МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная математика»

МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум для студентов
механико-технологического факультета

В 2 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2012

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7
М34

С о с т а в и т е л и :
Л. В. Бокуть, Н. К. Прихач, А А. Литовко,
Л. А. Барминова, О. В. Дубровина

П о д о б щ е й р е д а к ц и е й *В. А. Нифагина*

Р е ц е н з е н т ы :
И. Н. Мелешко, *В. И. Юринок*

М34 **Математика** : лабораторный практикум для студентов механико-технологического факультета : в 2 ч. / Л. В. Бокуть [и др.]; под общ. ред. В. А. Нифагина. – Минск : БНТУ, 2012. – Ч. 1. – 95 с.
ISBN 978-985-525-930-6 (Ч. 1).

Данный лабораторный практикум включает основные лабораторные работы, предусмотренные программой курса математики для специальностей механико-технологического факультета.

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-525-930-**6 (Ч.** 1)
ISBN 978-985-525-931-3

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В последнее время большое развитие получило новое научное направление – компьютерная математика. *Компьютерная математика* – это совокупность методов и средств, обеспечивающих максимально комфортную и быструю подготовку алгоритмов и программ для решения математических задач любой сложности с высокой степенью визуализации всех его этапов.

С целью автоматизации научно-технических расчетов и для математического моделирования природных явлений и технических устройств были разработаны программные системы компьютерной математики. Сейчас они представлены пакетами MathLab, MathCad, Mathematics, Maple, Statistics и др.

В издании рассматриваются работы по численным математическим методам, расширяющим и обобщающим классические аналитические методики решения задач математического анализа, алгебры и дифференциальных уравнений в MathCad – популярной системе компьютерной алгебры, ориентированной на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличающейся легкостью использования и применения для работы.

Лабораторный практикум включает в себя несколько вводных работ по пакету MathCad, знакомящих читателя с вводом-выводом информации, работе с переменными, операторами и функциями, оформлением MathCad-документов, графикой. Далее рассматриваются вопросы решения линейных и нелинейных уравнений и систем, задачи оптимизации и решения дифференциальных уравнений, аппроксимации и интерполяции функций, численного интегрирования, нахождения точечных и интервальных оценок параметров распределения, а также элементы программирования в MathCad. Описывается постановка задачи, численная схема ее решения, а также пример ее реализации в рамках пакета MathCad. В каждой работе представлены варианты заданий и контрольные вопросы, выполнение которых позволяет проверить степень усвоения материала.

Все перечисленные работы представлены в электронном варианте в виде гипертекста с интерактивными элементами. Web-формат предоставляет возможность для гибкого подхода к содержанию предлагаемых работ, когда можно варьировать объем и сложность предлагаемых заданий, а также вид отчетности. Одна часть задания носит методический характер и выполняется под руководством преподавателя, а другая часть содержит элементы исследования, требующего творческого подхода. Она предназначена для самостоятельной работы и предполагает подготовку итогового отчета.

Л а б о р а т о р н а я   р а б о т а   № 1

РАБОТА С СИМВОЛЬНЫМ ПАКЕТОМ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ MATHCAD. ОФОРМЛЕНИЕ ДОКУМЕНТА, ВВОД И РЕДАКТИРОВАНИЕ ФОРМУЛ

Цель работы: изучение вычислительных возможностей символьного пакета MathCAD для научных и инженерных расчетов; приобретение навыков работы с документом MathCAD.

Теоретические сведения

Элементы интерфейса и организация документа. MathCAD является уникальной системой для работы с формулами, числами, текстами и графиками. Он так же гибок, как самые мощные электронные таблицы и языки программирования, но легок в освоении и приятен в использовании.

Рассмотрим основные элементы интерфейса MathCAD. Запуск пакета производится двойным щелчком по пиктограмме MathCAD на рабочем столе или активизацией соответствующей опции главного меню (**Пуск → Программы → MathSoft Apps → MathCAD**). При этом разворачивается окно приложения, которое содержит окно документа с именем Untitled:1, через него осуществляется доступ к рабочему документу MathCAD.

Формулы могут размещаться в любом месте рабочего документа MathCAD. Чтобы подвести курсор к нужному месту, не видимому в настоящий момент в окне, можно использовать полосы прокрутки, как в любой программе Windows. Подобно другим программам Windows, MathCAD содержит **полосу меню**, ниже которой расположена **панель инструментов**. Многие команды меню можно быстро вызвать, нажав кнопку на панели инструментов. Для того чтобы узнать, что делает кнопка, достаточно указать на нее, и появится строка сообщения. Если активизировать кнопку не нужно, то достаточно убрать с нее указатель, не отпуская кнопку мыши. Если указатель остановлен на кнопке, появляется текст, описывающий ее действие.

Прямо под панелью инструментов располагается **панель шрифтов**. Она содержит выпадающие меню выбора и кнопки, используемые для задания характеристик шрифтов в уравнениях и тексте. Для вставки операторов, греческих букв, графиков и т. п. служат кнопки палитры «Математика» (рис. 1.1).

В целях экономии места на экране каждая из этих компонент может быть выведена на экран либо скрыта с помощью соответствующей команды меню **Вид** (*View*). Как правило, регулярно используются палитра вычислений (рис. 1.2), а также палитры «Матрицы» и «Матанализ» (рис. 1.3).

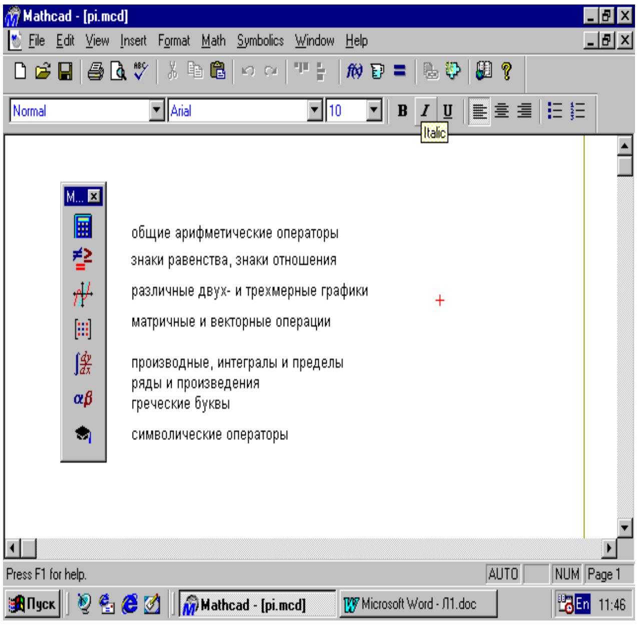


Рис. 1.1

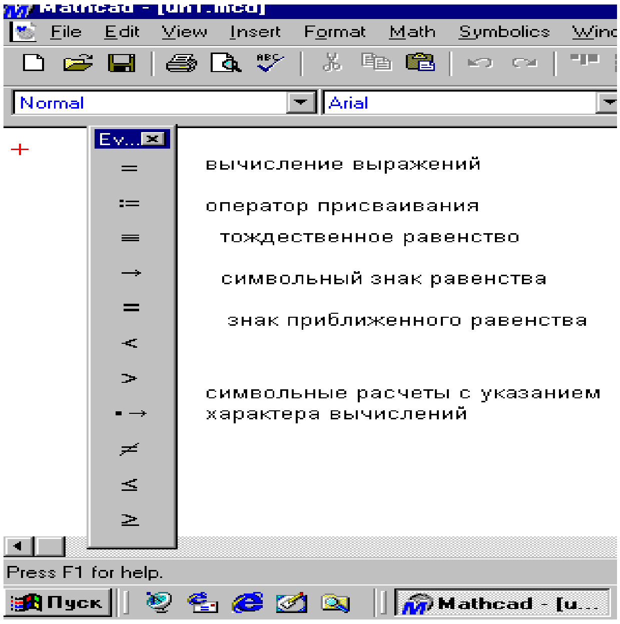


Рис. 1.2

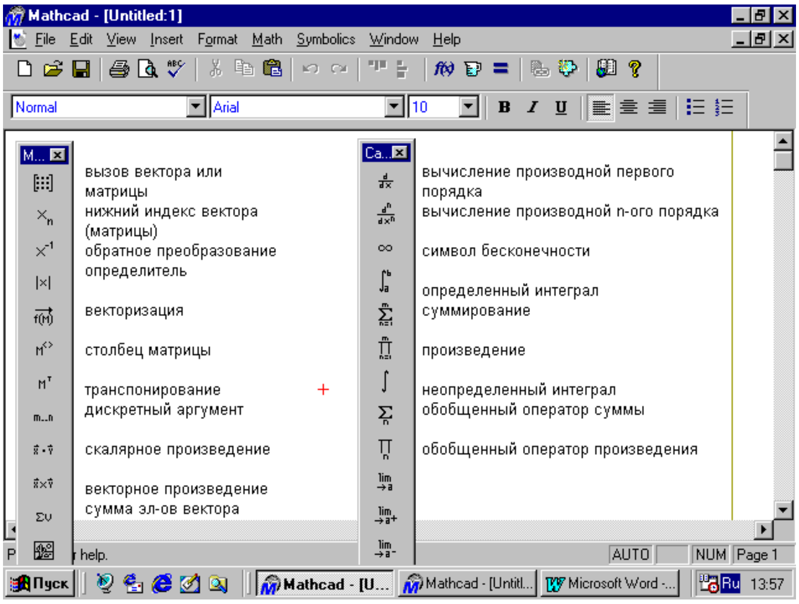


Рис. 1.3

Рассмотрим аспекты управления рабочим документом. Чтобы открыть существующий рабочий документ, нужно выбрать пункт **Открыть** (Open) из меню **Файл**. MathCAD запросит имя файла. В самом низу меню MathCAD выдаст список файлов, которые открывались последними. Выбор имени файла из этого списка сразу открывает файл. В меню **Файл** есть два пункта, касающиеся сохранения файлов: **Сохранить** (Save), **Сохранить как** (Save As). Для записи рабочего документа, ранее никогда не сохраняющегося, можно выбрать любой из них, в результате чего появится диалоговое окно **Сохранить как** (Save As), в котором можно набрать имя файла. Для перезаписи исходного рабочего документа (его измененной версии) нужно выбрать пункт **Сохранить** (Save) или нажать комбинацию клавиш [Ctrl + S], в результате чего MathCAD уничтожает исходную копию рабочего документа и записывает новую, показываемую в рабочем окне. Хотя интерфейс предназначен для сложных, математических вычислений, его можно использовать как калькулятор. Для этого необходимо выполнить перечисленные ниже действия.

1. Щелкните в любом месте рабочего документа – появится небольшой крестик. Теперь весь ввод с клавиатуры будет размещаться в рабочем документе, начиная с места расположения крестика.

2. Напечатайте $20 - 4/103.2 =$. После набора знака «=» MathCAD вычисляет выражение и выводит результат.

Этот пример демонстрирует особенности работы с данным интерфейсом.

1. MathCAD отображает формулы в том виде, в каком их печатают в книгах или пишут на доске – по всей площади экрана; подбирает размеры для дробных черт, скобок и других математических символов, чтобы они выглядели так, как их обычно пишут на бумаге.

2. MathCAD понимает, какую операцию выполнять первой. После ввода знака равенства «=» MathCAD показывает результат.

3. После ввода оператора MathCAD показывает небольшой прямоугольник, называемый *полем ввода*, который содержит места для ввода чисел и выражений.

Выражение на экране можно редактировать, устанавливая в нужном месте указатель и удаляя старые или вводя новые символы, цифры или операторы.

В пакете MathCAD можно оперировать переменными и функциями, при помощи которых становится возможным связь уравнений и использование промежуточных результатов в дальнейших вычислениях.

Правила определения переменных:

- введите имя переменной, которую нужно определить;
- введите двоеточие (:), чтобы ввести символ присваивания (MathCAD выводит символ присваивания (:=));
- введите значение, присваиваемое переменной; оно может содержать числовые константы и любые, ранее определенные переменные и функции.

Слева от знака «:=» могут стоять:

- имя простой переменной, например $x2$;
- имя переменной с нижними индексами – элемент массива;
- матрица с элементами, являющимися простыми переменными или переменными с нижними индексами;
- имя функции со списком аргументов, состоящих из имен простых переменных, например $f(x, y, z)$;
- имя переменной с верхним индексом – элемент вектора.

Заметим, что вводимые в MathCAD символы не всегда соответствуют отображаемым в рабочем документе.

Пример 1.1. Задание переменных.

$$k := \frac{t}{s} \qquad d := k \cdot s + m^2$$

$$k = 0.018 \qquad d = 145.8$$

$$i := 1..6 \qquad v^{\langle 1 \rangle} := 2.08e - 0.3$$

MathCAD читает рабочий документ сверху вниз и слева направо. Определив переменную, ее можно использовать в вычислениях ниже и правее области, в которой она определена. Попробуйте задать переменную сами, используя следующий алгоритм:

- наберите имя переменной, например *t*;
- напечатайте символ « : » (двоеточие); в рабочем документе появится знак присваивания (:=);
- напечатайте значение, которое присваиваете переменной *t*, например 11;
- наберите 9/2 [space]*t^2=, где [space] – клавиша пробела; символ «^» означает возведение в степень, * – знак умножения, а наклонная черта вправо (/) – деление.

После ввода знака «=» MathCAD возвращает результат. Окно рабочего документа содержит одно определение, которое определяет переменную, и одно вычисление, которое дает результат. Интерфейс пересчитывает результаты сразу после внесения любых изменений в рабочий документ. Если заменить, например, число 11 в примере на какое-либо другое, MathCAD изменит результат, когда будет введен [Enter] или щелкнете мышью вне формулы. Пересчет формул можно произвести нажатием F9.

Переменные могут быть определены в одном и том же рабочем документе неоднократно, например, дважды. MathCAD будет просто использовать первое определение для всех выражений ниже первого определения и выше второго. В выражениях, находящихся ниже второго определения, MathCAD использует второе определение. Хотя таких переопределений следует избегать.

Программа может выполнять повторяющиеся или итерационные вычисления и вычисления отдельных выражений. Для этого MathCAD использует специальный тип переменных – «дискретные аргументы». Переменная типа «дискретный аргумент» принимает диапазон значений. Если в выражении присутствует дискретный аргумент, то MathCAD вычисляет выражение столько раз, сколько значений содержит дискретный аргумент. Для определения дискретного аргумента должны быть заданы:

- имя переменной слева;
- или := , или ≅ в середине;
- допустимый диапазон справа.

Для того чтобы вычислить выражение для диапазона значений, сначала определите дискретный аргумент:

• напечатайте j и затем нажмите клавишу двоеточия (:). Пустое поле означает, что MathCAD ожидает определение для j, не зная, будет ли j обычной переменной или дискретным аргументом;

• напечатайте 1, затем нажмите клавишу «точка с запятой» (;). Это сообщает MathCAD, что определяется дискретный аргумент. MathCAD показывает ; как две точки, что означает диапазон. Завершите определение дискретного аргумента, печатая 15 в оставшемся поле. Это определение указывает, что j принимает значения 1, 2 .. 15.

Чтобы определить дискретный аргумент с шагом, отличным от единицы, нужно выполнить следующее:

• напечатать k: 1, 1.5 ; 15;

• на экране это будет выглядеть как k:= 1, 1.5 .. 15.

В этом определении диапазона:

• переменная k – имя дискретного аргумента; это должно быть простое имя;

• число 1 – первое значение переменной k;

• число 1.5 – второе значение в диапазоне; это не размер шага. Размер шага в этом примере 0.5 – разница между 1.5 и 1;

• число 15 – последнее значение в диапазоне; если третье число в определении диапазона не равно целому числу приращений начального значения, аргумент все равно не выйдет за его пределы.

Можно использовать произвольные скалярные выражения вместо 1, 1.5 и 15, но эти значения должны быть всегда числовыми. Если только дискретный аргумент определен, он принимает полный диапазон значений каждый раз, когда используется.

Нельзя определить простую переменную через дискретный аргумент. Например, если определив j, записать $i := j+1$, то MathCAD истолкует это как попытку приравнять скалярную переменную к дискретному аргументу и отметит уравнение сообщением «*нескалярная величина*». Если дискретный аргумент используется в выражении, MathCAD вычисляет выражение один раз для каждого его значения. Этот принцип выражает различие между выражениями с дискретным аргументом и без него. Выражения, которые не содержат дискретный аргумент, имеют только одно значение. Выражения, содержащие дискретные аргументы, принимают много значений, которые соответствуют каждому значению каждого аргумента.

Пример 1.2. Определение дискретного аргумента.

Определение функции аналогично определению переменной. Имя функции должно стоять слева, знак присваивания (:=) – посередине, а выражение – справа. Основное различие состоит в том, что теперь имя включает список аргументов.

$j := 0..10 \qquad k := 1, 1.5..6$

j =	k =
0	1
1	1.5
2	2
3	2.5
4	3
5	3.5
6	4
7	4.5
8	5
9	5.5
10	6

Для задания функции необходимо:

- ввести имя функции, например *f*;
- ввести левую скобку, а вслед за ней – имя или список имен, разделенных запятой. Для завершения списка аргументов нужно ввести правую скобку. Не имеет значения, были ранее определены или использованы в рабочем документе имена из списка аргументов. Важно только, чтобы эти аргументы были именами, а не более сложными выражениями;
- ввести : для оператора присваивания (:=);
- набрать выражение, задающее функцию. Оно может содержать любые ранее определенные функции и переменные, включая аргументы функции.

Определенная таким образом функция может быть использована везде ниже определения, также как используются переменные.

При использовании функции в выражении MathCAD:

- вычисляет значения аргументов, указанных в скобках;
- заменяет формальные параметры (аргументы в определении функции) фактическими значениями аргументов, указанных в скобках;
- выполняет вычисления, предписанные определением функции, и возвращает результат вычислений как значение функции.

Пример 1.3. Задание функций.

$$f(x,y) := 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1$$

$$g(x) := \sin(x) + \cos(x) - \tan(x)$$

$$h(z) := z_0 - \frac{z_1}{z_0 z_2} \cdot z_2$$

$$t(x,y) := g(x)\,f(x,y)$$

$$f(4,4) = 161$$

$$g(7) = 0.539$$

$$t(x,y) \rightarrow (\sin(x) + \cos(x) - \tan(x)) \cdot \left(3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1\right)$$

Если в определении функции используется имя переменной, которой нет в списке аргументов, то оно должно быть определено перед определением функции. Значение этой переменной в момент ввода определения функции становится постоянной ее частью.

Каким образом строятся математические выражения в MathCAD? Многие математические выражения можно создавать, просто вводя последовательность символов и знаков математических операций. Часть символов – буквы и цифры – служат для ввода чисел и имен функций и переменных, другие – для создания операторов. Можно набрать многие из этих операторов, нажимая соответствующие кнопки на различных палитрах. Например, арифметическую палитру можно открыть, нажав кнопку с изображением калькулятора. Математические выражения имеют строго определенную структуру, и редактор формул MathCAD разработан с учетом этого. Он собирает различные части выражения, используя приоритет операций и некоторые дополнительные правила, которые упрощают ввод знаменателей, показателей степени и выражений в радикалах. Например, если набрать / чтобы создать дробь, курсор будет оставаться в знаменателе, пока ему явно не указать, чтобы он покинул знаменатель, щелкнув мышью вне знаменателя, нажав [Space] или используя клавиши курсора. В этом случае операторы являются «*цепкими*». Операции деления, возведения в степень и извлечения корня в MathCAD – «цепкие» операции, т. е. после создания одной из этих операций все затем печатаемое будет частью знаменателя, показателя степени или подкоренного выражения пока явно не переместить курсор, нажимая [Space], клавиши курсора или с помощью мыши. Чтобы покинуть выражение, можно:

- щелкнуть снаружи выражения мышью;
- нажать клавишу ввода [Enter].

Правила редактирования существующего выражения. Чтобы отредактировать имя или число:

- щелкните на нем – это поместит маркер ввода в нужное место;
- при необходимости нажмите клавиши управления курсором, чтобы переместить маркер;
- если напечатать символ, он появится слева от маркера ввода; нажатие клавиши [Backspace] удаляет символ слева от маркера ввода.

Для замены оператора:

- щелкните на знаке мышью или используйте клавиши курсора;
- нажмите клавишу [Del] или клавишу [Backspace]; повторное нажатие удаляет все выражение;
- нажмите другой знак.

