Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
инженерно-экономических специальностей

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 2

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я7
М 54

С о с т а в и т е л и:
А.Д. Корзников, *Л.Д. Матвеева*,
А.Н. Рудый, *В.В. Павлов*

Р е ц е н з е н т ы:
М.Б. Смирнов, *П.Г. Ласый*

Издание содержит вопросы учебной программы по теории вероятностей, математической статистике и системам массового обслуживания, контрольные задания и методические указания по их выполнению.

Предназначено для студентов-заочников инженерно-экономических специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие может быть использовано при изучении теоретического материала и как методические указания при решении задач.

Решение контрольных задач следует выполнять в отдельной тетради, чернилами любого цвета (кроме красного), оставляя поля для замечаний рецензента. Решения задач необходимо располагать в порядке возрастания их номеров, записывая полностью их условия.

Если при проверке контрольной работы будут обнаружены ошибки, работа будет выслана студенту для их исправления. Работу над ошибками необходимо выполнить в этой же тетради и выслать на повторную проверку.

Тема 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ПРАВИЛА ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. *Пространство элементарных событий.*
2. *Классификация событий (операции над множествами).*
3. *Относительная частота и ее свойства.*
4. *Аксиомы теории вероятностей.*
5. *Методы задания вероятностей.*
6. *Свойства вероятности (теоремы сложения и умножения вероятностей).*
7. *Условная вероятность. Независимость событий.*
8. *Формула полной вероятности.*
9. *Формулы Бейеса.*

Пространство элементарных событий. Непосредственный подсчет вероятности.

Элементарным событием называется любой возможный результат опыта или наблюдения. Элементарное событие является случайным, если в результате опыта или эксперимента оно может произойти, а может и не произойти. Совокупность всех элементарных событий Ω в данном эксперименте (т.е. множество всех мысленно возможных исходов данного эксперимента) называется *пространством элементарных событий.*

При проведении некоторого эксперимента нас могут интересовать события более сложные, чем элементарные. Например, при бросании игральной кости нас может интересовать событие «выпало четное число очков». Событие произойдет, если в результате опыта появилось либо 2, либо 4, либо 6, т.е. интересующее нас событие состоит из множества элементарных событий $A = \{2, 4, 6\}$, которое является подмножеством пространства элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Таким образом, событием *A* мы будем называть любое подмножество пространства элементарных событий.

Событие, которое в данном эксперименте обязательно произойдет, а значит, в него входят все элементарные события, называется *достоверным событием.* То есть достоверное событие – это пространство элементарных событий Ω.

Невозможное событие (событие, которое в данном эксперименте не может произойти) совпадает с пустым множеством ($A = \varnothing$).

Два случайных события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в данном эксперименте.

Два события называются *равновозможными*, если при выполнении условий данного эксперимента одинаково возможны появления этих событий.

Вероятностью события A называется количественная оценка возможности появления события.

Рассмотрим вероятностный эксперимент, в котором пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ состоит из конечного числа n *равновозможных* элементарных событий $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Событие A – некоторое подмножество пространства элементарных событий из m элементарных событий: $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\}$. Эти элементарные события ω_{i_k}, $k = 1, ..., m$, называются *благоприятствующими* событию A, то есть, если в результате эксперимента происходит одно из элементарных событий $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}$, то наступает событие А. Если, например, эксперимент состоит в бросании игральной кости, а событие А - «выпало четное число очков», то элементарными событиями, благоприятствующими событию А, будут: выпало 2 очка, или 4, или 6, т.е. $A = \{2, 4, 6\}$, при этом $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Классической вероятностью события А, называется отношение числа $|A| = m$ элементарных событий, благоприятствующих событию А, к общему числу $|\Omega| = n$ элементарных событий, т. е. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$.

Пример 1.1. На склад поступает продукция из четырех пунктов. Наудачу отобраны два изделия. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того. что эти изделия принадлежат продукции одного и того же пункта.

Решение. 1) Обозначим через ω_{ij} элементарное событие, состоящее в том, что первое изделие из двух выбранных – с i-го пункта, а второе – *с* j*-го.* Тогда пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33},$ $\omega_{34}, \omega_{41}, \omega_{42}, \omega_{43}, \omega_{44}\}$.

2) Пусть событие *А* состоит в том, что два отобранных изделия принадлежат продукции одного и того же пункта. Тогда событию *А* благоприятствуют элементарные события $\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}$, т. е. $A = \{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}\}$. Если предположить, что все элементарные события равновозможны, то по формуле классической вероятности имеем $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Таким образом, вероятность того. что два отобранных случайным образом изделия будут произведены в одном и том же пункте, равна $\frac{1}{4}$.

Свойства вероятности

Поскольку под событием мы понимаем подмножество пространства элементарных событий, то действия над событиями определяются аналогично тому, как определяются действия над подмножествами.

Событием $\overline{A}$*, противоположным событию A*, называется событие, состоящее из тех элементарных событий эксперимента, которые не входят в событие *A*: $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие *C*, содержащее те элементарные события, которые принадлежат хотя бы одному из этих событий:
$C = A + B = A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$. Понятно, что $A + \overline{A} = \Omega$.

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется событие *C*, содержащее те элементарные события, которые входят одновременно и в событие *A*, и в событие *B*:

$$C = A \cdot B = A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}.$$

Два события *A* и *B* называются *несовместными*, если их одновременное появление является невозможным событием, т.е. если $A \cdot B = A \cap B = \varnothing$.

Разностью двух событий A и B называется событие, (которое принято обозначать $A \setminus B$), состоящее из тех элементарных событий $\omega \in \Omega$, которые входят в событие *A*, но не входят в событие *B*:

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A, \text{ но } \omega \notin B\}.$$

Вычисление вероятностей наступления событий частного вида (суммы, произведения двух событий и т.п.) значительно упрощается, если использовать свойства вероятностной меры.

Теорема 1. Если событие *B* содержится в событии *A* $(B \subseteq A)$, то

$$P(B) \le P(A), \; P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

Теорема 2. (сложение вероятностей):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Следствие. Если события *A* и *B несовместны, то*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Предположим, что на входе вероятностного эксперимента произошло некоторое событие *B*. Эта информация может повлиять на вероятности появления других событий, связанных с событием *B*. Например, в урне находится пять белых и пять черных шаров. Наудачу выбран шар (событие *B*). Если теперь нас интересует вероятность того, что из девяти оставшихся шаров выбран, к примеру, белый шар, то она естественным образом зависит от того, каким было событие *B*. Поэтому вводится понятие условной вероятности появления события *A* при условии, что событие *B* произошло.

Определение. Пусть *A* и *B* произвольные события, причем $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью наступления события *A* при условии, что событие *B* произошло, называется число $P(A|B)$, определяемое формулой $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Аналогично $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Из приведенных определений вытекает следующая

Теорема 3. (умножение вероятностей):

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

События *A* и *B* называются *независимыми*, если $P(A) = P(A|B)$ и $P(B) = P(B|A)$. Для независимых событий теорема умножения вероятностей принимает вид $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ (называемые *гипотезами*) образуют полную группу событий, т.е. они попарно несовместны $(H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j)$ и их объединение совпадает с пространством элементарных событий:

$$P(H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n) = P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = P(\Omega) = 1.$$

Пусть некоторое событие *A* может произойти только одновременно с одним из этих событий. Вероятности этих событий $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A|H_i)$, $i = \overline{1, n}$, предполагаются известными.

Тогда вероятность интересующего нас события A определяется по следующей формуле, называемой *формулой полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Если в результате эксперимента событие A произошло, то может возникнуть вопрос: «Какова вероятность того, что это событие осуществилось одновременно с событием $H_i, i = \overline{1, n}$». Эта вероятность может быть найдена по формулам Бейеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}, \ i = \overline{1, n}.$$

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1.2. Заводом послана автомашина за необходимым материалом на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0.9; на второй – 0,95; на третьей – 0,8; на четвертой – 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 события, состоящие в том, что нужный материал находится на первой, второй, третьей и четвертой базах.

Пусть A – событие, означающее, что только на одной базе не окажется нужного материала. Тогда имеем:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

События A_1, A_2, A_3, A_4 независимы. События $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}$, $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4$, $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4$, $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$ несовместны.

По теореме сложения несовместных событий получаем

$$P(A) = (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4 +$$
$$+ \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) +$$
$$+ P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4).$$

По теореме умножения независимых событий имеем:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(\overline{A_4})+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(A_4)+$$

$$+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)=$$

$$0,9\cdot 0,95\cdot 0,8\cdot(1-0,6)+0,9\cdot 0,95\cdot(1-0,8)\cdot 0,6+$$

$$+0,9\cdot(1-0,95)\cdot 0,8\cdot 0,6+(1-0,9)\cdot 0,95\cdot 0,8\cdot 0,6=0,4866.$$

Пример 1.3. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка $0,1\%$ бракованных, со второго – 0,2%, с третьего – 0,25%, с четвертого – 0,5%. Производительности их относятся как 4: 3: 2: 1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Решение. Пусть *A* – событие, состоящее а том, что взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Рассмотрим четыре гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4, заключающиеся в том, что деталь изготовлена на первом, втором, третьем и четвертом станках. По условию задачи требуется найти вероятность $P(H_2|A)$.

По формуле Бейеса имеем $P(H_2|A)=\dfrac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}$, где вероятность $P(A)$ вычисляется по *формуле полной вероятности* $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A|H_i)$.

Исходя из производительности станков находим вероятности $P(H_i)$, $H_i=\overline{1,4}$. Поскольку события H_1, H_2, H_3, H_4 образуют полную группу событий, то $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)+P(H_4)=1$.

Следовательно, $P(H_1)=\dfrac{2}{5}, P(H_2)=\dfrac{3}{10}, P(H_3)=\dfrac{1}{5}, P(H_4)=\dfrac{1}{10}$.

Вероятность выпуска стандартной детали (с учетом данных задачи) на первом станке равна – $P(A|H_1)=1-0,001=0,999$; на втором станке – $P(A|H_2)=1-0,002=0,998$; на третьем – $P(A|H_3)=$ $=1-0,025=0,975$; на четвертом станке – $P(A|H_4)=1-0,005=0,995$.

Подставляя полученные данные в формулу Бейеса, получаем

$$P(A|H_2) = \frac{0,3 \cdot 0,998}{0,4 \cdot 0,999 + 0,3 \cdot 0,998 + 0,2 \cdot 0,975 + 0,1 \cdot 0,995} = 0,3.$$

Задание 1

Варианты

1. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя первого станка равна 0,1; второго – 0,2; третьего – 0,15. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что из строя выйдут 2 станка.
2. В двух ящиках находятся детали двух типов. Из каждого ящика вынули по детали. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что среди двух вынутых деталей нет деталей второго типа.
3. По радиолинии передается сигнал в виде последовательности трех импульсов. Вероятность искажения каждого импульса равна 0,1. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий; 2) найти вероятность того, что будут искажены два импульса.
4. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность ее поражения каждым стрелком равна 0,8. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что только один стрелок поразит мишень.
5. В телевизионном ателье имеется три кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равна 0, 8; 0,85 и 0,9. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что хотя бы один кинескоп выдержит гарантийный срок.
6. Прибор состоит из трех узлов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого узла равна 0,85. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что откажут два узла.

