Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов
механико-технологического факультета

Часть 2

Минск 2008

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 2

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Под редакцией В.А. Нифагина

Минск 2008

УДК 51(076.2)
~~ББК 22.1я7~~
В 93

Составители:
О. Г. Вишневская, И. В. Прусова,
Н. К. Прихач, Н. А. Кондратьева

Рецензент
В. И. Юринок

Издание содержит краткие теоретические сведения, подробные решения примеров и задач по каждой теме, набор заданий для самостоятельной работы по разделам аналитической геометрии.

Часть 1 данного издания «Элементы линейной и векторной алгебры» (составители: Н.К. Прихач, Н.А. Кондратьева, О.Г. Вишневская, Е.А. Глинская) вышла в БНТУ в 2008 г.

ISBN 978-985-479-902-5(Ч. 2)
ISBN 978-985-479-903-2

1. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

1.1. Прямая на плоскости

1°. Общее уравнение прямой

Теорема. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.1}$$

где A, B, C – некоторые действительные числа, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, и обратно, всякое уравнение вида (1.1) определяет прямую.

Всякий ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный к прямой (1.1), называется *нормальным вектором прямой*. Уравнение (1.1) называется *общим уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n}(A, B)$.

Возможны частные случаи.

1) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$. Прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат.

2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$. Прямая $Bx + C = 0$ (или $y = -C/B$) параллельна оси Ox.

3) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$. Прямая $Ax + C = 0$ (или $y = -C/A$) параллельна оси Oy.

4) $A = C = 0, B \neq 0$. Прямая $By = 0$ (или $y = 0$) совпадает с осью Ox.

5) $B = C = 0, A \neq 0$. Прямая $Ax = 0$ (или $x = 0$) совпадает с осью Oy.

Если прямая l проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}(A, B)$, то уравнение прямой будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) называется *уравнением прямой с нормальным вектором* $\vec{n}(A, B)$ *и проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

2°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если в общем уравнении (1.1) прямой $B \neq 0$, то его можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y = kx + b, \tag{1.3}$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$.

Уравнение (1.3) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k, где $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Угол α $(0 \leq \alpha < \pi)$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки, называется *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Если прямая (1.3) проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = kx_0 + b$, то, вычтя это равенство из (1.3), получим уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{1.4}$$

называемое *уравнением прямой с угловым коэффициентом* k, *проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

3°. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, подставив их координаты в уравнение (1.4) и выразив $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{1.5}$$

$x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$.

4°. Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении прямой (1.1) $C \neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{1.6}$$

где $a=-C/A$, $b=-C/B$. Уравнение (1.6) называется *уравнением прямой в отрезках*, где a и b – длины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy, взятые с соответствующими знаками (в зависимости от того, положительные или отрицательные полуоси координат пересекает прямая).

5°. Каноническое уравнение прямой

Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a}(m,n)$, называемому *направляющим вектором прямой*, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

6°. Параметрические уравнения прямой

В силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0)$ и $\vec{a}(m,n)$ существует число $t \in R$, такое что $\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{a}$ или $(x-x_0, y-y_0)=t(m,n)$. Отсюда $x-x_0=t\,m$, $y-y_0=t\,n$, т. е.

$$\begin{aligned} x&=x_0+t\,m,\\ y&=y_0+t\,n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.8) называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{a}(m,n)$.

7°. Нормальное уравнение прямой

Если обе части общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ умножить на число $\mu = 1\big/\left(\pm\sqrt{A^2+B^2}\right)$ (которое называется *нормирующим множителем*), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu C<0$, то получается уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (1.9)$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

8°. Угол между двумя прямыми

Под углом φ между двумя прямыми будем понимать наименьший угол, на который надо повернуть одну прямую, чтобы она стала параллельна или совпала с другой прямой $(0 \le \varphi \le \pi/2)$.

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то косинус угла между ними находится как косинус угла между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1,B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2,B_2)$ по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|A_1A_2+B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (1.10)$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2+B_1B_2=0, \qquad (1.11)$$

а *условие* их *параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\ne\frac{C_1}{C_2}. \qquad (1.12)$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида (1.3) $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (1.13)$$

Для того чтобы прямые были *параллельны*, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1=k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2=-1$.