Вставка оператора. Проще вставить оператор между двумя буквами или цифрами, стоящими рядом. Например, чтобы вставить знак деления между двумя символами, стоящими рядом, нужно:

- вставить маркер ввода между ними;
- нажать знак деления (/).

Просто вставлять операторы, которые требуют только одного операнда. Примеры таких операндов: квадратный корень, модуль и комплексное сопряжение. Чтобы вставить один из них, выделите все выражение, к которому нужно применить оператор, и наберите соответствующую комбинацию клавиш. Многие из операторов также доступны на арифметической палитре.

Удаление оператора. Можно удалить оператор, соединяющий два имени переменных или две константы, а также операторы, требующие только одного операнда:

- поместите маркер ввода после оператора;
- нажмите [Backspace].

Или

- поместите маркер ввода перед оператором;
- нажмите [Del].

Чтобы удалить оператор, который имеет только один операнд типа $|x|$, $x!$: охватите оператор маркером ввода и нажмите [Del] или [Backspace].

Чтобы вычислить выражение, можно:

- ввести выражение, содержащее любую допустимую комбинацию чисел, переменных и функций, включая знаки операций и скобки; любые переменные или функции, используемые в этом выражении, должны быть определены в рабочем документе;
- нажать клавишу =.

Прерывание вычислений. Для того чтобы прервать процесс вычислений, нажмите клавишу [Esc]. После появления диалогового окна щелкните по кнопке OK для остановки процесса вычислений или по кнопке **Отмена** для его продолжения.

Сообщение об ошибках. Определив выражение, вызвавшее ошибку, нужно его отредактировать с целью устранения ошибки или исправить определение переменной, приведшей к ошибке. После щелчка по выражению и начала редактирования MathCAD удаляет сообщение об ошибке. После щелчка вне уравнения или нажатия клавиши F9 MathCAD повторно вычисляет выражение. Если ошибка устранена, то MathCAD затем повторно вычисляет другие выражения, зависящие от измененного.

Выражение, отмеченное сообщением об ошибке, не обязательно содержит ее причину. Причиной ошибки могут быть функции или переменные, определенные в рабочем документе значительно ранее. Для устранения ошибки придется отредактировать именно ее.

Рассмотрим допустимые в MathCAD имена переменных и функций. Имена могут содержать любые из следующих символов:

- прописные и строчные латинские буквы;
- цифры от 0 до 9;
- знак подчеркивания (_);
- штрих (`) (не апостроф) находится на одной клавише с тильдой (~);
- символ процента (%);
- греческие буквы; есть два способа набрать греческую букву: напечатать римский эквивалент и нажать [Ctrl] + G или щелкнуть по соответствующему символу на палитре греческих символов;
- символ бесконечности, который можно задать как комбинацию клавиш [Ctrl] + [Shift] + Z.

Имена переменных и функций не могут включать пробелы или любые другие символы, не перечисленные выше.

Ограничения:

- имя не может начинаться с цифры, знака подчеркивания, штриха или %;
- бесконечность может быть только первым символом в имени;
- любые символы, напечатанные после точки, будут записаны как нижний индекс.

MathCAD не делает различий между именами переменных и именами функций. Если определить вначале $f(x)$, а затем переменную f, окажется невозможным использовать $f(x)$ где-либо ниже определения f. Некоторые имена уже используются MathCAD для встроенных констант, единиц измерения и функций. Хотя имена можно переопределить, это уничтожит их встроенные значения.

MathCAD различает в именах символы верхнего и нижнего регистра, а также различные шрифты.

Кроме того, среда MathCAD включает так называемые *предопределенные переменные*. Программа содержит восемь переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Они называются встроенными или предопределенными. Эти переменные имеют или общепринятое значение (например, Пи или e), или используются как внутренние переменные, управляющие работой MathCAD. Переменные можно переопределять, например, определим $e := 2$. Ниже этого определения переменная e примет в рабочем документе новое значение.

Приведем примеры некоторых встроенных переменных:

- $p = 3.14159$ – число Пи;
- $e = 2.71828$ – основание натурального логарифма;
- $E = 10\text{^}307$ – машинная бесконечность;
- $\% = 0.01$ – процент.

MathCAD интерпретирует все, что начинается цифрой, как число. Цифра может сопровождаться:

- другими цифрами;
- десятичной точкой;

• цифрами после десятичной точки;

• символами h или o для шестнадцатеричных и восьмеричных чисел; символами i или j для комплексных чисел, которые MathCAD воспринимает в форме $a+bi$ (или $a+bj$).

Специальные функции и операторы для работы с комплексными числами:

• $\mathrm{Re}(z)$ – вещественная часть числа z;

• $\mathrm{Im}(z)$ – мнимая часть числа z;

• $\mathrm{Arg}(z)$ – аргумент числа z (угол в комплексной плоскости между вещественной осью и радиус-вектором, определяемым числом z);

• $|z|$ – модуль числа z.

Одиночное число в MathCAD называют *скаляром*. Столбец чисел называется *вектором*, а прямоугольная таблица чисел – *матрицей*.

Способы создания массива:

• заполнить массив пустых полей;

• использовать дискретный аргумент.

Можно различать имена векторов, матриц и скаляров, используя различный шрифт для их описания.

***Правила создания вектора* (*матрицы*).**

1. Щелкните в свободном месте рабочего документа и напечатайте имя вектора V или матрицы M, сопровождаемое символом двоеточия (:).

2. Выберите матрицы из меню **Вставка (Insert)** или нажмите комбинацию клавиш [Ctrl] + m или щелкните мышью на соответствующей палитре. Появится диалоговое окно, где Rows – количество строк, а Columns – количество столбцов.

3. Нажмите Ok. MathCAD создаст вектор (матрицу) с пустыми полями для заполнения. Заполните эти поля скалярными выражениями.

Теперь можно использовать имя вектора (матрицы) в любом выражении. Имя вектора и сам вектор взаимозаменяемы. Как только вектор определен, можно определить через него и другие. Можно обращаться к отдельным элементам массива, используя нижние и верхние индексы. Чтобы напечатать нижний индекс, используйте клавишу нижней скобки [. Чтобы вставить оператор верхнего индекса, нажмите комбинацию клавиш [Ctrl] + 6. Нижние индексы, подобно делению и возведению в степень, удерживают ввод. Что бы не печаталось после [все остается в нижнем индексе, пока не будет нажат пробел, чтобы выйти оттуда. Когда определены элементы вектора, часть из них можно оставить неопределенными. Если V был не определен и третий элемент вектора определяется равным 10, то нулевой, первый и второй элементы не определены. MathCAD заполняет эти элементы нулями, пока в них не будут внесены необходимые значения.

Пример 1.4. Определение и просмотр элементов матрицы (вектора).

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & -9 \\ 6 & -5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad W := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$i := 0..2 \qquad j := 0..3 \qquad C_{i,j} := i + j$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Можно создавать большие массивы, задавая диапазон изменения нижних индексов. Если массив имеет более чем девяти строк или столбцов, MathCAD автоматически отображает его в виде таблицы вывода с полосами прокрутки.

Векторные и матричные операторы. Некоторые из операторов MathCAD имеют особые значения в применении к векторам и матрицам. Например, символ умножения означает просто умножение, когда применяется к двум числам, но он же означает скалярное произведение, когда применяется к векторам, и умножение матриц, когда применяется к матрицам. Многие из этих операторов доступны из палитры символов. Обратите внимание, что операторы, которые ожидают в качестве аргумента вектор, всегда ожидают вектор-столбец, а не вектор-строку. MathCAD располагает встроенными операциями над векторами и матрицами.

Пример 1.5. Векторные и матричные функции.

Векторные и матричные операции

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad V := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad W := 2 \cdot V$$

сумма:

$$\sum V = 4$$

определитель:

$$|M| = 32$$

скалярное и векторное умножение:

$$V \cdot W = 12 \qquad V \times W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

обратная матрица:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -0.219 & 1.219 & -1.969 \\ 0.031 & -0.031 & 0.281 \\ 0.125 & -0.125 & 0.125 \end{bmatrix}$$

транспонирование:

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Векторные и матричные функции

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad V := \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ 50 \end{bmatrix}$$

cols(M) = 2   число строк и столбцов
rows(M) = 3   в матрице M
min(M) = -2   минимальный и максимальный
max(M) = 6   элементы матрицы

length(V) = 3   число элементов вектора V

last(V) = 2   индекс последнего элемента в векторе V

Решение матричных уравнений. Матричные уравнения представляют собой систему линейных алгебраических уравнений $AX = B$ и решаются путем обращения матрицы коэффициентов $X = A^{-1}B$.

Кроме того, в MathCAD есть также функция lsolve, позволяющая решать систему уравнений $AX = B$ в случае невырожденной матрицы A.

Пример 1.6. Решение системы линейных уравнений.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 13.75 \\ -17.5 \\ 18.75 \end{pmatrix} \qquad Y := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad Y = \begin{pmatrix} 13.75 \\ -17.5 \\ 18.75 \end{pmatrix}$$

Порядок выполнения работы
(включая пример и варианты заданий)

Студентам рекомендуется внимательно изучить теоретические сведения, разобрать приведенные там примеры, затем приступить к выполнению поставленного задания.

Тестовый пример.

1. Попробуем набрать следующее выражение:

$$\frac{x - 3a^2}{-4 + \sqrt{y+1}}$$

и вычислим его значение для $a = 0.1$, $x = 3.5$, $y = 1$. В первую очередь зададим значения переменных, входящих в состав данного выражения.

Напечатайте $x:3.5a:0.1\,y:1$. Затем наберите $x - 3 \cdot a\,{}^\wedge 2$.

До сих пор правила старшинства позволяли просто печатать символы подряд, дальше так продолжать нельзя, так как маркер ввода находится на двойке, и двойка станет числителем, если нажать /. Чтобы все выражение стало числителем, нажмите три раза клавишу [Space]. Маркер ввода охватит выражение целиком. Можно поэкспериментировать с другими клавишами курсора и щелкать мышью на других частях выражения. Прежде чем перейти к следующему шагу убедитесь, что маркер ввода охватывает все выражение.

Нажмите / , чтобы создать дробную черту напечатайте $-4+$ и щелкните на кнопке корня на арифметической палитре. Затем напечатайте $y+1$, чтобы завершить знаменатель. Чтобы добавить что-либо снаружи корня нажмите дважды клавишу [Space]. Чтобы вычислить значение данного выражения нажмите клавишу =.

2. Выполните вычисления.

2.1. $j := 0..8$.

2.2. $X_j := j^2 + 1$.

2.3. Наберите j : 0; 8.

2.4. Наберите X [j : j^2 [Space] +1.

2.5. Наберите $X =$.

Чтобы увидеть все элементы данного вектора используя полосы прокрутки, щелкните мышью по получившейся таблице вывода.

$$j := 0..2$$

$$M_{i,j} := i^2 + j^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Выполните вычисления по приведенным ниже формулам.

3.1. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задайте элементы вектора.

3.2. Введите с клавиатуры вектора W, V матрицы A, B. Вычислите: $W \times V$, $W \cdot V$, сумму элементов векторов W и V. Вычислите:

$$A^{-1},\ B^T,\ A \cdot B,\ A \cdot A^{-1},\ \ 2 \cdot A + B \ \cdot \ A - B^2 \ .$$

3.3. Наберите A: и щелкните мышью на палитре матричных операторов. Заполните поля диалогового окна и нажмите клавишу OK. Затем заполните пустые поля матрицы скалярными выражениями. Аналогично задайте матрицу B и векторы W, V.

Проведите необходимые вычисления, используя палитру матриц и векторов.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & -8 & -2 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$W \cdot V = 21 \qquad W \times V = \begin{pmatrix} -26 \\ 32 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad \sum V = 10 \qquad \sum W = 9$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.327 & 0.014 & -0.062 \\ -0.071 & -0.09 & 0.057 \\ -0.166 & 0.123 & 0.133 \end{pmatrix} \qquad B^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ -8 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 34 & -27 & -2 \\ -25 & 2 & 18 \\ 126 & -13 & 26 \end{pmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2 \cdot A + B) \cdot \left(A - B^{2}\right) = \begin{pmatrix} 849 & 248 & 141 \\ 305 & -32 & -172 \\ -966 & 2.664 \times 10^{3} & 447 \end{pmatrix}$$

Содержание отчета

1. Краткий обзор по теоретической части.
2. Ответы на контрольные вопросы.
3. Файл MathCAD с выполненными заданиями своего варианта.

Контрольные вопросы

1. Палитры символов.
2. Особенности работы с пакетом инженерных расчетов MathCAD.
3. Как определить переменную в пакете MathCAD? Приведите примеры.
4. Переменная типа «дискретный аргумент». Примеры.
5. Как в MathCAD определяется функция? Приведите примеры определения функции.
6. Построение выражения в MathCAD. Цепкие операторы.
7. Редактирование существующего выражения: замена, вставка, удаление оператора; вычисление выражения.
8. Сообщения об ошибках в пакете MathCAD. Исправление ошибок.
9. Допустимые в MathCAD имена переменных и функций. Предопределенные переменные. Числа.
10. Создание вектора (матрицы). Примеры.
11. Векторные и матричные операции (функции). Примеры.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Вычислить $\sqrt[3]{\dfrac{a+b^2}{x^2}}+a^2x^3-\pi$, где $a=-1.01$; $b=2.03$; $x=0.35$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора x по правилу $x_i=i^2+1$, если $i:=0..10$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}0\\-1\\6\end{bmatrix}$ и матрицы $A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\2&3&2\\3&7&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&0&1\\-3&1&7\\1&3&2\end{bmatrix}$.

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A\cdot B$, AA^{-1}, $2A+B \quad A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 2

1. Вычислить $x^3+\dfrac{1}{a+b}\cdot x^{a+b}-\sqrt{x+1}+3$, где $a=2.5$; $b=-0.05$; $x=7.86$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора x по правилу $x_j=\dfrac{j^2}{3}+1$, если $j=0..13$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W=\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ и матрицы $A=\begin{bmatrix}4&1&-4\\2&-4&6\\1&2&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&5&0\\1&-1&2\end{bmatrix}$.

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A\cdot B$,, AA^{-1}, $(2A+B)(A-B^2)$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 3

1. Вычислить $\dfrac{1+\pi x+4.71x^2}{\sqrt[4]{1+x^2}}+a^2x-b$, где $a=0.34$; $b=-3.04$; $x=1.03$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент», задать элементы вектора z по правилу $z_k=3-\dfrac{k}{2}$, если $k:=1..10$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W=\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ и матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A\cdot B$, AA^{-1}, $2A+B$ $A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 4

1. Вычислить $\left(1-\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)e^{1+\frac{1}{2n}}+\dfrac{x}{1-x^2/4}$, где $n=8.1$; $x=-4.1$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора z по правилу $z_i=\dfrac{2\pi i}{10}$, если $i:=2..16$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W=\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$ и матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A\cdot B$, AA^{-1}, $2A+B$ $A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 5

1. Вычислить $\dfrac{x^k}{2k-1 \quad k+3}+\sqrt{x^3+k}+\dfrac{1}{k}$, где $x=\dfrac{\pi}{2}$; $k=7$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора z по правилу $z_j = j+\dfrac{3}{j+1}$, если $j:=3..10$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W=\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$ и матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 2\\1 & -5 & 3\\0 & 1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\1 & 3 & 2\\4 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A\cdot B$, AA^{-1}, $2A+B \quad A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 6

1. Вычислить $\dfrac{x^k}{2k-1 \quad k=3}+\sqrt{x^3+k}+\dfrac{1}{k}$, где $x=0.53$; $k=2.62$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора z по правилу $z_i = 2\pi i+1$, если $i:=1..12$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W=\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$ и матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -2 & 4\\3 & -5 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\5 & 3 & -1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A\cdot B$, AA^{-1}, $2A+B \quad A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 7

1. Вычислить $\dfrac{y^2 - e^x}{1-x} + \sqrt{0.8x + y} - \dfrac{x^3}{0.701y}$, где $x = 0.205$; $y = 0.41$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора z по правилу $z_k = \dfrac{4}{k} + k\pi$, если $k := 2..15$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A \cdot B$, AA^{-1}, $2A + B$ $A - B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 8

1. Вычислить $\dfrac{x^2 e^x}{3+5a} + \dfrac{a^{x+4}}{x} - \sqrt{a+3}$, где $a = 8$; $x = 0.301$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора z по правилу $z_j = 5.2 - \dfrac{j}{3}$, если $j := 5..15$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ и матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A \cdot B$, AA^{-1}, $2A + B$ $A - B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 9

1. Вычислить $a^2 + \frac{b}{a+2b} - \pi\sqrt{a^2+b^2}$, где $a = 3.1$; $b = 4.2$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора x по правилу $x_j = \frac{1}{j} + j^2$, если $j := 1..12$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ и матрицы $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A \cdot B$, AA^{-1}, $2A+B$ $A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Вариант 10

1. Вычислить $\frac{x^d}{c+d} + \pi e^{x+c} - \sqrt[4]{x^2+4}$, где $c = 0.04$; $d = 0.41$; $x = 0.9$.

2. Используя переменную типа «дискретный аргумент» задать элементы вектора z по правилу $z_k = k^2 + 1/3$, если $k := 0..11$.

3. Ввести с клавиатуры векторы $W = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ и матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Вычислить:

а) скалярное и векторное произведение векторов W и V;

б) сумму элементов данных векторов;

в) A^{-1}, B^T, $A \cdot B$, AA^{-1}, $2A+B$ $A-B^2$;

г) сумму элементов каждой строки матрицы B.

Лабораторная работа № 2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ MATHCAD. ОПЕРАТОРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цель работы: изучение вычислительных возможностей символьного пакета MathCad для научных и инженерных расчетов; приобретение навыков работы с основными панелями инструментов.

Теоретические сведения

В MathCad используются арифметические операторы, подобные операторам сложения и вычитания, умножения и деления, а также операторы, определенные для матриц, и специальные операторы типа вычисления интегралов и производных. Операторы можно вводить, используя комбинации клавиш или палитры операторов. Пиктограммы на кнопках палитры указывают, какой оператор появляется при нажатии на данную кнопку. При задержке указателя мыши над кнопкой появляется надпись, указывающая ее назначение. Чтобы вставить оператор из палитры, укажите мышью, где необходимо поместить оператор, затем нажмите на кнопку необходимого оператора на соответствующей палитре.

Операторы вычисления сумм и произведений. Оператор суммирования вычисляет сумму выражений по всем значениям индекса. Оператор произведения работает аналогичным образом. Чтобы создать оператор суммирования в рабочем документе:

- щелкните в свободном месте рабочего документа;
- нажмите комбинацию [Ctrl] + [Shift] + 4 или соответствующую кнопку на палитре интегралов и производных; в нижнем поле слева от знака равенства введите имя переменной – индекс суммирования; она определена только внутри оператора суммирования, вне оператора может существовать другая переменная с тем же индексом;
- в поле справа от знака равенства, а также над знаком суммы введите целое число или любое выражение, принимающее целое значение;
- в оставшемся поле введите выражение, которое необходимо просуммировать; оно будет содержать индекс суммирования; если выражение имеет несколько членов, используйте скобки ( ).

Для создания оператора произведения нажмите комбинацию клавиш [Ctrl] + [Shift] + 3 или щелкните мышью на соответствующей кнопке палитры интегралов «матанализ». Далее применяйте правило, описанное выше. Если индекс суммирования изменяется не с шагом равным единице, то используется обобщенный оператор суммы – обобщенный оператор произведения.

1. Напечатайте *i* : 1, 1.2 ; 10.

2. Щелкните на свободном месте рабочего документа. Нажмите комбинацию клавиш [Shift] + 4 или [Shift] + 3.

3. Щелкните на поле снизу и введите имя дискретного аргумента, который должен быть определен раньше.

4. Щелкните на поле справа от знака суммирования (знака произведения) и внесите выражение, содержащее дискретный аргумент.

5. Нажмите знак равенства, чтобы увидеть результат.

Пример 2.1. Вычисление сумм и произведений.

$$i := 0..20$$

$$x_i := \sin(0.1 \cdot i \cdot \pi)$$

$$\sum_{n=0}^{20} x_n \cdot n = -63.138$$

$$\sum_{n=0}^{20} n = 210$$

$$\sum_{j} 4 \cdot j = 160$$

$$j := 1, 1.2 .. 4$$

$$\prod_{k=0}^{20} (k+1) = 5.109 \times 10^{19}$$

$$\prod_{j} j = 6.643 \times 10^{5}$$

Численное дифференцирование. Оператор производной MathCAD предназначен для нахождения численного значения производной функции в заданной точке. Сначала определите точку x_0, в которой необходимо найти производную.