7. Из ящика, содержащего 5 деталей, из которых одно бракованное, наудачу последовательно извлекают по одной детали до появления бракованной. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что придется производить две серии извлечения деталей.
8. Телефонный коммутатор располагает номерами, состоящими из трех цифр: 5, 6, 7. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что телефонный номер будет оканчиваться цифрой 6.
9. Со станции отправления одновременно выехали три автобуса, которые должны прибыть на станцию назначения в заданное время. Вероятность своевременного прибытия автобусов одинакова и равна 0,7. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что два автобуса опоздают.
10. Автомат изготавливает однотипные детали. Вероятность брака равна 0,02. На проверку берут 3 детали. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что все три детали будут не бракованными.
11. Вероятность попадания мяча в корзину при броске равна 0,9. Произведено 3 броска. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий;2) найти вероятность того, что произошло три попадания.
12. Вычислительное устройство состоит из трех элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что отказал: а) один из элементов; б) все три элемента; в) по крайней мере один элемент.
13. В лотерее 4 билета, два из которых – выигрышные. Поочередно 4 человека берут по одному билету. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что выигрышные и проигрышные билеты чередуются.
14. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на каждый из этих вопросов равна 0,8. Требуется:

1) записать пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что студент ответит: а) на три вопроса; б) хотя бы на два вопроса.

15. Из пункта А в пункт В выехали три велосипедиста. Вероятность их прибытия в пункт В в назначенное время одинакова и равна 0,5. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что а) два велосипедиста опоздают; б) хотя бы один велосипедист прибудет вовремя.

16. Из ящика, содержащего 6 деталей, из которых 2 – бракованные, наудачу последовательно извлекают по одной детали до появления бракованной. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что придется производить 3 серии извлечения деталей.

17. Вероятности определения качества проверяемых деталей на промежуточном контроле для каждого из трех контролеров соответственно равны 4/5, 3/4, 2/3. На одновременный контроль были взяты три детали. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что хотя бы один контролер ошибся.

18. Из ящика, содержащего 3 билета с номерами 1, 2, 3 вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что: а) хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным; б) у всех трех билетов порядковый номер совпадает с собственным.

19. Эксперимент состоит в подбрасывании 3 монет. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что: а) выпадут два «герба», б) выпадет хотя бы один «герб».

20. На пяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что число будет четным.

21. Для участия в олимпиаде прибыла команда в составе 5-ти студентов, 3 из них отличники. На первый тур по жребию из команды отбирают двух человек. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что по жребию: а) выбраны два отличника, б) не выбрано ни одного отличника, в) выбран хотя бы 1 отличник.
22. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого станка равна 0,1; второго – 0,2; третьего – 0,15. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что из строя выйдут 2 станка.
23. Произведено 4 выстрела по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом последующем выстреле вероятность уменьшается в 2 раза. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что произошло одно попадание.
24. Деталь напряжения состоит из четырех резисторов. Вероятность неисправности каждого из резисторов равна 0,13. Производится проверка резисторов. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что неисправными окажутся: а) ровно 3 резистора; б) не более трех резисторов.
25. В урне находятся черные и белые шары. Один за другим вынули три шара. Требуется: 1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что среди 3 вынутых шаров оказалось 2 черных.
26. Три письма раскладываются случайно по трем конвертам с адресами. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт.
27. В двух ящиках находятся детали трех типов. Из каждого ящика вынули по детали. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что среди трех вынутых деталей нет деталей первого типа.

28. Абонент набирает номер телефона, забыв расположение 3-х последних цифр 6, 8, 3. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что телефонный номер будет оканчиваться цифрой 8.
29. В ящике содержатся детали 4-х заводов. Наугад извлекаются две детали. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что две извлеченные детали изготовлены на одном заводе.
30. Вероятность попадания мяча в корзину при броске равна 0,9. Произведено 3 броска. Требуется:
1) составить пространство элементарных событий;
2) найти вероятность того, что произошло три попадания.

Задание 2

Варианты

1. 20% приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен.
2. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными: 0,.2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02; на втором – 0,03; на третьем – 0,01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки наугад деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной.
3. Среди поступивших на сборку деталей 30% - с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 – 0,03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной.
4. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего

автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества: б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

5. Комплектовщик получает для сборки 30% деталей с завода № 1, 20% – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, для деталей с завода № 2 – 0,8, для деталей с завода № 3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь – высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2.

6. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2%, на втором – 3%. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие – стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке.

7. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке.

8. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, – первого типа.

9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков.

10. По линии связи передано два сигнала типа A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60% сигналов типа A и 70% типа B. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал типа A.

11. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, соответственно равны 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии. б) Индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

12. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий соответственно равны 0,8 и 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов. б) Резистор проработал гарантийное число часов. К какой партии он вероятнее всего принадлежит?

13. При отклонении от штатного режима работы поточной линии срабатывают сигнализатор типа Т-1 с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа Т-2 с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типа Т-1 и Т-2, соответственно равны 0,7 и 0,3. а) Найти вероятность того, что при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает. б) Сигнализатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

14. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института. б) Студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?

15. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25%, второй – 30% и третий – 45% деталей, поступающих на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2% брака, со второго – 3%, с третьего – 1%. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступила бракованная деталь; б) поступившая на сборку бракованная деталь – со второго конвейера.

16. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад

взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

17. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок; б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа.

18. У сборщика 16 деталей, изготовленных на заводе № 1 и 10 деталей, изготовленных на заводе № 2. Вероятности того, что детали выдержат гарантийный срок, соответственно равны; для деталей с завода № 1 – 0,8; с завода № 2 – 0,9. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь проработает гарантийный срок; б) взятая деталь проработала гарантийный срок. На каком из заводов она вероятнее всего изготовлена?

19. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире».

20. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

21. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени Т для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени Т. б) Узел проработал гарантийное время Т. К какому типу он вероятнее всего относится?

22. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала В – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет.

б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

23. В вычислительной лаборатории 40% микрокалькуляторов и 60% дисплеев. Во время расчета 90% микрокалькуляторов и 80% дисплеев работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета. б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит?

24. В состав блока входят 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживают 80 % радиоламп первого типа и 90 % второго типа. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок; б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа.

25. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с I – 30 %, со II – 40 %, с III – 30 % всех деталей. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для II – 0,03, для III – 0,04. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная. б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила: со второго или третьего?

26. Имеется 6 коробок диодов типа А и 8 коробок диодов типа В. Вероятность безотказной работы диода типа А равна 0,8, типа В – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. б) К какому типу он вероятнее всего относится?

27. Для участия в спортивных студенческих соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта, соответственно, равны: для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что: а) наугад взятый студент выполнит норму мастера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе.

28. На участке, изготовляющем болты, первый станок производит 25 %, второй – 35 %, третий – 40 % всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

29. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый обрабатывает 40 %, второй – 30 %, третий – 20 % и четвертый – 10 % всех деталей, поступающих на сборку. Первый автомат дает 0,1 % брака,

второй – 0,2 %, третий – 0,25 %, четвертый – 0,5 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена первым автоматом.

30. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа А, 3 мишени типа В и 3 мишени типа С. Вероятность попадания в мишень типа А равна 0.4, в мишень типа В – 0,1, в мишень типа С – 0,15. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был сделан; б) при одном выстреле (если неизвестно, по мишени какого типа он сделан) поражена мишень типа А.

Тема 2. НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ. ТЕОРЕМЫ МУАВРА–ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Формула Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет ровно m раз, определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \ q = 1 - p . \qquad (2.1)$$

Формула Пуассона. Если n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1$; $npq \le 9$), то вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (2.2)$$

где $\lambda = np$.

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если n велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (2.3)$$

где $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(p \ne 0, \ p \ne 1)$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы $(\varphi(-x)=\varphi(x))$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна $p(0 < p < 1)$, событие A наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приближенно равна

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{2.4}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа; $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения $\Phi(x)$ определяются из таблицы; $\Phi(x)=1/2$ при $x > 5$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 2.1. В мастерской имеется 10 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что в данный момент один мотор работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее 8 моторов работают с полной нагрузкой.

Решение. Рассмотрим события: A – не менее 8 моторов из 10 в данный момент работают с полной нагрузкой; B, C, D – события, состоящие в том, что работают соответственно 8, 9 и 10 моторов. Тогда $A = B + C + D$. Так как события B, C и D несовместны, $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$. Найдем вероятности событий B, C и D по формуле Бернулли (2.1):

$$P(B)=P_{10}(8)=C_{10}^8 p^8 q^2 = C_{10}^2\cdot 0,8^8\cdot 0,2^2 = 45\cdot 0,8^8\cdot 0,2^2;$$

$$P(C)=P_{10}(9)=C_{10}^9 p^9 q = C_{10}^9\cdot 0,8^9\cdot 0,2 = 10\cdot 0,8^9\cdot 0,2;$$

$$P(D)=P_{10}(10)=C_{10}^{10} p^{10} q^0 = p^{10} = 0,8^{10}.$$

Тогда

$$P(A)=45\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2+10\cdot 0,8^9\cdot 0,2+0,8^{10} = 0,8^8\cdot 4,04\approx 0,678.$$

Пример 2.2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Решение. По условию $n = 100$, $m = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Так как $n = 100$ велико, воспользуемся формулой (2.3) локальной теоремы Лапласа. Для этого найдем $x = \dfrac{75 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -1{,}25$. По таблице находим $\varphi(-1{,}25) = 0{,}1826$. Искомая вероятность $P_{100}(75) \approx \dfrac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565$.

Пример 2.3. Предприятие отправило на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002.Найти вероятность того, что на базу прибудет ровно 3; не более 3 негодных изделий.

Решение. Воспользуемся формулой Пуассона (2.2). В данном случае $m = 3$, $p = 0{,}0002$, $n = 5000$, $\lambda = np = 1$; $P_{5000}(3) \approx \dfrac{1}{3!}e^{-1} = 0{,}0613$.

Вероятность того, что на базу прибудет не более 3 негодных изделий, равна

$$P_{5000}(0 \le m \le 3) \approx P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) \approx$$
$$= \frac{1}{0!}e^{-1} + \frac{1}{1!}e^{-1} + \frac{1}{2!}e^{-1} + \frac{1}{3!}e^{-1} =$$
$$= \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)e^{-1} = \frac{8}{3}e^{-1} \approx 0{,}9180 .$$

Пример 2.4. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга, в одинаковом режиме, при включенном приводе, в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (формула (2.4)): $P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5;$$
$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{86 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$$

Искомая вероятность

$$P_{100}(70;86) \approx \Phi(1,5) - \Phi(-2,5) = \Phi(1,5) + \Phi(2,5) = \\ = 0,4332 + 0,4938 = 0,927.$$

Задание 3

Варианты

1. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 85% случаев. Какова вероятность того, что из 6 больных поправятся: а) не менее 5; б) хотя бы один?
2. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,98% случаев. Какова вероятность, что из 1000 вакцинированных детей заболеет менее 3 детей.
3. Посажено 500 семян кукурузы с вероятностью 0,8 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения относительной частоты взошедших семян от вероятности $p = 0.8$ (т. е. определить значение ε), если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью 0,995.
4. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для аудиторской проверки случайно выбраны 5 сбербанков. Какова вероятность того, что хотя бы один из них окажется в черте города?
5. Производство дает 2% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1200 изделий, число бракованных будет заключено в пределах от 2 до 18?
6. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90% случаев. Какова вероятность того, что из 6 больных поправится: а) 5 больных; б) по крайней мере 1 больной?
7. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равно 0,3. Предполагая, что неполадки в станках независимы, найти вероятность того, что в течение часа внимание рабочего потребуют не более двух станков.
8. Вероятность положительного исхода отдельного испытания равна 0,8. Оцените вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаний отклонение частоты положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по модулю будет меньше 0,05.

