED [40–43]. Геометрические размеры канала приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Геометрические размеры канала

$n$	$\mu_0$	$T_0$	$\beta$	$P$	$\lambda$	$C$
–	Па·с <sup><math>n</math></sup>	°С	1/°С	кг/м <sup>3</sup>	Вт/(м·°С)	Дж/(кг·°С)
<b>0,44</b>	<b>10825</b>	<b>160</b>	<b>0,018</b>	<b>779,0</b>	<b>0,182</b>	<b>2400</b>

Температура расплава полиэтилена на входе в канал составляет 180 °С, а на границах канала – 200 °С при скорости вращения шнека

60 об/мин. Согласно данным, приведенным в [46, 47], исследования были проведены для переменной производительности экструдера  $G_0$  с ее изменением в диапазоне от 0,05 до 0,2 кг/с.

На рис. 8.3 приведена напорно-расходная характеристика одношнекового экструдера, из которой видно, что с увеличением давления на выходе возрастает его расход. При этом поле компоненты скорости  $v_z$  состоит из суммы напорной и вынужденной составляющей расходов. Возрастание производительности экструдера при неизменной вынужденной составляющей расхода приводит к увеличению напорной составляющей расхода и к снижению градиента давления, а поэтому давление на выходе уменьшается.

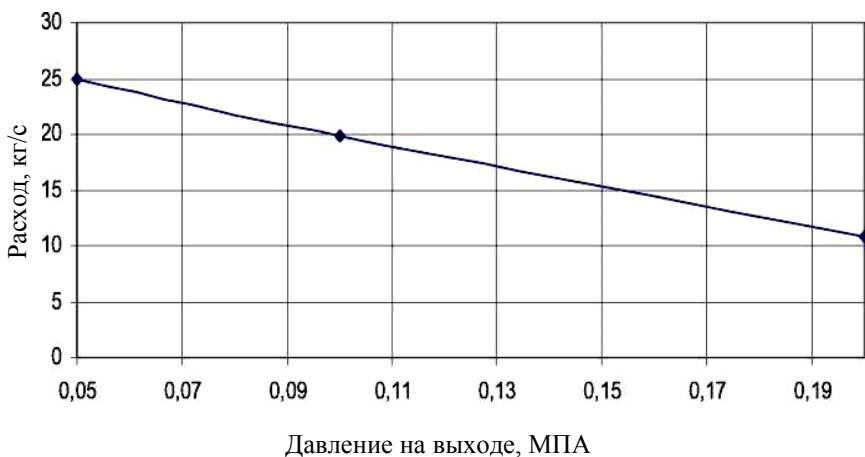


Рис. 8.3. Зависимость изменения давления на выходе из канала при изменении расхода

Изменение температуры расплава полиэтилена на выходе представлено на рис. 8.4, т. е. температура полимера на выходе больше заданной на границе канала. Это может быть связано с тем, что большую роль в разогреве материала играет диссипация тепла в результате влияния работы сил вязкого трения. С возрастанием производительности экструдера снижается среднее время пребывания полимера в канале, и в результате этого температура на выходе уменьшается.

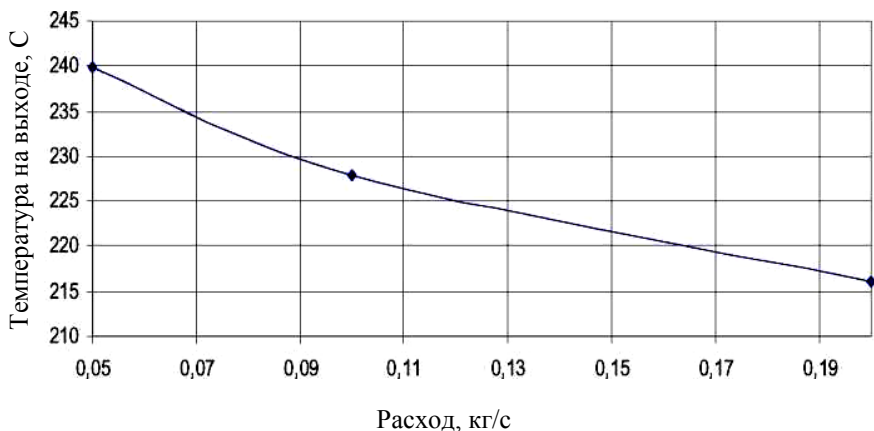


Рис. 8.4. Зависимость изменения температуры на выходе при изменении расхода

Таким образом, рассмотренную трехмерную математическую модель можно использовать для моделирования технологических процессов на основе исследования процессов тепло- и массопереноса в винтовых каналах зоны дозирования пластицирующих экструдеров и шнековых насосов.

### 8.7. Численные методы

Для предсказания и моделирования сложных полимерных потоков необходимо понимание основных математических законов, которым подчиняется движение потока. При этом независимо от их сложности перемещение потока материала должно подчиняться некоторым общим физическим законам, которые могут быть выражены в математической форме (как условия сохранения массы, энергии и момента). Здесь (в дополнение к этим законам сохранения) может быть составлено одно или несколько уравнений состояния, описывающих свойства материала, например вязкость и текучесть. В связи с тем что данные уравнения могут быть зависимыми (например, вязкость и текучесть зависят от температуры), их решение усложняется. Для проведения моделирования следует четко сформулировать физическую задачу, использовать в ней математические уравнения и решить их для предсказания поведения потока. Не-

смотря на наличие уравнений сохранения некоторых простых двумерных форм, для которых имеются аналитические решения, для решения более сложных двумерных задач и при необходимости трехмерного анализа используют численные методы.

Кроме использования аналитических решений существуют три основных численных метода, которые часто используются для решения сложных задач течения жидкостей (применительно к расплаву материала) [16, 17]. Это метод конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов. Указанные методы имеют свои преимущества и недостатки, а поэтому может быть выбран для конкретного типа процесса или материала и в той или иной форме применен для конкретных задач при переработке полимеров.

### *8.7.1. Метод конечных разностей*

Вначале создается сетка, а затем определяющие дифференциальные уравнения записывают в дискретной форме и применяют к каждой точке узла. В результате полученная система алгебраических уравнений решается стандартным методом Гаусса или с помощью более сложных численных алгоритмов. Метод конечных разностей хорошо поддается программированию при малом времени вычислений. В связи с дискретизацией используемых определяющих уравнений в начале анализа (при их дифференцировании) возникают ошибки, сказывающиеся на процессе вычислений. Поэтому при получении сходящегося решения методом конечных разностей в процессе решения нелинейных задач могут возникать определенные сложности. При этом метод конечных разностей плохо подходит для моделирования задач с движущимися твердыми границами. Для решения дифференциального уравнения теплопроводности используют метод сеток, суть которого заключается в разбиении координатной плоскости на равные части и вычислении значения искомой функции в узлах образуемой сетки. Используя значения функции в крайних точках, можно последовательно вычислить ее значение в любой части координатной плоскости. В результате получают уравнение для рекуррентного вычисления в MATLAB V 6,0, а затем составляется программа для MATLAB V 6,0 R 12, которая начинается с очищения переменных графических окон функций и окна вывода результата (для практических занятий студентов).

### *8.7.2. Метод конечных элементов*

Как и метод конечных разностей, метод конечных элементов используется для дискретизирования области, в которую входит геометрическая форма, подлежащая моделированию, на узлы и элементы. Сетка представляет дискретизацию, которая необходима для метода конечных элементов при моделировании двумерной геометрической области [30].

В литературе имеются данные по моделированию формы при литьевом прессовании, когда для представления начальной стадии процесса используется сетка конечных элементов. Эту же самую сетку использовали после каждого временного шага заполнения формы, что было выполнено путем вычисления методом конечных элементов, который использовался для перемещения узлов свободных фронтов потока в качестве граничных условий. В литературных источниках также имеются данные о разработке других схем создания сетки.

### *8.7.3. Метод граничных элементов*

В отличие от методов конечных разностей и конечных элементов метод граничных элементов требует дискретизации только поверхностей геометрических форм. Причем двумерная форма требует дискретизации только кривой, образующей границу изделия. Метод граничных элементов получил распространение, как и метод конечных элементов, но требует использования относительно сложных математических средств. Использование метода граничных элементов начинается с формулировки определяющих уравнений различной формы, выраженных в виде различных интегралов по области. Затем эти интегралы преобразуют по Грину–Гауссу для приведения к интегралам по контуру. В свою очередь, интегралы представляются в численной форме для получения системы алгебраических уравнений. Основное преимущество этого метода при моделировании течения полимера в сложных геометрических формах заключается в снижении размерности. Однако используемое точное решение зависит от используемой модели материала, что ограничивается ньютоновским течением. В литературе имеются данные о разработке разновидности метода граничных элементов, который способен учитывать нелинейности при использовании только условий на границах.

## 8.8. Методы построения сеток для задач с движущимися границами

Особая основная сложность появляется при моделировании процесса смешения, обусловленная изменяющейся свободной поверхностью или проблемой движения твердых границ в процессе, когда материал непрерывно изменяет форму, заставляя на каждом временном шаге вновь определять геометрию интересующей нас области. Вновь определять сетки конечных элементов или решетки конечных разностей – наиболее трудная и утомительная часть моделирования при решении задач с движущимися границами.

В литературе изложена процедура редактирования решетки (ее динамический генератор) при моделировании процесса литья под давлением. Моделирование заполнения формы при литьевом прессовании использует сетку конечных элементов для представления стадии процесса, происходящего в начальной стадии.

Исследователи модифицировали метод сетки для анализа потока при моделировании неизотермического течения неньютоновских жидкостей внутри трехмерных областей с использованием конечных элементов. При этом используются стандартные методы сборки конечных элементов при записи системы линейных алгебраических уравнений.

## 8.9. Моделирование трехмерных потоков двумерными моделями

Тепло- и массоперенос в полимерных процессах по существу трехмерный. При отбрасывании или аппроксимации одного из измерений происходит некоторая потеря точности. Однако, несмотря на это, моделирование подобного типа дает вполне удовлетворительное понимание процесса, которое в течение многих лет используется при конструировании полимерных изделий и для оптимизации операций переработки.

### *8.9.1. Моделирование течения в периодических смесителях при помощи двумерных моделей*

Известно, что в смесителе Бенбери содержатся устройства, имеющие вид спиральных лопастей. При работе такого смесителя создается



сложное нестандартное течение расплавленного полимера. В указанном смесителе течение расплавленного полимера происходит в направлении оси двух роторов. При этом основное перемешивание происходит при перетекании полимера из одной камеры в другую.

Для характеристики и анализа перемешивания, происходящего в процессах данного типа, в указанных аппаратах обычно используют двумерную модель. С целью характеристики потока и оценки эффективности перемешивания использовали показатель  $\lambda$ , определяемый как

$\lambda = \text{скорость деформации} / \text{скорость деформации} + \text{вращения}$ .

При этом величина  $\lambda = 0,5$  соответствует простому сдвигу, а значения 0 и 1 – чистому вращению и одноосному удлинению.

При смешении жидкостей с высокими значениями отношения вязкостей продольные течения полимеров более эффективны, чем сдвиговые потоки.

Таким образом, в результате моделирования было установлено, что в области высоких значений  $\lambda$  реализуется эффективное разрушение агломератов в жидкости.

### *8.9.2. Моделирование потоков в экструдере с помощью двумерных моделей*

В технологическом процессе производства на определенном этапе практически все полимеры несколько раз проходят через экструдер. При исследовании процессов, происходящих в экструдере, требуется затрата времени и средств. В связи с этим для сокращения затрат и времени привлекают численное моделирование. Однако экспериментальные условия порой трудно контролировать и измерять. Неожиданно появляются непредсказуемые переменные, которые возникают из-за утечек.

Экструдер может иметь один или несколько шнеков. Обычно экструдеры этого типа могут иметь шнеки, вращающиеся в одном или в противоположном направлении. Однако движение жидкости, создаваемое двумя противоположно вращающимися шнеками, – обычно сложная задача как для эксперимента, так и для моделиро-

вания. В этом случае для слежения за частицами может быть использовано моделирование движущихся твердых границ.

Для двумерных граничных элементов использовали моделирование с целью анализа поперечного течения в нескольких двухшнековых экструдерах с шнеками различных форм, вращающимися как в одном, так и противоположном направлениях.

При моделировании смешивания нескольких жидкостей следует учитывать две важные характеристики, а именно – вязкость каждой жидкости и поверхностное натяжение. Более подробно моделирование течения в периодических смесителях описано в соответствующей литературе.

### *8.9.3. О моделировании течения в экструзионной головке с помощью двумерных моделей*

Известно, что при переработке полимерных материалов используют различные типы экструзионных головок: круглые, щелевые, кабельные, профильные и пр. При этом конструирование головок – самая сложная задача, которая выполняется методом проб и ошибок, а многие особенности течения полимеров через фильеру головки оказывают влияние на качество целевого продукта. Большая сложность, возникающая при создании приемлемых конструкций головки, делает моделирование и оптимизацию важным средством, которое желательно использовать до того, как спроектированная конструкция найдет воплощение в металле. Применяя моделирование, можно лучше понимать процесс и контролировать параметры переработки, влияющие на качество целевого продукта. В настоящее время имеется большое количество опубликованных работ, относящихся к оптимизации фильер.

С целью оценки влияния отношения вязкостей, т. е. вязкости внешнего слоя по отношению к вязкости внутреннего, при моделировании течения полимеров через фильеру использовали метод конечных элементов. В результате при использовании модели ньютоновского течения было обнаружено, что при отношении вязкостей (примерно равного 0,2) возникает обширная область циркуляции.

При моделировании течений полимера с интенсивной конвекцией наряду с элементами высшего порядка использовали специальный метод. В результате было установлено, что линии течения

для неизотермического случая были в основном идентичны изотермическому случаю, т. е. моделирование изотермического течения достаточно точно предсказывает ожидаемую сущность процесса.

### 8.10. Трехмерное моделирование

Сложные трехмерные геометрические формы, которые типичны для оборудования при переработке полимерных материалов, литьевых форм и экструзионных головок, значительно затрудняют анализ полей скоростей при помощи двумерных моделей. Проведение экспериментов часто дает обоснованное понимание проблемы, но они дороги и их результаты трудно анализировать с целью количественной оценки технологического процесса. Например, зачастую невозможно измерение температурных полей. Эти возникающие затруднения решаемы с помощью численных методов. Особые преимущества численного моделирования весьма разнообразны. В отличие от двумерных моделей, когда для оценки процесса необходимы точные подробности относительно поля скоростей для действительно трехмерного течения, следует полностью применять трехмерное моделирование. При этом добавление к задаче еще одного измерения существенно увеличивает сложность модели и время вычислений. Однако с использованием более совершенных компьютеров и развитием более эффективных методов, а также с возрастанием требований к качеству продукции трехмерное моделирование становится повседневной реальностью.

В литературе имеются различные примеры приложения трехмерного моделирования применительно к упаковочному производству с использованием методов конечных и граничных элементов. Они дают представление о том, что можно получить, используя современные программы моделирования. В качестве примеров приводятся случаи, представляющие большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения, например: смесители периодического действия, фильеры экструдера и зоны смешения в экструдере.

## 9. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В зависимости от конкретной реализации процесса и его аппаратного оформления все химико-технологические процессы можно разделить на четыре класса, исходя из временного и пространственного признаков [2, 3]. Это процессы, переменные во времени (нестационарные), и процессы, не меняющиеся во времени (стационарные); процессы, в ходе которых их параметры изменяются в пространстве, и процессы без пространственного изменения параметров. Так как математические модели являются отражением соответствующих объектов, то для них характерны те же классы, а именно:

модели, неизменные во времени, – *статические модели*;

модели, переменные во времени, – *динамические модели*;

модели, неизменные в пространстве, – *модели с сосредоточенными параметрами*;

модели, изменяющиеся в пространстве, – *модели с распределенными параметрами*.