3. Если прямые заданы каноническим уравнением (1.7), то в этом случае $\varphi=\left(\vec{a}_1\widehat{,}\vec{a}_2\right)$, т. е.

$$\cos\varphi=\frac{\left|\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)\right|}{\left|\vec{a}_1\right|\cdot\left|\vec{a}_2\right|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \qquad (1.14)$$

9°. Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых

Если $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$, то координаты точки пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находятся путем совместного решения уравнений этих прямых.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1.15)$$

Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0, \tag{1.16}$$

где λ – числовой множитель, определяет прямую, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Давая в уравнении (1.16) λ различные значения, будем получать различные прямые, принадлежащие *пучку прямых*, центр которого есть точка пересечения заданных прямых.

Примеры

1. Материальная точка, выйдя из начала координат, движется прямолинейно и перпендикулярно вектору $\vec{n}(2,-3)$. Найти уравнение траектории и построить ее.

Решение. Так как траектория прямолинейна и выходит из начала координат, то уравнение траектории должно иметь вид $Ax + By + C = 0$. А т. к. коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора, то, подставляя вместо A число 2 и вместо B число -3, получим уравнение траектории $2x - 3y = 0$.

Для построения траектории кроме точки $O(0;0)$ достаточно построить еще одну какую-нибудь точку, например, $M(3;2)$.

2. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Написать:

а) уравнение с угловым коэффициентом;

б) уравнение в отрезках;

в) нормальное уравнение.

Решение. а) Разрешив уравнение относительно y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = (12/5)x - 13.$$

Здесь $k = 12/5$, $b = -13$.

б) Перенесем свободный член общего уравнения в правую часть и разделим обе части на 65; имеем $(12/65)\,x - (5/65)\,y = 1$. Переписав последнее уравнение в виде

$$\frac{x}{65/12} - \frac{y}{-(65/5)} = 1,$$

получим уравнение данной прямой в отрезках. Здесь $a = 65/12$, $b = -65/5 = -13$.

в) Находим нормирующий множитель $\mu = 1\Big/\sqrt{12^2 + (-5)^2} = 1/13$ (знак μ противоположен знаку свободного члена $(C = -65)$ общего уравнения). Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получаем нормальное уравнение прямой

$$(12/13)\,x - (5/13)\,y - 5 = 0.$$

Здесь $\cos\alpha = 12/13$, $\sin\alpha = -5/13$, $p = 5$.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ параллельно вектору $\vec{a}(2;-5)$.

Решение. Найдем точку пересечения двух данных прямых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 2x + 5y - 12 = 0. \end{cases}$$

Решением системы является $x = 1$, $y = 2$, т. е. точка пересечения двух прямых имеет координаты $M_0(1;2)$.

Для составления уравнения прямой воспользуемся формулой (1.7), взяв в качестве координат направляющего вектора координаты вектора, $\vec{a}(2;-5)$ и в качестве точки, через которую проходит прямая – $M_0(1;2)$, имеем

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5}.$$

Перепишем это уравнение в виде $-5x - 2y + 9 = 0$ или $5x + 2y - 9 = 0$.

4. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1)$ перпендикулярно к прямой $y = -3x + 1$.

Решение. Прямая $y=-3x+1$ или $3x+y-1=0$ имеет нормальный вектор $\vec{n}(3;1)$. Этот же вектор является направляющим вектором для искомой прямой. Воспользовавшись формулой (1.8), получим параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1)$ с направляющим вектором $\vec{a}(3;1)$:

$$\begin{cases} x = 2+3t, \\ y=-1+t. \end{cases}$$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1;3)$ и $N(2;5)$.

Решение. Полагая $x_1=-1$, $y_1=3$, $x_2=2$, $y_2=5$ в уравнении (1.5), получаем $\frac{y-3}{5-3}=\frac{x+1}{2+1}$ или $\frac{y-3}{2}=\frac{x+1}{3}$.