9. Вероятность того, что пассажир опоздает к поезду равна 0.01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 500 пассажиров и вероятность этого числа.
10. Вероятность появления события А в опыте равна 0,2. Опыт повторили независимым образом 400 раз. Какова вероятность того, что событие А произойдет не менее 70, но не более 90 раз.
11. Обследуется 500 изделий продукции, изготовленной на предприятии, где брак составляет 2%. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно11 бракованных.
12. Вероятность малому предприятию стать банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из 6 малых предприятий за время t сохранятся хотя бы 2.
13. Вероятность появления события в каждом из 800 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,823 модуль отклонения частоты появления события от его вероятности 0,5 не превышала ε.
14. Вероятность поражения в каждой шахматной партии для игрока равна 0.5. Найти вероятность того, что он выиграл в шести партиях: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) на менее двух раз.
15. В типографии имеется 5 печатных машин. Для каждой машины вероятность того, что она работает, равна 0,8. Определить вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.
16. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найти вероятность того, что из девяти посеянных семян взойдут: а) семь; б)не более семи; в) более семи.
17. Среди поступающих в ремонт часов 40% нуждаются в общей чистке механизма. Какова вероятность того, что из 4 взятых наугад часов в чистке механизма нуждаются : а) все часы; б) только 1 часы?
18. Вероятность того, что покупателю потребуется мужской костюм 52 размера, равна 0,4. Найти вероятность того, что из пяти покупателей по крайней мере двум необходим костюм 52-го размера.
19. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?
20. В семье четверо детей. Принимая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что мальчиков семье: а) три; б) не менее трех; в) два.

21. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) по крайней мере три раза; б) менее трех раз.

22. При штамповке изделий из пластмассы на каждые 6 изделий приходится одно дефектное. Определить вероятность того, что из 80 изготовленных изделий число стандартных изделий будет находиться в пределах от 60 до 75.

23. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) пять изделий б) не менее пяти изделий; в) не более пяти изделий.

24. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 2% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей: а) три нестандартных; б) будет наивероятнейшее число нестандартных деталей (из пяти); в) ни одной нестандартной детали (из пяти).

25. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

26. Найти вероятность того, что число мальчиков среди новорожденных: 1) больше 480, но меньше 540; 2) равно 470. (Вероятность рождения мальчика 0,51).

27. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов. Найти вероятность того, что имело место: а) четыре поражения цели; б) шесть поражений; в) не более шести поражений.

28. В семье 8 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) не более двух девочек; б) хотя бы одна девочка. Вероятность рождения мальчика 0,51.

29. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,8. Найти вероятность поражения цели: а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом; в) не менее чем тремя выстрелами.

30. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонит 5 абонентов; позвонит хотя бы один абонент?

Тема 3. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (СВ) И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Функция распределения и ее свойства.
2. Дискретные СВ.
3. Непрерывные СВ. Плотность вероятности.
4. Числовые характеристики одномерной СВ.
5. Основные вероятностные модели распределения СВ.

Определение. *Случайной величиной X* называется величина, которая в результате эксперимента может принимать некоторые значения, причем неизвестные до проведения эксперимента.

Случайная величина (СВ) X называется *дискретной*, если множество значений, которое она может принимать является конечным или может быть пронумеровано натуральными числами (т. е. является счетным множеством).

Законом распределения дискретной СВ X называется совокупность пар чисел $(x_i,\ p_i)$, где x_i – возможные значения СВ X, а p_i – вероятности, с которыми она принимает эти значения, причем $\sum\limits_i p_i = 1$.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной СВ является таблица, которую называют рядом распределения.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$ действительного переменного x, определяющая вероятность того, что СВ X примет в результате эксперимента значение, меньшее этого числа x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Основные свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. для любых x_1, x_2 таких, что $x_1 < x_2$ имеет место $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

5. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x_0 $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0)$.

Функция распределения $F(x)$ для дискретной СВ Х вычисляется по формуле $F(x)=\sum\limits_{i:x_i<x} p_i$, т. е. она разрывна и является ступенчатой функцией.

Непрерывной СВ Х называют такую СВ, множество возможных значений которой – некоторый числовой интервал (или объединение интервалов).

Распределение непрерывной СВ Х может так же определяться функцией $f(x)$ (плотность вероятности), которая определяется как $f(x)=F'(x)$.

Так как $f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$, то вероятностный смысл плотности вероятности состоит в том, что ее значение равно пределу отношения вероятности попадания СВ Х в интервал $x, x+\Delta x$ к длине этого интервала Δx при стремлении последнего к нулю. Функция распределения и плотность вероятности связаны между собой следующими соотношениями:

$$f(x)=F'(x),\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Основные свойства плотности вероятности $f(x)$

1. $f(x)\ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, т.е. площадь под кривой $y=f(x)$ равна 1.

3. $P(a\le X<b)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Математическим ожиданием M(X), (m_x) *СВ X* называется число описывающее центр распределения СВ X и вычисляемое по формуле

$$M(X)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i p_i \ -\textit{для дискретной СВ } X;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - \textit{для непрерывной СВ } X.\end{cases}$$

Свойства математического ожидания

1. $M(C)=C$, где С – константа.
2. $M(CX)=C\cdot M(X)$.
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.
4. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, где СВ X и СВ Y взаимно независимые.

Дисперсией D(X) СВ X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2.$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_i [x_i-M(X)]^2 p_i \ -\textit{для дискретной СВ } X;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x-M(x)]^2 f(x)dx - \textit{для непрерывной СВ } X.\end{cases}$$

или

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i^2 p_i - [M(X)]^2 \ -\textit{для дискретной СВ } X;\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 - \textit{для непрерывной СВ } X.\end{cases}$$

Средним квадратическим отклонением СВ X называется арифметический корень из дисперсии $\sigma_X=\sqrt{D(X)}$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеивание СВ вокруг ее среднего значения.

Свойства дисперсии

1. $D(C)=0$, где С – константа.

2. $M(CX)=C^2\cdot D(X)$.

3. $M(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$, где СВ X и СВ Y взаимно независимые.

Пример 3.1. Непрерывная СВ X распределена по закону

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]; \\ a\cos 2x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти a, $F(x)$, $M(X)$.

Решение. 1). Используя свойство плотности вероятности, получим равенство

$$a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=1\Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=1\Rightarrow\frac{a}{2}=1\Rightarrow a=2.$$

Итак,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]; \\ 2\cos 2x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

2) $F(x)$ будем находить, пользуясь соотношением

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

а) $x\in -\infty;0 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dx=0$

б) $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_0^x 2\cos 2x dx=\sin 2x$;

в)

$$x\in\left(\frac{\pi}{4};+\infty\right)\Rightarrow F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x}0\cdot dx=$$

$$=\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$$

Итак, $F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \sin 2x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]\\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

3)

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}2x\cos 2xdx=\left|\begin{matrix}u=x,\ du=dx;\\ dv=2\cos 2xdx,\ v=\sin 2x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi-2}{4}.$$

Пример 3.2. Имеется 6 ключей, из которых только 1 подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. Опробования открывания замка заканчиваются на k-й попытке, если первые k-1 попытки не привели к успеху, а k-я попытка закончилась успешно.

Случайная величина X – число попыток при открывании замка – может принимать следующие значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$,

$x_5 = 5$, $x_6 = 6$. Вероятности этих значений можно определить по формуле $p_k = P(X = k) = \frac{6-k+1}{6} \cdot \frac{1}{6-k+1} = \frac{1}{6}$.

Таким образом, возможные значения случайной величины равновероятны. Запишем ряд распределения данной дискретной СВ:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

На основании этого распределения получим

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2};$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6};$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}}.$$

Задание 4

В четных вариантах дана функция распределения $F(x)$ СВ X.

Требуется найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание M(X), дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a, b]$. Во всех вариантах построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Варианты

1. В группе из десяти изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое взятое проверяют. СВ X – число проверенных изделий.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X \le 4)$.

2.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{33}(2x^2+5x), & \text{если} \quad 0\le x\le 3, \quad a=1, b=2..\\ 1, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1<X<2)$.

4.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{24}(x^2+2x), & \textit{если} \quad 0\le x\le 4, \quad a=0, \quad b=1,\\ 1, & \textit{если} \quad x>4 .\end{cases}$$

5. Из ящика, содержащего 3 бракованных и 5 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ X – число вынутых стандартных деталей. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1\le X<2)$.

6.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{20}(x^2+x), & \text{если} \quad 0\le x\le 4, \quad a=0, b=3,\\ 1, & \text{если} \quad x>4 .\end{cases}$$

7. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из I, II, III орудия батареи равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по цели один раз. СВ X – число попаданий в цель.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1<X\le 2)$.

8. $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ 1-\cos x, & \text{если} \quad 0\le x\le \pi/2, \quad a=0, \quad b=\pi/3.\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/2 .\end{cases}$$

9. Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятности отказа каждого из них соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. От-

казы элементов независимы. СВ X – число отказавших элементов. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X \le 3)$.

10.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & \text{если} \quad -1 \le x \le 2, \quad a = 1, \quad b = 2, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2\ . \end{cases}$$

11. Партия, насчитывающая 50 изделий, содержит 6 бракованных. Из всей партии случайным образом выбрано 5 изделий. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X = 3)$.

12.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad x < -1, \\ \frac{1}{9}(x^3+1), & \textit{если} \quad -1 \le x \le 2, \quad a = 1, \quad b = 2, \\ 1, & \textit{если} \quad x > 2\ . \end{cases}$$

13. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают два шара. СВ X – число черных шаров среди этих двух.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(0 \le X \le 2)$.

14. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 3\pi/2, \\ \cos x, & \text{если} \quad 3\pi/2 \le x \le 2\pi, \quad a = 3\pi/2, \ b = 7\pi/4, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2\pi\ . \end{cases}$

15. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетит студент.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 \le X < 3)$.

16.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -1, \\ \frac{1}{5}(x+1), & \text{если} \quad -1 \le x \le 4, a = 0, b = 3, \\ 1, & \text{если} \quad x > 4. \end{cases}$$

17. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. СВ X – число бракованных изделий из 6 наудачу взятых изделий..

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X < 5)$.

18.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ (x^3 + 3x)/14, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2, \quad a = 0, b = 1. \\ 1, & \text{если} \quad x > 2 \; . \end{cases}$$

19. Монету подбрасывают 6 раз.. СВ X – число появлений герба. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X < 4)$.

20.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ (x^2 + x)/6, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2, \quad a = 0, \quad b = 1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

21. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ X – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X \le 3)$.

22. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 1, \\ \dfrac{1}{4}(x^3 - 2x), & \text{если} \quad 1 \le x \le 2, \quad a = 1{,}2, \quad b = 1{,}5. \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

23. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. СВ X – число отказавших элементов в одном опыте.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 \le X < 3)$.

24.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \dfrac{1}{6}x, & \text{если} \quad 0 \le x \le 6, \quad a = 2, \quad b = 5, \\ 1, & \text{если} \quad x > 6 \; . \end{cases}$$

25. На участке имеется 5 одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. СВ X – число работающих станков.

Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(0 < X \le 4)$.

26.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{если} \quad 2 \le x \le 3, \quad a = 2{,}5, \quad b = 2{,}8. \\ 1, & \text{если} \quad x > 3 \ . \end{cases}$$

27. В партии деталей – 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. СВ X – число нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(2 < X \le 4)$.

28.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < \pi/2, \\ -\cos x, & \text{если} \quad \pi/2 \le x \le \pi, \quad a = \pi/2, \quad b = 5\pi/6, \\ 1, & \text{если} \quad x > \pi \ . \end{cases}$$

29. Охотник стреляет в цель до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. СВ X – число выстрелов, производимых охотником. Найти $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X \le 3)$.

30. Дана функция распределения $F(x)$ СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & \text{если} \quad 0 \le x \le \pi, \quad a = \pi/3, \quad b = \pi/2. \\ 1, & \text{если} \quad x > \pi \ . \end{cases}$$

Тема 4. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Дискретные двумерные случайные величины (СВ).

2. Функция распределения двумерной СВ и ее свойства.

3. Непрерывные многомерные СВ. Плотность распределения двумерной СВ.

4. Распределение составляющих двумерной СВ.

5. Условные законы распределения составляющих, зависимые и независимые СВ.

6. Двумерное нормальное распределение. Модельное уравнение регрессии.