**Модели с сосредоточенными параметрами.** Для данного класса моделей характерно постоянство переменных в пространстве. Математическое описание включает алгебраические уравнения либо дифференциальные уравнения первого порядка для нестационарных процессов. Примером объекта, описываемого данным классом моделей, может служить аппарат с идеальным (полным) перемешиванием потока. Скорость мешалки такова, что концентрация во всех точках аппарата одинакова (рис. 9.1).

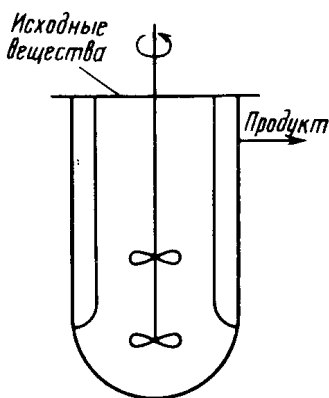


Рис. 9.1. Схема аппарата, реализующего модель идеального смешения

**Модели с распределенными параметрами.** Если основные переменные процесса изменяются как во времени, так и в пространстве или если указанные изменения происходят только в пространстве, то модели, описывающие такие процессы, называются моделями с распределенными параметрами. Их математическое описание обычно включает дифференциальные уравнения в частных производных либо обыкновенные дифференциальные уравнения в случае стационарных процессов с одной пространственной переменной.

Примером процесса, описываемого такими моделями, служит трубчатый аппарат с большим отношением длины к диаметру и значительной скоростью движения реагентов (рис. 9.2).

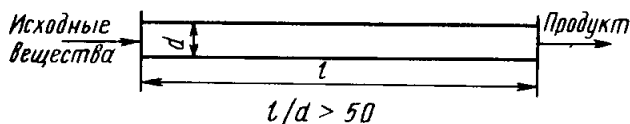


Рис. 9.2 Схема аппарата, реализующего модель идеального вытеснения

**Статические модели.** Статические модели отражают работу объекта в стационарных условиях, т. е. когда параметры процесса не меняются во времени. Соответственно математическое описание в статических моделях не включает время как переменную и состоит из алгебраических уравнений либо дифференциальных уравнений в случае объектов с распределенными параметрами. Примером объекта, описываемого статической моделью, служит аппарат полного смешения объемом  $V$  в установившемся режиме работы, в который непрерывно подаются реагенты  $A$  и  $B$  в заданном количестве и отводится продукт реакции  $P$ .

Математическое описание аппарата включает следующие уравнения материального баланса (для простоты тепловой баланс не рассматривается):

$$v(C_{AO} - C_A) = V k C_A C_B;$$

$$v(C_{BO} - C_B) = V k C_A C_B.$$

Здесь  $k$  – константа скорости реакции.

*Динамические модели.* Динамическая модель отражает изменение объекта во времени. Математическое описание таких моделей обязательно включает производную по времени. Часто динамическую модель объекта строят в виде передаточных функций, связывающих входные и выходные переменные (представление динамических моделей в виде передаточных функций особенно удобно для целей управления объектом). Примером динамической модели может служить модель рассмотренного выше аппарата полного смешения, но работающего в неустановившемся режиме. В этом случае математическое описание аппарата включает следующие уравнения материального баланса:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{v}{V}(C_{AO} - C_A) - V_k C_A C_B;$$

$$\frac{dC_B}{dt} = \frac{v}{V}(C_{BO} - C_B) - V_k C_A C_B,$$

а также начальные условия

$$C_A = C_{AO}, \quad C_B = C_{BO} \quad \text{при } t = 0.$$

Математическая модель является системой уравнений математического описания, отражающей сущность протекающих в объекте явлений, для которой определен алгоритм решения, реализованный в форме моделирующей программы. Согласно этому определению математическая модель должна рассматриваться в совокупности трех ее аспектов: смыслового, аналитического и вычислительного.

*Смысловой* аспект представляет собой физическое описание природы моделируемого объекта.

*Аналитический* аспект является математическим описанием процесса в виде некоторой системы уравнений, отражающей протекающие в объекте явления и функциональные связи между ними.

Наконец, *вычислительный* аспект есть метод и алгоритм решения системы уравнений математического описания, реализованные как моделирующая программа на одном из языков программирования. Далее рассмотрим примеры основных простых математических моделей.

## 10. УСЛОВИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТА МОДЕЛИ И ОБЪЕКТА ОРИГИНАЛА

Объект-модель и объект-оригинал должны удовлетворять определенным требованиям при моделировании. Рассмотрим сущность этих требований.

Пусть изучается объект  $A$  и конкретно его некоторая характеристика  $y$ , зависящая от ряда факторов  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Предположим, что поведение этой характеристики описывается уравнением

$$f_A(y, X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad (10.1)$$

справедливым в области изменения аргументов  $a_i \leq X_i \leq b_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

С другой стороны, имеется объект  $B$ , характеристика которого  $u$  – зависит от факторов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , и эта зависимость выражается уравнением

$$F_B(u, Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0, \quad (10.2)$$

справедливым в области изменения аргументов  $c_i \leq Z_i \leq d_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть далее имеется хотя бы одна система переменных  $Y, X_1, X_2, \dots, X_m$ , связанная с переменными  $X_i$  соотношениями

$$\begin{aligned} Y &= P_0(y, X_1, X_2, \dots, X_n), \\ X_1 &= P_1(y, X_1, X_2, \dots, X_n), \\ X_2 &= P_2(y, X_1, X_2, \dots, X_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_m &= P_m(y, X_1, X_2, \dots, X_n), \end{aligned} \quad (10.3)$$

а с переменными  $Z_i$  – соотношениями

$$\begin{aligned}
Y &= Q_0(u, Z_1, Z_2, \dots, Z_n); \\
X_1 &= Q_1(u, Z_1, Z_2, \dots, Z_n); \\
X_2 &= Q_2(u, Z_1, Z_2, \dots, Z_n); \\
&\dots\dots\dots \\
X_m &= Q_m(u, Z_1, Z_2, \dots, Z_n).
\end{aligned}
\tag{10.4}$$

Пусть в новой системе координат  $Y, X_1, X_2, \dots, X_m$  характеристики объектов  $A$  и  $B$  описываются одним и тем же уравнением

$$\Phi(Y, X_1, X_2, \dots, X_m) = 0, \tag{10.5}$$

справедливым в области  $N_i \leq X_i \leq M_i$ .

В данном случае, если возможно составить уравнение (10.5), верно утверждение, что объект  $A$  может служить моделью объекта  $B$ , и наоборот (применительно к изучаемой характеристике). Переменные  $Y, X_1, X_2, \dots, X_m$  называются обобщенными.

Таким образом, модель и оригинал должны иметь одно и то же математическое описание в некоторой обобщенной системе переменных. Это условие моделируемости является необходимым и достаточным.

Если на модели  $A$  получено уравнение (10.1), то оно может быть преобразовано в уравнение (10.2) для объекта  $B$  следующим образом: вначале с помощью преобразования (10.3) – в обобщенное уравнение (10.5), затем с помощью преобразования (10.4) – в уравнение реального объекта (10.2). Возможность перехода по такой цепочке от (10.1) к (10.2) предопределяет достаточность сформулированного условия моделируемости. Необходимость данного условия вытекает из того, что если бы преобразования (10.3), (10.4) не существовали, то отсутствовал бы путь для превращения уравнения модели в уравнение оригинала. Условие моделируемости допускает различие физической природы изучаемых объектов. Требуется только общность математического описания. На этом факте основываются используемые при моделировании в ряде случаев методы аналогии, где моделями изучаемого объекта служат объекты совершенно другой физической природы.



Примером обобщенных переменных можно назвать числа подобия (число Рейнольдса  $Re$ , число Нуссельта  $Nu$ , число Грасгофа  $Gz$ , число Эйлера  $Eu$  и др.), широко используемые при моделировании гидродинамических, тепловых процессов и процессов массопереноса. В отличие от уравнений, связывающих первичные размерные величины вида (10.1) и (10.2), уравнения, составленные из чисел подобия вида (10.5), имеют большую общность, поскольку каждая точка описываемых ими кривых соответствует не одному, а множеству явлений, которые называют подобными.

## 11. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Метод Лагранжа применяется для решения задач с аналитическим выражением для критерия оптимальности и при наличии ограничений на независимые переменные типа равенств. Для получения аналитического решения требуется, чтобы ограничения имели аналитический вид. Применение неопределенных множителей Лагранжа позволяет свести задачу оптимизации с ограничениями к задаче, решаемой методами исследования функций классического анализа. В этом случае порядок системы уравнений, решаемой для нахождения экстремума критерия оптимизации, повышается на число ограничений. Применение метода эффективно при количестве переменных три и менее. Метод используется и при количестве переменных более трех, если процесс описывается конечными уравнениями.

Роль неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda_i$  состоит в том, что введение их в уравнения для  $d\varphi_i$  в итоге позволяет получить замкнутую систему с числом уравнений  $n + k$ , соответствующих числу неизвестных. Если бы выполненные выше преобразования и действия с выражением для целевой функции  $F$  и с функциями-ограничениями  $\varphi_i$  проводились без использования множителей  $\lambda_i$ , то окончательная система имела бы число уравнений, превышающее число искомых параметров  $x_i$ . В этом случае решение системы уравнений не дает однозначного результата.

В методе оптимизации путем дифференцирования целевой функции функции-ограничители использовались просто для уменьшения числа параметров в целевой функции. Этим достигалось равенство чисел уравнений в решаемой системе и искомых переменных, что

исключало неопределенность решения. Но процесс подстановки функций-ограничителей в целевую функцию и последующее дифференцирование не всегда целесообразны и возможны.

Метод неопределенных множителей Лагранжа более универсален, чем метод оптимизации путем дифференцирования. Ограничения типа неравенств в обоих методах одинаковы. Так же одинаково проводится исследование полученного экстремума целевой функции на максимум и минимум.

### **Критерий оптимальности**

В зависимости от конкретной цели оптимизации в качестве критерия оптимальности могут быть приняты различные величины. Выбор критерия оптимальности является одним из самых ответственных моментов, так как от него зависят направленность расчета и результаты окончательного варианта.

При оптимизации оборудования и технологий часто используются экономические критерии, такие как прибыль, себестоимость, приведенный доход, приведенные годовые затраты и др.

Выбранный критерий оптимальности должен удовлетворять трем основным требованиям.

1. Критерий оптимальности должен быть единственным, хотя желательно, чтобы объект по всем параметрам был наилучшим, но известные методики позволяют оптимизировать по одному критерию. Нельзя поставить задачу отыскать, например, такой аппарат, который имел бы минимальный габаритный объем и минимальную стоимость одновременно, хотя в некоторых случаях такое совпадение и может быть получено. Поэтому важно хорошо выбрать критерий оптимальности, наиболее полно соответствующий поставленной цели оптимизации.

2. Критерий оптимальности должен выражаться числом. В противном случае сопоставление разных вариантов крайне затруднительно.

3. Величина критерия оптимальности должна изменяться монотонно при изменении оптимизирующих параметров. Это позволяет оценивать объект по принципу «чем больше критерий, тем лучше» или же «чем меньше критерий, тем лучше».

Решая задачу оптимизации, необходимо учитывать, что регулируемые параметры (входные параметры системы) не могут принимать любые значения. Например, кожухотрубный теплообменник длиной 30 м и диаметром 0,5 м не может быть принят для установки даже в том случае, если значение критерия оптимальности для него имеет экстремум.

## Ограничения

Условия, которые необходимо соблюдать независимо от того, как их соблюдение повлияет на величину критерия оптимальности, называют *ограничениями*.

Чаще всего ограничения возникают по следующим причинам:

- по необходимости выдержать заданные параметры сырья и продукции;
- условиям технологии, например, расход воздуха не может превышать производительность вентилятора;
- экономическим и конъюнктурным соображениям, например, капитальные затраты не должны превышать выделенной суммы;
- соображениям охраны труда и окружающей среды.

По формально-математическим признакам выделяют ограничения типа равенств и типа неравенств.

По ограничению типа равенств устанавливают определенное значение того или иного его параметра

$$U_i = a_i.$$

Ограничения типа неравенств определяют пределы, в которых допустимо изменение параметров  $X$ :

$$X_i \geq b_i;$$

$$X_j \leq b_j;$$

$$a_k \leq X_k \leq b_k.$$

Для первого и второго ограничений задают односторонние пределы (например, производительность – не ниже заданной, темпера-

тура не выше той, на которую рассчитан материал). Для третьего – двухсторонние (например, температура жидкого теплоносителя может изменяться в пределах температуры замерзания до температуры кипения).

Ограничения подобного типа для входных параметров называют ограничениями 1-го рода. При математическом решении задачи оптимизации каждый рассматриваемый вариант задается значениями входных параметров и выполнение ограничений 1-го рода проверяется непосредственно.

В отличие от критерия оптимальности, который в задаче может быть только один, ограничений может быть любое число.

### *Оптимизирующие факторы*

К оптимизирующим факторам относятся те из входных параметров системы, которые в процессе оптимизации варьируются. Остальные параметры при этом не регулируются; они фигурируют в задаче в качестве ограничений типа равенств.

Число оптимизирующих факторов зависит от того, на какой стадии разработки объекта осуществляется оптимизация. Если объект проектируется (оптимальное проектирование), то к числу оптимизирующих целесообразно отнести как можно больше параметров. На этой стадии регулировать параметры проще всего: регулирование осуществляется не в действительности, а на математической модели. Поэтому здесь желательно найти оптимальное значение максимального числа факторов.

Задача оптимизации возникает и после пуска объекта в работу (оптимальное управление). Здесь число оптимизирующих воздействий становится существенно меньшим, так как часть параметров (например, конструктивных) уже нельзя менять и не все другие параметры целесообразно регулировать, желая иметь по возможности простую систему управления.

Выбор оптимизационных параметров зависит от объема и структуры задачи. Следует учитывать и принципиальную возможность решения задачи: при большом числе регулируемых переменных и сложной математической модели имеющиеся расчетные методы и средства могут оказаться недостаточными.

## Целевая функция

Зависимость критерия оптимальности от входных параметров объекта определяет целевая функция  $F$ .

Математическая задача оптимизации формулируется как задача отыскания экстремума целевой функции, т. е. значения регулируемых параметров, входящих в функцию, при которых достигается экстремум, называют *оптимальными значениями*. Часто оптимальные значения соответствуют не экстремуму целевой функции, а наибольшей (наименьшей) ее величине в области допустимых значений регулируемых параметров, за которую нельзя выйти вследствие наличия ограничений. При этом экстремум  $F$  находится за пределами данной области. В этом случае, если целевая функция не имеет экстремума, оптимальное значение можно получить только при наличии ограничений.

В ряде задач оптимизации сложных систем требуется введение более одной целевой функции. В таких случаях можно воспользоваться составной целевой функцией

$$F = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n,$$

где  $a_n$  – положительные или отрицательные весовые коэффициенты, численное значение которых назначается в соответствии со степенью значимости в задаче отдельных целевых функций  $F_n$ .

В целом ряде задач целевая функция имеет не один экстремум, а несколько, которые принято называть *локальными оптимумами*. Поэтому при решении задачи следует предусмотреть меры, чтобы не принять малозначащий экстремум за оптимальное значение. В этом случае оптимальному значению соответствует наибольший значащий экстремум – лучшее решение среди всех локальных оптимумов.