Итак, искомое уравнение имеет вид $2x-3y+11=0$. Проверим, что уравнение составлено верно. Для этого достаточно показать, что координаты точек M и N удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, равенства $2(-1)-3\cdot 3+11=0$, $2\cdot 2-3\cdot 5+11=0$ выполняются тождественно.

6. Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.

Решение. Приведя уравнение прямой к виду с угловым коэффициентом, получаем $y=(2/3)x+7/6$ и $y=(2/3)x-11/30$. Угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1=k_2=2/3$, т. е. прямые параллельны.

7. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

Решение. Координаты нормальных векторов к прямым $\vec{n}_1(3;-5)$ и $\vec{n}_2(10;6)$ удовлетворяют условию перпендикулярности векторов (1.11): $3\cdot 10+(-5)\cdot 6=0$.

Следовательно, прямые перпендикулярны.

8. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;1)$ и образующих с прямой $2x+y-4=0$ угол $\pi/4$.

Решение. Угловой коэффициент заданной прямой равен -2 $(y=-2x+4)$. Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k. Так как угол между этими прямыми равен $\pi/4$, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|$, т. е. $1=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|$, откуда $\frac{k+2}{1-2k}=1$ и $\frac{k+2}{1-2k}=-1$.

Решая каждое из полученных уравнений, находим $k=-1/3$ и $k=3$. Итак, уравнение одной из прямых запишется в виде (по формуле (1.4)) $y-1=(-1/3)(x-5)$, т. е. $x+3y-8=0$, а уравнение другой прямой в виде $y-1=3(x-5)$, т. е. $3x-y-14=0$.

9. Вычислить высоту трапеции, основания которой лежат на прямых $3x+4y-10=0$, $6x+8y-45=0$.

Решение. Высота трапеции равна расстоянию между указанными прямыми, а это последнее – расстоянию от произвольной точки, одной из них до другой. Выберем какую-нибудь точку первой прямой. Положив, например, $x=0$, из уравнения $3x+4y-10=0$ найдем $y=5/2$; получим точку $M_0(0;5/2)$. По формуле (1.15) вычисляем расстояние от точки $M_0(0;5/2)$ до этой прямой:

$$d=\frac{|6\cdot 0+8\cdot 5/2-45|}{10}=\frac{|20-45|}{10}=2{,}5.$$

Искомая длина высоты трапеции равна 2,5.

10. Даны уравнения высот треугольника ABC: $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ и координаты вершины $A\,(2;2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

Решение. Легко убедиться в том, что вершина A не лежит ни на одной из заданных высот: ее координаты не удовлетворяют уравнениям этих высот.

Пусть $9x-3y-4=0$ – уравнение высоты BB_1 и $x+y-2=0$ – уравнение высоты CC_1. Составим уравнение стороны AC, рассматривая ее как прямую, проходящую через точку A перпендикулярно высоте BB_1. Так как угловой коэффициент высоты BB_1 равен 3, то угловой коэффициент стороны AC равен

$-1/3$, т. е. $k_{AC}=-1/3$. Воспользовавшись формулой (1.4), получим уравнение стороны AC:

$$y-2=(-1/3)(x-2) \text{ или } x+3y-8=0.$$

Аналогично получаем $k_{CC_1}=-1$, $k_{AB}=1$, и уравнение стороны AB имеет вид $y-2=x-2$, т. е. $y=x$.

Решив совместно уравнения прямых AB и BB_1, а также прямых AC и CC_1, найдем координаты вершин треугольника: $B(2/3;2/3)$ и $C(-1;3)$. Остается составить уравнение стороны BC (по ф. (1.5)):

$$\frac{y-2/3}{3-2/3}=\frac{x-2/3}{-1-2/3}, \text{ т. е. } 7x+5y-8=0.$$

11. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-3;-8)$, $B(-12;4)$, $A(8;10)$. Найти:

1) длину стороны AB;
2) угол B в радианах;
3) уравнение сторон AB и BC;
4) уравнение высоты CD и ее длину;
5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD;
6) уравнение прямой, проходящей через точку K, параллельно стороне AB;
7) координаты точки M, симметричной точке A относительно прямой CD.