Часто результат опыта описывается не одной СВ X, а несколькими СВ: $X_1, X_2, ..., X_n$. В этом случае принято говорить, что указанные СВ образуют систему $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Систему двух СВ (X,Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки (X,Y) в область D, принято обозначать в виде $(X, Y) \subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных СВ может быть задан с помощью таблицы 1.

Таблица 1

X \ Y	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	..	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

Где $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. При этом $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Определение. *Функцией распределения или «совместной» функцией распределения* $F(x, y)$ *системы двух СВ(X,Y)* называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x, Y < y$, то есть $F(x, y) = P(X < x \cap Y < y)$.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x,y)$ – неубывающая функция обоих аргументов, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$; если $y_2 > y_1$, то $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$.

4. $F(x,+\infty) = P(X < x \cap Y < +\infty) = P(X < x) = F_1(x)$.

$F(+\infty, y) = P(X < +\infty \cap Y < y) = P(Y < y) = F_2(y)$.

Здесь $F_1(x)$ – функция распределения СВ X; $F_2(y)$ – функция распределения СВ Y.

5. $P(a_1 \le X < a_2 \cap b_1 \le Y < b_2) = F(a_2,b_2) - F(a_1,b_2) -$
$-F(a_2,b_1) + F(a_1,b_1)$

Для системы дискретных СВ функция распределения $F(x,y)$ находится по формуле $F(x,y) = \sum\limits_{i:x_i<x} \sum\limits_{j:y_j<y} p_{ij}$.

Закон распределения системы непрерывных СВ(X,Y) может быть задан с помощью функции плотности распределения $f(x,y)$.

Система двух СВ(X,Y) является непрерывной, если ее функция распределения $F(x,y)$ имеет смешанную вторую производную $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ (за исключением, быть может, конечного или счетного множества точек).

Определение. *Плотностью распределения* $f(x,y)$ *системы двух непрерывных СВ(X,Y)* называется предел отношения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник $R_{\Delta x \Delta y}$ со сторонами $\Delta x \Delta y$, примыкающий к точке (x,y) к площади этого прямоугольника, при условии, что Δx и Δy стремятся к нулю:

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\ (X,Y)\subset R_{\Delta x\Delta y}}{\Delta x\cdot\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\ \ x\le X\le x+\Delta x\cap y\le Y\le y+\Delta y}{\Delta x\cdot\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\cdot\Delta y}=$$

$$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Функция плотности распределения обладает следующими свойствами:

1. $f(x,y)\ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.
3. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$.
4. $P\ \ (X,Y)\subset D\ =\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$.

Зная закон распределения системы СВ(X,Y), можно найти законы распределения составляющих величин X и Y.

Рассмотрим систему двух дискретных СВ(X,Y), закон распределения которой задан в виде матрицы распределения (таблица 1). Тогда законы распределения составляющих X и Y имеют вид:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_{x_1}	p_{x_2}	$\cdots$	p_{x_n}

Y	y_1	y_2	...	y_m
p	p_{y_1}	p_{y_2}	$\cdots$	p_{y_m}

Где $p_{x_i}=P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}$, $i=\overline{1,n}$;

$$p_{y_j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \ j = \overline{1,m}.$$

Для системы двух непрерывных СВ справедливы формулы:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dudy; \ F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,v)dxdv,$$

где $F_1(x)$ – функция распределения СВ X; $F_2(y)$ – функция распределения СВ Y.

Рассмотрим обратную задачу.

Определение. Две случайные величины называются *независимыми*, если для любых $(x,y) \in \Omega$ справедливо равенство $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

Для системы двух дискретных СВ X и Y необходимое и достаточное условие независимости X и Y имеет вид $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}$, $i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$.

В случае непрерывных СВ, входящих в систему, данное условие записывают в виде $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Если случайные величины, образующие систему, зависимы, то недостаточно знать законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Требуется еще знать условный закон распределения одной из них.

Определение. *Условным законом распределения одной из составляющих СВ(X,Y)* называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

В общем случае функция распределения $F(x,y)$ системы двух зависимых СВ может быть записана в виде

$$F(x,y) = P\{X < x \cap Y < y\} = P(X < x) \cdot P\{Y < y | X < x\} =$$

$$= F_1(x) \cdot P(Y < y | X < x).$$

Условная вероятность $P\{Y < y | X < x\}$ – вероятность события $(Y < y)$ при условии, что величина X приняла значение. меньшее, чем x, называется *условной функцией распределения СВ Y при условии* $(X < x)$: $F_2(y \mid X < x) = P(Y < y \mid X < x)$.

Следовательно, имеем: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y \mid X < x)$,

$F(x, y) = F_2(y) \cdot F_1(x \mid Y < y)$.

Для плотности распределения системы двух зависимых непрерывных СВ(X,Y) справедливы формулы:

$$\begin{matrix} f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y \mid x) \\ f(x, y) = f_2(y) \cdot f_1(x \mid y) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_1(x \mid y) = \dfrac{f(x, y)}{f_2(y)} \\ f_2(y \mid x) = \dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}. \end{matrix}$$

Математические ожидания и дисперсия составляющих дискретных СВ X и СВ Y определяются по формулам:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot p_{ij} ;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_{y_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_{ij} .$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))^2 \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - M^2(X);$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_j - M(Y))^2 \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y) .$$

Для непрерывных СВ X и Y имеем:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dy dx;$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy ;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy-M^2(X);$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-M(Y))^2 f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)dxdy-M^2(Y);$$

Связь между составляющими X и Y системы СВ(X, Y) описывается *ковариацией*.

$$K_{xy}=\mathrm{cov}(X,Y)=M(X-M(X))\cdot M(Y-M(Y))=$$
$$=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y).$$

Расчетные формулы для ковариации K_{xy} имеют вид

$$K_{xy}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}-M(X)\cdot M(Y)\ -\textit{для дискретных СВ}(X,Y);\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy-M(X)\cdot M(Y)-\textit{для непрерывных СВ}(X,Y).\end{cases}$$

В случае независимых СВ X и Y ковариация равна нулю ($K_{xy}=0$).

Коэффициент корреляции r_{xy} характеризует степень вероятностной зависимости составляющих X и Y и вычисляется по формуле

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

Пример 4.1. Два студента наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров (шары в урну не возвращаются). СВ X – число белых шаров у первого студента, СВ Y – у второго. Первым выбирает шар первый студент. Необходимо:

1. Написать закон распределения двумерной СВ(X,Y).

2. Написать безусловные законы распределения составляющих X и Y.

3. Определить, зависимы или независимы СВ X и Y.

4. Написать условный закон распределения составляющей X при условии, что $Y=1$.

5. Найти коэффициент корреляции.

Решение. 1. Составим закон распределения СВ(X,Y).

$$P(X=0)=\frac{6}{10}.\ P(Y=0\,|\,X=0)=\frac{5}{9},\ P(Y=1\,|\,X=0)=\frac{4}{9}.$$

Т.е. $P(X=0\cap Y=0)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$. $P(X=0\cap Y=1)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$.

$$P(X=1)=\frac{4}{10}.\ P(Y=0\,|\,X=1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ P(Y=1\,|\,X=1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$P(X=1\cap Y=0)=\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}.\ P(X=1\cap Y=1)=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}.$$

Матрица распределения имеет вид

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

2. Законы распределения составляющих:

X	0	1
p_{x_i}	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	0	1
p_{y_j}	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

3. Поскольку $P(X=1\cap Y=1)=\frac{2}{15}$, а $P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$, то составляющие X и Y СВ(X,Y) являются зависимыми.

4. Найдем условный закон распределения составляющей X при условии, что $Y=1$.

$$P(X=0\ |Y=1)=\frac{P(X=0\cap Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{4\cdot 5}{2\cdot 15}=\frac{2}{3}.$$

$$P(X=1\ |Y=1)=\frac{P(X=1\cap Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{2\cdot 5}{2\cdot 15}=\frac{1}{3}.$$

5. Найдем коэффициент корреляции $r_{xy}=\frac{m_{xy}-m_x m_y}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.

$$m_x=0\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5};\ m_y=0\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5};$$

$$m_{xy}=0\cdot 0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot 1\cdot\frac{4}{15}+0\cdot 1\cdot\frac{4}{15}+1\cdot 1\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{15}.$$

$$D(X)=M(X^2)-m_x^2=0\cdot\frac{3}{5}+1^2\cdot\frac{2}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2}{5}-\frac{4}{25}=\frac{6}{25}.$$

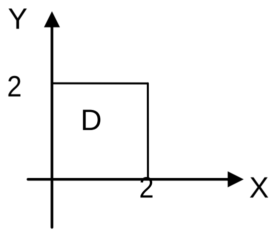
$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{6}}{5}.\ D(Y)=M(Y^2)-m_y^2=\frac{6}{25}.\ \sigma_y=\frac{\sqrt{6}}{5}.$$

$$r_{xy}=\frac{\frac{2}{15}-\frac{4}{25}}{\frac{6}{25}}=\frac{\frac{10-12}{75}}{\frac{6}{25}}=-\frac{2\cdot 25}{75\cdot 6}=-\frac{1}{9}.$$

Пример 4.2. Плотность вероятности двумерной СВ(X, Y) задана выражением $f(x,y)=\begin{cases} a(x+y) \ \textit{при} \ 0\le x\le 2, \ 0\le y\le 2; \\ \quad 0 \ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$

Найти: коэффициент a; $f_1(x)$, $f(y|x)$; вероятность попадания двумерной СВ(X, Y) в треугольник D, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$.

Решение. Построим область D.



1) Коэффициент a определяем из условия нормировки:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=1.$$

В нашем случае имеем $\iint_D a(x+y)dxdy=1$.

Перейдя к повторным интегралам, получаем:

$$a\int_0^2\left(\int_0^2(x+y)dy\right)dx=1, \ a\int_0^2(2x+2)dx=1, \ 8a=1, \ a=\frac{1}{8}.$$

Следовательно имеем :

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) \ \textit{при} \ 0\le x\le 2, \ 0\le y\le 2; \\ \quad 0 \ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

2) Найдем плотность вероятности $f_1(x)$ СВ X по формуле $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$. В нашем случае имеем:

$$f_1(x)=\begin{cases}\int\limits_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\,dy \ \textit{при}\ 0\le x\le 2;\\ 0,\ x<0\ \textit{или}\ x>2.\end{cases}$$

После вычисления $\int\limits_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\,dy$ получаем

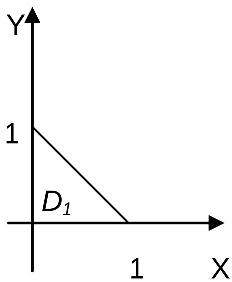
$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\ \textit{при}\ 0\le x\le 2;\\ 0,\ x<0\ \textit{или}\ x>2.\end{cases}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\begin{cases}\frac{x+y}{2(x+1)},\ 0\le y\le 2\ (0\le x\le 2);\\ 0,\ y<0\ \ \textit{или}\ \ y>2.\end{cases}$$

3) Вероятность попадания двумерной СВ(X, Y) в треугольник D найдем по формуле

$$P\ \ (X,Y)\subset D\ \ =\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy\,.$$

Сделаем чертеж.



Расставляя пределы интегрирования, получаем:

$$P((X,Y)\in D_1)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x}\frac{1}{8}(x+y)dy\right)dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{24}\,.$$

Задание 5

В четных вариантах необходимо:

1) Написать закон распределения двумерной СВ(X, Y).

2) Написать безусловные законы распределения составляющих *X и Y.*

3) Определить, зависимы или независимы СВ X и Y.

4) Написать условный закон распределения составляющей X при условии, что $Y=1$.

5) Найти коэффициент корреляции.

Варианты

1. Двумерная $CB(X, Y)$ равномерно распределена внутри круга радиуса a с центром в начале координат. Требуется найти $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$.