## Примеры применения метода

Во многих инженерных задачах метод неопределенных множителей Лагранжа используется для оптимизации расхода ресурсов или минимизации затрат.

Рассмотрим **пример** 11.1.

Математическая формулировка **примера** 11.1 имеет следующий вид:

$$\min_{x_1, x_2} \begin{cases} f_1(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + 5; \\ f_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 10)^2 + 6; \\ f_3(x_1, x_2) \equiv (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 15)^2 + 10. \end{cases}$$

Перепишем задачу в форме  $\varepsilon$ -ограничений:  $\min_{x_1, x_2} f_1(x_1, x_2)$  с учетом

$$f_2(x_1, x_2) \leq \varepsilon_2; \quad f_3(x_1, x_2) \leq \varepsilon_3.$$

Функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_2, \lambda_3) = f_1(x_1, x_2) + \lambda_2 \cdot (f_2(x_1, x_2) - \varepsilon_2) + \lambda_3 \cdot (f_3(x_1, x_2) - \varepsilon_3).$$

Подставляя сюда выражения для  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$ , и используя метод неопределенных множителей Лагранжа, получаем

$$\lambda_2 = \frac{11x_1 - 8x_2 + 10}{-5x_1 + 4x_2 - 10};$$

$$\lambda_3 = \frac{-6x_1 + 4x_2 - 4}{-5x_1 + 4x_2 - 10}.$$

Заметим, что функция  $f_1(x_1, x_2)$  не обязательно должна быть «основной», а функции  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$  должны выполнять роль ограничений.

Рассматриваемая задача может быть записана в ином виде, например:  $\min_{x_1, x_2} f_2(x_1, x_2)$  с учетом ограничений  $f_1(x_1, x_2) \leq \varepsilon_2$ ,

$$f_3(x_1, x_2) \leq \varepsilon_3.$$

Функция Лагранжа для задачи, записанной в этой форме, имеет следующий вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2, \lambda_3) = f_2(x_1, x_2) + \lambda_2 \cdot (f_1(x_1, x_2) - e_1) + \lambda_3 \cdot (f_3(x_1, x_2) - e_3).$$

Результаты решения рассматриваемой задачи приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

### Решения задачи

$x_1$	$x_2$	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$	$f_3(x_1, x_2)$	$\lambda_1$	$\lambda_3$
4	6,88	17,29	19,73	111,93	0,42	0,19
5	8,25	32,06	10,06	80,56	0,50	0,50
6	9,63	52,70	6,14	54,84	0,70	1,00
7	11,00	79,00	8,00	35,00	1,00	2,00
8	12,38	111,22	15,66	20,86	2,17	5,17

При решении этой задачи с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа, используя математическую формулировку примера 11.1, получим выражения (**п р и м е р** 11.2)

$$\lambda_1 = \frac{-5x_1 + 4x_2 - 10}{11x_1 - 8x_2 + 10};$$

$$\lambda_3 = \frac{-6x_1 + 4x_2 - 4}{11x_1 - 8x_2 + 10}.$$

Результаты решения рассматриваемой задачи приведены в табл. 11.1.

### Пример 11.3

Найти условные экстремумы функции  $z = 2x^2 + 9y^2$  при  $x^2 + 9y^2 = 1$ .  
Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y) = (2x^2 + 9y^2) + \lambda(x^2 + 9y^2 - 1),$$

где  $\lambda$  – неопределенный постоянный множитель;

$\varphi(x, y) = x^2 + 9y^2 - 1$  – некоторое условие, задаваемое уравнением связи  $\varphi(x, y) = 0$ ;

$z(x, y) = 2x^2 + 9y^2$  – исследуемая функция.

Для определения множителя  $\lambda$  и координат возможных точек

экстремума решаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 18y + 18\lambda y = 0, \\ x^2 + 9y^2 - 1 = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{lll} \lambda_1 = -2, & x_1 = -1, & y_1 = 0, \\ \lambda_2 = -2, & x_2 = 1, & y_2 = 0, \\ \lambda_3 = -1, & x_3 = 0, & y_3 = -1/3, \\ \lambda_4 = -1, & x_4 = 0, & y_4 = 1/3. \end{array} \right.$$

Итак, найдены четыре стационарные точки:

$M_1(-1; 0)$ , при этом  $\lambda_1 = -2$ ;

$M_2(1; 0)$ , при этом  $\lambda_2 = -2$ ;

$M_3(0; -1/3)$ , при этом  $\lambda_3 = -1$ ;

$M_4(0; 1/3)$ , при этом  $\lambda_4 = -1$ .

Наличие критической точки еще не гарантирует наличие экстремума функции. Достаточным критерием наличия экстремума функции в точке служит определенность знака квадратичной формы функции.



Если квадратичная форма (т. е. второй дифференциал функции Лагранжа) при выполнении условий связи:

а) будет отрицательно определенная, то в точке – строгий условный максимум;

б) если положительно определенная, то в точке – строгий условный минимум;

в) если неопределенная, то точка не является точкой условного экстремума.

Квадратичная форма функции определяется как

$$A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

и фактически является вторым дифференциалом функции.

Второй дифференциал функции  $\Phi(x, y, z)$

$$\begin{aligned} d^2\Phi(x, y, z) = & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} dx dy + \\ & + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial z} dy dz \end{aligned}$$

или в случае функции двух переменных

$$d^2\Phi(x, y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} dx dy.$$

Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4x + 2\lambda x, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 4 + 2\lambda;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 18y + 18\lambda y, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 18 + 18\lambda;$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\partial^2 \Phi = 2(2 + \lambda)dx^2 + 18(1 + \lambda)dy^2.$$

Заметим, что

$$dx^2 = (dx)^2, \text{ т. е. } dx^2 > 0 \text{ и } dy^2 > 0.$$

Следовательно, в точках  $M_1(-1; 0)$  и  $M_2(1; 0)$ , для которых  $\lambda_{1,2} = -2$ , второй дифференциал  $d^2\Phi < 0$ , что означает наличие в этих точках максимума.

Соответственно в точках  $M_3(0; -1/3)$  и  $M_4(0; 1/3)$ , для которых  $\lambda_{3,4} = -1$ , второй дифференциал  $d^2\Phi > 0$ , и это означает наличие в данных точках минимума.

Ответ: функция имеет два локальных условных максимума:

$$z(-1; 0) = 2, \quad z(1; 0) = 2,$$

и два локальных условных минимума:

$$z(0; -1/3) = 1, \quad z(0; 1/3) = 1.$$

Таким образом, использование математических моделей в настоящее время стало очень актуальным вопросом в связи с постоянно развивающейся экономикой.

Построение математической (символической) модели системы можно начать с перечисления всех элементов системы, которые влияют на эффективность ее работы. Если в качестве меры общей эффективности используются общие ожидаемые издержки, то можно начать с исследования изобразительной или аналоговой модели, полученной на стадии постановки задачи.

Метод множителей Лагранжа позволяет отыскивать максимум или минимум функции при ограничениях-равенствах. Основная идея метода состоит в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой построенной функции Лагранжа. Метод множителей Лагранжа играет важную роль в развитии, предсказании, построении оптимального варианта.

## 12. ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ КАК КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

*Целевая функция* — это то же самое, что критерий оптимальности, но это критерий, рассматриваемый как функция входных факторов. Зависимость критерия оптимальности от входных параметров объекта определяет целевая функция

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Чем больше (или чем меньше) значение  $F$ , тем лучше. Поэтому оптимум — это экстремум (либо максимум, либо минимум) целевой функции. Те значения факторов  $x_i$ , при которых достигается оптимум, называют оптимальными значениями. Таким образом, математически задача оптимизации формулируется как задача отыскания экстремума.

При этом в точке экстремума должны соблюдаться все ограничения, поэтому во многих случаях оптимум приходится искать на краю области допустимых значений, за пределы которой нельзя выйти вследствие наличия ограничений (рис. 12.1). На рис. 12.1 отрезок  $ab$  есть область допустимых значений, определяемая ограничением  $a \leq x \leq b$ .

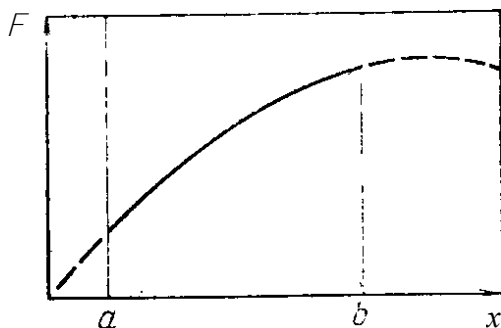


Рис. 12.1. График, иллюстрирующий оптимум на краю области допустимых значений:  $a, b$  — границы области допустимых значений

Методы отыскания точки оптимума можно разделить на три основные группы.

1. *Аналитические методы*, применяемые, когда можно продифференцировать целевую функцию и искать экстремум, исходя из условия равенства нулю производных.

2. *Численные или поисковые методы*. Для их применения нужно, чтобы целевая функция была вычисляемой: должен быть известен алгоритм, по которому можно рассчитать значение критерия оптимальности при заданных значениях факторов.

3. *Методы, применяемые, если целевая функция невычислима*. Практически это значит, что вид функции неизвестен. Тогда нужно планировать и реализовать эксперимент так, чтобы в результате достичь района оптимума. Это — экспериментальная оптимизация, составляющая важный раздел планирования эксперимента.

### 13. ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

*Если целевая функция*

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m),$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — оптимизирующие факторы (параметры);

$u_1, u_2, \dots, u_m$  — нерегулируемые (входные) параметры, непрерывна и дифференцируема (по крайней мере дважды), то оптимальные значения параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n$  определяются путем нахождения частных производных от функции  $F$  по этим параметрам с приравниванием нулю полученных производных. В результате будет получена система из  $n$  уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \end{cases} \quad (13.1)$$

решение которой дает значения параметров

$$X_1^{\text{опт}} = f_1(u_1, u_2, \dots, u_m), X_2^{\text{опт}} = f_2(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, X_n^{\text{опт}} = f_n(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

при которых функция  $F$  имеет экстремум.

Чтобы определить, минимум или максимум соответствуют найденному экстремуму функции, нужно проводить дополнительное исследование. Для этого применяется способ сравнения значений функции, сравнения знаков производных, исследования знаков высших производных. При использовании способа сравнения значений функции вычисляются величины  $F$  при параметрах  $X_L$ , несколько больших и несколько меньших  $X_L^{\text{опт}}$ .

Если окажется, что вычисленные величины  $F_{x_i}^{\text{опт}} - \Delta x_i$  и  $F_{x_i}^{\text{опт}} + \Delta x_i$  больше  $F_{x_i}^{\text{опт}}$ , то экстремум соответствует минимуму функции  $F$ . При другом соотношении экстремум будет соответствовать максимуму.

В способе сравнения знаков производных определяются значения  $\partial F_{x_i}^{\text{опт}} - \Delta x_i / X_L$  и  $\partial F_{x_i}^{\text{опт}} + \Delta x_i / \partial X_i$ . Если первая из производных имеет положительное значение, а вторая из них — отрицательное, то экстремум соответствует максимуму функции  $F$ . При изменении знака производных с «минуса» на «плюс» — минимуму  $F$ .

Исследование знаков высших производных заключается в вычислении второй производной  $\partial^2 F / \partial x_i^2$  при  $x_i = x_i^{\text{опт}}$ . Если данная производная меньше нуля, то экстремум  $F$  соответствует максимуму функции, и наоборот. При равенстве нулю второй производной необходимо вычислить следующую производную. Если окажется, что  $\partial^3 F / \partial x_i^3$  при  $x_i = x_i^{\text{опт}}$  тоже равна нулю, то вычисляется  $\partial^4 F / \partial x_i^4$ , и так далее до тех пор, пока производная не станет положительной или отрицательной. Здесь надо иметь в виду, что если первая производная, не обращающаяся в нуль, имеет нечетный порядок ( $\partial^3 F / \partial x_i^3$ ,  $\partial^5 F / \partial x_i^5$ ), то в рассматриваемой точке  $x_i$  функция не имеет экстремума. Если первая, не обращающаяся в нуль производная имеет четный порядок ( $\partial^2 F / \partial x_i^2$ ,  $\partial^4 F / \partial x_i^4$ ), то в данной точке имеется экстремум функции, который будет максимумом или минимумом в зависимости от того, отрицательна или положительна эта производная.

Описанные способы исследования функции с целью определения характера ее экстремума дают надежный результат для однопараметрических целевых функций. Если независимых переменных в исходной функциональной связи две и более, то проверки функции на экстремальность по всем переменным в отдельности могут

оказаться недостаточными для получения надежного результата. Для этого случая разработаны другие, более сложные методики определения характера экстремума функции  $F$  с координатами  $X_j^{\text{опт}}$ , найденными путем решения системы уравнений.

### **Моделирование и оптимизация объема упаковки для наименьшего расхода материала при ее производстве**

Особенности оптимизации путем дифференцирования при наличии ограничений рассмотрим на примере определения конструктивных размеров упаковки цилиндрической формы для наименьшего расхода материала при том же объеме. Объем упаковки, которую требуется получить при наименьшем расходе материала,  $V = 10 \text{ см}^3$ .

Здесь целевой функцией является площадь поверхности упаковки (в виде цилиндра)

$$F = 2\pi R^2 + 2\pi RH,$$

где  $R$  и  $H$  – соответственно радиус и высота цилиндра.

Ограничение задано в виде равенства

$$V = \pi R^2 H = 10 \text{ см}^3.$$

Данное ограничение целесообразно объединить с зависимостью для критерия оптимальности  $F$ , что приведет к уменьшению числа независимых переменных в целевой функции. Подставив выражение для  $V$  в уравнение для  $F$ , получим

$$F = 2\pi R^2 + 2VR,$$

где независимым параметром является  $R$ . Дифференцируя  $F$  по  $R$  и приравнявая к нулю полученное выражение, получим

$$\partial F / \partial R = 4\pi R + (-2VR^2) = 0$$

$$\text{при } 2\pi R^3 = V.$$

Отсюда

$$R_{\text{опт}} = (V/2\pi)^{1/3} = (10/(2 \cdot 3,14))^{1/3} = 1,167 \text{ см.}$$

Так как

$$H = V(\pi R^2),$$

то после вычислений имеем  $H_{\text{опт}} = 2,334$  см.

В том случае, если дополнительно задается ограничение в виде неравенства, например  $R \leq 1$  см, то нужно принимать  $R_{\text{опт}} = 1$  см, поскольку это значение является ближайшим к полученному выше  $R_{\text{опт}} = 1,167$  см. Аналогичным образом оптимизируются и другие виды упаковок ( типа конуса, куба, параллелипипеда и пр.).

Таким образом, классический метод отыскания экстремума заключается в решении системы (13.1), где левые части уравнений — функции от факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Поэтому решение системы может дать величины  $x_{1\text{опт}}, x_{2\text{опт}}, \dots, x_{n\text{опт}}$ , являющиеся оптимальными значениями факторов; их совокупность определяет оптимальное решение задачи. Если оптимизируется технологический процесс, то этому решению соответствует оптимальный режим.

Однако чтобы убедиться в том, что полученные значения действительно оптимальны, необходимо выяснить четыре обстоятельства:

1. Действительно ли решение системы определяет экстремум: известно, что условию уравнений системы может удовлетворять и седловая точка, или точка перегиба.

2. Получен ли экстремум нужного знака (максимум, если нас интересует максимум, или минимум в противном случае).

3. Если система имеет несколько решений, то какое из них отвечает глобальному оптимуму, а какие — локальным. Если же зависимость имеет несколько максимумов, то глобальным будет тот из них, который выше всех остальных; остальные будут локальными.

4. Все ли ограничения соблюдаются в точке экстремума.