Решение. 1) Длину стороны AB найдем как расстояние между двумя точками: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-12+3)^2+(4+8)^2}=15$.

2) Угол B найдем по формуле (1.13): $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, где $k_2 = k_{BC} = \dfrac{3}{10}$ и $k_1 = k_{AB} = -\dfrac{4}{3}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3/10 + 4/3}{1 - 4/3 \cdot 3/10} = 2{,}72$.

3) Уравнения сторон AB и BC найдем по формуле (1.5): $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, т. е. $\dfrac{y+8}{4+8} = \dfrac{x+3}{-12+3} \Rightarrow \dfrac{y+8}{12} = \dfrac{x+3}{-9} \Rightarrow 4x + 3y + 36 = 0 \quad (AB)$.

Аналогично для стороны BC: $\dfrac{y-4}{10-4} = \dfrac{x+12}{8+12} \Rightarrow 3x - 10y + 76 = 0 \quad (BC)$.

Чтобы найти угловые коэффициенты сторон AB и BC, запишем уравнения в виде прямых с угловыми коэффициентами:

$$y = -4/3x - 12 \quad (AB) \quad \text{и} \quad y = 3/10x + 76/10 \quad (BC),$$

отсюда $k_{AB} = -4/3$, $k_{BC} = 3/10$.

4) Уравнение высоты CD найдем как уравнение прямой, проходящей через данную точку по формуле (1.4): $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k найдем из условия перпендикулярности прямых CD и AB: $k_{CD} \cdot k_{AB} = -1$, т. е. $-4/3k_{CD} = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow k_{CD} = 3/4$.

Тогда уравнение высоты CD будет иметь вид: $y - 10 = 3/4(x - 8) \Rightarrow 3x - 4y + 16 = 0$.

5) Уравнение медианы AE найдем, если найдем точку $E(x_E, y_E)$. Имеем

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-12+8}{2} = -2; \; y_E = \frac{4+10}{2} = 7, \text{ т. е. } E(-2;7).$$

Тогда уравнение AE имеет вид $\dfrac{y+8}{7+8} = \dfrac{x+3}{-2+3} \Rightarrow 15x - y + 37 = 0$.

Найдем координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD, если решим систему уравнений высоты CD и медианы AE:

$$\begin{cases} 15x - y + 37 = 0, \\ 3x - 4y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_K = -\frac{44}{19};\ y_K = \frac{43}{19}.$$

6) Уравнение прямой, проходящей через точку $K(-44/19;43/19)$, параллельно стороне AB, найдем по формуле (1.2), учитывая, что в качестве нормального вектора к искомой прямой может быть взят нормальный вектор прямой AB $\vec{n}(4;3)$:

$$4(x+44/19)+3(y-43/19)=0 \Rightarrow 4x+3y+47/19=0.$$

7) Найдем координаты точки D, для чего решим совместно систему уравнений прямой AB и высоты CD:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 36 = 0, \\ 3x - 4y + 16 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_D = -\frac{192}{25};\ y_D = -\frac{44}{25}.$$

Чтобы найти координаты точки $M(x_M, y_M)$, расположенной симметрично точке A относительно прямой CD, воспользуемся формулой деления отрезка пополам:

$$x_D = \frac{x_M + x_A}{2},\ y_D = \frac{y_M + y_A}{2}, \text{ т. е.}$$

$$-\frac{192}{25} = \frac{x_M - 3}{2},\ -\frac{44}{25} = \frac{y_M - 8}{2}.$$

Откуда $x_M = -12\frac{9}{25}$, $y_M = 4\frac{12}{25}$.

12. Найти прямую, принадлежащую пучку $2x+3y+5+\lambda(x+8y+6)=0$ и проходящую через точку $M(1;1)$.

Решение. Координаты точки M должны удовлетворять уравнению искомой прямой, поэтому для определения λ получаем уравнение $2\cdot1+3\cdot1+5+\lambda(1+8\cdot1+6)=0$ или $10+15\lambda=0$, то есть $\lambda=-2/3$. Подставив значение λ в уравнение пучка, получим уравнение прямой $2x+3y+5-(2/3)(x+8y+6)=0$, или $4x-7y+3=0$.