2. Подбрасывается один раз игральная кость. Составляющая X принимает значение, равное 1, если выпадает четное число очков, и $X=-1$ в противном случае. Составляющая Y принимает значение, равное 1, если число очков делится на 3. В противном случае $Y=-1$.

3. Двумерная $CB(X, Y)$ имеет плотность вероятности $f(x, y)=\dfrac{b}{\pi^2(4+x^2)(2+y^2)}$.

Найти: 1) величину b; 2) функцию распределения $F(x, y)$; вероятность попадания $CB(X, Y)$ в квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1$.

4. Студенты наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 3 белых и 1 черный шар. Составляющая X – число белых шаров у первого студента, составляющая Y – число белых шаров у второго студента. Выбор шаров производится без возвращения. Первым извлекает шар первый студент.

5. Двумерная $CB(X, Y)$ равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $2x+3y=1$. Найти $D(X)$, $D(Y)$.

6. Подбрасывается один раз игральная кость. Составляющая X равна 0, если число выпавших очков ≤ 3, в противном случае $X = 1$. Составляющая Y равна 0, если число выпавших очков > 2, в противном случае $Y = 1$.

7. Плотность распределения вероятности двумерной $CB(X, Y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} axy \text{ } \textit{в области } D; \\ 0 \text{ } \textit{вне этой области}, \end{cases}$$

где D – треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Найти: 1) коэффициент a; 2) r_{xy}.

8. Два студента наудачу извлекают по одному шару из урны, содержащей 3 белых и 1 черный шар. Составляющая X – число белых шаров у первого студента, а составляющая Y – число белых шаров у второго студента. Первым извлекает шар первый студент и после извлечения возвращает шар в урну.

9. Система $CB(X, Y)$ подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y) \text{ } \textit{в области } D; \\ 0 \text{ } \textit{вне этой области}, \end{cases}$$

где область D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 5$.

Требуется: 1) определить коэффициент a; 2) найти $f_1(x)$, $f_2(y)$;

3) вычислить вероятность попадания двумерной $CB(X, Y)$ в квадрат, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.

10. Подбрасывается один раз игральная кость. Составляющая $X = 0$, если число выпавших очков ≤ 4, в противном случае $X = 1$. Составляющая $Y = 0$, если число выпавших очков < 3, в противном случае $Y = 1$.

11. Функция распределения системы двух $CB(X, Y)$ задана выражением

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x<0,\ y<0; \\ \sin x\cdot\sin y \ \text{при} \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}; 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 1 \ \text{при} \ x>\dfrac{\pi}{2};\ y>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: 1) $f(x,y)$; 2) $P(0\le X\le\frac{\pi}{4};\ 0\le Y\le\frac{\pi}{4})$; 3) M(X), M(Y).

12. Три раза подбрасывается симметричная монета. СВ X – число выпадений герба; СВ Y – абсолютная величина разности числа выпадений решки и герба.

13. Двумерная СВ(X, Y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=a\ (a>0)$. Найти: 1) величину *a*; 2) $f(x,y)$; 3) M(X), M(Y).

14. Дано распределение системы двух величин (X, Y)

$x_i \backslash y_j$	1	3
-1	0,2	p_{12}
2	0,1	0,05
4	P_{31}	0,3

Известна вероятность $P(Y\ge X)=0,3$.

15. Двумерная СВ(X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{b}{x^2y^3},\ x\ge1,\ y\ge1; \\ 0,\ x<1 \ \text{или} \ y<1. \end{cases}$$

Найти: 1) величину b; 2) $F(x,y)$; 3) $f_1(x),\ f_2(y)$.

16. По радиолинии передается сигнал в виде последовательности трех импульсов. Вероятность искажения каждого импульса равна 0,1. СВ X – число искаженных импульсов, СВ Y – число правильных импульсов.

17. Двумерная СВ(X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y} \ \text{при} \ x\ge 0, y\ge 0 \\ 0 \ \text{при} \ x<0 \ \text{или} \ y<0. \end{cases}$$

Найти: 1) $F(x,y)$; 2) M(X), M(Y).

18. Из урны, содержащей 5 белых и 5 черных шаров, случайным образом извлекают 3 шара. СВ X – число белых шаров в выборке; СВ Y – отношение числа черных шаров в выборке к величине $X+1$.

19. Случайные величины (X, Y) независимы и имеют одинаковые плотности распределения: $f_1(x)=\dfrac{a}{x^2+1}$, $f_2(y)=\dfrac{a}{y^2+1}$. Найти:

1) величину a; 2) $f(x,y)$; 3) $F(x,y)$; 4) $P(0\le X\le 10;\ 0\le Y\le 1)$.

20. Производится четыре независимых опыта в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью 0,6. СВ X – число появления события A. СВ Y – число появления противоположного события $\overline{A}$.

21. Показать, что случайные величины X и Y с совместной плотностью

$$f(x,y)=\begin{cases} 12xy \ \text{при} \ 0\le x\le 1, \ 0\le y<1 \\ 0 \ \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

независимы. Найти: 1) M(X), D(X); 2) $P(\frac{1}{4}\le X\le \frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\le Y\le \frac{1}{2})$.

22. Производятся два выстрела по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. СВ X – число выстрелов до первого попадания ($X=2$, если попадания не было), СВ Y – число промахов.

23. Плотность распределения двумерной СВ (X, Y) имеет вид:

$$f(x,y)=\begin{cases} a(1-x^2-y^2), \ x^2+y^2\le 1 \\ 0, \ x^2+y^2>1. \end{cases}$$

Найти: 1) a; 2) M(X), M(Y), D(X), D(Y); 3) вероятность попадания СВ (X, Y) в квадрат, вписанный в круг $x^2+y^2\le 1$.

24. Бросаются две игральные кости. СВ X – индикатор четности суммы выпавших очков, СВ Y – индикатор четности произведения выпавших очков.

25. Система двух случайных величин (X, Y) равномерно распределена в треугольнике со сторонами $y = x$, $x = 0$, $x = 2$. Найти коэффициент корреляции системы.

26. Задано распределение системы СВ (X, Y)

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1
-1	p_{11}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	P_{22}	$\frac{1}{12}$

Известно, что ковариация $K(X, Y) = \frac{1}{4}$.

27. Система двух случайных величин (X, Y) равномерно распределена в квадрате D со стороной $\sqrt{2}$ и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти: 1) $f(x, y)$; 2) $f_1(x)$, $f_2(y)$.

28. Из множества $2, 3, \ldots, 10, 11$ наудачу извлекаются два числа. СВ X – количество нечетных чисел; СВ Y – количество простых чисел среди извлеченных.

29. Система двух случайных величин (X,Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$$D = \{|x| \le 15;\ 0 \le y \le 4\}.$$

Найти: 1) значение *c*; 2) M(X), D(X); 3) $P(|X| \le 3{,}5;\ 0 \le Y \le 2)$.

30. Баскетболист дважды бросает мяч в корзину. Вероятность попадания при одном броске 0,6. СВ X – число попаданий; СВ Y – число промахов до первого попадания.

Тема 5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Генеральная и выборочные совокупности.

2. Статистическое распределение случайной величины.

3. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение статистических рядов.

4. Классификация точечных оценок. Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия.

5. Доверительная вероятность, доверительный интервал. Интервальные оценки параметров распределения.

6. Статистический критерий значимости проверки нулевой гипотезы.

7. Статистическая проверка гипотез о параметрах распределения (математическом ожидании, равенстве математических ожиданий, дисперсии).

8. Статистическая проверка непараметрических гипотез. Критерии согласия χ^2 и Колмогорова.

9.Статистическая зависимость. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.

10. Эмпирический коэффициент корреляции и его свойства.

Между составляющими двумерной $CB\,(X,Y)$ может существовать зависимость, не носящая функциональный характер. В этом случае мы не можем говорить о том, какое значение принимает одна составляющая, если вторая приняла некоторое конкретное значение, но мы можем говорить о законе распределения (условном) одной составляющей, если известно, какое значение приняла вторая. Такая зависимость называется *статистической*.

В практических приложениях при исследовании статистической зависимости СВ X и Y рассматривают зависимость между значениями одной из них X и условным математическим ожиданием другой

$$M\left(Y \middle| X = x\right) = \overline{y}(x) \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) называется *модельным уравнением регрессии Y на X*. Если эта зависимость линейная, т.е.

$$\overline{y}(x) = \alpha + \beta x, \tag{5.2}$$

то регрессия называется *линейной*.

Поскольку модельное уравнение регрессии неизвестно, то для его оценки используют эмпирическое уравнение регрессии

$$\overline{y}(x) = a + bx, \tag{5.3}$$

где коэффициенты a и b находят по результатам выборки $(x_i,\ y_i),\ i = 1,...,n$ объема n методом наименьших квадратов, а именно a и b выбирают так, чтобы они минимизировали функцию

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a + bx_i) \right)^2.$$

Используя необходимые условия экстремума $\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$, получают, систему уравнений:

$$\begin{cases} b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n \cdot a = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

И далее:

$$\begin{cases} b \cdot \overline{X} + a = \overline{Y} \\ b \cdot \overline{X^2} + a \cdot \overline{X} = \overline{XY}, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{XY} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \overline{X^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2.$ Решая систему (5.4), получим

$$b = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2};\ a = \overline{Y} - b\overline{X}. \tag{5.5}$$

После подстановки в формулу (5.3) значений a и b из (5.5) она примет вид:

$$\overline{y_x} - \overline{Y} = \bar{r} \cdot \frac{\overline{\sigma_y}}{\overline{\sigma_x}}(x - \overline{X}), \text{ где}$$

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2}; \overline{\sigma_y} = \sqrt{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2};$$

$$\bar{r} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{\sigma_x} \cdot \overline{\sigma_y}}; \overline{Y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2. \tag{5.6}$$

Число $\bar{r}$ является выборочным коэффициентом корреляции, $\bar{r} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{\sigma_x} \cdot \overline{\sigma_y}}$. При этом число

$$\bar{d} = \bar{r}^{\,2} \tag{5.7}$$

называется *коэффициентом детерминации*.

Другая формула для $\bar{d}$:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2}. \tag{5.8}$$

Поэтому $\bar{d}$ показывает долю разброса результатов наблюдений $(x_i,\ y_i)$ относительно прямой $y = \overline{Y}$, которая объясняется выборочной регрессией (5.3). При этом числа $e_i = y_i - (a + bx_i)$ в формуле (5.8) называются *остатками*, а число

$$Q_e = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \tag{5.9}$$

– *остаточной суммой квадратов*.

Числа a и b, полученные по методу наименьших квадратов являются несмещенными оценками параметров α и β из (5.2), то есть $M(a) = \alpha;\ M(b) = \beta$.

Число

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \frac{1}{n-2} Q_e \qquad (5.10)$$

называется *остаточной дисперсией.*

В качестве примера рассмотрим задачу из задания 5, исходные данные возьмем для варианта 31*(см. ниже).

Пример 5.1.

Решение. 1) Зависимость между X и Y будем искать в виде $\overline{y}(x) = a + bx$. Параметры a и b модели найдем из системы (5.4):

$$\begin{cases} b \cdot \overline{X} + a = \overline{Y}; \\ b \cdot \overline{X^2} + a \cdot \overline{X} = \overline{XY}. \end{cases}$$

Тогда по формуле (5.5)

$$b = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^{\,2}} = \frac{29{,}02 - 6{,}65 \cdot 4{,}1}{47{,}043 - (6{,}65)^2} = 0{,}622.$$

Из первого уравнения $a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 4{,}1 - 0{,}622 \cdot 6{,}65 = -0{,}038$.

Итак, уравнение прямой линии регрессии Y на X:

$\overline{y_x} = 0{,}622x - 0{,}038$.