1. Щелкните ниже определения x_0. Затем наберите знак «**?**» или щелкните мышью по соответствующей кнопке палитры интегралов и производных. Появится оператор производной с двумя полями.

2. Щелкните на поле в знаменателе и наберите x_0. Это имя переменной, по которой производится дифференцирование.

3. Щелкните на поле справа от знака производной и наберите какое-либо выражение, которое нужно дифференцировать.

4. Нажмите знак равенства, чтобы увидеть результат.

Чтобы вычислить производную в символьном виде:

1. Наберите знак «**?**» или [Ctrl] + ?, чтобы задать оператор производной более высокого порядка.

2. В поле оператора введите выражение, которое необходимо продифференцировать.

3. Охватите все выражение маркером ввода.

4. Нажмите комбинацию клавиш [Shift] + F9 или используйте меню **Символы (Symbolics)** команда **Расчеты (Evaluate)**.

Для дифференцирования выражении, можно также использовать команду **Дифференцировать по переменной** из меню **Символы.**

Например, чтобы продифференцировать выражение $2x^2 + y$ по переменной x, необходимо:

• выделить переменную x;

• выбрать команду **Дифференцировать по переменной**; при этом MathCAD рассматривает все переменные, за исключением выделенной, как константы.

Пример 2.2. Дифференцирование выражений.

$$x0 := 1$$

$$\frac{d}{dx0}5x0^2 + 3x0 = 13 \qquad \frac{d^3}{dx0^3}\cos(x0) = 0.841$$

Символьное дифференцирование. С помощью встроенного оператора дифференцирования и оператора символьного равенства вычислим частные производные функции двух переменных первого и второго порядка.

Чтобы аналитически продифференцировать выражение по некоторой переменной, выделите в нем эту переменную и выберите команду Symbolics / Variable / Differentiate (**Символика / Переменная / Дифференцировать**) (рис. 2.1).

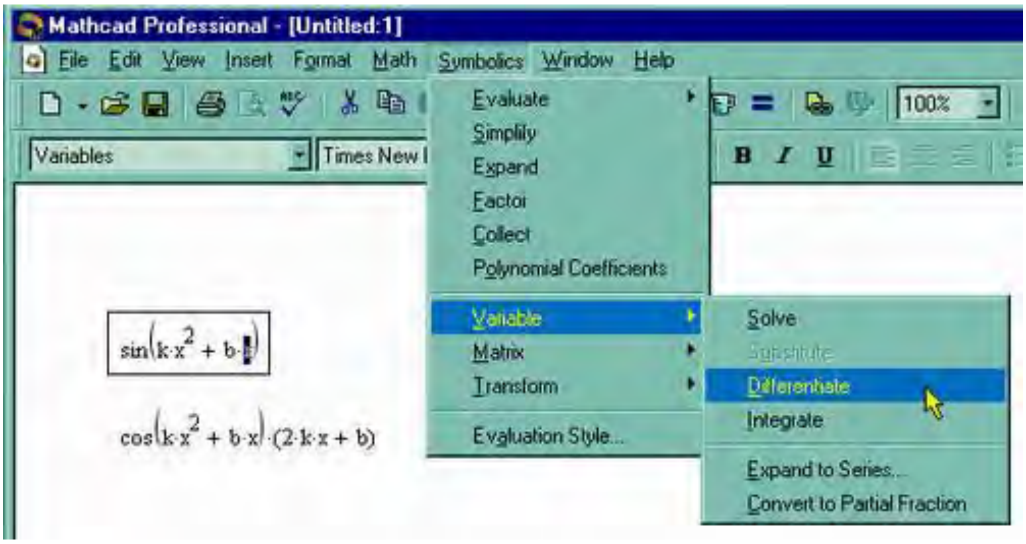


Рис. 2.1

В результате в следующей строке за выражением появится значение ее производной. Для того чтобы найти вторую производную, повторно примените эту последовательность действий, но уже к полученному результату дифференцирования. Так же находятся и производные высших порядков.

Пакет MathCAD позволяет также вычислять частные производные функций нескольких переменных.

Пример 2.3. Вычисление частных производных функции двух переменных.

$$f(x,y) := x^3 \ln(x+y)$$

$$\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow 3\cdot x^2\cdot \ln(x+y) + \frac{x^3}{(x+y)}$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow \frac{x^3}{(x+y)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \rightarrow 6\cdot x\cdot \ln(x+y) + 6\cdot\frac{x^2}{(x+y)} - \frac{x^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \rightarrow \frac{-x^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow 3\cdot\frac{x^2}{(x+y)} - \frac{x^3}{(x+y)^2}$$

$$\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow 3\cdot\frac{x^2}{(x+y)} - \frac{x^3}{(x+y)^2}$$

Оператор численного интегрирования. Определенные интегралы

1. Щелкните в свободном месте рабочего документа и нажмите комбинацию клавиш [Shift] + 7 или щелкните на соответствующей кнопке палитры.
2. Появится знак интеграла с пустыми полями для подынтегрального выражения, пределов интегрирования и переменной интегрирования.
3. Заполните пустые поля. Пределы интегрирования должны быть вещественными.
4. Кроме переменной интегрирования все переменные в подынтегральном выражении должны быть определены ранее в другом месте рабочего документа.
5. Переменная интегрирования должна быть простой переменной без индекса.
6. Если переменная интегрирования является размерной величиной, верхний и нижний пределы интегрирования должны иметь ту же самую размерность.

Если подынтегральное выражение имеет особенности, разрывы, численное решение, найденное MathCAD, может быть неточно.

Можно использовать интеграл совместно с дискретным аргументом, чтобы получить результаты для многих значений параметра.

***Пример** 2.4*. Использование интеграла совместно с дискретным аргументом:

$$i := 0..5$$

$$f(x) := x^2 + 3\cdot x - 2$$

$$g_i := \int_0^i f(x)\,dx$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.167 \\ 4.667 \\ 16.5 \\ 37.333 \\ 69.167 \end{pmatrix}$$

Чтобы вычислить двойной интеграл, необходимо:

• щелкнуть дважды мышью по символу интеграла на соответствующей палитре символов;

• ввести подынтегральное выражение, пределы и переменные интегрирования для каждого интеграла;

• нажать символ «=».

Пример 2.5. Отыскание центра масс треугольника, заданного неравенствами $0 < x < 1$ и $0 < y < x$, плотность которого пропорциональна расстоянию от начала координат.

$$\delta(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$mass := \int_0^1 \int_0^x \delta(x,y)\,dy\,dx \qquad mass = 0.383$$

$$xctr := \frac{1}{mass} \cdot \int_0^1 \int_0^x x\delta(x,y)\,dy\,dx \qquad xctr = 0.75$$

$$yctr := \frac{1}{mass} \int_0^1 \int_0^x y \cdot \delta(x,y)\,dy\,dx \qquad yctr = 0.398$$

Неопределенный интеграл. Для вычисления неопределенного интеграла можно использовать палитру инструментов calculus **«матанализ»**, а можно интегрировать выражение, не используя оператор вычисления неопределенного интеграла. Для этого используется комбинация клавиш [Ctrl] + I (или необходимо щелкнуть мышью на соответствующей кнопке палитры интегралов и производных). Чтобы вставить оператор неопределенного интеграла и поля ввода его параметров, нужно:

• заполнить поле ввода для подынтегрального выражения;

• поместить переменную интегрирования в поле ввода, следующее за «d»; это может быть имя любой переменной;

• охватить маркером ввода весь интеграл и нажать комбинацию клавиш [Shift] + F9.

Команда символьного меню Variable-Integrate (**Интегрировать по переменной)** интегрирует выражение по выделенной переменной. Если не выделить переменную, команда меню будет записана серым. MathCAD не может интегрировать, не зная переменной интегрирования. Если символьный процессор не может найти неопределенный интеграл, он возвращает интеграл неизмененным. Следует помнить, что результат интегрирования неоднозначен. Если $f(x)$ – интеграл данной функции, то для любой константы *C* интегралом будет также $f(x) + C$. Ответ, получаемый MathCAD, может отличаться на константу от ответа, который можно найти в таблицах. Если продифференцировать функцию и затем проинтегрировать полученный результат, не обязательно получится в качестве ответа исходная функция.

Пример 2.6. Интегрирование выражений.

$$\int_1^5 \sin(x)\,dx = 0.257$$

$$x^2 e^x \qquad 2 \cdot x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$$

$$\int (\sin(x) + \cos(x))\,dx \qquad -\sin(x) - \cos(x)$$

Символьный знак равенства позволяет MathCad выйти за рамки численного вычисления выражений. Для его использования необходимо:

- убедиться, что режим Automatic Calculations (**Автоматический режим**) из меню Math (**Математика**) включен, в противном случае его можно включить из меню;
- ввести выражение, которое надо упростить;
- нажать комбинацию клавиш [Ctrl] -. (точка), MathCAD отобразит символ стрелки; если щелкнуть мышью вне выражения, MathCAD отобразит упрощенную версию первоначального выражения; если выражение не может быть упрощено, MathCAD просто повторяет его справа от стрелки.

Пример 2.7. Использование символьного знака равенства.

$$\int x\,dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 \qquad \int_a^b \cos(x)\,dx \rightarrow \sin(b) - \sin(a)$$

$$\frac{d}{dx} e^{-2 \cdot x} \rightarrow -2 \cdot \exp(-2 \cdot x)$$

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{a22}{(a11 \cdot a22 - a12 \cdot a21)} & \dfrac{-a12}{(a11 \cdot a22 - a12 \cdot a21)} \\ \dfrac{-a21}{(a11 \cdot a22 - a12 \cdot a21)} & \dfrac{a11}{(a11 \cdot a22 - a12 \cdot a21)} \end{bmatrix}$$

Замечание 2.1. Символьный знак равенства является оператором, подобным любому оператору MathCAD. Применяется только ко всему выражению.

Встроенные функции. Это основной набор функций, которые поставляются вместе с пакетом MathCAD. Чтобы просмотреть их список, выберите команду Function (**Функция**) из меню Insert (**Вставка**) или щелкните на *f*(*x*) на панели инструментов, или нажмите комбинацию клавиш [Ctrl] + F. Имена встроенных функций чувствительны к регистру. Они должны быть напечатаны с использованием прописных или строчных букв (рис. 2.2).

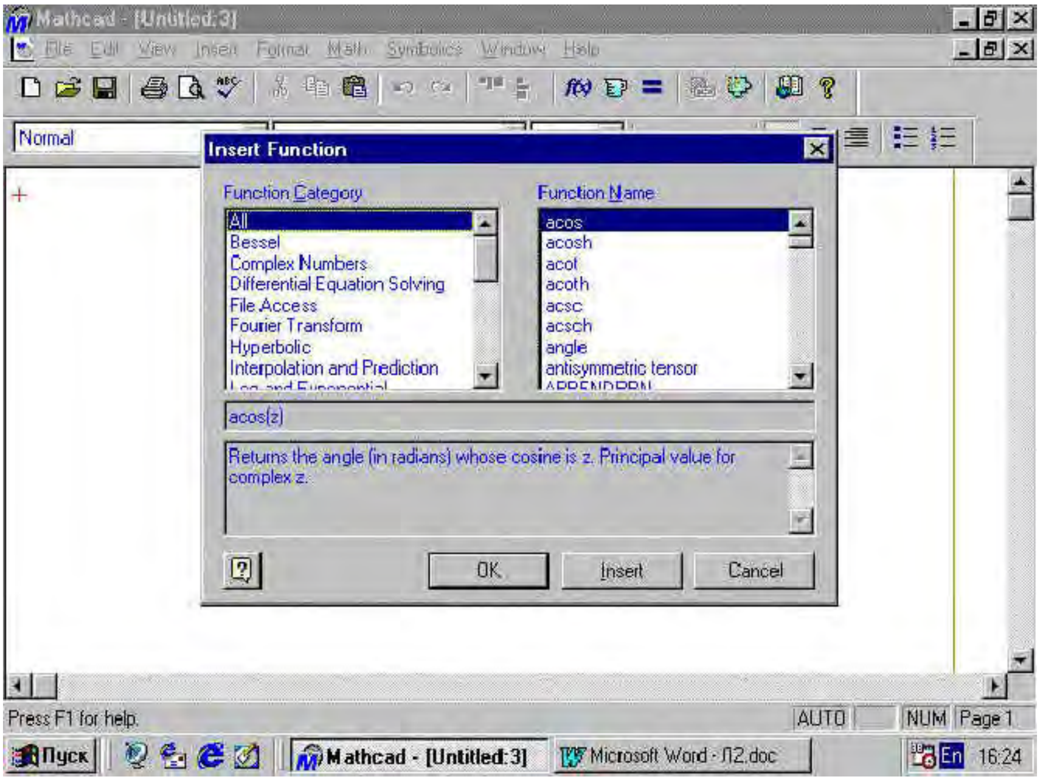


Рис. 2.2

Чтобы задать встроенную функцию в рабочем документе, нужно:

- щелкнуть мышью в свободном месте рабочего документа;
- дважды щелкнуть по имени функции, которую необходимо вставить, или пометить ее и щелкнуть по кнопке OK, или набрать с клавиатуры.

Левый список диалогового окна показывает все встроенные функции наряду с их аргументами. Внизу находится описание выбранной функции.

Порядок выполнения работы

Студенту рекомендуется внимательно изучить теоретический материал, проделать все примеры, в нем встречающиеся, и после этого приступать к выполнению своего варианта задания.

Содержание отчета

1. Краткий обзор по теоретической части.
2. Ответы на контрольные вопросы.
3. Файл MathCAD с выполненными заданиями своего варианта.

Контрольные вопросы

1. Какие операторы используются в Mathcad? Как их можно вводить?
2. Операторы вычисления сумм и произведений. Примеры.
3. Оператор производной: способ задания, дифференцирование в точке, символьное дифференцирование. Примеры.
4. Определенный интеграл: способ задания, переменные пределы интегрирования. Двойной и тройной интегралы.
5. Неопределенный интеграл: способ задания, примеры.
6. Символьный знак равенства, способы его задания, примеры.
7. Встроенные функции.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Вычислить $\prod_{i=3}^{11}\left(i^2+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi i}{2.34}\right)\right)$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(8+\sin n)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-5x+7)}{x-3}$.

3. Продифференцировать функцию $f\;\;x\;=\sqrt{1+\ln^2 x}$ символьно и в точке $x_0=0.35$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\sin(xy)^2$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin x}}\mathrm{d}x$; б) $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$; б) $\int_0^4\int_{-1}^2\int_2^3(2x^2+3y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 2

1. Вычислить $\sum_{k=1}^{23}k\cos\frac{k\pi}{3}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\;\;2+\;\;-1\;\;^n}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 6x}{(\mathrm{arctg}\,2x)^2}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^{2x}$ символьно и в точке $x_0=0.21$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\sin(x\sin y)$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int\frac{1+\operatorname{tg}x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\ln\ 1+\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}y$; б) $\int\limits_1^2\int\limits_{-2}^0\int\limits_0^3 2xy^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 3

1. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{12}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k!(3+k!)}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^3-6x^2+7x+2}{8-4x+3x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{3x}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ символьно и в точке $x_0=0.205$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=x^y+\ln x$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int\operatorname{ctg}^3x\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\sin\ \ln x}{x}\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_{-5}^0\mathrm{d}x\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y$; б) $\int\limits_0^1\int\limits_1^3\int\limits_{-1}^2 x^3yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 4

1. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{12}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!(3+k!)}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi n/4)}{n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 6x}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\sin x\cos(\sin x)$ символьно и в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=x^{\operatorname{tg}y}+\operatorname{ctg}xy$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$; б) $\int\limits_1^4 \frac{1+y^2}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{e}^{x^2+y^2} \mathrm{d}y$; б) $\int\limits_{-1}^{3}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2} (xy-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 5

1. Вычислить $\prod\limits_{i=n}^{12}\left(1-\frac{0.7}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{\frac{0.7}{\sqrt{n}}+\frac{0.4}{2n}}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{(2n)!}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\mathrm{ctg}^2 2x}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ символьно и в точке $x_0 = 0.621$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\log_3 x+\cos(xy)$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x}$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$; б) $\int\limits_{-1}^{3}\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{1}(x+yz^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 6

1. Вычислить $\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{n}{(n+1)!}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,x$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\mathrm{e}^{x^2-3x}$ символьно и в точке $x_0=0.315$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$; б) $\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^2 (x^3+y^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 7

1. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{7} \frac{2^k}{4k^2-1}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-2^n}{5+2^{n+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\arcsin^2 x$ символьно и в точке $x_0=0.405$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{4x+3}{1-3x-x^2}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$; б) $\int\limits_{-1}^5\int\limits_1^3\int\limits_0^4 (x+y-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 8

1. Вычислить $\sum\limits_{n=1}^{10} \frac{2.5\mathrm{e}^{-n}}{2n+(n-1)!}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ \ln(x+1)-\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}\right)$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ символьно и в точке $x_0=0.306$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\mathrm{e}^x \mathrm{ctg}\, y$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int\limits_{-3}^{3} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$; б) $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-2}^{0} (x+2yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 9

1. Вычислить $\prod\limits_{i=0}^{20} i+\sin\frac{i+1}{5}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^{x+3}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$ символьно и в точке $x_0=0.605$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\ln(x^2+y)$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{1}^{2} x\log_2 x\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы

а) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y$; б) $\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{0}^{1} xy-z^3 \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Вариант 10

1. Вычислить $\prod\limits_{i=0}^{10} \frac{2}{i}\sin\frac{i\pi}{10}$.

2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos\pi n}{\sqrt{n}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$.

3. Продифференцировать функцию $y(x)=\mathrm{arctg}\sqrt{1-x^2}$ символьно и в точке $x_0=0.404$.

4. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции $f(x,y)=\mathrm{tg}\frac{x^2}{y^3}$.

5. Вычислить интегралы: а) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$.

6. Вычислить двойной и тройной интегралы:

а) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy$; б) $\int_{-2}^{5}\int_{0}^{2}\int_{-1}^{3} x^2 y^2 z \, dx dy dz$.

Лабораторная работа № 3

ГРАФИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПАКЕТА ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ MATHCAD

Цель работы: изучение графических возможностей символьного пакета MathCAD; приобретение навыков построения графиков функции и поверхностей. Знакомство с возможностями анимации.

Теоретические сведения

В пакете MathCAD встроены несколько различных типов графиков, которые можно разделить на двумерные (или графики на плоскости) и трехмерные (графики в пространстве). В свою очередь двумерные графики делятся:

– на *XY* (декартовый) график (*XY* Plot);
– полярный график (Polar Plot).

Среди трехмерных выделяют:

– график трехмерной поверхности (Surface Plot);
– график линий уровня (Contour Plot);
– трехмерная гистограмма (3D Bar Plot);
– трехмерное множество точек (3D Scatter Plot);
– векторное поле (Vector Field Plot).

Деление графиков на типы несколько условно, так как управляя установками многочисленных параметров, можно создавать комбинации типов графиков, а также новые типы (например, двумерная гистограмма распределения является разновидностью простого *XY*-графика).

Все графики создаются аналогичным способом с помощью панели инструментов Graph (**График**), различия обусловлены отображаемыми данными.

Некорректное определение данных приводит к выдаче сообщения об ошибке.

Построение двумерного графика. К двумерным графикам относят графики в декартовой и полярной системах координат. Созданный однажды график одного типа нельзя переделать в график другого типа (в отличие от трехмерных графиков). Для построения *XY*-графика необходимы два ряда данных, откладываемых по осям *OX* и *OY*.

Для построения нужно:

• щелкнуть мышью в свободном месте рабочего документа;

• нажать комбинацию клавиш [Shift] + 2 или щелкнуть мышью по палитре графических операторов, или выбрать пункт *XY* Plot из меню Insert (**Вставка**).

Появится шаблон декартова графика с полями ввода для выражений, отображаемых по осям графика.

XY-график двух векторов.