## 14. МОДЕЛИРОВАНИЕ И МОДЕЛИ

В научно-технических исследованиях и технологиях упаковочного производства весьма часто возникает следующая ситуация. Нас интересует некоторый объект — назовем его оригиналом. Но вместо того чтобы изучить непосредственно оригинал, мы изучаем другой объект — модель, а результаты исследования модели распространяем на оригинал.

*Основные требования к процессу моделирования.* Чтобы моделирование имело смысл, оно должно удовлетворять двум требованиям.

1. *Экономичность.* Исследование на модели должно быть более экономичным, чем непосредственно исследование оригинала. В противном случае выгоднее было бы изготовить оригинал и проводить исследования непосредственно на нем.

2. *Традуктивность* (от латинского *traductio* — перенесение, перевод). Она означает, что мы должны знать, как по результатам испытания модели определить интересующие нас параметры оригинала. При этом нас практически всегда интересует количественная традукция. В результате моделирования нам недостаточно узнать, что данный процесс вообще осуществим. Важно иметь возможность рассчитать и оптимизировать его.

В конечном итоге целью моделирования технологического упаковочного производства является его наилучшая реализация, его оптимизация. Современный этап развития химической технологии, как и вообще всех технических наук, характеризуется принципиально новой постановкой задачи оптимизации.

Разумеется, человек всегда старался организовать свою деятельность так, чтобы результаты ее были наилучшими. При этом в большинстве случаев при решении вопроса, какой вариант, какой режим является оптимальным, огромную, часто решающую роль играли опыт и интуиция исследователя, проектировщика, эксплуатационника.

Объяснялось это большой сложностью технологических процессов, чрезвычайным обилием и разнообразием взаимосвязей внутри каждого процесса. Для эффективного решения задачи оптимизации необходимо оценить влияние всех этих взаимосвязей и сравнить колоссальное число возможных вариантов организации технологии. Возможность такой оценки и такого сравнения на основе традиционных методов отсутствовала, поэтому столь большая роль отводилась интуиции человека, из-за чего оптимизация процессов осуществлялась неэффективно.

Очень часто на стадии разработки выбирался далеко не лучший вариант и после пуска производства начинались бесчисленные переделки: ошупью искали пути улучшения процесса.

К сожалению, такой метод оптимизации полностью пока еще существует, но уже стал анахронизмом. Развитие кибернетики — науки об управлении сложными системами, широкое распростране-



ние быстродействующей вычислительной техники привели к формированию оптимизации как целостного научного направления с едиными методами, применимыми к самым разнообразным областям техники. Разработка современного технологического процесса в упаковочном производстве включает оптимизацию как совершенно необходимый этап.

## **15. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТА**

При составлении математического описания общим приемом является блочный принцип. Согласно этому принципу составлению математического описания предшествует анализ отдельных элементарных процессов, протекающих в объекте моделирования. При этом эксперименты по изучению каждого такого процесса проводят в условиях, максимально приближающихся к условиям эксплуатации объекта моделирования.

Сначала исследуют гидродинамическую модель процесса как основу структуры математического описания. Далее с учетом гидродинамических условий найденной модели изучают кинетику химических реакций, процессов массо- и теплопередачи и составляют математическое описание каждого из этих процессов. Заключительным этапом в данном случае является объединение описаний всех исследованных элементарных процессов (блоков) в единую систему уравнений математического описания объекта моделирования. Достоинством блочного принципа построения математического описания является то, что его можно использовать на стадии проектирования объекта, когда окончательный вариант аппаратного оформления еще неизвестен.

### **Методы составления математического описания**

К указанным методам относятся аналитический, экспериментальный и экспериментально-аналитический.

- *Аналитическими методами* составления математического описания обычно называют способы вывода уравнений статики и динамики на основе теоретического анализа физических и химических процессов, происходящих в исследуемом объекте, а также на основе

заданных конструктивных параметров аппаратуры и характеристик перерабатываемых веществ. При выводе этих уравнений используются фундаментальные законы сохранения вещества и энергии, а также кинетические закономерности процессов переноса массы и теплоты, химических превращений.

Для составления математического описания с помощью аналитических методов не требуется проведения каких-либо экспериментов на объекте, поэтому такие методы пригодны для нахождения статических и динамических характеристик вновь проектируемых объектов, физико-химические процессы в которых достаточно хорошо изучены.

К недостаткам аналитических методов составления математического описания можно отнести сложность решения получающейся системы уравнений при достаточно полном описании объекта.

*Экспериментальный метод* составления математического описания используется для управления и исследования объектов в узком, «рабочем» диапазоне изменения входных и выходных переменных (например, при построении системы автоматической стабилизации отдельных технологических параметров). Эти методы чаще всего основываются на предположении о линейности и сосредоточенности параметров объекта. Принятие этих допущений позволяет сравнительно просто описывать наблюдаемые процессы алгебраическими или линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. При экспериментальном подходе к составлению математического описания всегда требуется постановка опытов непосредственно на изучаемом объекте.

Достоинством экспериментальных методов является простота получаемого математического описания при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения параметров. Основной недостаток экспериментальных методов — невозможность установления функциональной связи между входящими в уравнения числовыми параметрами и конструктивными характеристиками объекта, режимными параметрами процесса, физико-химическими свойствами веществ. Кроме того, полученные экспериментальным методом математические описания нельзя распространять на другие однотипные объекты.

Наличие сильных и слабых сторон аналитического и экспериментального методов составления математического описания привело к необходимости разработки *комбинированного эксперимен-*

*тально-аналитического метода.* Сущность его заключается в аналитическом составлении уравнений описания, проведении экспериментальных исследований и нахождении по их результатам параметров уравнений. При подобном подходе к получению математического описания сохраняются многие положительные свойства экспериментальных и аналитических методов.

Формально математическое описание представляет собой совокупность зависимостей, связывающих различные переменные процесса в единую систему уравнений. Среди этих соотношений могут быть уравнения, отражающие общие физические законы (например, законы сохранения массы и энергии), уравнения, описывающие элементарные процессы (например, химические превращения), ограничения на переменные процесса и т. д. Кроме того, в состав математического описания также входят различные эмпирические и полупэмпирические зависимости между разными параметрами процесса, теоретическая форма которых неизвестна или слишком сложна.

В составе математического описания, разработанного на основе физической природы моделируемого объекта, можно выделить следующие группы уравнений:

1. *Уравнения сохранения массы и энергии, записанные с учетом гидродинамической структуры движения потоков.*

Данная группа уравнений характеризует распределение в потоках температуры, концентраций и связанных с ними свойств. Обобщенное уравнение материального баланса имеет вид

$$\text{Приход вещества} - \text{Расход вещества} = \text{Накопление вещества.} \quad (15.1)$$

В стационарном режиме не могут происходить ни убыль, ни накопление. В этом случае уравнение переходит в уравнение (15.1) материального баланса вида

$$\text{Приход вещества} = \text{Расход вещества.}$$

Обобщенное уравнение теплового баланса имеет вид

$$\text{Приход теплоты} - \text{Расход теплоты} = \text{Накопление теплоты,}$$

или для стационарных условий

$$\text{Приход теплоты} = \text{Расход теплоты.}$$

2. *Уравнения элементарных процессов для локальных элементов потоков.*

К этой группе относятся описания процессов массо- и теплообмена, химических реакций и др.

3. *Теоретические, полуэмпирические или эмпирические соотношения между различными параметрами процесса.*

Таковы, например, зависимость коэффициента массопередачи от скоростей потоков фаз, зависимость теплоемкости смеси от ее состава и т. д.

4. *Ограничения на параметры процесса.* Например, при моделировании процесса ректификации многокомпонентных смесей на любой ступени разделения должно выполняться условие, что сумма концентраций всех компонентов равна 1. Кроме того, концентрация любого компонента должна находиться в диапазоне от 0 до 1.

Общим для всех математических моделей является то, что число уравнений, включаемых в математическое описание, должно быть равно числу переменных, находимых в результате моделирования.

Кратко рассмотрим основные классы уравнений, встречающиеся в математических описаниях химико-технологических объектов. Для характеристики свойств разных объектов моделирования обычно применяют алгебраические и трансцендентные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и интегральные уравнения.

К *алгебраическим* уравнениям обычно сводится математическое описание стационарных режимов работы объектов с сосредоточенными параметрами (например, реактор полного смешения). Кроме того, уравнения этого типа применяют при описании более сложных объектов для выражения стационарных связей между разными параметрами. Математические описания в виде алгебраических уравнений наиболее просты, хотя сложность существенно зависит от числа уравнений и вида входящих в них функций.

*Обыкновенные дифференциальные* уравнения чаще используют для математического описания нестационарных режимов объектов с сосредоточенными параметрами (например, для описания динамики реактора полного смешения), а также стационарных режимов объектов с распределенными параметрами по одной пространственной координате. В первом случае независимой переменной является время, а во втором — пространственная координата. Следует

отметить общность и даже тождественность математических описаний, которая иногда свойственна математическим моделям различных объектов.

Сложность решения обыкновенных дифференциальных уравнений определяется рядом обстоятельств. Во-первых, она возрастает с ростом порядка уравнения (или, что практически эквивалентно этому, с ростом числа дифференциальных уравнений в системе, поскольку уравнение  $m$ -го порядка всегда можно преобразовать в систему, состоящую из  $m$  уравнений первого порядка).

Дифференциальные уравнения в частных производных используют для математического описания динамики объектов с распределенными параметрами или стационарных режимов объектов с параметрами, распределенными по нескольким координатам. Для указанных уравнений при описании динамики объекта наряду с начальными условиями также нужно задавать граничные условия, в общем случае являющиеся функциями времени. Для стационарных режимов объектов, описываемых уравнениями в частных производных, задают только граничные условия. Задачи с уравнениями в частных производных, как правило, отличаются наибольшей сложностью, и в большинстве случаев решение каждой конкретной задачи требует серьезной работы.

Математические модели, в которых нестационарные дифференциальные уравнения, описывающие изменения во времени переменных с малым временем релаксации, заменены стационарными уравнениями, можно назвать *квазинестационарными*. Нестационарные модели, используемые на практике, фактически обычно являются квазинестационарными, хотя при этом, строго говоря, необходимо обоснование квазистационарности ряда внутренних переменных.

С учетом сказанного математические модели можно классифицировать следующим образом:

по пространственным признакам – модели с сосредоточенными параметрами; ячеечные модели; модели с распределенными параметрами;

временным признакам – стационарные модели, квазинестационарные модели, нестационарные модели.

## 16. ВЫБОР МЕТОДА РЕШЕНИЯ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В ВИДЕ АЛГОРИТМА И МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ

После составления математического описания и постановки, в случае необходимости, соответствующих начальных и граничных условий необходимо выбрать метод решения, разработать алгоритм и составить программу решения системы уравнений математического описания.

В простейших случаях, когда возможно аналитическое решение системы уравнений математического описания, необходимость специальной разработки моделирующего алгоритма и программы не возникает, так как вся информация получается из соответствующих аналитических решений. Когда же математическое описание представляет собой систему конечных и дифференциальных уравнений, от возможности построения эффективного алгоритма решения может существенно зависеть практическая применимость математической модели.

При выборе метода решения системы уравнений математического описания обычно руководствуются требованиями обеспечения максимальной скорости получения решения, надежной сходимостью алгоритма решения к истинному и минимальной памяти ЭВМ. При этом должна обеспечиваться заданная точность решения.

После выбора метода решения составляют последовательность вычислительных и логических действий, обеспечивающих решение, т. е. составляется алгоритм решения задачи. Основными требованиями к форме и содержанию записи алгоритма являются его наглядность, компактность и выразительность. В практике математического моделирования наибольшее распространение получили графический способ записи алгоритма (блок-схемы) и запись алгоритма в виде последовательности шагов.

Графический способ записи алгоритма основан на представлении отдельных элементов алгоритма графическими символами, а всего алгоритма — в виде блок-схемы. На блок-схемах внутри графических символов производимые действия записывают словесно или с помощью символов. Представление алгоритма в виде блок-схемы по сравнению с остальными обладает тем преимуществом, что оно более наглядно. В то же время если алгоритм очень слож-

ный или громоздкий, то графическое изображение может быть запутанным и не обладать наглядностью. В этих случаях применяют простую запись алгоритма в виде последовательности шагов. Степень детализации алгоритма зависит от его сложности, математического обеспечения ЭВМ и от степени использования стандартных алгоритмов. Если, например, в программе применяется библиотечная подпрограмма, то ее, очевидно, нет необходимости детализировать, а достаточно лишь указать ее параметры.

В качестве примера рассмотрим алгоритм расчета аппарата идеального вытеснения, в котором протекает реакция  $B + A \rightarrow P_0$ .

Математическое описание аппарата в стационарном режиме работы имеет следующий вид:

$$\frac{v}{s} \cdot \frac{dC_A}{dx} = -kC_A C_B; \quad (16.1)$$

$$\frac{v}{s} \cdot \frac{dC_B}{dx} = -kC_A C_B, \quad (16.2)$$

$$C_A = C_A^0, \quad C_B = C_B^0 \quad \text{при } x = 0.$$

Будем считать, что реакция протекает в изотермических условиях. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений (16.1), (16.2) может быть решена с помощью метода Эйлера.

Согласно методу Эйлера искомые концентрации  $C_A$  и  $C_B$  определяются по формулам

$$C_A = C_A^0 \Delta x f_1(C_A, C_B); \quad (16.3)$$

$$C_B = C_B^0 \Delta x f_1(C_A, C_B). \quad (16.4)$$

Графический алгоритм решения (блок-схема) системы уравнений представлен на рис. 16.1.

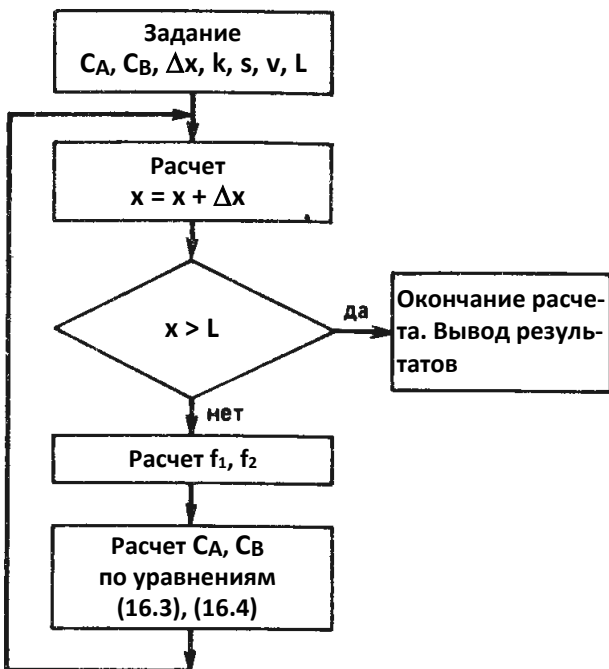


Рис. 16.1. Блок-схема алгоритма расчета реактора идеального вытеснения

Тот же алгоритм, выраженный в пошаговой форме, имеет следующий вид:

1. Задаются  $C_A^0, C_B^0, \Delta x, k, s, v, l$ .
2. Находится значение  $x = x + \Delta x$ .
3. Проверяется условие на окончание интегрирования ( $x > l$ ). Если оно выполнено, то выводятся результаты и затем осуществляется переход к п. 7.
4. Рассчитываются правые части  $f_1(C_A, C_B), f_2(C_A, C_B)$ .
5. Определяются новые концентрации  $C_A$  и  $C_B$ .
6. Осуществляется переход к п. 2.
7. Окончание расчета.