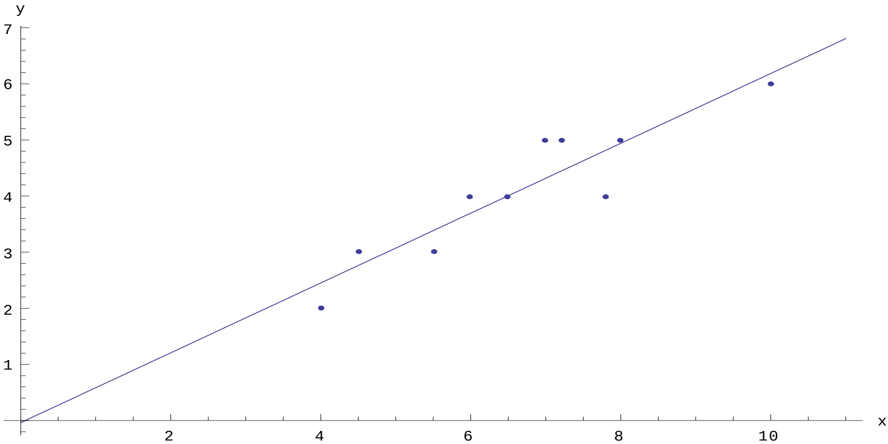
Вспомогательные вычисления соберем в таблицу 2.

Таблица 2

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	e_i^2
4	2	8	16	4	0,2025
4,5	3	13,5	20,25	9	0,057121
5,5	3	16,5	30,25	9	0,146689
6	4	24	36	16	0,0936
6,5	4	26	42,25	16	0,00003
7	5	35	49	25	0,4679
7,2	5	36	51,84	25	0,31315
7,8	4	31,2	60,84	16	0,66194
8	5	40	64	25	0,00384
10	6	60	100	36	0,03313
$\Sigma = 66{,}5$	$\Sigma = 41$	$\Sigma = 290{,}2$	$\Sigma = 470{,}43$	$\Sigma = 181$	$Q_e = 1{,}9799$
$\overline{X} = 6{,}65$	$\overline{Y} = 4{,}1$	$\overline{XY} = 29{,}02$	$\overline{X^2} = 47{,}04$	$\overline{Y^2} = 18{,}1$	$s^2 = 0{,}2475$

2) Построим корреляционное поле и график $\overline{y_x} = 0,622x - 0,038$, $y(4) = 2,45,\ \ y(10) = 6,182$.

График линии регрессии



3) Вычислим коэффициент корреляции $\bar{r}$ по формуле (5.4) и коэффициент детерминации $\bar{d} = \bar{r}^2$:

$$\bar{r} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\sqrt{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \cdot \sqrt{\overline{Y^2} - \overline{Y}^2}} = \frac{29,02 - 6,65 \cdot 4,1}{\sqrt{47,043 - (6,65)^2} \cdot \sqrt{18,1 - (4,1)^2}} =$$

$= 0,92.$

4) Коэффициент детерминации

$$\bar{d} = (0,92)^2 = 0,85 \text{ (с точностью до 0,01).}$$

Поэтому 85% рассеивания зависимой переменной Y объясняется линейной регрессией Y на X, а 15% рассеивания Y остались необъясненными.

5) По формуле (5.9): $Q_e = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2 = 1,9799$.

6) По формуле (5.10): $s^2 = \frac{1}{n-2} Q_e = \frac{1}{8} \cdot 1,9799 = 0,2475$.

7) Подставим точку $(\overline{X}, \overline{Y}) = (6,65;\ 4,1)$ в уравнение $y = 0,622x - 0,038$, $y = 0,622 \cdot 6,65 - 0,038 = 4,1$ (с точностью до 0,01).

8) Вычислим $\overline{d}$ по формуле (5.8), при этом используя равенство $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2 = n(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)$

$$\overline{d} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{Q_e}{n(\overline{Y^2} - \overline{Y}^2)} = 1 - \frac{1,9799}{10 \cdot (18,1 - 4,1^2)} =$$

$= 1 - \frac{1,9799}{12,9} = 0,85$ (с точностью до 0,01).

9) Если $l = 7,5$; то $\overline{y_x} = 0,622 \cdot 7,5 - 0,038 = 4,627$, т. е. при энерговооруженности $l = 7,5$ тыс. кВт·ч в год/ч можно ожидать среднюю производительность $y = 4,627$ (тыс. изд. в год/ч).

Задание 6

Компания контролирует $n = 10$ фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице 2 приведены данные о производительности труда y_i (тыс. изд. в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики x_i (тыс. кВт·ч в год на одного работающего), $i = 1, \ldots, n$.

Требуется:

1) Установить зависимость между X и Y (выбирать линейную модель, параметры модели находить по методу наименьших квадратов).

2) Построить корреляционное поле и график линии регрессии.

3) Вычислить коэффициент корреляции $\overline{r}$ (формула 5.6).

4) Вычислить коэффициент детерминации $\overline{d}$ (формула 5.7). Пояснить его смысл.

5) Найти остаточную сумму квадратов Q_e (формула 5.9).

6) Найти остаточную дисперсию s^2 (формула 5.10).

7) Проверить, что точка $(\overline{X}, \overline{Y})$ лежит на прямой (5.3).

8) Вычислить $\overline{d}$ по формуле (5.8) и проверить совпадение со значением $\overline{d}$ полученным в пункте 4.

9) Какую среднюю производительность труда можно ожидать на фабрике энерговооруженность которой равна l (см. таблицу 3).

Таблица 3

Вариант \ № фабрики		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	l
1	x_i	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	11	10,5
	y_i	2	4	4	5	6	7	7	8	9	10	
2	x_i	9,4	10	10,5	11	11,4	12	12,6	13,6	14	15	12,4
	y_i	8	8	7	8	8	9	10	11	11	12	
3	x_i	7	7,3	8	8,3	9	9,7	10	11	11,7	12	9,5
	y_i	2	2	3	2	4	4	5	5	6	6	
4	x_i	2	2,5	3	3,4	3,6	4	4,5	5	5,2	6,8	6
	y_i	3	2	2	3	3	4	4	4,5	4,5	5	
5	x_i	10	12	12,5	13	14	14,5	15,2	15,8	16	16,5	15,5
	y_i	7	6	7	8	7	8	10	11	11	12	
6	x_i	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	12	9,8
	y_i	4	6	6	7	7	9	9	8	11	12	
7	x_i	10,4	11	11,5	12	12,5	13	13,4	14,6	15	16	14
	y_i	8	8	7	7	8	10	9	11	12	13	
8	x_i	6	6,3	7	7,3	8	8,7	9	9,5	10,7	11	8,3
	y_i	12	12	12	11	13	13	14	14	15	16	
9	x_i	3	3,5	4	4,6	4,8	5	5,5	6	6,4	7,2	4,2
	y_i	4	3	3	3	4	4	5	5,5	5,5	6	
10	x_i	11	12	13,5	14	15	15,5	16,2	16,8	17	17,5	14,5
	y_i	7	7	8	9	8	9	11	12	12	12	
11	x_i	5	5,5	6	6,4	7	7,4	8	8,6	9	9,5	7,2
	y_i	3	3	3,5	4	4,5	4,5	5	5	5,5	5,5	
12	x_i	7	8	8,5	9,2	9,5	10	11	11,5	12	14	9
	y_i	6	6,5	6,5	7,5	7,5	8	8	8	9	9	
13	x_i	6	7	7,3	7,8	8,5	9	9,5	10,5	11	12	6,5
	y_i	5	5,5	5,5	6	7	7	8	8	12	12	
14	x_i	2	3	4	4,5	5	6	7	7,5	8	9	10
	y_i	1	1	3	3	4	5	5	6	6	8	
15	x_i	6,5	7	7,5	8,5	9	10	10,5	11	12	12,5	9,5
	y_i	5	5	5,5	6	6	7	7	9	9	10	

Вариант \ № фабрики		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	l
16	x_i y_i	3,5 4	4 4	4,5 4,5	5 4,5	6 5,5	7,5 6,5	9 7	9,5 7	11 9	12 9	6,5
17	x_i y_i	5,5 3	6,5 4	7 4	7,3 4	8 5,5	8,5 5,5	9 6	10 6,5	11 6,5	13 8	9,5
18	x_i y_i	4,5 2	5 2	5,5 3	6 3,5	6,5 3,5	7 4	8 5,5	9 5,5	9,5 6	11 8	8,5
19	x_i y_i	7 5	7,5 5,2	8 5,2	8,3 6	9 7	9,5 7	11 9	12 9	12,8 10	14 10	16
20	x_i y_i	2,5 2	3,5 2	4 3	4,3 3	5 5	5,5 5	6 5,5	6,5 5,5	7,5 6	9 7	11
21	x_i y_i	15 10	13,5 10	13 9,8	12 9	11 9	10,5 8,2	10 8	9 8	8,5 7	5 6	12,5
22	x_i y_i	14 9	13 8	13,5 8	13 7	12,5 7	11,5 6	10 6	9 5	7,5 5,5	4 2	10,5
23	x_i y_i	14,5 9	13,5 9	12 9	11 8	10,5 8	9,5 7	8,5 7	8 6	7 5,5	6,5 5	11,5
24	x_i y_i	12 10	11 9	10 7	9,5 5	9,2 5	9 5	8 4	7,5 4	7 3,5	4 3,5	8,5
25	x_i y_i	16 12	14 12	12 11,5	11 11	10,5 11	10 9	9 9	8 7	7,5 7	6,5 6	4,2
26	x_i y_i	15,5 10	13 9	10 8	9,5 8	9 7,5	8,5 7,5	8 7,5	7,5 7	6 6,5	5,5 3	6,5
27	x_i y_i	13 8	12,5 8	12 7	10 6	9 6	8 5	7,5 5	7 4,5	6,5 4	4 4	5
28	x_i y_i	16 13	15 13	13 10	12 9	11,5 9	10,5 8	10 8	9 7	8,5 7	7,5 5	14
29	x_i y_i	16,5 14	15,5 13	13,5 11	13 11	11 9	10 8	9 7,5	8,5 7,5	8 6	7 6	14
30	x_i y_i	18 17	16 16	15 16	14 15	13 13	12,5 13	12 13	11,5 12,5	11 12	10 9	17
31*	x_i y_i	4 2	4,5 3	5,5 3	6 4	6,5 4	7 5	7,2 5	7,8 4	8 5	10 6	7,5

Тема 6. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем. Матрица вероятностей переходов.

2. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

3. Граф состояний.

4. Предельные вероятности состояний.

Пусть некоторая система S может находится в одном из n состояний $S_1, S_2, \dots, S_n$ и в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k$ может переходить из состояния в состояние. Обозначим через $S(t_k)$ состояния системы в момент времени t_k, $S(t_k) \in S_1, S_2, \dots, S_n$, и через $p_{ij}(k)$ условную вероятность перехода системы из состояния S_i, в котором она находилась в момент времени t_{k-1}, в состояние S_j в момент времени t_k:

$$p_{ij}(k) = P(S(t_k) = S_j \big| S(t_{k-1}) = S_i).$$

Говорят, что в системе протекает *Марковский процесс (определена цепь Маркова)*, если $p_{ij}(k)$ не зависит от того, в каком состоянии система находилась в предыдущие моменты времени $t_{k-2}, t_{k-3}, \dots$. При этом цепь Маркова называется *однородной*, если $p_{ij}(k)$ не зависит от k, т.е. условная вероятность перехода из S_i в S_j не зависит от того, в какой момент времени это происходит.

Матрица

$$P = (p_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

называется *матрицей вероятностей перехода.*

Зная матрицу P, можно построить граф состояний системы:

1) количество вершин графа равно числу состояний n;

2) если $p_{ij} \neq 0$, то вершины $\boxed{S_i}$ и $\boxed{S_j}$ соединяются дугой, помеченной p_{ij}:

$$\boxed{S_i} \xrightarrow{p_{ij}} \boxed{S_j}.$$

Матрица (6.1) задает условные вероятности перехода из состояния в состояние за 1 шаг: $P = P(1)$. При этом матрица $P(m)$ условных вероятностей перехода из состояния в состояние за m шагов находится по формуле $P(m) = P^m$.