Самый простой и наглядный способ получить декартов график – это сформировать два вектора данных, которые будут отложены вдоль осей *OX* и *OY*. Последовательность построения графика двух векторов *x* и *y* показана на рис. 3.1. В этом случае в шаблоны возле осей вводятся имена векторов. Также допускается откладывать по осям элементы векторов, т. е. вводить в шаблоны возле осей имена x_i и y_i соответственно. В результате получается график, на котором отложены точки, соответствующие парам элементов векторов, соединенные отрезками прямых линий. Образованная ими ломаная называется *рядом данных,* или *кривой* (*trace*).

Пример 3.1. Построение двумерного графика.

$i := 0..10$

$x_i := 0.5 \cdot i$

$y_i := \cos(x_i)$

x =

	0
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
9	4.5
10	5

y =

	0
0	1
1	0.878
2	0.54
3	0.071
4	-0.416
5	-0.801
6	-0.99
7	-0.936
8	-0.654
9	-0.211
10	0.284

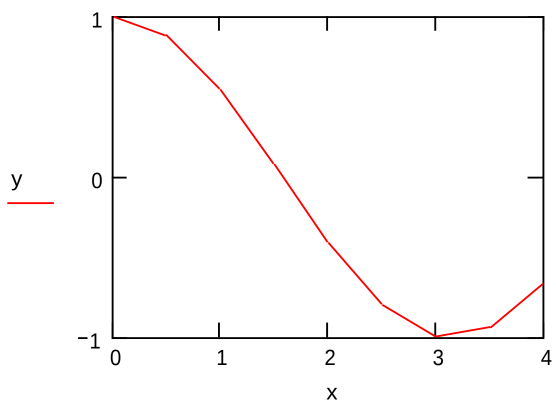


Рис. 3.1

XY-график функции.

График любой скалярной функции $f(x)$ можно построить двумя способами. Первый заключается в дискретизации значений функции, присвоении этих значений вектору и прорисовке графика вектора (рис. 3.2).

Второй способ, называемый *быстрым построением графика,* заключается во введении функции в один из шаблонов (например, *у* оси ординат), а имени аргумента – в шаблон оси абсцисс (рис. 3.3–3.5). В шаблоны слева и справа от аргумента необходимо ввести границы диапазона изменения значений аргумента. Если такой диапазон не задан, по умолчанию график будет построен в диапазоне значений аргумента от –10 до 10.

$x := 0, 0.1 .. \pi$

$y(x) := \cos(x)$

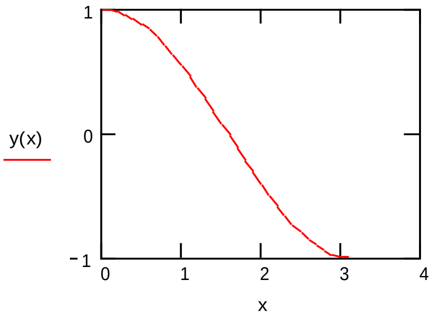


Рис. 3.2

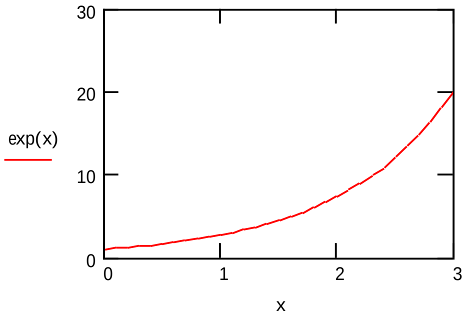


Рис. 3.3

$y(x) := \mathrm{atan}(x)$

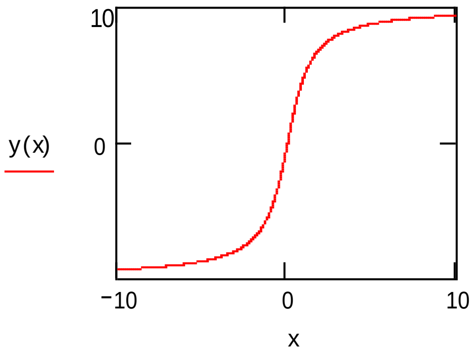


Рис. 3.4

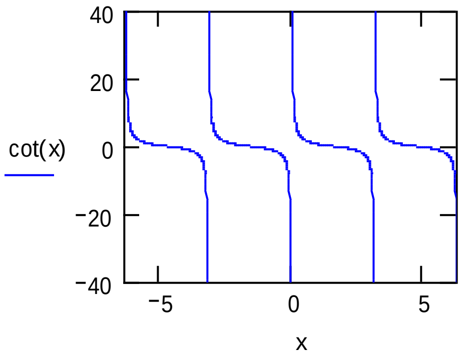


Рис. 3.5

Построение графиков в полярных координатах. Для создания полярного графика необходимо нажать кнопку Polar Plot на панели Graph и вставить в появившиеся шаблоны имена переменных и функций, которые будут нарисованы в полярной системе координат: угол (нижний шаблон) и радиус-вектор (левый шаблон). Аналогично построению графика в декартовых координатах по осям могут быть отложены два вектора, элементы векторов и ранжированные переменные в различных сочетаниях, а также может быть осуществлено быстрое построение графика функции (рис. 3.6, 3.7).

$\rho(\phi) := \cos(\phi) + 1$

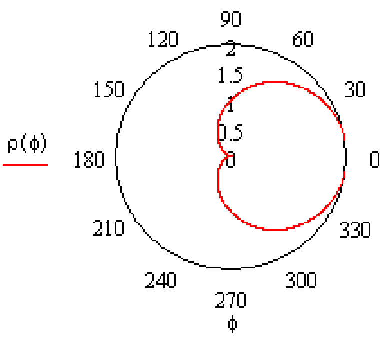


Рис. 3.6

$\tau := 0, 0.2 .. 3.2$

$r(\tau) := 2\sin(3 \cdot \tau)$

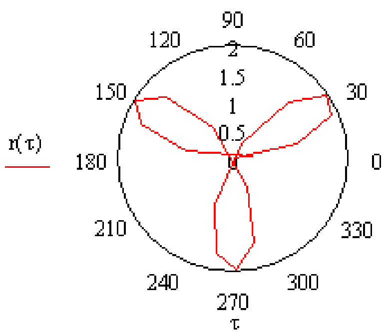


Рис. 3.7

График функции в полярных координатах можно построить также с помощью преобразований полярных координат в декартовые.

На рис. 3.8 показан пример построения графика кардиоиды в полярных координатах, уравнение которого задано в виде ρ(θ). Уравнения для $x(\theta)$ и $y(\theta)$ – обычное преобразование полярных координат в прямоугольные (декартовые).

$$N := 20$$

$$\theta := 0, \frac{2\cdot\pi}{N} .. 2\cdot\pi \qquad x(\theta) := \rho(\theta)\cdot\cos(\theta)$$

$$\rho(\theta) := \cos(\theta) + 1 \qquad y(\theta) := \rho(\theta)\cdot\sin(\theta)$$

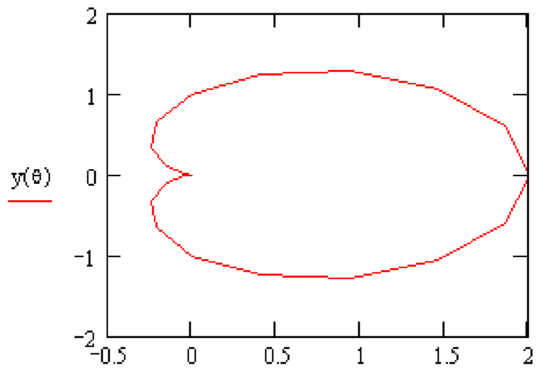


Рис. 3.8

Размещение нескольких графиков на чертеже. График может содержать несколько выражений по оси ординат в зависимости от одного выражения по оси абсцисс или несколько значений по оси ординат, согласованных с соответствующими выражениями по оси абсцисс. Чтобы представить графически несколько выражений по оси ординат относительно одного выражения по оси абсцисс, необходимо ввести первое выражение для оси ординат, а затем нажать клавишу [,] (запятая). Непосредственно под первым выражением появится пустое поле (шаблон). В появившемся месте ввода записывается имя второй функции, сопровождаемое другой запятой, и т. д. Все выражения должны использовать одну и ту же переменную (рис. 3.9, 3.10).

$$x := \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} + 0.1 .. \frac{\pi}{2}$$

$$y1(x) := \sin(x)$$

$$y2(x) := \cos(x)$$

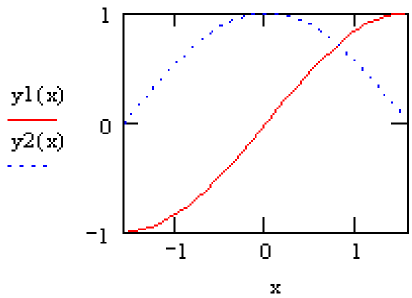


Рис. 3.9

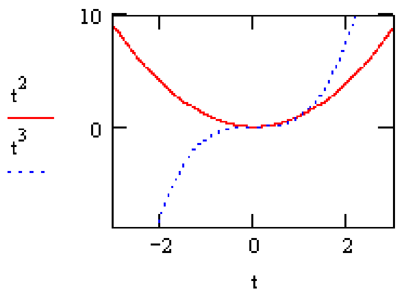


Рис. 3.10

Чтобы построить несколько независимых кривых на одном чертеже, введите два или более выражений, отделяемых запятыми на оси абсцисс, и то же самое число выражений на оси ординат (рис. 3.11). MathCAD согласует выражения попарно: первое выражение оси абсцисс с первым выражением оси ординат, второе со вторым и т. д.

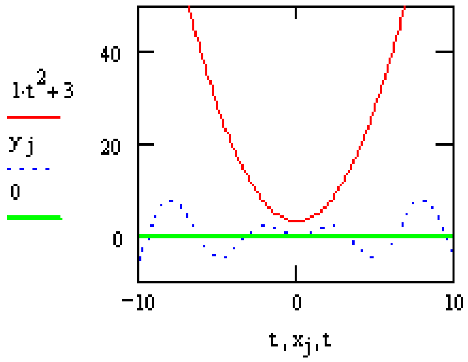


Рис. 3.11

Можно построить до 16 функций на оси ординат в зависимости от одного аргумента на оси абсцисс. Если для каждой кривой используется свой аргумент, то можно отобразить только до 10 графиков.

Все графики на чертеже совместно используют одни границы на осях. Для каждой оси все выражения и границы должны иметь совместимые размерности.

Форматирование двумерных графиков. ***Изменение размеров графика***. Чтобы изменить размеры графика, необходимо:

- заключить его в выделяющий прямоугольник с помощью щелчка мыши;
- переместить указатель мыши к левому нижнему краю выделяющего прямоугольника; указатель превратится в двойную стрелку;
- переместить указатель при нажатой кнопке мыши, растягивая графическую область в желаемом направлении;
- по достижении желаемого размера отпустить кнопку мыши.

Для отмены выделения щелкните мышью вне графической области.

При двойном щелчке мышью в области графика (либо выборе в контекстном меню команды Format) откроется окно форматирования графика с четырь-мя вкладками.

1. На вкладке **Trace (Трассировки)** предоставляется возможность *задать следующие параметры линий*:

- **Line (Линия)** – стиль линии:
  - solid – сплошная;
  - dot – мелкий пунктир;
  - dadot – штрих-пунктир;
  - dash – крупный пунктир;

- **Color (Цвет)** – цвет линии и точек данных;
- **Weight (Толщина)** – толщина линии и точек данных;
- **Type (Тип)** – тип представления ряда данных:
  – line – линия;
  – point – точка;
  – bar – столбик гистограммы;
  – solidbar – закрашенный столбик;
  – step – ступенька;
  – stem – палочка с кружочком;
  – draw – рисованная линия;
  – error – позволяет отложить на графике вычисленную ошибку.

2. *Сохранение установок по умолчанию.*

На вкладке **Defaults (По умолчанию)** диалога Formatting Currently Selected *XY* **Plot (Форматирование выбранного графика)** находятся два элемента управления:

– кнопка **Change to Defaults (Вернуть установки по умолчанию)** позволяет изменить все установки выделенного графика на установки по умолчанию, принятые для текущего документа;

– флажок проверки **Use for Defaults (Использовать для установок по умолчанию)** фиксирует установками по умолчанию для данного документа установки выбранного графика.

3. *Создание заголовка графика с помощью вкладки Labels.*

Чтобы создать заголовок графика, необходимо:

- дважды щелкнуть мышью в области графика;
- в диалоге Formatting Currently Selected *XY* Plot **(Форматирование выбранного графика)** перейти на вкладку Labels **(Метки)**;
- в поле Title **(Заголовок)** ввести текст заголовка;
- установить флажок проверки Show Title **(Показать заголовок)**;
- выбрать переключатель Above **(Сверху)** или Below **(Снизу)**, чтобы заголовок появился сверху или снизу графика;
- нажать кнопку **ОК.**

4. *Форматирование осей графиков с помощью вкладки XY Axes.*

Возможности форматирования координатных осей графиков включают в себя управление их внешним видом, диапазоном, шкалой, нумерацией и отображением некоторых значений на осях при помощи маркеров.

Изменение диапазона осей. Когда график создается впервые, MathCAD выбирает представленный диапазон для обеих координатных осей автоматически. Чтобы изменить этот диапазон, нужно:

- перейти к редактированию графика, щелкнув в его пределах мышью – график будет выделен, а вблизи каждой из осей появятся два поля с числами, обозначающими границы диапазона;

- при щелчке мышью в области одного из полей, чтобы редактировать соответствующую границу оси (например, верхнего предела оси *x*);
- пользуясь клавишами управления курсором и клавишами BackSpace или Del, удалите содержимое поля;
- введите новое значение диапазона;
- щелкните за пределами поля, и график будет автоматически перерисован в новых пределах.

Предусмотрена удобная возможность просмотра графика в увеличенном масштабе. Для этого необходимо:

- щелкнуть правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать команду Zoom **(Масштаб)** – откроется диалоговое окно *XY* **Zoom (Масштаб по осям *X* и** *Y*);
- обвести указателем мыши при ее нажатой левой кнопке ту область графика, которую необходимо увеличить – эта область окажется обведенной пунктирной линией;
- в открытом окне щелкнуть по кнопке **Zoom (Масштабировать)** – выделенная область увеличится.

Чтобы вернуться к исходному виду графика, используются кнопки Unzoom (**Отменить масштабирование**) или **Full View (Вид полностью)**. Чтобы закрыть окно, оставив график увеличенным, необходимо нажать клавишу **ОК**.

Построение графиков поверхностей. Для построения графика поверхности с уравнением $z = f(x, y)$ надо определить матрицу значений аппликат точек поверхности, которую необходимо отобразить графически. MathCAD будет использовать номер строки и номер столбца матрицы в качестве координат по осям *X* и *Y*. Элементы матрицы будут представлены на графике как высоты выше или ниже плоскости *XY*.

Для построения графика поверхности нужно нажать комбинацию клавиш **[Ctrl] + 2** или щелкнуть мышью на графической палитре инструментов, или из меню **Вставка** (Insert) выбрать команду Grafics (Surface plot). MathCAD покажет рамку с одним полем ввода, в которое вводится имя матрицы. Остается установить указатель мыши вне графического блока и щелкнуть левой кнопкой. По умолчанию ориентация поверхности такова, что первая строка матрицы простирается из дальнего левого угла сетки, а первый столбец из дальнего левого угла по направлению к наблюдателю. MathCAD рисует линии, чтобы соединить точки на графике. Эти линии определяют поверхность. Типичный график поверхности показывает значения функции двух переменных. Чтобы создать такой график, необходимо сначала образовать матрицу, содержащую значения этой функции, а затем построить поверхностный график этой матрицы (рис. 3.12).

$$N := 20$$

$$i := 0..N \qquad j := 0..N$$

$$x_i := -1.5 + 0.15 \cdot i \qquad y_j := -1.5 + 0.15 \cdot j$$

$$f(x, y) := \sin\left(x^2 + y^2\right) \qquad M_{i,j} := f\left(x_i, y_j\right)$$

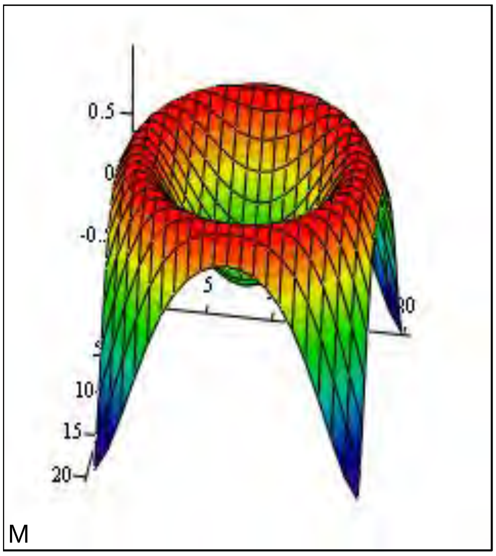


Рис. 3.12

Быстрое построение графика (рис. 3.13). Для быстрого построения графика необходимо:

- задать функцию двух переменных;
- установив курсор в то место, где нужно построить график, отрыть панель **График** и щелкнуть по кнопке **График поверхности**. На экране появится шаблон графика;
- в месте ввода ввести имя функции без аргументов.

$$G(a, b) := \begin{bmatrix} (5 + 2 \cdot \cos(a)) \cdot \cos(b) \\ (5 + 2 \cdot \cos(a)) \cdot \sin(b) \\ 2 \cdot \sin(a) \end{bmatrix}$$

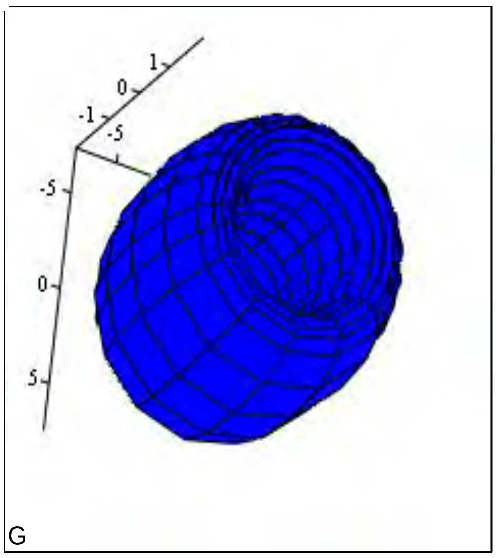


Рис. 3.13

Кроме графиков поверхности, MathCAD также может строить карты линий уровня (рис. 3.14), трехмерные гистограммы (рис. 3.15), точечные графики (рис. 3.16) и графики векторных полей (рис. 3.17).

Пример 3.1.

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

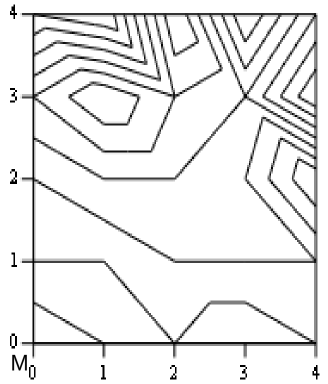


Рис. 3.14

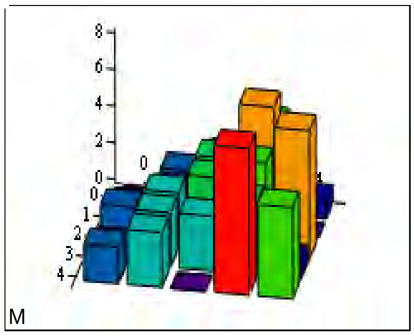


Рис. 3.15

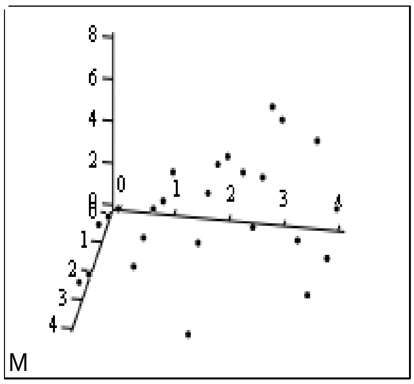


Рис. 3.16

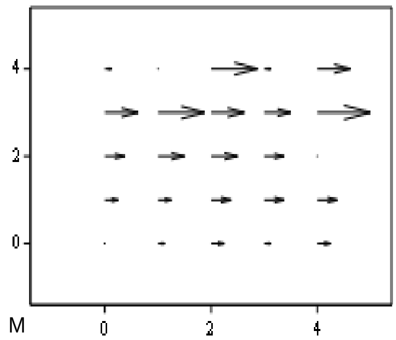


Рис. 3.17

Форматирование графика поверхности. Форматирование трехмерных графиков выполняется с помощью диалогового окна **3-D Plot Format (Форматирование 3-D графика)**, которое вызывается двойным щелчком мыши в области графика. Параметры трехмерных графиков всех типов устанавливаются посредством этого диалогового окна. В диалоге 3-D Plot Format доступно большое количество параметров, изменение которых способно сильно повлиять на внешний вид графика. Они сгруппированы по принципу действия на нескольких вкладках.