Далее на основании алгоритма записывается программа на одном из языков высокого уровня. При записи программы необходимо стремиться к ее компактности. Для этого широко используются осо-



бенности свойств функции, поскольку в данном случае повторяющиеся вычислительные действия будут записаны в программе один раз. При составлении программы важно стремиться к минимизации требуемой памяти ЭВМ. Логически законченные части расчета целесообразно записывать в виде отдельных процедур (подпрограмм). В этом случае возможно их занесение в библиотеки и использование в различных расчетах.

Этап программирования обычно завершается составлением описания программы, в котором указываются все переменные и соответствующие идентификаторы, входные и выходные переменные, порядок ввода и вывода информации.

## 17. БЛОЧНЫЙ ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

При построении математических моделей широко используют блочный принцип, суть которого состоит в том, что модель строится из отдельных логически законченных блоков, обычно отражающих ту или иную сторону рассматриваемого процесса. Это может быть блок кинетики массопередачи, блок гидродинамики, блок фазового равновесия и т. п. Блочный принцип построения моделей позволяет:

- а) разбить общую задачу построения математической модели на отдельные подзадачи и тем самым упростить ее решение;
- б) использовать разработанные блоки в других моделях;
- в) модернизировать и заменять отдельные блоки на новые, не касаясь при этом остальных.

Представление математической модели процесса в виде совокупности подсистем (блоков) позволяет представить общее математическое описание как *совокупность математических* описаний отдельных блоков. Тогда общая структура математической модели может иметь вид, изображенный на рис. 17.1.

Применение блочного принципа построения математических моделей, который, в свою очередь, основан на системном подходе, позволяет во многих случаях принципиально решить проблему масштабирования процессов. С точки зрения математического моделирования масштабный переход есть не что иное, как деформация

математической модели при изменении геометрических размеров, характеризующих аппаратное оформление процесса. При использовании блочного принципа построения математической модели влияние геометрических размеров на свойства процесса отражается лишь в одной подсистеме (блоке) — блоке «Гидродинамика», поэтому при наличии достаточно корректного в качественном и количественном отношении математического описания этого блока можно осуществить масштабный переход.

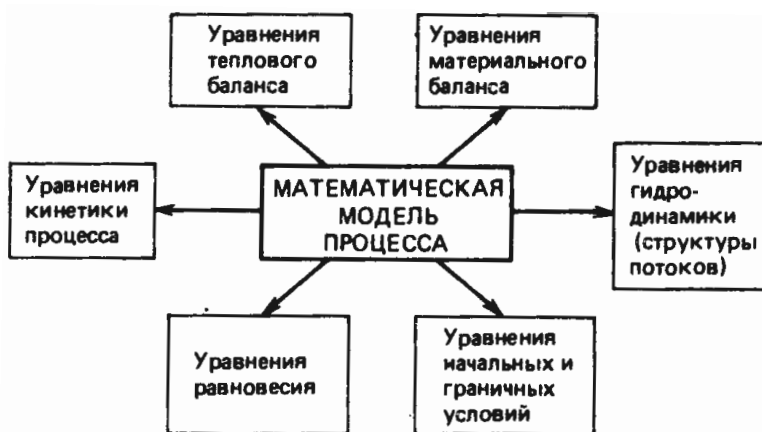


Рис. 17.1. Представление математического описания процесса

Принципиально каждый блок математической модели может иметь различную степень детализации математического описания. Необходимо, чтобы входные и выходные переменные всех блоков модели находились во взаимном соответствии, что обеспечит получение замкнутой системы уравнений математической модели процесса в целом. Что касается состава внутренних переменных блоков, то здесь существует достаточно большая свобода выбора. В идеале математическое описание каждого блока должно включать уравнения, параметрами которых являются только физико-химические свойства веществ.

## 18. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

### Основные определения

Решение многих теоретических и практических задач сводится к отысканию экстремума (наибольшего или наименьшего значения) скалярной функции  $f(x)$   $n$ -мерного векторного аргумента. В дальнейшем под  $x$  будем понимать вектор-столбец (точку в  $n$ -мерном пространстве)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вектор-строка получается путем применения операции транспонирования:

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Оптимизируемую функцию  $f(x)$  называют *целевой функцией* или *критерием оптимальности*.

В дальнейшем без ограничения общности будем говорить о поиске минимального значения функции  $f(x)$  и записывать эту задачу следующим образом:

$$f(x) \geq \min.$$

Вектор  $x^*$ , определяющий минимум целевой функции, называют *оптимальным*.

Отметим, что задачу максимизации  $f(x)$  можно заменить эквивалентной ей задачей минимизации или наоборот. Рассмотрим это на примере функции одной переменной (рис. 18.1). Если  $x^*$  – точка минимума функции  $y = f(x)$ , то для функции  $y = -f(x)$  она является точкой максимума, так как графики функций  $f(x)$  и  $-f(x)$  симметричны

относительно оси абсцисс. Итак, минимум функции  $f(x)$  и максимум функции  $-f(x)$  достигаются при одном и том же значении переменной. Минимальное же значение функции  $f(x)$  равно максимальному значению функции  $-f(x)$ , взятому с противоположным знаком, т. е.

$$\min f(x) = -\max(-f(x)).$$

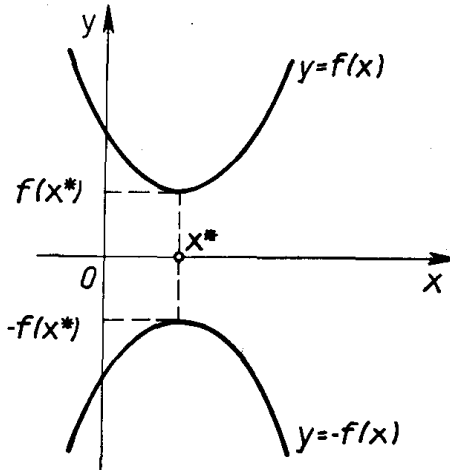


Рис. 18.1. Экстремум

Рассуждая аналогично, этот вывод нетрудно распространить на случай функции многих переменных. Если требуется заменить задачу минимизации функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  задачей максимизации, то вместо отыскания минимума этой функции достаточно найти максимум функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Экстремальные значения этих функций достигаются при одних и тех же значениях переменных. Минимальное значение функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  равно максимальному значению функции  $-f(x_1, \dots, x_n)$ , взятому с обратным знаком, т. е.

$$\min f(x_1, \dots, x_n) = \max -f(x_1, \dots, x_n).$$

В дальнейшем отмеченный факт позволяет говорить только о задаче минимизации.

В реальных условиях на переменные  $x_j, j = 1, \dots, n$ , и некоторые функции  $g_i(x), h_i(x)$ , характеризующие качественные свойства объекта, системы, процесса, могут быть наложены ограничения (условия) вида

$$g_i(x) = 0, i = 1, \dots, n;$$

$$h_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, n;$$

$$a \leq x \leq b,$$

где

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}.$$

Такую задачу называют *задачей условной оптимизации*. При отсутствии ограничений имеет место *задача безусловной оптимизации*.

Каждая точка  $x$  в  $n$ -мерном пространстве переменных  $x_1, \dots, x_n$ , в которой выполняются ограничения, называется *допустимой точкой задачи*. Множество всех допустимых точек называют *допустимой областью G*. *Решением задачи (оптимальной точкой)* называют допустимую точку  $x^*$ , в которой целевая функция  $f(x)$  достигает своего минимального значения.

Точка  $x^*$  определяет *глобальный минимум* функции одной переменной  $f(x)$ , заданной на числовой прямой  $X$ , если  $x \in X$  и  $f(x) < f(x^*)$  для всех  $x \in X$  (рис. 18.2, а). Точка  $x^*$  называется *точкой строгого глобального минимума*, если это неравенство выполняется как строгое. Если же в выражении  $f(x^*) \leq f(x)$  равенство возможно при  $x$ , не равных  $x^*$ , то реализуется *нестрогий минимум*, а под решением в этом случае понимают множество  $x^* = [x \in X: f(x) = f(x^*)]$  (рис. 18.2, б).

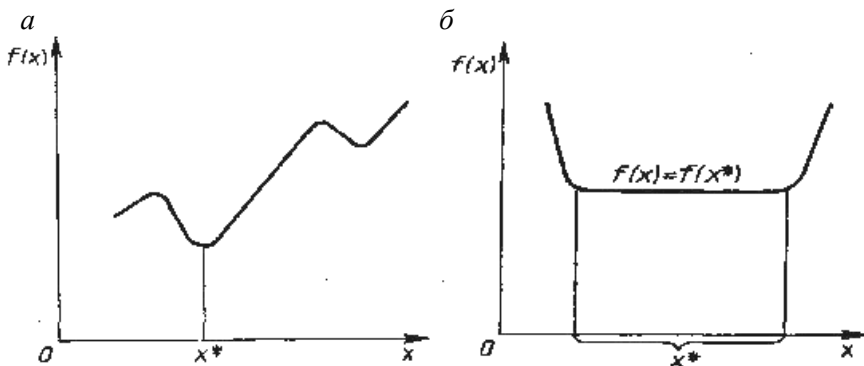


Рис. 18.2. Нахождение глобального минимума функции

Точка  $x^* \in X$  определяет *локальный минимум* функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , если при некотором достаточно малом  $\epsilon > 0$  для всех  $x$ , не равных  $x^*$ ,  $x \in X$ , удовлетворяющих условию  $\epsilon \rightarrow |x - x^*|$ , выполняется неравенство  $f(x^*) < f(x)$ . Если неравенство строгое, то  $x^*$  является точкой строгого локального минимума. Все определения для максимума функции получаются заменой знаков предыдущих неравенств на обратные. На рис. 18.3 показаны экстремумы функции одной переменной  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Здесь  $x_1, x_3, x_6$  — точки локального максимума, а  $x_2, x_4$  — локального минимума.

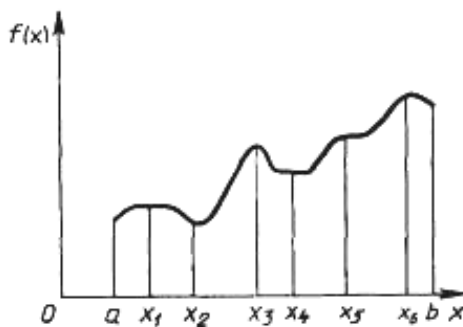


Рис. 18.3. Экстремумы функции

В точке  $x_6$  реализуется глобальный максимум, а в точке  $x_2$  — глобальный минимум.

## 19. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ

Возможны два подхода к решению задачи отыскания минимума функции многих переменных  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  при отсутствии ограничений на диапазон изменения неизвестных. Первый подход лежит в основе *косвенных методов оптимизации* и сводит решение задачи оптимизации к решению системы нелинейных уравнений, являющихся следствием условий экстремума функции многих переменных. Как известно, эти условия определяют, что в точке экстремума  $x^*$  все первые производные функции по независимым переменным равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=x^*} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эти условия образуют систему  $n$  нелинейных уравнений, среди решений которой находятся точки минимума. Вектор  $f'(x)$ , составленный из первых производных функции по каждой переменной, т. е.

$$f'(x) = (\partial f(x)/\partial x_1, \dots, \partial f(x)/\partial x_n)^T,$$

называют градиентом скалярной функции  $f(x)$ . Как видно, в точке минимума градиент равен нулю.

Решение систем нелинейных уравнений – задача весьма сложная и трудоемкая. Вследствие этого на практике используют второй подход к минимизации функций, составляющий основу *прямых методов*. Суть их состоит в построении последовательности векторов  $x[0], x[1], \dots, x[n]$ , таких, что

$$f(x[0]) > f(x[1]) > f(x[n]) > \dots$$

В качестве начальной точки  $x[0]$  может быть выбрана произвольная точка, однако стремятся использовать всю имеющуюся информацию о поведении функции  $f(x)$ , чтобы точка  $x[0]$  располагалась как можно ближе к точке минимума. Переход (итерация) от точки  $x[k]$  к точке  $x[k+1]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , состоит из двух этапов:

- 1) выбор направления движения из точки  $x[k]$ ;
- 2) определение шага вдоль этого направления.





Здесь  $k$  – номер итерации;

$e, g$  – заданные величины точности решения задачи.

Методы поиска точки минимума называются *детерминированными*, если оба элемента перехода от  $x[k]$  к  $x[k + 1]$  (направление движения и величина шага) выбираются однозначно по доступной в точке  $x[k]$  информации. Если же при переходе используется какой-либо случайный механизм, то алгоритм поиска называется *случайным поиском минимума*.

Детерминированные алгоритмы безусловной минимизации делят на классы в зависимости от вида используемой информации. Если на каждой итерации используются лишь значения минимизируемых функций, то метод называется *методом нулевого порядка*. Если, кроме того, требуется вычисление первых производных минимизируемой функции, то имеют место методы *первого порядка*, при необходимости дополнительного вычисления вторых производных – *методы второго порядка*.

В настоящее время разработано множество численных методов для задач как безусловной, так и условной оптимизации. Естественным является стремление выбрать для решения конкретной задачи наилучший метод, позволяющий за наименьшее время использования ЭВМ получить решение с заданной точностью.

Качество численного метода характеризуется многими факторами: скоростью сходимости, временем выполнения одной итерации, объемом памяти ЭВМ, необходимым для реализации метода, классом решаемых задач и т. д. Решаемые задачи также весьма разнообразны: они могут иметь высокую и малую размерность, быть унимодальными (обладающими одним экстремумом) и многоэкстремальными и т. д. Один и тот же метод, эффективный для решения задач одного типа, может оказаться совершенно неприемлемым для задач другого типа. Очевидно, что разумное сочетание разнообразных методов, учет их свойств позволят с наибольшей эффективностью решать поставленные задачи. Многометодный способ решения весьма удобен в диалоговом режиме работы с ЭВМ. Для успешной работы в таком режиме очень полезно знать основные свойства, специфику методов оптимизации. Это обеспечивает способность правильно ориентироваться в различных ситуациях, возникающих в процессе расчетов, и наилучшим образом решить задачу.

## 20. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

В методах нулевого порядка для определения направления спуска не требуется вычислять производные целевой функции. Направление минимизации в данном случае полностью определяется последовательными вычислениями значений функции. Следует отметить, что при решении задач безусловной минимизации методы первого и второго порядков обладают, как правило, более высокой скоростью сходимости, чем методы нулевого порядка. Однако на практике вычисление первых и вторых производных функции большого количества переменных весьма трудоемко. В ряде случаев они не могут быть получены в виде аналитических функций. Определение производных с помощью различных численных методов осуществляется с ошибками, которые могут ограничить применение таких методов. Кроме того, на практике встречаются задачи, решение которых возможно лишь с помощью методов нулевого порядка, например задачи минимизации функций с разрывными первыми производными. Критерий оптимальности может быть задан не в явном виде, а системой уравнений. В этом случае аналитическое или численное определение производных становится очень сложным, а иногда невозможным. Для решения таких практических задач оптимизации могут быть успешно применены методы нулевого порядка. Рассмотрим некоторые из них.

## 21. МЕТОД ПРЯМОГО ПОИСКА (МЕТОД ХУКА–ДЖИВСА)

Суть метода прямого поиска состоит в следующем. Задаются некоторой начальной точкой  $x[0]$ . Изменяя компоненты вектора  $x[0]$ , обследуют окрестность данной точки, в результате чего находят направление, в котором происходит уменьшение минимизируемой функции  $f(x)$ . В выбранном направлении осуществляют спуск до тех пор, пока значение функции уменьшается. Если в данном направлении не удастся найти точку с меньшим значением функции, уменьшают величину шага спуска. Если последовательные дробления шага не приводят к уменьшению функции, от выбранного направления спуска откажутся и осуществляют новое обследование окрестности и т. д.