Если задана матрица-строка ν_0 вероятностей состояний в начальный момент времени, то вектор

$$\vec{\nu}_m = \vec{\nu}_0 \cdot P(m) = \vec{\nu}_0 \cdot P^m \qquad (6.2)$$

задает вероятности состояний системы через m шагов.

Марковский процесс называется регулярным, если система может перейти в любое состояние из любого другого за конечное число шагов, т.е. если $\exists\, m \in N$ такое, что все элементы матрицы P^m строго положительны.

Если Марковская цепь регулярна, то при $m \to +\infty$ она независимо от начального состояния будет функционировать в установленном режиме, т.е. вероятности состояний системы в этом режиме не зависят от начального состояния. Такие вероятности, $\vec{\nu}_ф = (p_1, \ldots, p_n)$ называются *предельными или финальными* и могут быть найдены из системы уравнений

$(p_1 \quad \ldots \quad p_n) \cdot P = (p_1 \quad \ldots \quad p_n)$ или

$$(p_1 \quad \ldots \quad p_n) \cdot (P - E) = 0, \qquad (6.3)$$

где

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ – *единичная матрица*.

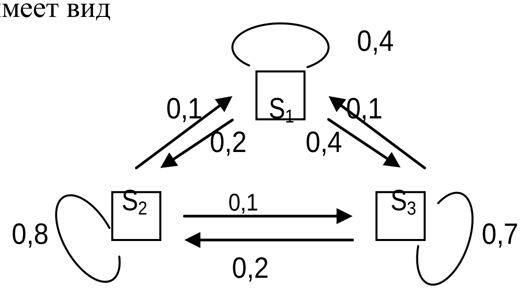
Для нахождения $\vec{\nu}_ф$ решают систему (6.3) с дополнительным условием $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Пример 6.1. Заданы матрица вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\vec{\nu}_0$ начального распределения вероятностей.

$$P=\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix},\ \vec{\nu}_0=(0,5;\ 0,5;\ 0).$$

Требуется: 1) построить граф состояний системы; 2) найти вектор $\vec{\nu}_2$ распределения вероятностей p состояний системы через 2 шага; 3) найти финальные вероятности.

Решение. 1) Система может находиться в одном из трех состояний: S_1, S_2, S_3, при этом элемент p_{ij} матрицы P задает вероятность перехода из состояния S_i в S_j за один шаг. Поэтому граф состояний системы имеет вид



2) Вектор $\vec{\nu}_2$ распределения вероятностей состояний системы через 2 шага находится по формуле (6.2): $\vec{\nu}_2=\vec{\nu}_0\cdot P^2$. Применяя правило умножения матриц, получим:

$$\vec{\nu}_2=\left[\left(0,5;\ 0,5;\ 0\right)\cdot\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix}=$$

$$=\left(0,25;\ 0,5;\ 0,25\right)\cdot\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix}=\left(0,175;\ 0,5;\ 0,325\right).$$

3) Для нахождения финальных вероятностей $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ решим систему уравнений (6.3)

$$(p_1, \quad p_2, \quad p_n)\cdot(P-E)=(0,\ 0,\ 0);$$

$$p_1;\ p_2;\ p_3 \cdot\left[\begin{pmatrix}0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]= 0;\ 0;\ 0 \ ;$$

$$(p_1, \quad p_2, \quad p_n)\cdot\begin{pmatrix}-0,6 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & -0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,2 & -0,3\end{pmatrix}=(0,\ 0,\ 0).$$

Умножая матрицы, получим систему

$$\begin{cases}-0,6p_1+0,1p_2+0,1p_3=0;\\ 0,2p_1-0,2p_2+0,2p_3=0;\\ 0,4p_1+0,1p_2-0,3p_3=0.\end{cases}$$

При этом необходимо учесть дополнительное условие $p_1+p_2+p_3=1$.

Отбросим третье уравнение, т. к. оно является следствием двух первых (сумма двух первых уравнений дает третье). Получим систему

$$\begin{cases}-0,6p_1+0,1p_2+0,1p_3=0;\\ 0,2p_1-0,2p_2+0,2p_3=0;\\ p_1+p_2+p_3=1.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение на -10, а второе на 5, получим:

$$\begin{cases}6p_1-p_2-p_3=0;\\ p_1-p_2+p_3=0;\\ p_1+p_2+p_3=1.\end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера, получим:

$$p_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2}{14};\ p_2=\frac{\begin{vmatrix}6 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{7}{14};\ p_3=\frac{\begin{vmatrix}6 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{5}{14}.$$

Поэтому вектор финальных вероятностей

$$\vec{\nu}_{ф}=\left(\frac{2}{14};\frac{7}{14};\frac{5}{14}\right).$$

Задание 7

Заданы матрица $P=(p_{ij})_{i=1,2,3}^{j=1,2,3}$ вероятностного перехода цепи Маркова и вектор $\vec{\nu}_0$ начального распределения вероятностей.

Требуется: 1) построить граф состояний системы; 2) найти вектор $\vec{\nu}_2$ распределения вероятностей p состояний системы через 2 шага; 3) найти финальные вероятности.

Варианты

1. $P=\begin{pmatrix}0,1 & 0,1 & 0,8\\ 0,7 & 0,1 & 0,2\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,3;\ 0,2;0,5)$.

2. $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,1 & 0,6 & 0,3\\ 0,6 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,6;\ 0,4;0)$.

3. $P=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0;\ 0,5; 0,5)$.

4. $P=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,4;\ 0; 0,6)$.

5. $P=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,3;\ 0,2; 0,5)$.

6. $P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0;\ 0,6; 0,4)$.

7. $P=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,2;\ 0,3; 0,5)$.

8. $P=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,5;\ 0; 0,5)$.

9. $P=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0;\ 0,5; 0,5)$.

10. $P=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,6;\ 0,4; 0)$.

11. $P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,4;\ 0,6;0)$.

12. $P=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0;\ 0,5;0,5)$.

13. $P=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,5;\ 0,2;0,3)$.

14. $P=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0;\ 0,4;0,6)$.

15. $P=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,4;\ 0;0,6)$.

16. $P=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,3;\ 0,5;0,2)$.

17. $P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0,5;\ 0;0,5)$.

18. $P=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0;\ 0,5;0,5)$.

19. $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0,5;\ 0,5; 0)$.

20. $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0,6;\ 0,4; 0)$.

21. $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0,5;\ 0; 0,5)$.

22. $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0; 0,5; 0,5)$.

23. $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0,2; 0,3; 0,5)$.

24. $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0; 0,5; 0,5)$.

25. $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0,2; 0,5; 0,3)$.

26. $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0 = (0,5; 0,5; 0)$.

27. $P=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0{,}5;0{,}2;0{,}3)$.

28. $P=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0{,}5;0{,}5;0)$.

29. $P=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0{,}5;0{,}5;0)$.

30. $P=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_0=(0{,}5;0{,}5;0)$.

Тема 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Классификация систем массового обслуживания, их основные характеристики.

2. Входящий и выходящий поток требований.

3. Процесс «гибели и размножения».

4. Система массового обслуживания (СМО) с параллельными обслуживающими устройствами и ограниченной очередью.

5. СМО с отказами.

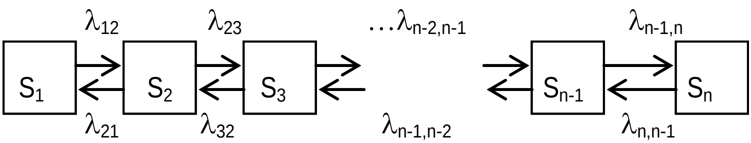
6. СМО с неограниченной очередью для ожидания.

7. Замкнутые СМО.

Теория массового обслуживания изучает зависимость между характером потока заявок (требований), числом каналов (единицы обслуживания), их производительностью, правилами работы систем массового обслуживания (СМО) и эффективностью обслуживания.

В СМО происходит случайный процесс, что обусловлено случайным характером потока заявок и временем их обслуживания. Будем считать, что все потоки событий (потоки заявок, потоки обслуживания заявок и т. д.), переводящие СМО из состояния в состояние, являются пуассоновскими (тогда процесс, протекающий в системе, является Марковским) и интервал времени Т между поступлениями требований в СМО в этом потоке есть случайная величина, распределенная по показательному закону $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$; λ – интенсивность потока событий. Обслуживание заявки продолжается в течение случайного времени $T_{обс.}$, распределенного по показательному закону $f(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t > 0$; μ – интенсивность обслуживания заявок.

При вычислении основных характеристик эффективности обслуживания СМО основываются на том, что Марковский процесс, протекающий в них, является частным случаем процесса «гибели и размножения», т. е. граф состояний имеет вид



Так как режим является установившимся, то дифференциальные уравнения Колмогорова для этого процесса имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2; \\ \lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3; \\ \lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n-1} p_n; \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, \end{cases} \tag{7.1}$$

где p_i – предельная вероятность состояния S_i системы;

λ_{ij} – интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния S_i в состояние S_j.

При решении системы получаем, что предельная вероятность состояния S_k системы выражается через p_1:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k} \cdot \lambda_{k-2,k-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1} \cdot \lambda_{k-1,k-2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}} p_1, \; k = \overline{2,n}. \qquad (7.2)$$

Из уравнения $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ находим p_1:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23} \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{32} \cdot \lambda_{21}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \cdot \ldots \cdot \lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{21}}}. \qquad (7.3)$$

В качестве примера вычислим характеристики одноканальной СМО с отказами.

Пример 7.1. Трехканальная СМО с отказами представляет собой АТС с тремя телефонными линиями. Заявка-вызов, пришедший в момент, когда все три линии заняты, получает отказ (соединения не происходит). Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,8$ в минуту. Средняя продолжительность разговора равна $\bar{t}_{обс} = 1,5$ минут. Найти вероятности состояний, абсолютную и относительную пропускные способности, вероятность отказа и среднее число занятых и простаивающих каналов.

Решение. Интенсивность обслуживания одной линией (среднее число разговоров, обслуженных одной линией за единицу времени) равна

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_0} \approx 0,667.$$

Приведенная интенсивность потока заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,8}{0,667} = 1,2.$$

Используя дифференциальные уравнения Колмогорова получаем:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 1,2 p_0;$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0,72 p_0;$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0,288 p_0.$$

$$p_0 = \frac{1}{1+1,2+0,72+0,288} \approx 0,312.$$

$$p_1 = 1,2 \cdot 0,312 = 0,374;$$

$$p_2 = 0,72 \cdot 0,312 \approx 0,224; \; p_3 = 0,288 \cdot 0,312 \approx 0,090.$$

Вероятность отказа $p_{отк} = p_3 = 0,090$.

Относительная и абсолютная пропускные способности равны

$q = 1 \cdot p_3 = 0,910$; $A = \lambda \cdot q = 0,8 \cdot 0,910 = 0,728$.

Среднее число занятых каналов

$\bar{k} = \rho(1 - p_3) = 1,2 \cdot 0,91 \approx 1,09$.

Таким образом, в установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято чуть больше одного канала, остальные будут простаивать. Этой ценой достигается относительно высокий уровень эффективности обслуживания – около 91% поступивших вызовов будет обслужено.

Задание 8

Варианты

1. Погода на некотором острове через длительные периоды времени становится то дождливой, то сухой. Вероятности ежедневных изменений заданы матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Построить граф, соответствующий этой матрице. Если в среду погода дождливая, то какова вероятность, что она будет дождливой в ближайшую пятницу?