Изменение типа графика. Чтобы поменять тип уже имеющегося графика (например, построить вместо поверхности график линий уровня и т. д.), соответствующий переключатель в нижней части вкладки **General (Общие)** установите в необходимое положение. После нажатия кнопки **ОК** график будет перерисован.

Вращение графика. Самый простой способ изменения ориентации системы координат с графиком в трехмерном пространстве – это перетаскивание ее указателем мыши. Попробуйте перемещать при нажатой левой кнопке мыши указатель в пределах графика, и увидите, как поворачивается график. Другой способ изменения ориентации графика – с помощью полей **Rotation (Вращение)**, **Tilt (Наклон)** и Twist **(Поворот)** на вкладке General, которые в совокупности определяют соответствующие углы (в градусах) и тем самым задают направление всех трех осей координат в пространстве. Оперирование мышью с нажатой клавишей Shift позволяет после отпускания левой кнопки наблюдать анимированную картину вращения поверхности в любом заданном направлении. Для остановки вращения надо щелкнуть левой кнопкой мыши.

Масштабирование графика. В поле **Zoom (Масштаб)** вкладки General можно задать числовое значение масштаба.

Форматирование осей. Вкладка **Axes (Оси)** содержит три вложенных вкладки, в которых задаются параметры для каждой из трех координатных осей. В частности, можно включить или отключить показ линий сетки, нумерации и задать диапазон по каждой из осей. Смысл этих операций сходен с аналогичными операциями для двумерных графиков. При помощи вкладки Backplanes **(Плоскости заднего плана)** задается показ проекций координатной сетки на три скрытые плоскости трехмерного графика.

Стиль заливки и линий. С помощью вкладки Appearance **(Появление)** для контурного и поверхностного графиков можно выбрать стиль заливки линий графика поверхности. При выборе переключателя **Fill Surface (Заливка поверхности)** из группы Fill Options **(Опции заливки)** можно получить доступ к опциям цвета (Color Options). Если выбрать переключатель Solid Color **(Один цвет)**, то получится однотонная заливка поверхности. Если установить переключатель Color-**map (Цветовая схема)**, то поверхность или контурный график будут залиты разными цветами и оттенками, причем выбрать цветовую схему можно на вкладке **Advanced (Дополнительно)**.

Спецэффекты. Во вкладке **Advanced (Дополнительно)** имеется доступ к управлению несколькими специальными эффектами оформления графиков, благодаря которым они выглядят красивее:

– **Shininess (Сияние)** – регулировка сияния от 0 до 128;

– Fog **(Туман)** – эффект тумана;

– **Transparency (Прозрачность)** – процент прозрачности графика;

– **Perspective (Перспектива)** – показ перспективы с определением видимости расстояния.

Еще один спецэффект подсветки графика задается на вкладке Lighting **(Подсветка)**, причем имеются как встроенные схемы подсветки, так и возможность задавать ее цвет и направление самому пользователю.

Порядок выполнения работы

Студенту рекомендуется внимательно изучить теоретический материал, проделать все примеры, в нем встречающиеся, и после этого приступать к выполнению своего варианта задания.

Содержание отчета

Отчет должен содержать ответы на контрольные вопросы, результат решения соответствующего варианта.

Контрольные вопросы

1. Двумерные графики в MathCAD: построение, изменение размеров.
2. Форматирование двумерных графиков.
3. Построение нескольких графиков на одном чертеже. Имена кривых и отображаемые переменные.
4. Построение поверхностей.
5. Форматирование поверхностей.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Построить график функции $y\ \ x\ = \dfrac{e^x}{\sqrt[3]{x^2+5}}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in\ -3; 3$ графики функций $y_1(x) = x\sin 4x$, $y_2(x) = \cos 2x + 0.5$.

3. В полярной системе координат построить график трехлепестковой розы $\rho = a\sin k\varphi$ для $a = 1/2$, $k = 3$.

4. Построить поверхность $z = 4x^2 - y^2$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 2

1. Построить график функции $y(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ графики функций $y_1(x) = \dfrac{7}{2+x^2}$, $y_2(x) = (3+x)\sin x$.

3. В полярной системе координат построить график спирали Архимеда $\rho = \frac{\alpha}{\varphi^2}$ для $\alpha = 3$.

4. Построить поверхность $z = x^2 + 9y^2$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 3

1. Построить график функции $y(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in [1; 9]$ графики функций $y_1(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$, $y_2(x) = 2x - \ln x + 1.2$.

3. В полярной системе координат построить график улитки Паскаля $\rho = 2a \cos\varphi$ для $a = 3$.

4. Построить поверхность $z = x^2 + 9y$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 4

1. Построить график функции $y(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ графики функций $y_1(x) = x - \cos x$, $y_2(x) = x - 2x^2$.

3. В полярной системе координат построить график розы $\rho = a \sin k\varphi$ для $a = 2$, $k = 5/3$.

4. Построить поверхность $z = \sqrt{5x^2 + 3y^2}$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 5

1. Построить график функции $y(x) = \left| x + \frac{4}{x + 2} \right|$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in [-2; 2]$ графики функций $y_1(x) = x \sin x$, $y_2(x) = \frac{1}{3x}$.

3. В полярной системе координат построить график спирали Галилея $\rho = a\varphi - l$ для $a = 4$, $l = 1$.

4. Построить поверхность $z = \sin(x + y^2)$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 6

1. Построить график функции $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in [-5; 5]$ графики функций $y_1(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$, $y_2(x) = \sin\left(x^2 + 5\right)$.

3. В полярной системе координат построить график строфоиды $\rho = \dfrac{a}{\cos\phi} \pm a\mathrm{tg}\varphi$ для $a = 1$.

4. Построить поверхность $z = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 7

1. Построить график функции $y(x) = \dfrac{1-2x}{x^2 - x + 2}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in [-4\pi; 4\pi]$ графики функций $y_1(x) = \mathrm{tg}x$, $y_2(x) = \mathrm{ctg}x$.

3. В полярной системе координат построить график розы $\rho = a\sin\dfrac{\varphi}{2}$ для $a = 3$.

4. Построить поверхность $z = 3y^2 - 4x^2$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 8

1. Построить график функции $y(x) = x + \ln\left(x^2 + 1\right)$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in [-3; 3]$ графики функций $y_1(x) = x^2 + 2x + 4$, $y_2(x) = \left|3\sin x + 7\right|$.

3. В полярной системе координат построить график кардиоиды $\rho = 2r(1 - \cos\varphi)$ для $r = 3$.

4. Построить поверхность $z = 15y^2 - 4x$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 9

1. Построить график функции $y = x^2 \ln x$.

2. Построить в одной системе координат графики функций $y_1 = \sin\left(x^2 + 3\right)$, $y_2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$.

3. В полярной системе координат построить график логарифмической спирали $\rho = a^{\varphi}$ для $a = 2$.

4. Построить поверхность $z = 3x^2 + 18y^2$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 10

1. Построить график функции $y(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in \ -1;1$ графики функций $y_1(x) = \dfrac{x^2}{\arccos^3 x}$, $y_2(x) = \ln|x| + 3.$

3. В полярной системе координат построить график спирали «жезл» $\rho = a\sqrt{\varphi}$ для $a = 4.5$.

4. Построить поверхность $z = \sqrt{4x^2 + 3y^2}$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 11

1. Построить график функции $y(x) = 4e^{-x^2 + 2x}$.

2. Построить в одной системе координат при $x \in [0; 5]$ графики функций $y_1(x) = \mathrm{ch}x$, $y_2(x) = x^3 \ln x$.

3. В полярной системе координат построить график гиперболической спирали $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ для $a = 3$.

4. Построить поверхность $z = \cos\ x^2 + y$, окрасить ее и выполнить вращение.

Вариант 12

1. Построить график функции $y(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

2. Построить в одной системе координат графики функций $y_1(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$, $y_2(x) = \dfrac{4}{x^2}$.

3. В полярной системе координат построить график циссоиды Диоклеса $\rho = 2a\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ для $a = 2.5$.

4. Построить поверхность $z = \sqrt{1 - x^2 - 3y^2}$, окрасить ее и выполнить вращение.

Лабораторная работа №4

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: изучение вычислительных возможностей пакета MathCAD при решении задачи Коши для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Теоретические сведения

ОДУ n-го порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0 \text{ или } y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right),$$

где x – независимая переменная;

y – искомая функция; $y', y'', \ldots y^{(n)}$ – ее производные.

Задача нахождения решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,$$

$$y''(x_0) = y''_0, \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

называется *задачей Коши*.

Дифференциальные уравнения первого порядка. ОДУ первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y).$$

Найти такое решение уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Уравнение с разделяющимися переменными. ОДУ вида $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)\, \mathrm{d}x + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)\, \mathrm{d}y = 0$ или $y' = f(x) \cdot g(y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Оно приводится к уравнению с разделенными переменными:

$$X(x)\, \mathrm{d}x = Y(y)\, \mathrm{d}y,$$

которое решается почленным интегрированием.

***Пример** 4.1*. Найти решение уравнения $(e^x+1)\cdot y dy - e^x dx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$ (задача Коши). Изобразите график решения (интегральную кривую, проходящую через точку (0, 1)).

Решение.

1. Разделите в уравнении переменные: $y dy = \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx$.

2. Установите режим автоматических вычислений.

3. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали, установив метку Horizontally в окне диалога строки Evaluation Style меню Symbolics.

4. Введите начальные условия $y(x_0)=y_0$.

5. Определите подынтегральные функции $Y(y)$ и $X(x)$:

$x_0 := 0; \quad y_0 := 1;$

$$X(x) := \frac{e^x}{1+e^x}; \qquad Y(y) := y.$$

6. Решите уравнение, задающее неявно $y(x)$ как функцию переменной x:

Given

$$\int_{x0}^{x} X(t)\,dt = \int_{y0}^{y} Y(t)\,dt$$

$$\text{Find}(y) \rightarrow \left[\left(2\cdot\ln(1+e^x)+1-2\cdot\ln(2)\right)^{\frac{1}{2}} \;\; -\left(2\cdot\ln(1+e^x)+1-2\cdot\ln(2)\right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Здесь Given – ключевое слово.

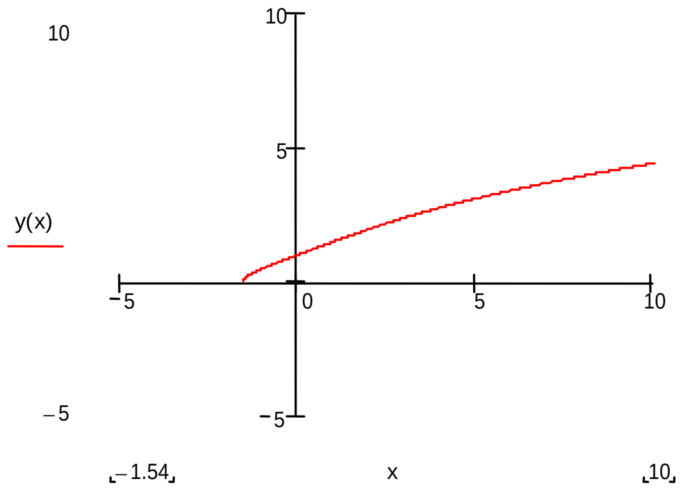
Логический знак жирного равенства вводится с палитры Booleans. Завершает блок встроенная функция Find(y), после которой следует набрать символьный знак равенства из меню Symbolic **(подменю** Evaluation).

Для решения этого уравнения используется символьный процессор MathCAD (аналогично применению вычислительного блока для численного решения нелинейных уравнений).

7. Решение, удовлетворяющее условию $y(0)=1$:

$$y(x) := \left(2\cdot\ln(1+\exp(x))+1-2\cdot\ln(2)\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

8. Постройте график найденного решения.



Численный метод Рунге–Кутта решения задачи Коши для ОДУ первого порядка. Нахождение точного решения задачи Коши для многих типов ОДУ затруднительно, иногда невозможно, поэтому было создано множество приближенных методов. Один из самых популярных – метод Рунге–Кутта четвертого порядка, дающий приближенное решение в виде таблицы значений этого решения в отдельных точках заданного интервала для независимой переменной x. В пакете MathCAD есть встроенная функция, реализующая этот метод:

$$\mathrm{rkfixed}(y, x1, x2, npoints, D),$$

где y – вектор начальных условий (для ОДУ первого порядка – это точка $y_0 = y(x1)$;

$x1, x2$ – границы интервала, на котором ищется решение ДУ;

npoints – число точек (не считая начальной), в которых ищется приближенное решение;

$D(x, y)$ – для системы ОДУ первого порядка вектор, состоящий из первых производных неизвестных функций (для ДУ первого порядка $y' = f(x, y)$ – это $f(x, y)$).

***Пример** 4.2.* Решите на отрезке [0, 3] задачу Коши $y' = \sin xy$, $y(0) = 1$ методом Рунге–Кутта с постоянным шагом в $20\ (40, 100)$ равностоящих точках отрезка $[0, 3]$.

Решение.

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1: ORIGIN := 1.
3. Введите начальное условие:

$$y := 1.$$

4. Определите правую часть уравнения $f(x, y)$:

$f(x, y) := \sin(x \cdot y)$ в 20 (40, 100) равностоящих точках отрезка $[0, 3]$.

5. Вычислите решение

$$Y1 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 19, f)$$

$$Y2 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 39, f)$$

$$Y3 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 99, f)$$

Y1 =

	1	2
1	0	1
2	0.15	1.011
3	0.3	1.046
4	0.45	1.104
5	0.6	1.189
6	0.75	1.301
7	0.9	1.436
8	1.05	1.584
9	1.2	1.727
10	1.35	1.84
11	1.5	1.907
12	1.65	1.924
13	1.8	1.9
14	1.95	1.846
15	2.1	1.771
16	2.25	1.684

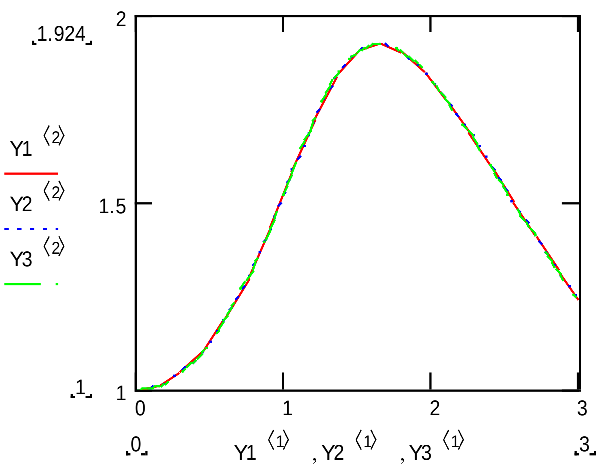
Y2 =

	1	2
1	0	1
2	0.075	1.003
3	0.15	1.011
4	0.225	1.026
5	0.3	1.046
6	0.375	1.072
7	0.45	1.104
8	0.525	1.143
9	0.6	1.189
10	0.675	1.242
11	0.75	1.301
12	0.825	1.366
13	0.9	1.436
14	0.975	1.509
15	1.05	1.584
16	1.125	1.658

Y3 =

	1	2
1	0	1
2	0.03	1
3	0.06	1.002
4	0.09	1.004
5	0.12	1.007
6	0.15	1.011
7	0.18	1.016
8	0.21	1.022
9	0.24	1.029
10	0.27	1.037
11	0.3	1.046
12	0.33	1.055
13	0.36	1.066
14	0.39	1.078
15	0.42	1.091
16	0.45	1.104

6. Постройте на одном графике найденные решения.



Дифференциальные уравнения второго порядка. ОДУ второго порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ или } y'' = f(x, y, y').$$

Найти такое решение, которое удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Решение ДУ второго порядка методом Рунге–Кутта. С помощью замены переменных $y(x) = Y_1(x)$, $y'(x) = Y_2(x)$ вместо одного ДУ второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ получим систему двух ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2; \\ Y_2' = f(x, Y_1, Y_2) \end{cases}$$

с вектором начальных условий

$$Y0 = \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}.$$

Дальше применяем метод Рунге–Кутта с помощью встроенной функции $\mathrm{rkfixed}(Y0, x1, x2, n\mathrm{points}, D)$, где

$$D(x, Y) = \begin{pmatrix} Y_2 \\ f(x, Y_1, Y_2) \end{pmatrix}.$$

***Пример** 4.3.* Решите задачу Коши методом Рунге–Кутта и постройте график приближенного решения ДУ $y'' + 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ по 60 точкам отрезка $[0, 6]$.

С помощью замены $y(x) = Y_1(x)$, $y'(x) = Y_2(x)$ вместо заданного ДУ получим систему ДУ

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2; \\ Y_2' = -2 \cdot Y_2 - 3 \cdot Y_1 \end{cases}$$

с вектором начальных условий $Y0 = \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix}$.

Решение.

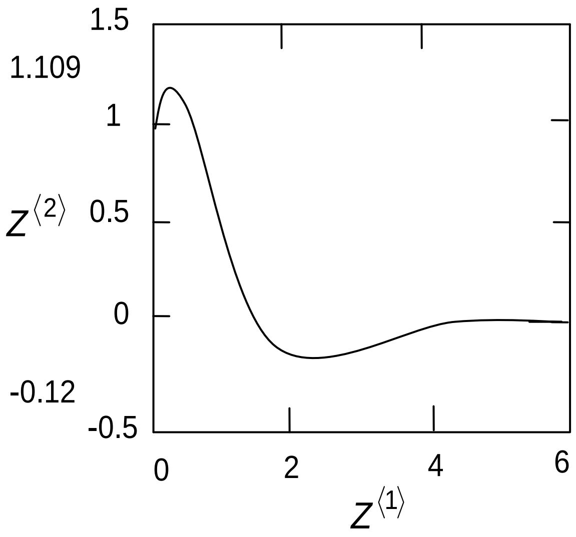
1. $\mathrm{ORIGIN} := 1$.
2. $Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $D\;\; x,Y\;\; := \begin{pmatrix} Y_2 \\ -2\cdot Y_2 - 3\cdot Y_1 \end{pmatrix}.$

4. $Z := \text{rkfixed}\;\; Y0,\, 0,\, 6,\, 59,\, D\;\;,$

где $Z =$ – решение в форме матрицы, I-й столбец которой состоит из значений x, II-й – значений y, III-й – y'.

5. Построить график решения.



Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения ДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ зависит от характера корней соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\cdot\lambda + a_2 = 0.$$

Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то фундаментальная система решений имеет вид $y1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$, то фундаментальная система решений имеет вид $y1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y2(x) = xe^{\lambda_1 x}$. Если характеристическое уравнение имеет два комплексных корня $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, то фундаментальная система решений имеет вид $y1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение ДУ

$$y\;\; x\;\; = c_1\cdot y1\;\; x\;\; + c_2\cdot y2\;\; x\;\; .$$

Пример *4.4*. Найдите общее решение уравнения $y'' + 2y' + 3y = 0$. Решите задачу Коши с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, решенную приближенно методом Рунге–Кутта в примере 4.3. Проверьте правильность решения. Изобразите его график.

Решение.

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. ORIGIN:=1.
3. Найдите корни характеристического уравнения.

$$\text{Given}$$

$$л^2 + 2 \cdot л + 3 = 0$$

$$\text{Find } л \;\rightarrow\; -1 + i \cdot \sqrt{2} \; -1 - i \cdot \sqrt{2}$$

4. $y1\ x := e^{-x} \cdot \cos\ \sqrt{2} \cdot x$, $y2\ x := e^{-x} \cdot \sin\ \sqrt{2} \cdot x$ – функции фундаментальной системы решений.

5. Запишите общее решение уравнения (как функцию переменных x, $c1$ и $c2$).