Алгоритм метода прямого поиска состоит в следующем.

1. Задаются значениями координат  $x_i[0]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , начальной точки  $x[0]$ , вектором изменения координат  $Dx$  в процессе обследования окрестности, наименьшим допустимым значением  $e$  компонентов  $Dx$ .

2. Полагают, что  $x[0]$  является *базисной точкой*  $x^\delta$ , и вычисляют значение  $f(x^\delta)$ .

3. Циклически изменяют каждую координату  $x_i^\delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , базисной точки  $x^\delta$  на величину  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т. е.

$$x_i[k] = x_i^\delta + Dx_i;$$

$$x_i[k] = x_i^\delta - Dx_i.$$

При этом вычисляют значения  $f(x[k])$  и сравнивают их со значением  $f(x^\delta)$ . Если

$$f(x[k]) < f(x^\delta),$$

то соответствующая координата  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , приобретает новое значение, вычисленное по одному из приведенных выражений. В противном случае значение этой координаты остается неизменным. Если после изменения последней  $n$ -й координаты  $f(x[k]) < f(x^\delta)$ , то переходят к п. 4. В противном случае – к п. 7.

4. Полагают, что  $x[k]$  является новой базисной точкой  $x^\delta$ , и вычисляют значение  $f(x^\delta)$ .

5. Осуществляют спуск из точки

$$x[k] > x_i[k + 1] = 2x_i[k] - x_i^\delta, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $x^\delta$  – координаты предыдущей базисной точки.

Вычисляют значение  $f(x[k+1])$ .

6. Как и в п. 3, циклически изменяют каждую координату точки  $x[k + 1]$ , осуществляя сравнение соответствующих значений функции  $f(x)$  со значением  $f(x[k + 1])$ , полученным в п. 5. После изменения последней координаты сравнивают соответствующее значение функции  $f(x[k])$  со значением  $f(x^\delta)$ , полученным в п. 4. Если

$$f(x[k]) < f(x^\delta),$$

то переходят к п. 4, в противном случае – к п. 3. При этом в качестве базисной используют последнюю из полученных базисных точек.

7. Сравнивают значения  $Dx$  и  $e$ . Если  $Dx < e$ , то вычисления прекращаются. В противном случае уменьшают значения  $Dx$  и переходят к п. 3.

Достоинством метода прямого поиска является простота его программирования на компьютере. Он не требует знания целевой функции в явном виде, а также легко учитывает ограничения на отдельные переменные, а также сложные ограничения на область поиска.

Недостаток метода прямого поиска состоит в том, что в случае сильно вытянутых, изогнутых или обладающих острыми углами линий уровня целевой функции он может оказаться неспособным обеспечить продвижение к точке минимума. Действительно, в случаях, изображенных на рис. 21.1, *a* и *б*, каким бы малым ни брать шаг в направлении  $x_1$  или  $x_2$  из точки  $x'$ , нельзя получить уменьшения значения целевой функции.

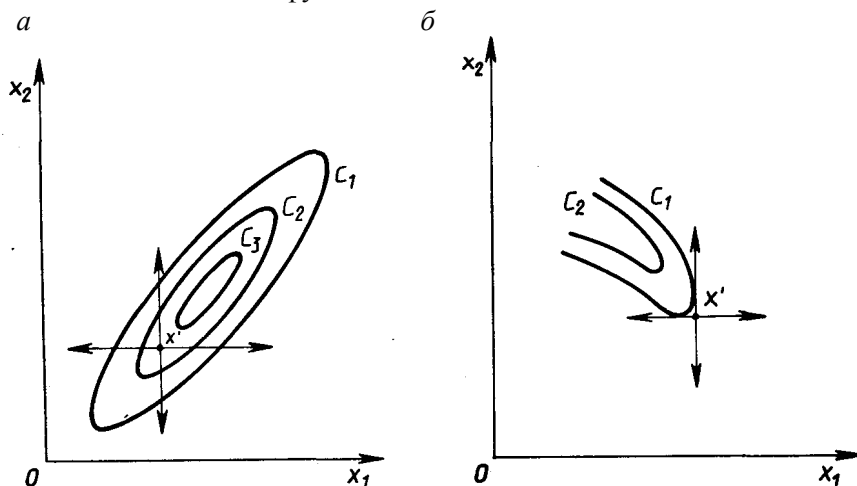


Рис. 21.1. Прямой поиск: невозможность продвижения к минимуму:

*a* –  $C_1 > C_2 > C_3$ ; *б* –  $C_1 > C_2$

Напомним, что *поверхностью уровня* (на плоскости – *линией уровня*) является поверхность, получаемая приравниванием выражения функции  $f(x)$  некоторой постоянной величине  $C$ , т. е.  $f(x) = C$ .

Во всех точках этой поверхности функция имеет одно и то же значение  $C$ . Давая величине  $C$  различные значения  $C_1, \dots, C_n$ , получают ряд поверхностей, геометрически иллюстрирующих характер функции.

## 22. МЕТОД ДЕФОРМИРУЕМОГО МНОГОГРАННИКА (МЕТОД НЕЛДЕРА–МИДА)

Данный метод состоит в том, что для минимизации функции  $n$  переменных  $f(x)$  в  $n$ -мерном пространстве строится многогранник, содержащий  $(n + 1)$  вершину. Очевидно, что каждая вершина соответствует некоторому вектору  $x$ . В каждой из вершин многогранника вычисляются значения целевой функции  $f(x)$ , определяется максимальное из этих значений и соответствующая ему вершина  $x[h]$ . Через эту вершину и центр тяжести остальных вершин проводится проецирующая прямая, на которой находится точка  $x[q]$  с меньшим значением целевой функции, чем в вершине  $x[h]$  (рис. 22.1). Затем исключается вершина  $x[h]$ . Из оставшихся вершин и точки  $x[q]$  строится новый многогранник, с которым повторяется описанная процедура. В процессе выполнения данных операций многогранник изменяет свои размеры, что и обусловило название метода.

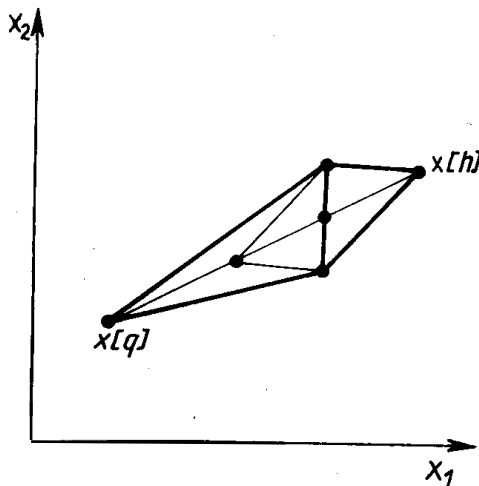


Рис. 22.2. Геометрическая интерпретация метода деформируемого многогранника

Введем следующие обозначения:

$$x[i, k] = (x_1[i, k], \dots, x_j[i, k], \dots, x_n[i, k])^T,$$

где  $i = 1, \dots, n + 1$ ;  $k = 0, 1, \dots$  –  $i$ -я вершина многогранника на  $k$ -м этапе поиска;

$x[h, k]$  – вершина, в которой значение целевой функции максимально, т. е.  $f(x[h, k]) = \max\{f(x[1, k]), \dots, f(x[n + 1, k])\}$ ;

$x[l, k]$  – вершина, в которой значение целевой функции минимально, т. е.  $f(x[l, k]) = \min\{f(x[1, k]), \dots, f(x[n + 1, k])\}$ ;

$x[n + 2, k]$  – центр тяжести всех вершин, за исключением  $x[h, k]$ .

Координаты центра тяжести вычисляются по формуле

$$x_j[n + 2, k] = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_j[i, k] - x_j[n, k] \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Алгоритм метода деформируемого многогранника состоит в следующем.

1. Осуществляют проецирование точки  $x[h, k]$  через центр тяжести:

$$x[n + 3, k] = x[n + 2, k] + a(x[n + 2, k] - x[h, k]),$$

где  $a > 0$  – некоторая константа. Обычно  $a = 1$ .

2. Выполняют операцию растяжения вектора  $x[n + 3, k] - x[n + 2, k]$ :

$$x[n + 4, k] = x[n + 2, k] + g(x[n + 3, k] - x[n + 2, k]),$$

где  $g > 1$  – коэффициент растяжения. Наиболее удовлетворительные результаты получают при  $2,8 \leq g \leq 3$ .

Если  $f(x[n + 4, k]) < f(x[l, k])$ , то  $x[h, k]$  заменяют на  $x[n + 4, k]$  и продолжают вычисления с п. 1 при  $k = k + 1$ . В противном случае  $x[h, k]$  заменяют на  $x[n + 3, k]$  и переходят к п. 1 при  $k = k + 1$ .

3. Если  $f(x[n + 3, k]) > f(x[i, k])$  для всех  $i$ , не равных  $h$ , то сжимают вектор  $x[h, k] - x[n + 2, k]$ :

$$x[n + 5, k] = x[n + 2, k] + b(x[h, k] - x[n + 2, k]),$$

где  $b > 0$  – коэффициент сжатия. Наиболее хорошие результаты получают при  $0,4 \leq b \leq 0,6$ .

Затем точку  $x[h, k]$  заменяют на  $x[n + 5, k]$  и переходят к п. 1 при  $k = k + 1$ .

4. Если  $f(x[n + 3, k]) > f(x[h, k])$ , то все векторы  $x[i, k] - x[l, k]$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ , уменьшают в два раза:

$$x[i, k] = x[l, k] + 0,5(x[i, k] - x[l, k]).$$

Затем переходят к п. 1 при  $k = k + 1$ .

В диалоговой системе оптимизации выход из подпрограммы, реализующей метод деформируемого многогранника, осуществляется при предельном сжатии многогранника, т. е. при выполнении условия

$$\max \sum_{j=1}^n (x_j[i, k] - x_j[n + 2, k])^2 < \sum_{j=1}^n e_j^2,$$

где  $e = (e_1, \dots, e_n)$  – заданный вектор.

С помощью операции растяжения и сжатия размеры и форма деформируемого многогранника адаптируются к топографии целевой функции. В результате многогранник вытягивается вдоль длинных наклонных поверхностей, изменяет направление в изогнутых впадинах, сжимается в окрестности минимума, что определяет эффективность рассмотренного метода.

### 23. МЕТОД ВРАЩАЮЩИХСЯ КООРДИНАТ (МЕТОД РОЗЕНБРОКА)

Суть метода состоит во вращении системы координат в соответствии с изменением скорости убывания целевой функции. Новые направления координатных осей определяются таким образом, чтобы одна из них соответствовала направлению наиболее быстрого убывания целевой функции, а остальные находятся из условия ортогональности. Идея метода состоит в следующем (рис. 23.1).

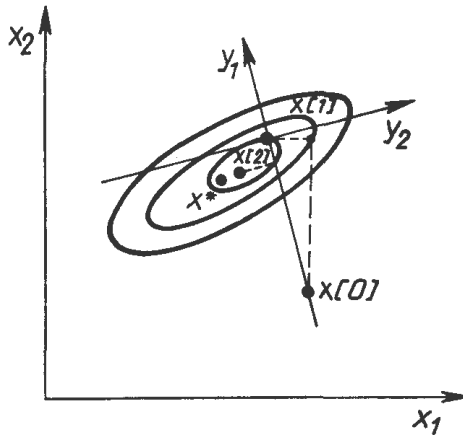


Рис. 23.1. Геометрическая интерпретация метода Розенброка

Из начальной точки  $x[0]$  осуществляют спуск в точку  $x[1]$  по направлениям, параллельным координатным осям. На следующей итерации одна из осей должна проходить в направлении  $y_1 = x[1] - x[0]$ , а другая – в направлении, перпендикулярном к  $y_1$ . Спуск вдоль этих осей приводит в точку  $x[2]$ , что дает возможность построить новый вектор  $x[2] - x[1]$  и на его базе – новую систему направлений поиска. В общем случае данный метод эффективен при минимизации овражных функций, так как результирующее направление поиска стремится расположиться вдоль оси оврага.

Алгоритм метода вращающихся координат состоит в следующем.

1. Через  $p_1[k], \dots, p_n[k]$  обозначают направления координатных осей в некоторой точке  $x[k]$  (на  $k$ -й итерации). Выполняют пробный шаг  $h_1$  вдоль оси  $p_1[k]$ , т. е.

$$x[k+1] = x[k] + h_1 p_1[k].$$

Если при этом  $f(x[k+1]) < f(x[k])$ , то шаг  $h$  умножают на величину  $b > 1$ .

Если  $f(x[k+1]) > f(x[k])$ , – то на величину  $(-b)$ ,  $0 < |b| < 1$ ;

$$x[k+1] = x[k] + b h_1 p_1[k].$$



Полагая  $h_1 = a_1$ , получают

$$x[k1] = x[k] + a_1 p_1[k].$$

2. Из точки  $x[k1]$  выполняют шаг  $h_2$  вдоль оси  $p_2[k]$ :

$$x[k2] = x[k] + a_1 p_1[k] + h_2 p_2[k].$$

Повторяют операцию п. 1, т. е.

$$x[k2] = x[k] + a_1 p_1[k] + a_2 p_2[k].$$

Эту процедуру выполняют для всех остальных координатных осей. На последнем шаге получают точку

$$x[kn] = x[k+1] = x[k] + \sum_{i=1}^n a_i p_i[k].$$

3. Выбирают новые оси координат  $p_1[k+1], \dots, p_n[k+1]$ . В качестве первой оси принимается вектор

$$p_1[k+1] = x[k+1] - x[k].$$

Остальные оси строят ортогональными к первой оси с помощью процедуры ортогонализации Грама–Шмидта. Повторяют вычисления с п. 1 до удовлетворения условий сходимости.

Коэффициенты  $b$  подбираются эмпирически. Хорошие результаты дают значения  $b = -0,5$  при неудачных пробах ( $f(x[k1]) > f(x[k])$ ) и  $b = 3$  при удачных пробах ( $f(x[k1]) < f(x[k])$ ).

В отличие от других методов нулевого порядка алгоритм Розенброка ориентирован на отыскание оптимальной точки в каждом направлении, а не просто на фиксированный сдвиг по всем направлениям. Величина шага в процессе поиска непрерывно изменяется в зависимости от рельефа поверхности уровня. Сочетание вращения координат с регулированием шага делает метод Розенброка эффективным при решении сложных задач оптимизации.

## 24. МЕТОД ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ (МЕТОД ПАУЭЛЛА)

Этот метод использует свойство квадратичной функции, заключающееся в том, что любая прямая, которая проходит через точку минимума функции  $x^*$ , пересекает под равными углами касательные к поверхностям равного уровня функции в точках пересечения (рис. 24.1).

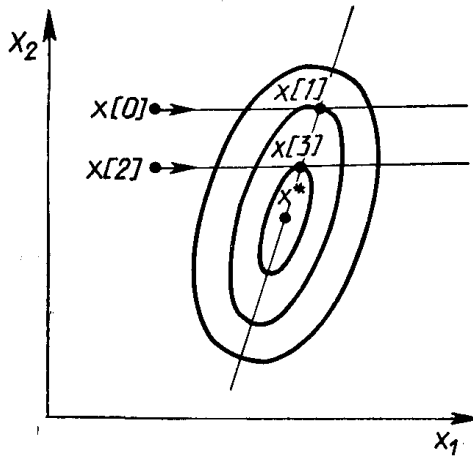


Рис. 24.1. Геометрическая интерпретация метода Пауэлла

Этот метод использует свойство квадратичной функции, заключающееся в том, что любая прямая, которая проходит через точку минимума функции  $x^*$ , пересекает касательные к поверхностям равного уровня функции в точках пересечения (см. рис. 24.1) под равными углами.