2. Двухканальная СМО с отказами представляет одну телефонную линию. Заявка-вызов, пришедший в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,8$ (вызовов в минуту). Средняя продолжительность разговора $t = 1,5$ мин. Все потоки событий простейшие. Определить предельные (при $t \to \infty$) значения:

1) относительную пропускную способность q;

2) абсолютную пропускную способность А;
3) вероятность отказа $p_{отк}$.
3. Пусть (S_1, S_2, S_3) – возможные состояния системы и Р – матрица вероятностей перехода за один шаг.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Построить граф состояний и найти финальные вероятности.
4. Исследуется работа СТО автомобилей, в распоряжении которой имеется 4 подъемника ($n=4$). Станция работает с отказами 8 часов в сутки. На станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 3$ автомобиля в час. Время обслуживания распределено по показательному закону и характеризуется средней продолжительностью $t = 2$ часа на автомобиль. Требуется построить граф состояний системы и вычислить основные числовые характеристики функционирования станции.
5. На окружности расположены шесть точек, равноотстоящих друг от друга. Частица движется из точки в точку следующим образом: из данной точки она перемещается в одну из ближайших соседних точек с вероятностью $\frac{1}{4}$ или в диаметрально противоположную точку с вероятностью $\frac{1}{2}$. Выписать матрицу вероятностей перехода для этого процесса и построить граф, соответствующий этой матрице.
6. АЗС представляет собой СМО с одним каналом обслуживания. Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более 3-х машин одновременно ($m = 3$). Если в очереди уже находится три машины, то очередная машина, прибывающая к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 0{,}8$ (машин в мин.). Процесс заправки продолжается в среднем 2,5 мин. Определить:
1) вероятность отказа;

2) относительную и абсолютную пропускную способность СМО;
3) среднее число машин, ожидающих заправки;
4) среднее число машин, находящихся на АЗС (включая и обслуживающую);
5) среднее время ожидания машины в очереди;
6) среднее время пребывания машины на АЗС (включая и обслуживающую).

7. В учениях участвуют два корабля, которые одновременно производят выстрелы в друг друга через равные промежутки времени. Корабль А поражает корабль В с вероятностью $\frac{1}{2}$, корабль В – корабль А с вероятностью $\frac{3}{8}$. При любом попадании корабль выходит из строя. Найти матрицу вероятностей перехода, если состояниями цели являются комбинации кораблей оставшихся в строю, и построить граф, соответствующий этой матрице.

8. Рассматривается 4-ех канальная СМО с отказами, представляющая собой АТС. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,7$ (вызовов в мин.). Средняя продолжительность разговора $t = 2,5$ мин. Все потоки событий простейшие. Найти вероятности состояний, абсолютную и относительную пропускную способности, вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

9. Машина может находится в одном из двух состояний: «работает хорошо» или «нуждается в регулировке». Если машина работает хорошо сегодня, вероятность того, что она будет работать хорошо завтра, равна 0,7, а вероятность того, что она завтра будет нуждаться в регулировке, равна 0,3. А если же она нуждается в регулировке сегодня, то вероятность того, что она завтра будет нуждаться в регулировке, равна 0,4. Найти матрицу вероятностей перехода, построить граф и вычислить предельные вероятности.

10. АЗС с тремя колонками ($n = 2$) может вместить на своей площадке очередь не более 3-х машин ($m = 3$). Все остальные машины получают отказ. Поток машин прибывающих на АЗС имеет интенсивность $\lambda = 2$ (машины в мин.), среднее время обслуживания одной машины 3 мин. Требуется построить граф состояний системы и найти характеристики СМО:

1) вероятность отказа;
2) относительную и абсолютную пропускную способности;
3) среднее число занятых колонок;
4) среднее число машин в очереди;
5) среднее время ожидания и пребывания машины на АЗС.

11. Для выборочных экспериментов используется однородная марковская цепь со следующей матрицей вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Данный случайный процесс обнаруживает тенденцию системы сохранять то состояние, в котором она находится до момента смен состояний, а при изменении состояния переходить только в соседние. Такая система хорошо согласуется со многими процессами в экономике. Построить граф, соответствующий данной матрице и найти вектор финальных (предельных) вероятностей для данного процесса.

12. Дана АЗС, на которой имеется 3 заправочные колонки ($n = 3$). Заправка одной машины длится в среднем 3 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди практически неограниченно. Все машины, вставшие в очередь на заправку, «терпеливо» дожидаются своей очереди. Определить среднее время, проходящее с момента прибывания машины на заправку, до момента ее заправки, а также другие характеристики работы АЗС: среднее число занятых мест; среднее число машин в очереди; среднее время простоя колонки между заправками.

13. В некоторой местности никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня снег (или дождь), то с вероятностью $\frac{1}{2}$ погода не изменится. Если же изменится, то в половине случаев снег заменяется дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Найти матрицу вероятностей перехода, построить граф, соответствующий матрице и вычислить предельные вероятности.

14. Группа из 5 станков обслуживается одним рабочим. Среднее время наладки станков равно 15 мин, каждый станок останавливается в среднем 2 раза в час. Определить характеристики СМО: вероятность занятости рабочего; его абсолютную пропускную способность; среднее количество неисправных станков; среднюю относительную потерю производительности группы станков; среднюю относительную потерю производительности группы станков за счет неисправностей.
15. Некоторая совокупность семей поделена на три группы: S_1 – семьи не имеющие машины и не намеревающиеся ее приобрести; S_2 – семьи не имеющие машины, но собирающиеся ее приобрести и S_3 – семьи, имеющие машину. Матрица вероятностей перехода оказалась такой

$$P=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить соответствующий граф и вычислить вероятность того. что семья, не имеющая машины и не собирающаяся ее приобрести, будут находится в той же ситуации через два года.
16. 3 рабочих обслуживает группу из 6 станков. Остановки каждого (работающего) станка случаются в среднем, через каждые 45 мин. Процесс наладки занимает у рабочего, в среднем, 15 мин. Определить характеристики замкнутой СМО: среднее число занятых рабочих; абсолютную пропускную способность; среднее количество неисправных станков.
17. Система S может находиться в одном из состояний: S_0, S_1, …, S_n. При этом в моменты перехода система, находясь в состоянии S_j (j = 1, 2,…) может перейти только в одно из соседних состояний S_{j-1} или S_{j+1}, в первое с вероятностью p, а во второе с вероятностью $q=1-p$. Попав в состояние S_0, система остается в этом состоянии все остальное время (состояние S_0 – поглощающее). Написать матрицу вероятностей перехода. Чему равна вероятность системы S попасть в поглощающее состояние S_0, если начальный момент система находилась в состоянии S_1.
18. Предприятие может находится в одном из следующих пяти состояний: выполнить месячный план на 80%, 90%, 100%, 110% и 120%. Если план выполнен на 80% или на 120%, то план пересматривается и то, что будет сделано в течение следующего месяца принимается за

100%. Если же план выполнен на 100%, то в следующем месяце предприятие может выполнить план на 100% с вероятностью 0,6, на 110% – с вероятностью 0,2; на 120% – с вероятностью 0,1, на 90% – с вероятностью 0,1; если план был выполнен предприятием на 110%, то в следующем месяце выполнение плана 90%, 100%, 110%, 120% имеет следующие вероятности 0,1; 0,1; 0,6; 0,2, а при выполнении плана на 90% вероятности выполнения плана предприятием в сле-дующем месяце на 80%, 90%, 100% такие – 0,2; 0,6; 0,2. Найти матрицу вероятностей перехода и финальные вероятности (предельные).

19. Опрос посетителей столовой в первоначальный момент времени показал, что 20% из них готовы брать первый комплексный обед, 30% – второй и 50% – третий комплексный обед. Поведение посетителей можно рассматривать как Марковский процесс с матрицей вероятностей перехода

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

где моменты перехода состояний друг в друга даны на одни сутки. В каком отношении должны быть заготовлены комплексные обеды:

а) на завтра;

б) на послезавтра;

в) в будущем.

20. Пусть (S_1, S_2, S_3) – возможные состояния системы и P – матрица вероятностей перехода за один шаг.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Построить граф состояний и найти финальные вероятности.

21. Автоматическая линия представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка-вызов, пришедший в момент, когда линия занята,

получает отказ. Интенсивность потока вызовов $\lambda = 0,9$ (вызовов в мин.). Средняя продолжительность изготовления детали $t = 2,7$ мин. Все потоки событий простейшие. Определить предельные (при $t \to \infty$) значения:
1) относительную пропускную способность;
2) абсолютную пропускную способность;
3) вероятность отказа.
22. Некоторая совокупность семей поделена на три группы: семьи, не имеющие дачу и не намеревающиеся ее приобрести; семьи, не имеющие дачу, но собирающиеся ее приобрести и семьи, имеющие дачу. Матрица вероятностей перехода оказалась такой:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить соответствующий граф и вычислить вероятности того,. что семья, не имеющая дачу, но собирающаяся ее приобрести, будет находиться в той же ситуации через два года.
23. На станции тех. обслуживания автомобилей имеется три подъемника. Станция работает с отказами 14 часов в сутки. На станцию поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 4$ автомобиля в час. Среднее время продолжительности обслуживания автомобиля $t = 2,5$ часа и распределено по показательному закону. Требуется вычислить основные числовые характеристики функционирования станции.
24. Станок с ЧПУ может либо хорошо работать, либо нуждаться в регулировке. Если он хорошо работает сегодня, то вероятность того, что он будет работать хорошо завтра равна 0,9, а вероятность того, что завтра он будет нуждаться в регулировке, равна 0,1. И наоборот, если он нуждается в регулировке сегодня, то вероятность того, что он будет хорошо работать завтра, равна 0,7, а вероятность того. что он завтра будет нуждаться в регулировке, равна 0,3. Найти матрицу вероятностей перехода, построить граф и вычислить предельные вероятности.
25. В качестве СМО рассмотрим АЗС с двумя колонками. Интенсивность потока машин, прибывающих на станцию, равна $\lambda = 3$ (маши-

ны в мин.); среднее время обслуживания одной машины 2 мин. Площадка у АЗС может вместить очередь не более 4 машин. Машина, прибывшая в момент, когда все 4 места в очереди заняты, покидает АЗС. Построить граф состояний и найти характеристики СМО.

26. Для выборочных экспериментов используется однородная марковская цепь со следующей матрицей вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Система сохраняет то состояние, в котором она находится до момента смен состояний, а при изменении состояния переходит только в соседние. Построить граф, соответствующий данной матрице и найти вектор предельных вероятностей для данного процесса.

27. Рабочий обслуживает 4 станка. На наладку одного станка в среднем требуется 10 мин., каждый станок останавливается, в среднем, один раз в час. Построить граф состояний СМО и найти ее характеристики:

1) вероятность занятости рабочего;
2) его абсолютную пропускную способность;
3) среднее количество неисправных станков;
4) среднюю относительную потерю производительности группы станков за счет неисправностей.

28. Четырехканальная СМО с отказами представляет одну линию обслуживания. Заявка поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Интенсивность потока заявок $\lambda = 2$ (заявок в мин.), средняя продолжительность обслуживания $t_{обс} = 4$ мин. Построить граф состояний системы и вычислить характеристики работы СМО.

29. АЗС имеет 2 колонки, площадка вмещает не более 5-и машин. Машина, прибывающая к станции в момент, когда все места заняты, проезжает мимо. Поток машин для заправки имеет интенсивность $\lambda = 0,9$ (машин в мин), среднее время заправки 3 мин. Найти основные характеристики работы СМО.

30. Пусть (S_1, S_2, S_3) - возможные состояния системы и P – матрица вероятностей перехода за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Построить граф состояний системы и найти финальные вероятности.

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников
инженерно-экономических специальностей

С о с т а в и т е л и:
КОРЗНИКОВ Александр Дмитриевич
МАТВЕЕВА Людмила Дмитриевна
РУДЫЙ Александр Никодимович
ПАВЛОВ Валерий Валентинович

Технический редактор О.В. Песенько

Подписано в печать 18.05.2012.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 4,59. Уч.-изд. л. 3,59. Тираж 300. Заказ 1258.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.