6. Для определения значений $c1$ и $c2$, при которых выполняются начальные условия, найдите $y(0)$ и $y'(0)$:

$$y(0, c1, c2) \rightarrow c1$$

$$dy1\ x, c1, c2 := \frac{d}{dx} y\ x, c1, c2$$

$$dy1\ 0, c1, c2 \rightarrow -c1 \cdot \exp\ 0 \cdot \cos\ 0 - c1 \cdot \exp\ 0 \cdot \sin\ 0 \cdot \sqrt{2} - c2 \cdot \exp\ 0 \cdot \sin\ 0 +$$

$$+ c2 \cdot \exp\ 0 \cdot \cos\ 0 \cdot \sqrt{2}.$$

Упростим это выражение

$$dy1\ 0, c1, c2\ \text{simplify} \rightarrow -c1 + c2 \cdot \sqrt{2}.$$

7. Используйте вычислительный блок для нахождения $c1$ и $c2$, учитывая, что $\begin{cases} y\ 0\ = 1; \\ y'\ 0\ = 1. \end{cases}$

$$\text{Given}$$

$$c1 = 1$$

$$-c1 + c2 \cdot \sqrt{2} = 1$$

$$\text{Find}(c1, c2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Таким образом, искомое решение:

$$yc(x) := y1(x) + \sqrt{2}\cdot y2(x)$$

$$yc(x) \rightarrow \exp(-x)\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x) + \sqrt{2}\cdot\exp(-x)\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x).$$

8. Проверьте решение подстановкой в уравнение.

$$dyc1(x) := \frac{d}{dx}yc(x) \quad dyc2(x) := \frac{d^2}{dx^2}yc(x)$$

$$dyc2(x) + 2\cdot dyc1(x) + 3\cdot yc(x) \rightarrow 0.$$

9. Проверьте выполнение начальных условий

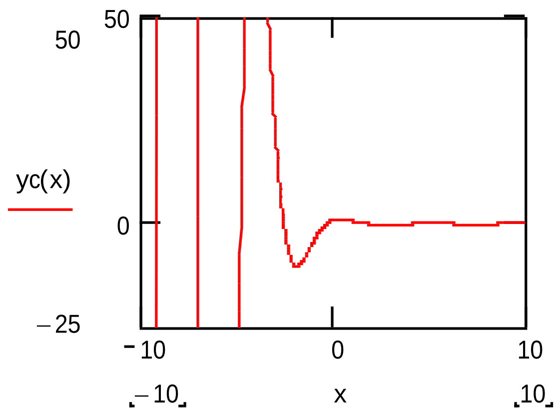
$$yc(0) = 1$$

$$dyc1(0) = 1$$

10. Постройте график решения:

$$y(x, c1, c2) := c1\cdot y1(x) + c2\cdot y2(x)$$

$$y(x, c1, c2) \rightarrow c1\cdot\exp(-x)\cdot\cos(\sqrt{2}\cdot x) + c2\cdot\exp(-x)\cdot\sin(\sqrt{2}\cdot x).$$



11. Сравните графики точного и приближенного решений.

Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение линейного неоднородного уравнения записывается как сумма общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

Вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

при этом

1) для $f(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$,

если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то частное решение ДУ имеет вид

$$ycn(x, b2, b1, b0) = x^2(b2x^2 + b1x + b0);$$

если $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, то частное решение ДУ

$$ycn(x, b2, b1, b0) = x \cdot (b2x^2 + b1x + b0);$$

если $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,$ то частное решение ДУ

$$ycn(x, b2, b1, b0) = b2x^2 + b1x + b0;$$

2) для $f(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x}$,

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, то частное решение ДУ имеет вид

$$ycn(x, B) = Bx^2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha x};$$

если $\lambda_1 = \alpha$ или $\lambda_2 = \alpha$, то частное решение ДУ

$$ycn(x, B) = B \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\alpha x};$$

если $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$, то частное решение ДУ

$$ycn(x, B) = B \cdot \mathrm{e}^{\alpha x};$$

3) для $f(x) = A_1\mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin\beta x + B_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ (в частности, при $A_1 = 0$ или $B_1 = 0$),

если $\lambda_1 \neq \alpha + i\beta,\ \lambda_2 \neq \alpha + i\beta$, то частное решение ДУ имеет вид

$$ycn(x, A2, B2) = A2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x + B2\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;$$

если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ или $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, то частное решение ДУ имеет вид

$$ycn(x, A_2, B_2) = x \cdot (A2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x + B2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x);$$

***Пример** 4.5*. Найдите общее решение неоднородного уравнения $y'' + 2y' + 3y = x^2 + 1$. Проверьте правильность решения.

Решение.

1. ORIGIN:=1.

2–3. Найдите общее решение соответствующего однородного уравнения вашего задания (см. пункты 2–5 решения задачи 4.4).

4. Запишите выражение для частного решения как функцию переменной x и неизвестных коэффициентов по виду правой части неоднородного уравнения:

$$ycn(x, A2, A1, A0) := A2 \cdot x^2 + A1 \cdot x + A0.$$

5. Подставьте выражение частного решения в левую часть уравнения:

$$dycn1(x, A2, A1, A0) := \frac{d}{dx} ycn(x, A2, A1, A0)$$

$$dycn2(x, A2, A1, A0) := \frac{d^2}{dx^2} ycn(x, A2, A1, A0)$$

$$dycn2(x, A2, A1, A0) + 2dycn1(x, A2, A1, A0) + 3 \cdot ycn(x, A2, A1, A0) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot A2 + 4 \cdot A2 \cdot x + 2 \cdot A1 + 3 \cdot A2 \cdot x^2 + 3 \cdot A1 \cdot x + 3 \cdot A0.$$

6. В полученном выражении приведите подобные относительно степеней x, для чего выделите переменную x и щелкните по строке Collect в меню Symbolics:

$$2 \cdot A2 + 4 \cdot A2 \cdot x + 2 \cdot A1 + 3 \cdot A2 \cdot x^2 + 3 \cdot A1 \cdot x + 3 \cdot A0$$

$$3 \cdot A2 \cdot x^2 + (3 \cdot A1 + 4 \cdot A2) \cdot x + 2 \cdot A2 + 3 \cdot A0 + 2 \cdot A1.$$

7. Приравняв коэффициенты при степенях x полученного выражения левой части уравнения и выражения правой части, запишите и решите систему относительно параметров $a2$, $a1$, $a0$:

$$3 \cdot A2 \cdot x^2 + (3 \cdot A1 + 4 \cdot A2) \cdot x + 2 \cdot A2 + 3 \cdot A0 + 2 \cdot A1 = x^2 + 1.$$

Given

$$3 \cdot a2 = 1$$

$$3 \cdot a1 + 4 \cdot a2 = 0$$

$$2 \cdot a2 + 3 \cdot a0 + 2 \cdot a1 = 1$$

$$\text{Find}(a2, a1, a0) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{11}{27} \end{pmatrix}$$

8. Запишите частное решение с найденными коэффициентами $a2$, $a1$, $a0$:

$$ycn(x) := \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{9} \cdot x + \frac{11}{27}.$$

9. Запишите общее решение неоднородного уравнения:

$$ycno(x, c1, c2) := c1 \cdot \exp(-x) \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x) + c2 \cdot \exp(-x) \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot x) + \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{9} \cdot x + \frac{11}{27}.$$

10. Проверьте решение подстановкой:

$$\mathrm{d}ycno1(x, c1, c2) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} ycno(x, c1, c2)$$

$$\mathrm{d}ycno2(x, c1, c2) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} ycno(x, c1, c2)$$

$$\mathrm{d}ycno2(x, c1, c2) + 2 \cdot \mathrm{d}ycno1(x, c1, c2) + 3 \cdot ycno(x, c1, c2) \to 1 + x^2.$$

Замечание. В примере 4.5 правая часть имеет вид многочлена $f(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$. Если в задании $f(x) = \mathrm{A} \cdot e^{\lambda x}$ или $f(x) = A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x$, соответственно измените в решении пункты 4–9.

Порядок выполнения работы

Студенту рекомендуется внимательно изучить теоретический материал, проделать все примеры, в нем встречающиеся, и после этого приступать к выполнению своего варианта задания.

Содержание отчета

1. Краткий обзор по теоретической части.
2. Файл MathCAD с выполненными заданиями своего варианта.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $e^{x+3y} \mathrm{d}y = x \mathrm{d}x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку (0,1)).

2. Решить задачу Коши $y'' - y + e^{-2x}(y - y^3) = 0,\ y(-1) = 0.103451,\ y'(-1) = -0.1$ на интервале [1, 3].

3. Найти решение однородного уравнения $3y'' + y' - 2y = 0,\ y\ \ 0\ = 4,\ y'\ \ 0\ = 1$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$. Проверить правильность решения.

Вариант 2

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $y'\sin x = y\ln y$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$).

2. Решить задачу Коши $y'' - y + e^{2x}(y - y^3) = 0,\ y(-1) = 0.103451,\ \ y'(-1) = 0.1$ на интервале [–1, 1].

3. Найти решение однородного уравнения $4y'' + 4y' + y = 0,\ y\ \ 0\ = 0,\ y'\ \ 0\ = 2$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 16y = 8\cos 4x$. Проверить правильность решения.

Вариант 3

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = (2x - 1)\operatorname{ctg} y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку (0, 0)).

2. Решить задачу Коши $y'' + y - x^2 y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ для значений параметра на интервале [0, 4].

3. Найти решение однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y\ \ 0\ = 3,\ y'\ \ 0\ = -1$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+36y=36+66x-36x^3$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+8y'+25y=18e^{5x}$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''-8y'+20y=$ $=16(\sin 2x-\cos 2x)$. Проверить правильность решения.

Вариант 4

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $(1+e^x)ydy-e^ydx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=3$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку (0, 3)).

2. Решить задачу Коши $y''+2\delta\left(1+\gamma\cdot(y')^2\right)\cdot y'+y=0$ для значений параметров $\delta=0{,}1$, $\gamma=0{,}2$ при начальных условиях $y(0)=1, y'(0)=1$ на интервале [0, 10].

3. Найти решение однородного уравнения $y''+5y'+6y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+2y'+37y=$ $=37x^2-33x+74$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+4y'+20y=$ $=-4\cos 4x-52\sin 4x$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+4y'=15e^x$. Проверить правильность решения.

Вариант 5

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $\left(y^2+3\right)dx-\dfrac{e^x}{x}ydy=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку $(1, e)$).

2. Решить задачу Коши $y''+y+\gamma\cdot y^3=f\cos\omega t$ для значений параметров $f=1$, $\gamma=0.2$, $\omega=1, 0.5$ при начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=0$ на интервале $[0, 10\pi]$.

3. Найти общее решение однородного уравнения $y''+6y'+13y=0,\ y(0)=2,$ $y'(0)=4$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти решение неоднородного уравнения $y''+y'-2y=9\cos x-7\sin x$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$. Проверить правильность решения.

Вариант 6

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $\sin y \cos x dy = = \cos y \sin x dx$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$).

2. Решить задачу Коши $y'' + 2\delta y' + y + \gamma \cdot y^3 = f \cos \omega t$ для значений параметров $f = 1$, $\gamma = 0.2$, $\omega = 0.5$, $\delta = 0.1$ при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ на интервале [0, 10π].

3. Найти решение однородного уравнения $y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 2y = 6 + 12x - 24x^2$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 34y = = 18\cos 5x + 60\sin 5x$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$. Проверить правильность решения.

Вариант 7

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi) = 0$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку $(\pi, 0)$).

2. Решить задачу Коши $y'' + 2\delta y' + (1 + m\cos\omega x)y = 0$ для значений параметров $m = 0.2$, $\omega = 2.1$, $\delta = 0.1$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ на интервале [0, 10π].

3. Найти решение однородного уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 12y' + 36y = = 32\cos 2x + 24\sin 2x$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+8y'+16y=$ $=16x^3+24x^2-10x+8$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+9y=10e^{3x}$. Проверить правильность решения.

Вариант 8

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $1+e^x \; y^2y'=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\frac{\pi}{2}$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$).

2. Решить задачу Коши $y'-1/(x^2+y^2)=0$ для значений параметров при начальных условиях $y(0.5)=0.5$ на интервале $[0.5, 2.5]$.

3. Найти решение однородного уравнения $y''+y=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$, $y'\left(\frac{p}{2}\right)=2$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''+16y=32e^{4x}$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''-8y'=16+48x^2-128x^3$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''-3y'+2y=$ $=-\sin x-7\cos x$. Проверить правильность решения.

Вариант 9

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $\sin x \operatorname{tg} y dx-\frac{dy}{\sin x}=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку (0, 2)).

2. Решить задачу Коши $y'-3x^2/(x^3+y+1)=0$ для значений параметров при начальных условиях $y(1)=0$ на интервале $[1, 10]$.

3. Найти решение однородного уравнения $y''+2y'+2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y''-6y'+10y=51e^{-x}$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$. Проверить правильность решения.

Вариант 10

1. Найти решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = e^2$ (задача Коши). Изобразить график решения (интегральную кривую, проходящую через точку $0, e^2$).

2. Решить задачу Коши $y' - x^2 - xy^3 = 0$ при начальном условии $y(0) = 0$ на интервале [0, 1].

3. Найти общее решение однородного уравнения $y'' + 4y = 0$, $y\left(\frac{p}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{p}{2}\right) = 0$. Проверить правильность решения. Изобразить его график.

4. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + y' = 2x - 1$. Проверить правильность решения.

5. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$. Проверить правильность решения.

6. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' + y = 4e^x$. Проверить правильность решения.

Лабораторная работа № 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Цель работы: изучение вычислительных возможностей пакета MathCAD для решения нелинейных уравнений и систем и оптимизационных задач.

Теоретические сведения

Решение уравнения с одним неизвестным. Метод простых итераций. Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти корни уравнения

$$f(x) = 0. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) заменим эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x).$$

Выберем некоторое нулевое приближение и вычислим последующие приближения по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n = 0, 1, 2\ldots.$$

Процесс итераций сходится $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, если выполнено условие $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на отрезке $[a, b]$, содержащем корень ξ.

Метод Ньютона. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, корень которого $\xi \in [a, b]$ отделен. Суть метода состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к ней и за приближение корня берется абсцисса точки пересечения касательной с осью OX.

В методе касательных $(n+1)$-е приближение вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2\ldots,$$

в которой за нулевое приближение x_0 принимается такое значение из отрезка $[a, b]$, для которого выполняется условие

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0.$$

Оценка абсолютной погрешности определяется формулой $|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{\mu}$, где $\mu = \max\limits_{a\le x\le b} |f'(x)|,\ \ f'(x) \ne 0$.

Средства пакета MathCAD для решения нелинейных уравнений вида $f(x)=0$. Для решения уравнений MathCAD имеет встроенную функцию root, которая, в зависимости от типа задачи, может включать либо два, либо четыре аргумента и, соответственно, работает по-разному.

– root ($f(x)$, x);

– root ($f(x)$, x, a, b),

где $f(x)$ – скалярная функция, определяющая уравнение;

x – скалярная переменная, относительно которой решается уравнение;

a, b – границы интервала, внутри которого происходит поиск корня.

Первый тип функции root требует дополнительного задания *начального значения* (guess value) переменной x. Для этого нужно предварительно присвоить этой переменной некоторое число, в окрестности которого будет производиться поиск корня. Таким образом, присвоение начального значения требует априорной информации о примерной локализации корня. Отделить корень можно, построив график функции $f(x)$ и с помощью опции Trace (см. лабораторную работу № 3) определить примерно абсциссу пересечения графиком оси OX.

Пример 5.1.

Рассмотрим уравнение $\sin x = 0$, корни которого известны заранее.

Примем начальное значение $x = 0.5$.

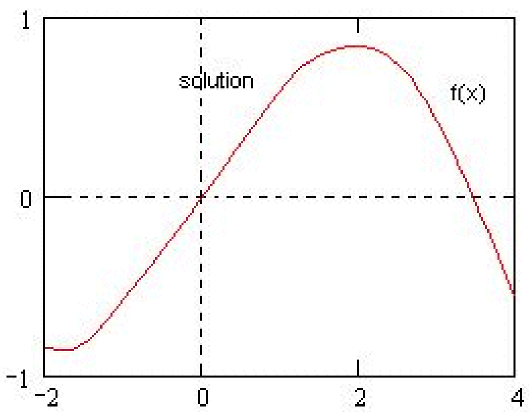
Решение.

$x := 0.5$

$f(x) := \sin(x)$

$solution := root(f(x), x)$

$solution = -6.2 \times 10^{-7}$



Поиск корня уравнения в заданном интервале. Когда root имеет четыре аргумента, следует помнить о двух ее особенностях:

– внутри интервала $[a, b]$ не должно находиться более одного корня, иначе будет найден один из них (заранее неизвестно, какой именно);

– значения $f(a)$ и $f(b)$ должны иметь разный знак, иначе будет выдано сообщение об ошибке.

Пример 5.2. Найти корень уравнения $\sin x = 0$ из интервала $[-1;1]$.

Решение.

$$f(x) := \sin(x)$$

$$solution := root(f(x), x, -1, 1)$$

$$solution = 0$$

Поиск мнимых корней уравнения. Если уравнение не имеет действительных корней, но имеет мнимые, то их также можно найти.

Пример 5.3. Решить уравнение $x^2 + 1 = 0$.

Решение.

$$x := 0.5$$

$$root\left(x^2 + 1, x\right) = -i$$

$$x := -0.5$$

$$root\left(x^2 + 1, x\right) = i$$

Замечание. Явный вид функции $f(x)$ может быть определен непосредственно в теле функции root.

Корни полинома. Если функция $f(x)$ является *полиномом,* то все его корни можно определить, используя встроенную функцию polyroots(v), где v – вектор, составленный из коэффициентов полинома.

Поскольку полином n-й степени имеет ровно n корней (некоторые из них могут быть кратными), вектор v должен состоять из $n+1$ элементов. Результатом действия функции polyroots является вектор, составленный из n корней рассматриваемого полинома. При этом не требуется вводить какое-либо начальное приближение, как для функции root.

Пример 5.4.

Найти корни полинома $x^3 - 10x + 2$.

Решение.

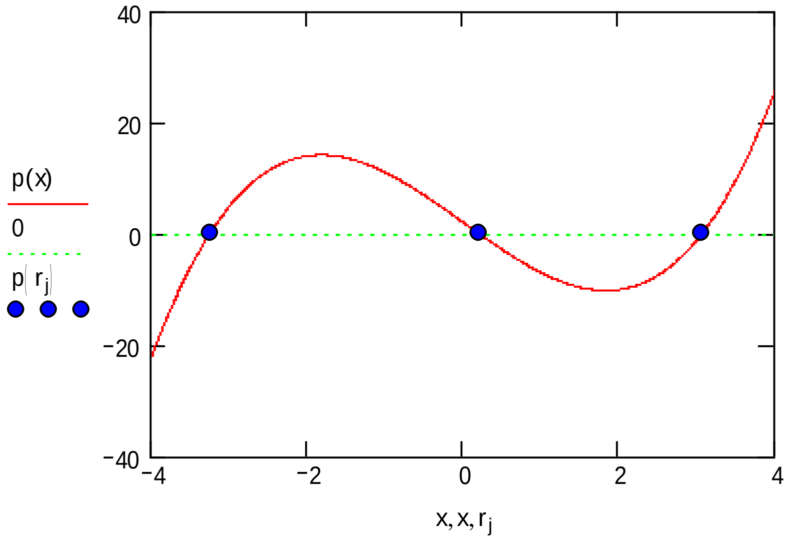
1. Задаем полином $p(x) := x^3 - 10x + 2$.

2. Определяем вектор коэффициентов полинома $v := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Находим вектор корней полинома

$$r := polyroots(v) \qquad r = \begin{pmatrix} -3.258 \\ 0.201 \\ 3.057 \end{pmatrix}.$$

4. Представляем результаты на графике.



Некоторые уравнения можно решить точно с помощью символьного процессора MathCAD. Делается это очень похоже на численное решение систем уравнений с применением *вычислительного блока* (см. пункт «Средства пакета MathCad для решения систем уравнений»). Присваивать неизвестным начальные значения нет необходимости.

Пример 5.5.

Given

$$x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\text{Find }(x) \to \left(-2+\sqrt{11} \quad -2-\sqrt{11} \right)$$

Вместо знака равенства после функции Find в листингах следует стрелка – знак символьных вычислений, который можно ввести с панели **Symbolic (Символика)** или, нажав клавиши <Ctrl>+<.>. При этом уравнения должны иметь вид логических выражений (знаки равенства нужно вводить с помощью панели **Booleans (Булевы операторы)** – жирные знаки равенства).

С помощью символьного процессора решить уравнение с одним неизвестным можно и другим способом.