**Сущность метода.** Выбирается некоторая начальная точка  $x[0]$  и выполняется одномерный поиск вдоль произвольного направления, приводящий в точку  $x[1]$ . Затем выбирается точка  $x[2]$ , не лежащая на прямой  $x[0] - x[1]$ , и осуществляется одномерный поиск вдоль прямой, параллельной  $x[0] - x[1]$ . Полученная в результате точка  $x[3]$  вместе с точкой  $x[1]$  определяет направление  $x[1] - x[3]$  одномерного поиска, дающее точку минимума  $x^*$ . В случае квадратичной функции  $n$  переменных оптимальное значение находится за

$n$  итераций. Поиск минимума при этом в конечном счете осуществляется во взаимно сопряженных направлениях. В случае неквадратичной целевой функции направления поиска оказываются сопряженными относительно матрицы Гессе. Алгоритм метода параллельных касательных состоит в следующем.

1. Задаются начальной точкой  $x[0]$ . За начальные направления поиска  $p[1], \dots, p[0]$  принимают направления осей координат, т. е.  $p[i] = e[i], i = 1, \dots, n$  (здесь  $e[i] = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ ).

2. Выполняют  $n$  одномерных поисков вдоль ортогональных направлений  $p[i], i = 1, \dots, n$ . При этом каждый следующий поиск производится из точки минимума, полученной на предыдущем шаге. Величина шага  $a_k$  находится из условия

$$f(x[k] + a_k p[k]) = \min_a f(x[k] + a p[k]).$$

Полученный шаг определяет точку

$$x[k+1] = x[k] + a_k p[k].$$

3. Выбирают новое направление

$$p = -x[n] - x[0]$$

и заменяют направления  $p[1], \dots, p[n]$  на  $p[2], \dots, p[n], p$ . Последним присваивают обозначения  $p[1], \dots, p[n]$ .

4. Осуществляют одномерный поиск вдоль направления

$$p = p[n] = x[n] - x[0].$$

Заменяют  $x[0]$  на  $x[n+1] = x[n] + a_n p[n]$  и принимают эту точку за начальную точку  $x[0]$  для следующей итерации. Переходят к п. 1.

Таким образом, в результате выполнения рассмотренной процедуры осуществляется поочередная замена принятых вначале направлений поиска. В итоге после  $n$  шагов они окажутся взаимно сопряженными.

## 25. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### Минимизация функций многих переменных. Основные положения

Градиентом дифференцируемой функции  $f(x)$  в точке  $x[0]$  называется  $n$ -мерный вектор  $f'(x[0])$ , компоненты которого являются частными производными функции  $f(x)$ , вычисленными в точке  $x[0]$ , т. е.

$$f'(x[0]) = (\partial f(x[0])/\partial x_1, \dots, \partial f(x[0])/\partial x_n)^T.$$

Этот вектор перпендикулярен к плоскости, проведенной через точку  $x[0]$ , и касательной к поверхности уровня функции  $f(x)$ , проходящей через точку  $x[0]$ . В каждой точке такой поверхности функция  $f(x)$  принимает одинаковое значение. Приравнивая функцию различным постоянным величинам  $C_0, C_1, \dots$ , получим серию поверхностей, характеризующих ее топологию (рис. 25.1).

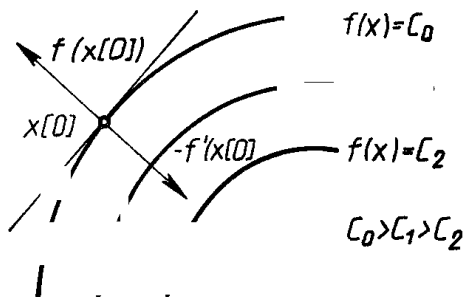


Рис. 25.1. Градиент дифференцируемой функции

Вектор-градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в данной точке. Вектор, противоположный градиенту ( $-f'(x[0])$ ), называется *антиградиентом* и направлен в сторону наискорейшего убывания функции. В точке минимума градиент функции равен нулю. На свойствах градиента основаны методы первого порядка, называемые также градиентным и методами минимизации. Использование этих методов в общем случае позволяет определить точку локального минимума функции.

Очевидно, что если нет дополнительной информации, то из начальной точки  $x[0]$  разумно перейти в точку  $x[1]$ , лежащую в направлении антиградиента – наискорейшего убывания функции. Выбирая в качестве направления спуска  $p[k]$  антиградиент  $-f'(x[k])$  в точке  $x[k]$ , получаем итерационный процесс вида

$$x[k + 1] = x[k] - a_k f'(x[k]), \quad a_k > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В координатной форме этот процесс записывается следующим образом:

$$x_i[k + 1] = x_i[k] - a_k \partial f(x[k]) / \partial x_i,$$

$$i = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В качестве критерия останова итерационного процесса используют либо выполнение условия малости приращения аргумента

$$\| x[k + 1] - x[k] \| \leq \epsilon,$$

либо выполнение условия малости градиента

$$\| f'(x[k + 1]) \| \leq g.$$

Здесь  $\epsilon$  и  $g$  – заданные малые величины.

Возможен и комбинированный критерий, состоящий в одновременном выполнении указанных условий. Градиентные методы отличаются друг от друга способами выбора величины шага  $a_k$ .

При методе с постоянным шагом для всех итераций выбирается некоторая постоянная величина шага. Достаточно малый шаг  $a_k$  обеспечит убывание функции, т. е. выполнение неравенства

$$f(x[k + 1]) = f(x[k] - a_k f'(x[k])) < f(x[k]).$$

Однако это может привести к необходимости проводить неприемлемо большое количество итераций для достижения точки минимума. С другой стороны, слишком большой шаг может вызвать неожиданный рост функции либо привести к колебаниям около точки минимума (заикливание). Из-за сложности получения необ-

ходимой информации для выбора величины шага методы с постоянным шагом на практике применяются редко.

Более экономичны в смысле количества итераций и надежности градиентные *методы с переменным шагом*, когда в зависимости от результатов вычислений величина шага некоторым образом меняется. Рассмотрим применяемые на практике варианты таких методов.

## 26. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

При использовании метода наискорейшего спуска на каждой итерации величина шага  $a_k$  выбирается из условия минимума функции  $f(x)$  в направлении спуска, т. е.

$$f(x[k] - a_k f'(x[k])) = \min_{a>0} f(x[k] - a f'(x[k])).$$

Это условие означает, что движение вдоль антиградиента происходит до тех пор, пока значение функции  $f(x)$  убывает. С математической точки зрения на каждой итерации необходимо решать задачу одномерной минимизации по  $a$  функции:

$$j(a) = f(x[k] - a f'(x[k])).$$

Алгоритм метода наискорейшего спуска состоит в следующем.

1. Задаются координаты начальной точки  $x[0]$ .
2. В точке  $x[k]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , вычисляется значение градиента  $f'(x[k])$ .
3. Определяется величина шага  $a_k$ , путем одномерной минимизации по  $a$  функции  $j(a) = f(x[k] - a f'(x[k]))$ .
4. Определяются координаты точки  $x[k+1]$ :

$$x_i[k+1] = x_i[k] - a_k f'_i(x[k]), \quad i = 1, \dots, n.$$

5. Проверяются условия останова итерационного процесса. Если они выполняются, то вычисления прекращаются. В противном случае осуществляется переход к п. 1.

В рассматриваемом методе направление движения из точки  $x[k]$  касается линии уровня в точке  $x[k+1]$  (рис. 26.1). Траектория спуска зигзагообразная, причем соседние звенья зигзага ортогональны

друг другу. Действительно, шаг  $a_k$  выбирается путем минимизации по  $a$  функции  $(a) = f(x[k] + af'(x[k]))$ . Необходимое условие минимума функции  $dj(a)/da = 0$ . Вычислив производную сложной функции, получим условие ортогональности векторов направлений спуска в соседних точках:

$$dj(a)/da = -f'(x[k+1]) f'(x[k]) = 0.$$

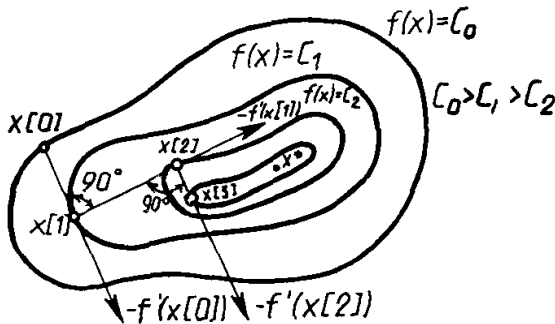


Рис. 26.1. Геометрическая интерпретация метода наискорейшего спуска

Градиентные методы сходятся к минимуму с высокой скоростью (со скоростью геометрической прогрессии) для гладких выпуклых функций. У таких функций наибольшее  $M$  и наименьшее  $m$  – собственные значения матрицы вторых производных (матрицы Гессе)

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}$$

мало отличаются друг от друга, т. е. матрица  $H(x)$  хорошо обусловлена. Напомним, что собственными значениями  $l_i, i = 1, \dots, n$ , матрицы являются корни характеристического уравнения

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Однако на практике, как правило, минимизируемые функции имеют плохо обусловленные матрицы вторых производных ( $m/M \ll 1$ ). Значения таких функций вдоль некоторых направлений изменяются гораздо быстрее (иногда на несколько порядков), чем в других направлениях. Их поверхности уровня в простейшем случае сильно вытягиваются (рис. 26.2), а в более сложных случаях изгибаются и представляют собой овраги.

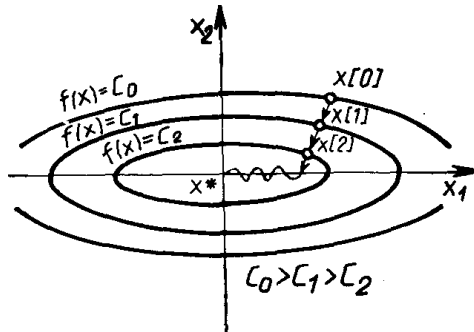


Рис. 26.2. Овражная функция

Функции, обладающие такими свойствами, называют *овражными*. Направление антиградиента этих функций (см. рис. 27.2) существенно отклоняется от направления в точку минимума, что приводит к замедлению скорости сходимости.

Скорость сходимости градиентных методов также существенно зависит от точности вычислений градиента. Потеря точности, а это обычно происходит в окрестности точек минимума или в овражной ситуации, может вообще нарушить сходимость процесса градиентного



спуска. Вследствие перечисленных причин градиентные методы зачастую используются в комбинации с другими, более эффективными методами на начальной стадии решения задачи. В этом случае точка  $x[0]$  находится далеко от точки минимума и шаги в направлении антиградиента позволяют достичь существенного убывания функции.

## 27. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Рассмотренные выше градиентные методы отыскивают точку минимума функции в общем случае лишь за бесконечное число итераций. Метод сопряженных градиентов формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции. Это существенно увеличивает скорость их сходимости и позволяет, например, минимизировать квадратичную функцию

$$f(x) = (x, Hx) + (b, x) + a$$

с симметрической положительно определенной матрицей  $H$  за конечное число шагов  $n$ , равное числу переменных функции. Любая гладкая функция в окрестности точки минимума хорошо аппроксимируется квадратичной, поэтому методы сопряженных градиентов успешно применяют для минимизации и неквадратичных функций. В таком случае они перестают быть конечными и становятся итеративными.

По определению, два  $n$ -мерных вектора  $x$  и  $y$  называют *сопряженными* по отношению к матрице  $H$  (или  $H$ -сопряженными), если скалярное произведение  $(x, Hy) = 0$ . Здесь  $H$  – симметрическая положительно определенная матрица размером  $n \times n$ .

Одной из наиболее существенных проблем в методах сопряженных градиентов является проблема эффективного построения направлений. Метод Флетчера–Ривса решает эту проблему путем преобразования на каждом шаге антиградиента  $-f'(x[k])$  в направление  $p[k]$ ,  $H$  – сопряженное с ранее найденными направлениями  $p[0]$ ,  $p[1]$ , ...,  $p[k-1]$ . Сначала рассмотрим этот метод применительно к задаче минимизации квадратичной функции.

Направления  $p[k]$  вычисляют по формулам

$$p[k] = -f'(x[k]) + b_{k-1}p[k-1], \quad k \geq 1;$$

$$p[0] = -f'(x[0]).$$

Величины  $b_{k-1}$  выбираются так, чтобы направления  $p[k], p[k-1]$  были  $H$ -сопряженными:

$$(p[k], Hp[k-1]) = 0.$$

В результате для квадратичной функции

$$\beta_{k-1} = \frac{(f'(x[k]), f'(x[k]))}{(f'(x[k-1]), f'(x[k-1]))}$$

итерационный процесс минимизации имеет вид

$$x[k+1] = x[k] + a_k p[k],$$

где  $p[k]$  – направление спуска на  $k$ -м шаге;

$a_k$  – величина шага. Последняя выбирается из условия минимума функции  $f(x)$  по  $a$  в направлении движения, т. е. в результате решения задачи одномерной минимизации:

$$f(x[k] + a_k p[k]) = \min_{a \geq 0} f(x[k] + a [k]).$$

Для квадратичной функции

$$a_k = -\frac{(f'(x[k]), p[k])}{(p[k], Hp[k])}.$$

Алгоритм метода сопряженных градиентов Флетчера–Ривса следующий.

1. В точке  $x[0]$  вычисляется  $p[0] = -f'(x[0])$ .
2. На  $k$ -м шаге по приведенным выше формулам определяются шаг  $a_k$  и точка  $x[k+1]$ .
3. Вычисляются величины  $f(x[k+1])$  и  $f'(x[k+1])$ .
4. Если  $f'(x[k+1]) = 0$ , то точка  $x[k+1]$  является точкой минимума функции  $f(x)$ . В противном случае определяется новое направление  $p[k+1]$  из соотношения

$$p[k+1] = -f'(x[k+1]) + \frac{(f'(x[k+1]), f'(x[k+1]))}{(f'(x[k]), f'(x[k]))} p[k]$$

и осуществляется переход к следующей итерации. Эта процедура найдет минимум квадратичной функции не более чем за  $n$  шагов. При минимизации неквадратичных функций метод Флетчера–Ривса из конечного становится итеративным. В таком случае после  $(n + 1)$ -й итерации процедуры 1–4 циклически повторяются с заменой  $x[0]$  на  $x[n + 1]$ , а вычисления заканчиваются при

$$\|f'(x[k])\| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданное число.

При этом применяют следующую модификацию метода:

$$x[k + 1] = x[k] + a_k p[k];$$

$$p[k] = -f'(x[k]) + b_{k-1} p[k-1], \quad k \geq 1;$$

$$p[0] = -f'(x[0]);$$

$$f(x[k] + a_k p[k]) = \min_{a \geq 0} f(x[k] + a p[k]);$$

$$b_{k-1} = \begin{cases} \frac{(f'(x[k]), f'(x[k]) - f'(x[k-1]))}{(f'(x[k]), f'(x[k]))}, & k \notin l. \\ 0, & k \in l \end{cases}$$

Здесь  $l$  – множество индексов:  $l = \{0, n, 2n, 3n, \dots\}$ , т. е. обновление метода происходит через каждые  $n$  шагов.

Геометрический смысл метода сопряженных градиентов состоит в следующем (рис. 27.1). Из заданной начальной точки  $x[0]$  осуществляется спуск в направлении  $p[0] = -f'(x[0])$ . В точке  $x[1]$  определяется вектор-градиент  $f'(x[1])$ . Поскольку  $x[1]$  является точкой минимума функции в направлении  $p[0]$ , то  $f'(x[1])$  ортогонален вектору  $p[0]$ . Затем отыскивается вектор  $p[1]$ ,  $H$ -сопряженный к  $p[0]$ . Далее отыскивается минимум функции вдоль направления  $p[1]$  и т. д.

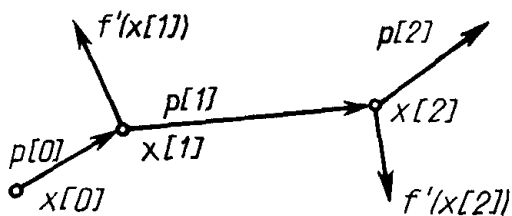


Рис. 27.1. Траектория спуска в методе сопряженных градиентов

Методы сопряженных направлений являются одними из наиболее эффективных для решения задач минимизации. Однако следует отметить, что они чувствительны к ошибкам, возникающим в процессе счета. При большом числе переменных погрешность может настолько возрасти, что процесс придется повторять даже для квадратичной функции, т. е. процесс для нее не всегда укладывается в  $n$  шагов.

## 28. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### Особенности методов второго порядка

Методы безусловной оптимизации второго порядка используют вторые частные производные минимизируемой функции  $f(x)$ . Суть этих методов состоит в следующем.

Необходимым условием экстремума функции многих переменных  $f(x)$  в точке  $x^*$  является равенство нулю ее градиента в этой точке:

$$f'(x^*) = 0.$$

Разложение  $f'(x)$  в окрестности точки  $x[k]$  в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка позволяет переписать предыдущее уравнение в виде

$$f'(x) = f'(x[k]) + f''(x[k])(x - x[k]) = 0.$$

Здесь  $f''(x[k]) = H(x[k])$  – матрица вторых производных (матрица Гессе) минимизируемой функции. Следовательно, итерационный процесс для построения последовательных приближений к решению задачи минимизации функции  $f(x)$  описывается выражением

$$x[k+1] = x[k] - H^{-1}(x[k]) f'(x[k]),$$

где  $H^{-1}(x[k])$  – обратная матрица для матрицы Гессе;

$H^{-1}(x[k]) f'(x[k]) = p[k]$  – направление спуска.

Полученный метод минимизации называют *методом Ньютона*. Очевидно, что в данном методе величина шага вдоль направления  $p[k]$  полагается равной единице. Последовательность точек  $\{x[k]\}$ , получаемая в результате применения итерационного процесса, при определенных предположениях сходится к некоторой стационарной точке  $x^*$  функции  $f(x)$ . Если матрица Гессе  $H(x^*)$  положительно определена, точка  $x^*$  будет точкой строгого локального минимума функции  $f(x)$ . Последовательность  $x[k]$  сходится к точке  $x^*$  только в том случае, когда матрица Гессе целевой функции положительно определена на каждой итерации.

Если функция  $f(x)$  является квадратичной, то, независимо от начального приближения  $x[0]$  и степени овражности, с помощью метода Ньютона ее минимум находится за один шаг. Это объясняется тем, что направление спуска

$$p[k] = H^{-1}(x[k]) f'(x[k])$$

в любых точках  $x[0]$  всегда совпадает с направлением в точку минимума  $x^*$ . Если же функция  $f(x)$  не квадратичная, но выпуклая, метод Ньютона гарантирует ее монотонное убывание от итерации к итерации. При минимизации овражных функций скорость сходимости метода Ньютона более высока по сравнению с градиентными методами. В таком случае вектор  $p[k]$  не указывает направление в точку минимума функции  $f(x)$ , однако имеет большую составляющую вдоль оси оврага и значительно ближе к направлению на минимум, чем антиградиент.

Существенным недостатком метода Ньютона является зависимость сходимости для невыпуклых функций от начального приближения  $x[0]$ . Если  $x[0]$  находится достаточно далеко от точки минимума, то метод может расходиться, т. е. при проведении итерации каждая следующая точка будет более удаленной от точки минимума, чем предыдущая. Сходимость метода, независимо от начального приближения, обеспечивается выбором не только направления спуска

$$p[k] = H^{-1}(x[k]) f'(x[k]),$$

но и величины шага  $a$  вдоль этого направления. Соответствующий алгоритм называют *методом Ньютона с регуляровкой шага*. Итерационный процесс в таком случае определяется выражением

$$x[k + 1] = x[k] - a_k H^{-1}(x[k]) f'(x[k]).$$

Величина шага  $a_k$  выбирается из условия минимума функции  $f(x)$  по  $a$  в направлении движения, т. е. в результате решения задачи одномерной минимизации

$$f(x[k]) - a_k H^{-1}(x[k]) f'(x[k]) = \min_{a \geq 0} (f(x[k]) - a H^{-1}(x[k]) f'(x[k])).$$

Вследствие накопления ошибок в процессе счета матрица Гессе на некоторой итерации может оказаться отрицательно определенной или ее нельзя будет обратить. В таких случаях в подпрограммах оптимизации полагается  $H^{-1}(x[k]) = E$ , где  $E$  – единичная матрица. Очевидно, что итерация при этом осуществляется по методу наискорейшего спуска.

## 29. МЕТОД НЬЮТОНА

Алгоритм метода Ньютона состоит в следующем.

1. В начальной точке  $x[0]$  вычисляется вектор

$$p[0] = -H^{-1}(x[0]) f'(x[0]).$$

2. На  $k$ -й итерации определяются шаг  $a_k$  и точка  $x[k + 1]$ .

3. Вычисляется величина  $f(x[k + 1])$ .

4. Проверяются условия выхода из подпрограммы, реализующей данный алгоритм. Эти условия аналогичны условиям выхода из подпрограммы при методе наискорейшего спуска. Если эти условия выполняются, то вычисления прекращаются. В противном случае вычисляется новое направление

$$p[k + 1] = -H^{-1}(x[k]) f'(x[k])$$

и осуществляется переход к следующей итерации.

Количество вычислений на итерации методом Ньютона, как правило, значительно больше, чем в градиентных методах. Это объясняется необходимостью вычисления и обращения матрицы вторых производных целевой функции. Однако для получения решения с достаточно высокой степенью точности с помощью метода Ньютона обычно требуется намного меньше итераций, чем при использовании градиентных методов. В силу этого метод Ньютона гораздо эффективнее. Он обладает сверхлинейной или квадратичной скоростью сходимости в зависимости от требований, которым удовлетворяет минимизируемая функция  $f(x)$ . Тем не менее в некоторых задачах трудоемкость итерации методом Ньютона может оказаться очень большой за счет необходимости вычисления матрицы вторых производных минимизируемой функции, что потребует затрат значительного количества машинного времени.

В ряде случаев целесообразно комбинированное использование градиентных методов и метода Ньютона. В начале процесса минимизации, когда точка  $x[0]$  находится далеко от точки экстремума  $x^*$ , можно применять какой-либо вариант градиентных методов. Далее при уменьшении скорости сходимости градиентного метода можно перейти к методу Ньютона.

## В ы в о д ы

Процесс моделирования технологических процессов в упаковочном производстве имеет большое преимущество и делает этот подход незаменимым для их дальнейшего совершенствования.

Моделирование и усовершенствование конструкции оборудования и процессов в упаковочном производстве с использованием компьютеров позволяет перейти к систематическому конструированию, а не к случайным разработкам, в значительной степени основанным на опыте.

Несмотря на то, что традиционная разработка технологических процессов в упаковочном производстве на основе экспериментов ориентирована на производство необходимого качественного целевого продукта, отсутствует ясное понимание того, что параметры процесса взаимосвязаны друг с другом и как они влияют на качество конечного продукта (упаковки).

Оптимизация и моделирование обеспечивает понимание того, как переменные процессы влияют на технологический процесс и качество конечного целевого продукта. При этом следует иметь в виду, что моделирование предлагает и обратную связь для переменных величин, которые не могут быть легко измеряемы. Это относится к измерению температуры в канале во время реального процесса экструзии. Особенно важно то, что моделирование и оптимизация дают инженеру возможность количественно оценить влияние изменения одной переменной величины на качество конечного целевого продукта.

Моделирование и оптимизация предоставляют также существенные преимущества при конструировании оборудования (например, шнеков экструдера и смесителей) в упаковочном производстве. Само же компьютерное моделирование дает возможность оценки новых конструкций на компьютере, экономя время и средства на разработку и тестирование прототипов. Особенно важны подобные виртуальные разработки, которые дают возможность инженеру при малом количестве попыток тщательно оптимизировать конструкцию до того, как она будет изготовлена.

В связи с возрастанием требований к снижению затрат, улучшению качества целевой продукции упаковочного производства и повышению производительности автоматизированное моделирование и оптимизация становятся важными средствами повышения качества целевой продукции и производительности, в результате чего рентабельность процесса значительно возрастает.

При этом важна экспериментальная проверка рассчитанных результатов. Только сочетание компьютерного моделирования и оптимизации с результатами экспериментальных работ может значительно улучшить и усовершенствовать процесс производства изделий в упаковочном производстве. Это надежный путь к улучшению и совершенствованию технологического процесса.



## Л и т е р а т у р а

1. Варфоломеев, В. И. Моделирование элементов экономических систем / В. И. Варфоломеев. – М., 2000.
2. Бусленко, Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. – М., 1999.
3. Черчмен, У. Введение в исследование операций / У. Черчмен, Р. Акоф, Л. Артоф. – М. : Наука, 1968.
4. Будылин, А. Элементарные задачи / А. Будылин. – М., 2002.
5. Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. – М., 1999.
6. Ашманов, С. А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С. А. Ашманов, А. В. Тимохов. – М., 1991.
7. Коваленко, А. Г. Лабораторный практикум по методам оптимизации / А. Г. Коваленко, И. А. Власова, А. Ф. Федечев. – Самара, 1998.
8. Закгейм, А. Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов / А. Ю. Закгейм. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1982. – 288 с. – (Серия Химическая кибернетика).
9. Кафаров, В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств : учебное пособие для вузов / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – М. : Высшая школа, 1991. – 400 с.
10. Аоки, М. Введение в методы оптимизации / М. Аоки. – М. : ГОУВПО «МГУС», 1989. – 415 с.
11. Аттетков, А. В. Методы оптимизации : учеб. для вузов / А. В. Аттетков ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 440 с.
12. Ашманов, С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. – М. : Наука. 1981. – 340 с.
13. Пирогова, И. Н. Линейное программирование : методическое руководство по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех специальностей и всех форм обучения / И. Н. Пирогова. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2004. – 34 с.
14. Бояринов, А. И. Методы оптимизации в химической технологии / А. И. Бояринов, В. В. Кафаров. – М. : Химия, 1975. – 378 с.
15. Кутателадзе, С. С. Анализ подобия в теплофизике / С. С. Кутателадзе. – Новосибирск : Наука, 1982. – 280 с.

16. Пасконов, В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – М. : Наука, 1984. – 288 с.
17. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. – М. : Радио и связь. 1988. – 220 с.
18. Курицкий, Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – К., 1997.
19. Дьяконов, В. П. MATLAB : учебный курс / В. П. Дьяконов. – СПб. : Питер. – 2001.
20. Гультияев, А. Визуальное моделирование в среде MATLAB : учебный курс / А. Гультияев. – СПб. : Питер, 2000. – 432 с.
21. Кафаров, В. В. Оптимизация теплообменных процессов и систем / В. В. Кафаров, В. П. Мешалкин, Л. В. Гурьева. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 122 с.
22. Методы оптимизации параметров теплообменных аппаратов АЭС / А. Н. Иоселиани [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1981. – 144 с.
23. Построение математических моделей химико-технологических объектов / Е. Г. Дудников [и др.]. – М. : Химия, 1970. – 312 с.
24. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М. : Мир, 1980. – 616 с.
25. Ши, Д. Численные методы в задачах теплообмена / Д. Ши. – М. : Мир, 1988. – 544 с.
26. Долголаптев, В. Работа в Excel 7.0 для Windows'95 на примерах / В. Долголаптев. – М. : БИНОМ, 1997.
27. Орвис, В. Excel для ученых, инженеров и студентов / В. Орвис. – Киев, 1999.
28. Потемкин, В. Г. Система MATLAB : справочное пособие / В. Г. Потемкин. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 1998.
29. Печенегов, Ю. Я. Моделирование и оптимизация тепло- и массообменных процессов и установок / Ю. Я. Печенегов. – Саратов, 1994. – 59 с.
30. Раувендаль, К. Экструзия полимеров : пер. с англ. / К. Раувендаль ; под ред. А. Я. Малкина. – СПб. : Профессия, 2008. – 768 с.
31. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 391 с.
32. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егерь. – М. : Наука, 1964. – 487 с.

33. Кирпичев, М. В. Моделирование тепловых устройств / М. В. Кирпичев, М. А. Михеев. – М. : Изд-во АН СССР, 1936. – 255 с.
34. Теплообмен / Н. В. Тябин [и др.]. – М. : Наука, 1975. – С. 195–198.
35. Торнер, Н. Технология переработки пластмасс / Н. Торнер. – М. : Моск. политехн. ин-т, 1965. – С. 138–143.
36. Хрусталеv, Б. М. Техническая термодинамика : учебник для строительных и энергетических специальностей вузов : в 2 ч. / Б. М. Хрусталеv, А. П. Несенчук, В. Н. Романюк. – Минск : Технопринт, 2004. – 486 с.
37. Седнин, В. А. Теория и практика создания автоматизированных систем управления теплоснабжением / В. А. Седнин. – Минск : БНТУ, 2005. – 191 с.
38. Воронова, Н. П. Математическое моделирование и управление теплотехнологиями промышленных производств / Н. П. Воронова. – Минск : БНТУ, 2009. – 260 с.
39. Рапопорт, Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами : учебное пособие / Э. Я. Рапопорт. – М. : Высшая школа, 2003. – 299 с.
40. Турбин, М. В. Исследование обобщенной математической модели движения жидкости Кельвина–Фойгта / М. В. Турбин // Вестн. ВГУ. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 1. – С. 163–179.
41. Турбин, М. В. О корректной постановке начально-краевых задач для обобщенной модели Кельвина–Фойгта / М. В. Турбин // Изв. вузов. Сер. мат. наук. – 2006. – № 3. – С. 50–58.
42. *Zvyagin, V.G.* On weak solutions of the equations of motion of a viscoelastic medium with variable boundary / V. G. Zvyagin, V. P. Orlov // Bound. Value Probl. – 2005. – No 3. – P. 215–245.
43. *Zvyagin, V.G.* Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // J. Fixed Point Theor. Appl. – 2008. – V. 3, No 1. – P. 23–49.
44. *Zvyagin, V.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics / V. Zvyagin, D. Vorotnikov. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 2008. – 248 p.
45. Тадмор, З. Теоретические основы переработки полимеров / З. Тадмор, К. Гогос. – М. : Химия, 1984. – 632 с.
46. Янков, В. И. Неизотермическое течение полимерных жидкостей в винтовых уплотнениях с продольной циркуляцией /

В. И. Янков, Н. М. Труфанова, А. Г. Щербинин // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2006. – № 6. – С. 3–5.

47. Янков, В. И. Изотермическое течение аномально-вязких жидкостей в винтовых уплотнениях с продольной циркуляцией / В. И. Янков, Н. М. Труфанова, А. Г. Щербинин // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2006. – № 6. – С. 3–5.

Учебное издание

**КАРПУНИН** Иван Иванович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УПАКОВОЧНОМУ  
ПРОИЗВОДСТВУ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности 1-36 20 02  
«Упаковочное производство»

Редактор *Т. Н. Микулик*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 27.05.2013. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 5,64. Тираж 100. Заказ 417.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.