1. Введите уравнение, пользуясь панелью **Booleans (Булевы операторы)** или нажав клавиши <Ctrl>+<.> для получения логического знака равенства.

2. Щелчком мыши выберите переменную, относительно которой требуется решить уравнение.

3. Выберите в меню **Symbolics (Символика)** пункт Variable / **Solve (Переменная / Решить)**.

После строки с уравнением появится строка с решением или сообщение о невозможности символьного решения этого уравнения.

Символьные вычисления могут производиться и над уравнениями, которые помимо неизвестных содержат различные параметры.

Решение систем нелинейных уравнений. Метод простых итераций (***последовательных приближений***). Систему нелинейных уравнений можно записать в векторном виде

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \tag{5.2}$$

или подробно в координатном виде

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ 1 \le k \le n.$$

Нулевое приближение в случае двух переменных находится графически: на плоскости (x_1, x_2) строят кривые $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$ и находят точки их пересечения.

Для трех и более переменных удовлетворительных способов подбора нулевых приближений нет.

Заменим нелинейную систему (5.2) эквивалентной системой вида

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}).$$

$$\text{или } x_k^{s+1} = \varphi(x_1^s, x_2^s, ..., x_n^s),\ 1 \le k \le n.$$

Если итерации сходятся, то они сходятся к решению уравнения (предполагается, что решение существует).

Заканчивать итерации можно по критерию сходимости:

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon,$$

выполнение которого необходимо проверить для каждой компоненты.

Средства пакета MathCAD для решения систем нелинейных уравнений. При решении систем нелинейных уравнений, а также задач оптимизации используется специальный *вычислительный блок,* открываемый ключевым словом Given и имеющий следующую структуру:

Начальные условия
Given

Уравнения
Ограничительные условия
Выражения с функциями Find, Minner (Maximize, Minimize).

Начальные условия определяют начальные значения искомых переменных и задаются в виде *var:=value*, т. е. обычным присваиванием переменным заданных значений.

Уравнения задаются в виде *expr_left=expr_right* с применением *жирного знака равенства* между левой и правой частями каждого уравнения, который вводится либо с палитры **Boolean (Булевы операторы)**, либо сочетанием клавиши <Ctrl>+<=>.

Встроенная функция Find (x_1, ... , x_n) возвращает значение одной или нескольких переменных для точного решения. Таким образом, число элементов вектора решений равно числу аргументов функции Find.

Пример *5.6.* Решить систему уравнений $\begin{cases} \left(x^2+1\right)^2 + \left(y^2+1\right)^2 = 5{,}5; \\ x+y=0{,}95 \end{cases}$ в окрестности точки $(0,1)$.

Решение.

$$x := 0 \quad y := 1$$

Given

$$\left(x^2+1\right)^2 + \left(y^2+1\right)^2 = 5.5$$

$$x + y = 0.95$$

$$z := \mathrm{Find}(x, y)$$

$$z = \begin{pmatrix} -0.106 \\ 1.056 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку

$$\left[\left(z_0\right)^2+1\right]^2 + \left[\left(z_1\right)^2+1\right]^2 = 5.5$$

$$z_0 + z_1 = 0.95.$$

Ответ: решением системы является точка $(-0.106,\ 1.056)$.

Замечание. Вычислительный блок использует константу CTOL в качестве погрешности выполнения уравнений, введенных после ключевого слова Given. Например, если $CTOL = 0.001$, то уравнение $x = 10$ будет считаться выполненным и при $x = 10.001$, и при $x = 9.999$.

Вычислительным блоком с функцией Find можно найти и корень уравнения с одним неизвестным. Действие Find в этом случае совершенно аналогично уже рассмотренным примерам. Задача поиска корня рассматривается как решение системы, состоящей из одного уравнения. Единственным отличием будет скалярный, а не векторный тип числа, возвращаемого функцией Find (см. пример 5.5).

Если окрестность, в которой требуется найти решение системы, не задана, начальное приближение для решения можно задать, построив в одной графической области графики кривых, задаваемых уравнениями системы.

Пример *5.7.*

Найти решение системы уравнений $\begin{cases} 4x + 5\cos(x - y) = 0; \\ 3y - 2\sin(x + y) = 0. \end{cases}$

Решение. Зададим функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, соответствующие первому и второму уравнениям:

$$f(x, y) := 4x + 5\cos(x - y)$$
$$g(x, y) := 3y - 2\sin(x + y).$$

Построим графики поверхностей, описываемых этими уравнениями (рис. 5.1).

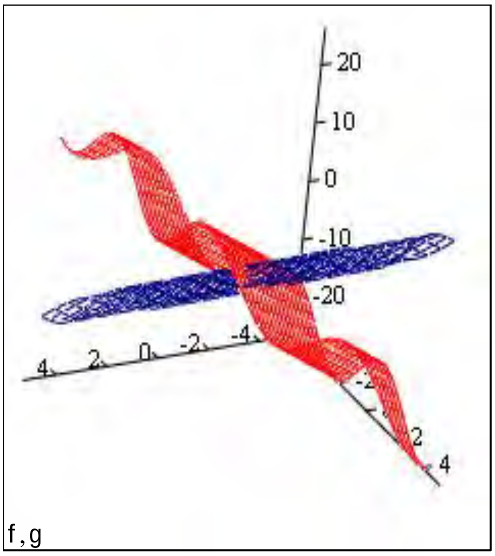


Рис. 5.1

На графике видно, что в качестве начального приближения можно выбрать, например, точку (0, 0).

$$x := 0 \quad y := 0.$$

Given

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

$$z := \mathrm{Find}(x, y)$$

$$z = \begin{pmatrix} -1.118 \\ -0.653 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку, подставив найденные значения в функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$:

$$f(z_0, z_1) = -1.316 \times 10^{-7}$$

$$g(z_0, z_1) = 2.175 \times 10^{-7}.$$

Ответ: решением системы является точка $(-1.118, -0.653)$.

Если не удается решить точно систему уравнений с помощью функции Find, можно попытаться найти ее приближенное решение, заменив в вычислительном блоке функцию Find на функцию Minerr с тем же набором параметров.

***Пример** 5.8.*

$$x = 1 \qquad y = 1$$

Given

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x > 0.1$$

$$y \le -0.2$$

$$\mathrm{Minerr}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.969 \\ -0.246 \end{pmatrix}$$

Минимизация функций. Система нелинейных уравнений в векторной форме

$$\left.\begin{aligned} &\bar{f}(\bar{x}) = 0; \\ &f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad 1 \le k \le n. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Рассмотрим функцию $\Phi(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left| f_k(\vec{x}) \right|^2$. Она неотрицательна и обращается в нуль в том и только в том случае, если $\vec{f}(\vec{x}) = 0$. Таким образом, решение исходной системы уравнений (5.3) будет одновременно нулевым минимумом скалярной функции многих переменных $\Phi(\vec{x})$. Иногда проще искать такой минимум, чем решать систему уравнений. Задачи минимизации функций принято называть *задачами оптимизации*, так как основной целью их решения обычно является достижение оптимального режима работы. При этом минимизируемую функцию называют *целевой*.

Решение задач оптимизации складывается из следующих элементов: создания математической модели явления, определения целевой функции и важнейших параметров, подлежащих оптимизации, непосредственной минимизации некоторой функции (обычно большого числа переменных).

Функции MathCAD для решения задач оптимизации. В MathCAD с помощью встроенных функций решается только задача поиска локального экстремума. Чтобы найти глобальный максимум (или минимум), требуется либо вычислить все их локальные значения и потом выбрать из них наибольший (наименьший), либо предварительно просканировать с некоторым шагом рассматриваемую область, чтобы выделить из нее подобласть наибольших (наименьших) значений функции и осуществить поиск глобального экстремума, уже находясь в его окрестности. Второй вариант «таит в себе опасность» уйти
в окрестность другого локального экстремума, но часто может быть предпочтительнее при решении практических задач.

Для поиска локальных экстремумов имеются две встроенные функции, которые могут применяться как в пределах вычислительного блока, так и автономно:

– Minimize $(f, x_1, ..., x_n)$ – вектор значений аргументов, при которых функция f достигает минимума;

– Maximize $(f, x_1, ..., x_n)$ – вектор значений аргументов, при которых функция f достигает максимума;

– $f(x_1, ..., x_n)$– заданная целевая функция;

– $x_1, ..., x_n$ – аргументы, по которым производится минимизация (максимизация).

Всем аргументам функции f предварительно следует присвоить некоторые значения, причем для тех переменных, по которым производится минимизация, они будут восприниматься как начальные приближения.

Пример *5.9*. Поиск локального экстремума в окрестности заданной точки.

Найти максимум функции $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ в окрестности точки (4; 5).

Решение.

$$f(x, y) := 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$
$$x := 4; \qquad y := 5$$
Given
$$P := \text{Maximize}\ (f, x, y)$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(P_0, P_1) = 4$$

Ответ: функция имеет максимум, равный 4, в точке $(1; 1)$.

Пример *5.10*. Поиск условного экстремума функции.

Найти минимум функции $f(\bar{x}) = 8x_0 + 10x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 11x_4 + 9x_5$ при условиях $\begin{cases} 12x_0 + 9x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 17x_4 + 13x_5 \ge 60; \\ 35x_0 + 42x_1 + 18x_2 + 31x_3 + 56x_4 + 49x_5 \ge 150; \\ 37x_0 + 53x_1 + 28x_2 + 24x_3 + 29x_4 + 20x_5 \ge 125; \\ x_i \ge 0, \quad x_i \le 1, \quad i = 0, ..., 5. \end{cases}$.

Решение.

1. Задаем целевую функцию, матрицу системы ограничений и вектор правой части этой системы:

$$f(x) := 8 \cdot x_0 + 10 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 11 \cdot x_4 + 9 \cdot x_5$$
$$M := \begin{pmatrix} 12 & 9 & 25 & 20 & 17 & 13 \\ 35 & 42 & 18 & 31 & 56 & 49 \\ 37 & 53 & 28 & 24 & 29 & 20 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 60 \\ 150 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

2. Задаем начальное приближение решения: $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. С помощью вычислительного блока находим вектор R, на котором достигается минимальное значение функции $f(R)$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Given}\\
&\quad M\cdot x \ge v\\
&\quad x \le 1\\
&\quad x \ge 0\\
&\quad R := \text{Minimize}\,(f, x)
\end{aligned}
$$

$$
R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.623 \\ 0.343 \\ 1 \\ 0.048 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(R) = 32.155
$$

Ответ: минимум функции равен 32.155 и достигается в точке $(1; 0.623; 0.343; 1; 0.048; 1)$.

Порядок выполнения работы

Ответить на контрольные вопросы. Выполнить примеры из практической части. Выполнить задачи своего варианта.

Содержание отчета

Отчет должен содержать ответы на контрольные вопросы и результат решения соответствующего варианта.

Контрольные вопросы

1. Что значит отделить корень ξ уравнения $f(x) = 0$?
2. Какие функции могут быть использованы для решения нелинейных уравнений?
3. Конструкция вычислительного блока.
4. В чем различие между функциями Find и Minner для решения систем нелинейных уравнений?
5. Где необходимо расположить ограничительные условия при решении задачи оптимизации?

Варианты заданий

Вариант 1

1. Решить уравнение $\frac{x}{2-x^2}=1-\frac{x}{3}$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $x^4-3x^3-12x-5,6$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases}\sin x - y - 1.32 = 0;\\ \cos y - x - 0.85 = 0.\end{cases}$.

4. Найти максимум функции $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-6x_2^2-23x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3+20x_2x_3$.

Вариант 2

1. Решить уравнение $x^3=\cos x$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $4x^3-2.34x^2+13$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases}x^3-y^3-6y+2=0;\\ x^3+y^3-6y+3=0.\end{cases}$

4. Найти максимум функции $f(x,y)=x^2+y^2$ при ограничении $3x^2+6y^2+4xy=140$, $x_0=6$, $y_0=1$.

Вариант 3

1. Решить уравнение $\ln x=2-x$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $2x^3-9x^2-60x+1$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases}\sin(x+1)-y=1;\\ 2x+\cos y=2.\end{cases}$.

4. Найти максимум функции $f(x,y,z)=xy^2z^3$ при ограничении $x+y+z=6$, $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=6$.

Вариант 4

1. Решить уравнение $x^2\cos 2x=-1$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $3x^4-8x^3-9x^2+2.9$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} y-0.5x^2+x=0.5; \\ 2x+y-\dfrac{1}{6}y^3=1.6. \end{cases}$.

4. Найти максимум функции $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Вариант 5

1. Решить уравнение $e^x=3-x$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $x^4-x^3-2x^2-5x+6.5$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} 5x-6y+20\ln x+16=0; \\ 2x+y-10\ln y-4=0. \end{cases}$

4. Найти минимальное и максимальное значения функции $f(x)=x(x-1)^2$.

Вариант 6

1. Решить уравнение $\ln\; x^2+1\; = x^2-1$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $3x^4-4x^3-12x^2-5$, проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} 0.5x-y^2-1=0; \\ xy^3-y-3=0. \end{cases}$

4. Найти максимум функции $f(x_1,x_2)=2x_1-0.2x_1^2-824x_2-0.2x_2^2$ при условиях $x_1+2x_2\ge 10$, $x_1^2+x_2^2\le 100$, $x_1\ge 0$, $x_2\le 8$, $(x_1)_0=0$, $(x_2)_0=8$.

Вариант 7

1. Решить уравнение $4x^2=\cos x+1$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $x^4-1.2x^2-10.5$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} 2x^2-y^2-xy+2x-2y+6=0; \\ y-0.5x^2=0. \end{cases}$

Выполнить проверку.

4. Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = -5.6x_1 + 0.4x_1^2 - 8.8x_2 + 0.4x_2^2$ при условиях $0 \le x_1 \le 6$, $x_1^2 + x_2^2 \le 144$, $x_1 \le x_2$, $(x_1)_0 = 6$, $(x_2)_0 = 7$.

Вариант 8

1. Решить уравнение $5^x + 3x = 0$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $x^3 - 1.35x + 0.87$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.8; \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$ Выполнить проверку.

4. Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = -3.2x_1 + 0.2x_1^2 - 3.6x_2 + 0.2x_2^2$ при условиях $x_1 + 2x_2 \ge 20$, $-6x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 \le 66$, $20x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 \ge 25$, $(x_1)_0 = 9$, $(x_2)_0 = 11$.

Вариант 9

1. Решить уравнение $x - 2\ ^{2}\, 2^x = 1$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $6x^4 + x^3 - 3.2x^2 - 5.92$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} \cos\dfrac{1}{3(x-y)} - 2y = 0; \\ \sin\dfrac{1}{3(x+y)} - 2x = 0. \end{cases}$ Выполнить проверку

4. Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = 3.6x_1 - 0.2x_1^2 + 0.8x_2 - 0.2x_2^2$ при условиях $2x_1 + x_2 \ge 10$, $x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \le 75$, $x_2 \ge 0$, $(x_1)_0 = 1$, $(x_2)_0 = 9$.

Вариант 10

1. Решить уравнение, предварительно отделив корни $7\ln\ x - 3\ = x^2$ используя встроенные функции root и Find. Сравнить полученные решения.

2. Найти все корни полинома $x^4 - 6x^3 - 8x + 35$. Проиллюстрировать решение графически.

3. Решить систему нелинейных уравнений: $\begin{cases} 2x - \sin 0.5(x - y) = 0; \\ 2y - \cos 0.5(x + y) = 0. \end{cases}$ Выполнить проверку.

4. Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = -3x_1 + 0.25x_1^2 - 0.4x_2 + 0.25x_2^2$ при условиях $x_1^2 + x_2^2 - 10x_2 \le 75$, $x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 \le 75$, $x_1 + x_2 \ge 10$, $(x_1)_0 = 5$, $(x_2)_0 = 6$.

Лабораторная работа №6

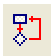
ЭЛЕМЕНТЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПАКЕТЕ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ MATHCAD

Цель работы: изучение возможностей символьного пакета MathCAD для программирования условных и циклических выражений; приобретение навыков написания простейших программ.

Теоретические сведения

Пакет инженерных расчетов MathCAD предлагает использовать средства программирования, которые позволяют пользователю создавать свои собственные функции, используя оператор присваивания, условный оператор, операторы цикла, операторы прерывания вычислений и оператор обработки ошибок, что оптимизирует работу пользователя и улучшает читаемость программы.

Для написания функций используется понятие *программный блок* (*программный модуль*).

Программный блок пишется с помощью инструкций (операторов) программирования. Они находятся на палитре компонент Programming, которую можно вызвать щелчком мыши по кнопке  палитры компонент Math либо выбрать пункт главного меню View ► Toolbars ► Programming.

Палитра компонент программирования имеет вид, изображенный на рис. 6.1.

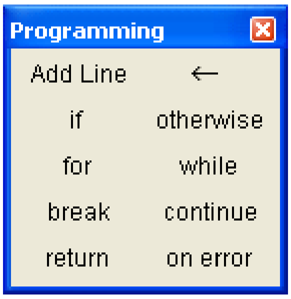


Рис. 6.1

Основной инструкцией программирования является инструкция Add Line, которая создает программный блок и позволяет добавлять инструкции в программный блок. Маска программного блока выглядит следующим образом:

$$\left|\begin{array}{l}\blacksquare\\ \blacksquare\end{array}\right. ,$$

где черные квадраты – это поля для ввода инструкций.

Следующей по значимости инструкцией является инструкция локального присваивания (←). При присваивании значения переменной внутри программного блока используется не обычный оператор присваивания (:=), а оператор локального присваивания (←). Если в программном блоке переменной присвоено значение, то областью действия данной переменной будет только программный блок. Вне данного программного блока может существовать другая переменная с тем же именем (глобальная переменная), но при этом они являются различными. Если глобальная переменная перед выполнением программного блока имела некоторое значение, то оно не изменится, если в следом идущем программном блоке локальная переменная с тем же именем будет принимать другие значения. В программном блоке могут фигурировать и переменные, которым раньше в нем не было присвоено никакого значения, в таком случае данные переменные должны быть определены глобально – до выполнения программного блока.

Результатом выполнения программного блока есть значение, которое является последним вычисленным в программном блоке.

Пример *6.1*. Найти значение выражения $\sqrt{x^2+y}$ при $x=20$ и $y=11$. Программный блок, вычисляющий данное значение, приведен на рис. 6.2.

Переменной x присваивается значение 20	$x \leftarrow 20$	$= 20.273$
Переменной y присваивается значение 11	$y \leftarrow 11$	
Вычисляется значение требуемого выражения	$\sqrt{x^2+y}$	

Рис. 6.2

Разумеется, значения программных блоков можно присваивать переменным (рис. 6.3).

$$Res := \left|\begin{array}{l} x \leftarrow 20 \\ y \leftarrow 11 \\ \sqrt{x^2+y} \end{array}\right.$$

В переменной Res хранится вычисленное значение

$Res = 20.273$ Значение вычисленного выражения

Рис. 6.3

Следующий фрагмент документа MathCAD (рис. 6.4) показывает, что локальная переменная отличается от глобальной с тем же именем.

$x := 1 \qquad y := 2$ Значения переменных x и y перед выполнением программного блока

В программном блоке переменной x присваивается значение 20

В программном блоке переменной y присваивается значение 11

$$\left|\begin{array}{l} x \leftarrow 20 \\ y \leftarrow 11 \\ \sqrt{x^2 + y} \end{array}\right. = 20.273$$

$x = 1 \qquad y = 2$ Видно, что глобальные переменные x и y не изменили свои значения после выполнения программного блока

Рис. 6.4

При написании следующего программного блока используются как локальные, так и глобальные переменные.

Пример *6.2*. Найти значение выражения $\dfrac{\sqrt{a^3 + \sin b}}{b^4 + \cos a + 2}$ при $a = 1$ и $b = 2$. Программный блок, вычисляющий данное значение, приведен на рис. 6.5.

Глобальные переменные $a := 1$ $b := 2$

Числитель вычисляемого выражения

Знаменатель вычисляемого выражения

$$\left|\begin{array}{l} s \leftarrow a^3 \\ u \leftarrow \sin(b) \\ Num \leftarrow \sqrt{s + u} \\ v \leftarrow b^4 \\ w \leftarrow \cos(a) \\ Den \leftarrow v + w + 2 \\ \dfrac{Num}{Den} \end{array}\right. = 0.075$$

Значение выражения

Рис. 6.5

Программный блок используется (его основное предназначение) для написания собственно разработанных пользователем функций. В этом случае переменные, которые используются внутри программного блока, могут быть либо локальными, либо глобальными, либо параметрами функций. Параметры функций существуют только во время выполнения программного блока, где их значения можно изменять и они могут совпадать с названиями глобальных переменных, но это различные переменные.

Пример *6.3*. Вычислить значение функции $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos x}{x^3 + 2}$ при $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. Программный блок данной задачи приведен на рис. 6.6.

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \sin(x)^2 \\ b \leftarrow \cos(x) \\ c \leftarrow x^3 \\ \dfrac{a+b}{c+2} \end{array} \right.$$

Значения функции f(x)

$f(-1) = 1.248$ $\qquad$ $f(0) = 0.5$ $\qquad$ $f(1) = 0.416$

Рис. 6.6

Инструкции if и otherwise используются для написания условных операторов. Инструкция if (если) имеет следующую маску ввода:

$$\blacksquare \text{ if } \blacksquare,$$

где справа от инструкции пишется условие (булевское выражение), при выполнении которого выполняются операторы, стоящие слева от нее. Инструкция otherwise (иначе, в противном случае) имеет следующую маску ввода:

$$\blacksquare \text{ otherwise}$$

и всегда пишется после последовательно идущих инструкций if. Слева от инструкции otherwise пишутся операторы, которые выполняются тогда и только тогда, когда условия всех непосредственно идущих инструкций if перед инструкцией otherwise не выполняются.

Булевские выражения пишутся с помощью булевских операторов, расположенных на палитре компонент Boolean, которую можно вызвать щелчком мыши по кнопке  палитры компонент Math либо выбрать пункт главного меню View ► Toolbars ► Boolean.

Палитра булевских компонент приведена на рис. 6.7.

Рис. 6.7

Назначение булевских операций следующее:

= – равенство двух выражений;

< – знак меньше;

$>$ – знак больше;

$\leq$ – знак меньше либо равно;

$\geq$ – знак больше либо равно;

$\neq$ – знак неравенства двух выражений;

$\neg$ – отрицание логического выражения;

$\wedge$ – конъюнкция (операция **И**) логических выражений;

$\vee$ – дизъюнкция (не исключающее **ИЛИ**) логических выражений (принимает значение ИСТИНА, если хотя бы одно из высказываний ИСТИНА, в противном случае принимает значение ЛОЖЬ);

$\oplus$ – операция исключающего **ИЛИ** над логическими выражениями: принимает значение ИСТИНА, когда одно из высказываний принимает значение ИСТИНА, а другое высказывание принимает значение ЛОЖЬ, и принимает значение ЛОЖЬ, когда оба высказывания одновременно принимают значение либо ИСТИНА, либо ЛОЖЬ.

***Пример** 6.4*. Вычислить значение функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x-5}, & \text{если } x < 2, \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3+\ln x}, & \text{если } x \geq 2, \end{cases} \quad \text{при } x = -3 \text{ и } x = 4.$$

Данная задача решена двумя различными способами (рис. 6.8, 6.9), однако программный код на рис. 6.9 считается более грамотным.

$$f(x) := \begin{vmatrix} \dfrac{e^x}{x-5} & \text{if} \quad x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3+\ln(x)} & \text{if} \quad x \geq 2 \end{vmatrix}$$

$$f(-3) = -6.223 \times 10^{-3}$$

$$f(4) = 0.358$$

Рис. 6.8

$$f(x) := \begin{vmatrix} \dfrac{e^x}{x-5} & \text{if} \quad x < 2 \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3+\ln(x)} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$f(-3) = -6.223 \times 10^{-3}$$

$$f(4) = 0.358$$

Рис. 6.9

***Пример** 6.5*. Вычислить значение функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ \dfrac{3^x}{x-1}, & \text{если } x < -1 \text{ или } x \geq 2, \end{cases} \quad \text{при } x = -4.1,\ x = 1.5 \text{ и } x = 3.2.$$

Решение данной задачи приведено на рис. 6.10.

$$f(x) := \begin{vmatrix} x^2 + 1 & \text{if} \quad (x \geq -1) \wedge (x < 2) \\ \dfrac{3^x}{x-1} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$f(-4.1) = -2.169 \times 10^{-3}$

$f(1.5) = 3.25$

$f(3.2) = 15.289$

Рис. 6.10

Пример *6.6*. Вычислить значение функции

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+\sin y)(x+2y), & \text{если } x+y<1, \\ (x+y)^2+1, & \text{если } 1 \leq x+y \leq 3, \\ x^2 - xy, & \text{если } x+y>3, \end{cases}$$

при $x=-3$ и $y=1$, $x=-0.15$ и $y=1.25$, $x=2$ и $y=3$.

Решение данной задачи приведено на рис. 6.11, 6.12, однако программный блок на рис. 6.12 считается более грамотным.

$$f(x,y) := \begin{vmatrix} (x + \sin(y)) \cdot (x + 2y) \quad \text{if} \quad x + y < 1 \\ (x+y)^2 + 1 \quad \text{if} \quad (x + y \geq 1) \wedge (x + y \leq 3) \\ x^2 - x \cdot y \quad \text{if} \quad x + y > 3 \end{vmatrix}$$

$f(-3, 1) = 2.159$

$f(-0.15, 1.25) = 2.21$

$f(2, 3) = -2$

Рис. 6.11

$$f(x,y) := \begin{vmatrix} (x + \sin(y)) \cdot (x + 2y) \quad \text{if} \quad x + y < 1 \\ (x+y)^2 + 1 \quad \text{if} \quad (x + y \geq 1) \wedge (x + y \leq 3) \\ x^2 - x \cdot y \quad \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$f(-3, 1) = 2.159$

$f(-0.15, 1.25) = 2.21$

$f(2, 3) = -2$

Рис. 6.12

К инструкциям цикла относят инструкцию for и инструкцию while.

Инструкция for (цикл с заданным числом повторений) имеет следующую маску ввода:

$$\begin{array}{l} \text{for } \blacksquare \in \blacksquare \\ \quad \blacksquare \end{array}$$

Более подробно: маска ввода инструкции for имеет следующий вид:

for $i \in$ Begin, Next .. End

<операторы>.

Здесь переменная i, которая называется *параметром цикла* for, последовательно принимает значение с одним и тем же шагом: сначала значение Begin, потом значение Next, и так далее, пока значение i будет не больше значения End. При каждом значении i выполняются операторы, написанные ниже инструкции for. Если параметр Next инструкции for не указан, то шаг цикла равен 1. Напомним, чтобы набрать двоеточие (..) в инструкции for, надо нажать клавишу ; (точку с запятой).

Пример *6.7*. Функция f, зависящая от трех параметров Begin, End и h, находит сумму квадратов всех чисел от Begin до End с шагом h. Решение задачи приведено на рис. 6.13.

Инструкции можно вкладывать друг в друга (если это возможно).

```
f(Begin, End, h) := | Sum ← 0
                    | for  i ∈ Begin, Begin + h .. End
                    |   Sum ← Sum + i^2
                    | Sum
```

В переменной Sum накапливается результирующая сумма квадратов чисел

Например сумма квадратов чисел от 1 до 2 с шагом 0,1 равна 25,85

f(1, 2, 0.1) = 25.85

Рис. 6.13

Пример *6.8*. Параметром функции f является матрица A. Результатом функции f является вектор-столбец, состоящий из трех координат: первая – минимальное значение матрицы A, вторая и третья – номер строки и номер столбца матрицы A, в которых находится минимальный элемент матрицы A (если матрица A обладает несколькими минимальными элементами, то номер строки и номер столбца матрицы A, в которых находится минимальный элемент матрицы, выбирается произвольным образом). Решение задачи приведено на рис. 6.14.

$$f(A) := \left| \begin{array}{l} Min \leftarrow A_{0,0} \\ MinRow \leftarrow 0 \\ MinCol \leftarrow 0 \\ \text{for } \ i \in 0..\,rows(A)-1 \\ \quad \text{for } \ j \in 0..\,cols(A)-1 \\ \qquad \text{if } \ A_{i,j} < Min \\ \qquad\quad \left| \begin{array}{l} Min \leftarrow A_{i,j} \\ MinRow \leftarrow i \\ MinCol \leftarrow j \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} Min \\ MinRow \\ MinCol \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

В переменной Min хранится минимальное значение матрицы A, а в переменных MinRow и MinCol хранятся номер строки и номер столбца матрицы, в которых содержится минимальный элемент матрицы

Пример

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 4 \\ 11 & 0 & 5 & -9 \\ 3 & 12 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.14

В этом примере инструкция for, в которую вложена инструкция if, является вложенной в инструкцию for. При этом при выполнении условия в инструкции if выполняются три оператора. Для набора таких операторов надо выделить ячейку ввода, стоящую слева от инструкции if и выбрать инструкцию Add Line. Также при написании программного блока использовались две функции rows(*A*) и cols(*A*), которые соответственно вычисляют количество строк и столбцов матрицы *A*.

Инструкция while (цикл с предусловием) имеет следующую маску ввода:

$$\begin{array}{l} \text{while } \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} .$$

Справа от инструкции while пишется условие, снизу инструкции while пишется набор операторов. Инструкция while «работает» по следующему алгоритму:

- проверяется условие; если оно верно, то переходим к пункту 2, если условие не верно, то переходим к пункту 4;
- выполняется набор операторов;
- переходим к пункту 1;
- конец выполнения инструкции while.

Пример *6.9.* Функция *f*, зависящая от двух параметров *x* и ε, вычисляет значение следующего выражения:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!},$$

где число n выбирается таким, что $\frac{x^n}{n!} \geq \varepsilon$, а $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$.

Решение задачи приведено на рис. 6.15.

```
f(x, ε) := | Sum ← 0
           | Num ← 1
           | Den ← 1
           | Frac ← 1
           | Counter ← 0
           | while  Frac ≥ ε
           |     | Sum ← Sum + Frac
           |     | Num ← Num · x
           |     | Counter ← Counter + 1
           |     | Den ← Den · Counter
           |     | Frac ← Num / Den
           | Sum
```

Рис. 6.15

Инструкция break вызывает прерывание (прекращение) выполнения цикла (for или while), внутри которого она находится. Если инструкция break не находится внутри цикла, то она вызывает прекращение выполнения программного блока.

Пример *6.10*. Параметром функции f является матрица A. Результатом функции f является вектор-столбец, i-й элемент которого содержит номер первого столбца строки i матрицы A, в котором содержится нулевой элемент матрицы A; если i-я строка матрицы A не содержит нулевого элемента, то i-й элемент полученного вектор-столбца равен -1. Решение задачи приведено на рис. 6.16.

Инструкция continue обеспечивает досрочное завершение очередного прохода цикла, что эквиваленто передаче управления в самый конец циклического оператора. Если инструкция continue находится в инструкции while, то после выполнения инструкции continue цикл while начинает выполняться заново, т. е. с проверки условия; если инструкция continue находится в инструкции for, то после выполнения инструкции continue параметр цикла увеличивается на свой шаг.

```
f(A) := | for  i ∈ 0.. rows(A) − 1
        |     | nCol ← −1
        |     | for  j ∈ 0.. cols(A) − 1
        |     |    if  A[i,j] = 0
        |     |         | nCol ← j
        |     |         | break
        |     | x[i] ← nCol
        | x
```

Пример

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 33 & 24 & 19 \\ 4 & -5 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.16

Инструкцию continue можно использовать, например, вместо инструкции otherwise с вложенной в нее инструкцией if.

Пример *6.11*. Параметром функции minmax является матрица *A*. Результатом выполнения функции является вектор-столбец размерности 2, первый элемент которого равен минимальному элементу матрицы *A*, а второй – максимальному. Решение задачи приведено на рис. 6.17 с инструкцией otherwise и на рис. 6.18 с инструкцией continue.

Инструкция return прерывает выполнение программного блока и выводит значение выражения, стоящего справа от инструкции return. Маска инструкции return имеет следующий вид:

return ∎.

```
minmax(A) := | min ← A0,0
             | max ← A0,0
             | for i ∈ 0..rows(A) − 1
             |   for j ∈ 0..cols(A) − 1
             |     | min ← Ai,j  if  Ai,j < min
             |     | max ← Ai,j  if  Ai,j > max   otherwise
             | (min)
             | (max)
```

Пример

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -17 & 6 \\ 5 & -2 & 0 & -1 \\ 10 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{minmax}(A) = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.17

```
minmax(A) := | min ← A0,0
             | max ← A0,0
             | for i ∈ 0..rows(A) − 1
             |   for j ∈ 0..cols(A) − 1
             |     | if  Ai,j < min
             |     |   | min ← Ai,j
             |     |   | continue
             |     | max ← Ai,j  if  Ai,j > max
             | (min)
             | (max)
```

Пример

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & -17 & 6 \\ 5 & -2 & 0 & -1 \\ 10 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{minmax}(A) = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.18

Пример *6.12*. Параметром функции *f* является матрица *A*. Результатом функции *f* является вектор-столбец, содержащий номер строки и номер столбца матрицы *A*, в которых находится первый нулевой элемент матрицы. Элементы матрицы идут в следующем порядке: слева верхнего угла матрицы по строчкам вниз. Если матрица *A* не содержит элемента, равного 0, то функция *f* выводит вектор-столбец с двумя координатами – 1. Решение задачи приведено на рис. 6.19.

Инструкция on error позволяет создавать процедуры обработки ошибок. Эта инструкция задается в виде

Выражение_1 on error Выражение_2.

Если при выполнении «Выражение_2» возникает ошибка, то выполняется «Выражение_1».

$$f(A) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\,\mathrm{rows}(A) - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0..\,\mathrm{cols}(A) - 1 \\ \quad\quad \text{return } \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \text{ if } A_{i,j} = 0 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Примеры

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 4 & -6 & 12 \\ -11 & 13 & 34 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 9 \\ 11 & -13 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.19

Пример *6.13*. Написать программу, которая вычисляет значение следующей функции:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Решение приведено на рис. 6.20.

$$f(x) := 1 \ \text{ on error } \ \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$$

Примеры

$f(-3) = 0.047 \qquad f(0) = 1 \qquad f(5) = -0.192$

Рис. 6.20

Для обработки ошибок полезна также функция error(S), которая, будучи помещенной в программный блок, при возникновении ошибки выводит всплывающую подсказку с сообщением, хранящемся в символьной строке S.

***Пример** 6.14.* Написать функцию, которая вычисляет значение функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, а при $x = 0$ выдает всплывающую подсказку «Division by zero». Решение приведено на рис. 6.21.

$$f(x) := \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ \text{error("Division by zero")} & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

Примеры

$f(-7) = -0.143$ $\boxed{f(0) = \blacksquare\blacksquare}$ Division by zero $f(3) = 0.333$

Рис. 6.21

Разработанные пользователем функции обладают тем свойством, что внутри функций можно вызывать как встроенные в MathCAD функции, так и функции, написанные пользователем раньше в этом документе MathCAD.

***Пример** 6.15.* Написать программу, которая вычисляет функцию

$$f(x) = \frac{y^2+1}{y^3+y^4}+y,$$

где $y=\sin^2 x+\cos^4 x+1.$

Решение приведено на рис. 6.22.

$$g(x) := \sin(x)^2 + \cos(x)^4 + 1$$

$$f(x) := \frac{g(x)^2+1}{g(x)^3+g(x)^4} + 1$$

Cia?aiey ooieoee f(x) i?e iaeioi?uo cia?aieyo x

$f(0) = 1.208$ $f(0.3) = 1.227$ $f(1.1) = 1.249$

Рис. 6.22

Порядок выполнения работы

Студенту рекомендуется внимательно изучить теоретический материал, проделать все примеры, в нем встречающиеся, и после этого приступать к выполнению своего варианта задания.

Содержание отчета

1. Краткий обзор по теоретической части.
2. Файл MathCAD с выполненными заданиями своего варианта.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Составьте функцию, которая будет менять местами две строки матрицы.

2. Используя встроенную функцию error вычислите значение функции $z(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ либо выведите всплывающую подсказку «Division by zero».

3. Напишите функцию, которая возвращает значение -1, если аргумент функции есть число отрицательное; значение 0, если аргумент функции равен 0; значение 1, если аргумент функции есть число положительное.

Вариант 2

1. Составьте функцию, которая будет выводить сумму конечной геометрической прогрессии при следующих значениях аргументов: b_1 – первый член геометрической прогрессии, n – количество членов прогрессии, q – знаменатель геометрической прогрессии.

2. Напишите функцию, которая возвращает квадратную матрицу размерности n, на побочной диагонали которой стояли бы 1, а все остальные элементы матрицы равнялись бы 0.

3. Вычислите значение функции $y(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

Вариант 3

1. Напишите функцию, которая вычисляет сумму чисел $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, где n – натуральное число.

2. Для числа x, изменяющегося от –2 до 2 с шагом $h = 0{,}1$, вычислите значение функции $f(x) = e^{-x}\cos 2x$.

3. Составьте функцию для вычисления длины вектора.

Вариант 4

1. Напишите функцию $\mathrm{pr}(n)$, которая вычисляет произведение чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, где n – натуральное число, без использования оператора – факториал.

2. Создайте функцию для вычисления корней многочлена $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

3. Используя оператор on error вычислите функцию, которая равняется $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ при $x \neq 0$ и 1 при $x = 0$.

Вариант 5

1. Создайте функцию для вычисления корней квадратного многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Напишите функцию, вычисляющую значение выражения $S = \sin x + \sin^2 x + \ldots + \sin^n x$, которое зависит от действительного числа x и натурального числа n.

3. Напишите функцию, которая возвращает знак «+», если значение $\sin(x + y) \geq 0$, и знак «–», если значение $\sin(x + y) < 0$.

Вариант 6

1. Напишите функцию, которая будет выводить единичную (квадратную) матрицу. Аргументом функции является размерность матрицы.

2. Вычислите значение $x = \sqrt{a}$ используя итерационную формулу

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ x_0 = a,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

В качестве приближенного значения квадратного корня берется такое значение x_n, которое удовлетворяет условию $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычисления. Аргументами функции являются числа a и ε.

3. Используя разработанную функцию вычислите $\sin\left(i \cdot \frac{\pi}{7} + \pi\right)$, где i изменяется от 0 до 10 с шагом 1.

Вариант 7

1. Составьте функцию, которая будет выводить сумму арифметической прогрессии при заданных значениях: a_1 – первый член арифметической прогрессии, n – количество членов арифметической прогрессии, d – разность арифметической прогрессии.

2. Составьте программу для вычисления функции z по формуле

$$z(t) = \begin{cases} t^3, & t < -3, \\ t^2, & -3 \leq t \leq 4, \\ \ln t, & t > 4. \end{cases}$$

3. Напишите программу, которая выводит абсолютное значение функции $f \;\; x = \sin x$.

Вариант 8

1. Определите функцию, которая равна 1, если ее аргумент есть четное число либо размещен между четным и нечетным числом, и 0 в противном случае.

2. Вычислите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q.

3. Напишите функцию, которая по данным матрицам M и N вычисляет матрицу A, элементы которой равны $a_{i,j} = \dfrac{m_{i,j} \cdot n_{i,j}}{m_{i,j} + n_{i,j}}$.

Вариант 9

1. Напишите функцию, возвращающую диагональную матрицу, с наперед заданным значением величины, стоявшей на главной диагонали.

2. Составьте функцию для вычисления скалярного произведения двух векторов.

3. Напишите функцию, которая по заданному натуральному числу n вычисляет следующую сумму: $S = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k \;\; k-1}$.

Вариант 10

1. Напишите функцию, которая возвращает единичную матрицу с элементом $a_{2,2} = -5$.

2. Используя встроенную функцию `error` вычислите значение функции $z = \dfrac{x}{y}$ либо выведите всплывающую подсказку «Division by zero».

3. Напишите программу, которая возвращает число 5, если функция $z \;\; t \; = \; t-3 \;\; t+6 \;\; t^2-4$ отлична от нуля, и число -5, если функция $z \;\; t$ равна нулю.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум для студентов
механико-технологического факультета

В 2 частях

Часть 1

Составители :
БОКУТЬ Людмила Валентиновна
ПРИХАЧ Наталья Константиновна
ЛИТОВКО Александр Анатольевич и др.

Редактор *Т. В. Кипель*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 15.08.2012. Формат 60×84 $^1/_8$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 11,04. Уч.-изд. л. 4,32. Тираж 200. Заказ 545.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.