13. Даны стороны треугольника: $x+2y+5=0\,(AB)$, $3x+y+1=0\,(BC)$ и $x+y+7=0\,(AC)$. Составить уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону AC.

Решение. Высота принадлежит пучку $x+2y+5+\lambda(3x+y+1)=0$, то есть $(1+3\lambda)x+(2+\lambda)y+(5+\lambda)=0$.

Угловой коэффициент прямой пучка равен $-(1+3\lambda)/(2+\lambda)$; так как угловой коэффициент прямой AC равен -1, то угловой коэффициент искомой высоты равен 1 и для определения λ получаем уравнение $-(1+3\lambda)/(2+\lambda)=1$. Отсюда $1+3\lambda+2+\lambda=0$, то есть $\lambda=-3/4$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получим искомое уравнение высоты:

$$(1-9/4)x+(2-3/4)y+(5-3/4)=0, \text{ то есть } 5x-5y-17=0.$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Написать общее уравнение прямой, заданной:

а) точкой $M_0(1;1)$ и нормальным вектором $\bar{n}(2,-1)$;

б) точкой $M_0(-1;2)$ и направляющим вектором $\bar{a}(3,-1)$;

в) двумя своими точками $M_1(2;2)$ и $M_2(0;2)$.

Привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

2. Уравнение прямой задано в виде $\left(x+2\sqrt{5}\right)/4+\left(y-2\sqrt{5}\right)/2=0$. Написать: а) общее уравнение прямой; б) уравнение с угловым коэффициентом; в) уравнение в отрезках; г) нормальное уравнение.

3. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=1$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=2\pi/3$.

4. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки, если длина отрезка прямой, заключенного между осями координат, равна $5\sqrt{2}$.

5. Найти угол между прямыми $y = 3x/5 + 1$, $y = 4x - 5$.

6. Луч света направлен по прямой $y = 2x/3 - 4$. Определить точку встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча.

7. Из точки $A(-5;6)$ выходит луч света под углом $\alpha = \mathrm{arctg}(-2)$ к оси Ox и отражается от оси Ox, а затем от оси Oy. Написать уравнение всех трех лучей.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;1)$ под углом $\pi/4$ к прямой L: $x = 1 + t$, $y = -2 - 2/3t$.

9. В равнобедренном треугольнике дана вершина острого угла $A(5;7)$ и уравнение противоположного катета $6x + 4y - 9 = 0$. Составить уравнение гипотенузы и другого катета.

10. Исследовать взаимное расположение заданных прямых L_1 и L_2. При этом в случае параллельности этих прямых найти расстояние между ними, в случае пересечения этих прямых – косинус угла между ними и точку M_0 пересечения прямых.

а) L_1: $-2x + y - 1 = 0$, L_2: $2y + 1 = 0$;

б) L_1: $x + y - 1 = 0$, L_2: $x/2 = (y+1)/(-2)$;

в) L_1: $-x + 2y + 1 = 0$, L_2: $2x - 4y - 2 = 0$.

11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-4)$ и параллельной прямой $2x - 5y + 7 = 0$.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;5)$ и перпендикулярной к прямой $4x + 7y - 3 = 0$.

13. Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым $3x - 2y - 1 = 0$ и $(x-1)/2 = (y+5)/3$ и проходящей посередине между ними.

14. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

15. Составить уравнение сторон квадрата, если дана его вершина $A(2;-4)$ и точка пересечения диагоналей $M(5;2)$.

16. Проверить, что четыре точки $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$, $D(3;1)$ служат вершинами трапеции и составить уравнения средней линии и диагоналей трапеции.

17. Написать уравнение прямой, которая отстоит от точки $A(-1;2)$ на расстояние $d=\sqrt{34}$ и образует с осью Ox угол, вдвое больший угла, составляемого с осью Ox прямой $2x-6y+5=0$.

18. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $x+2y-6=0$.

19. Через точку $M(4;-3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, была равна трем квадратным единицам.

20. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух прямых $3x-y+7=0$ и $3x-y-3=0$.

21. Составить уравнение биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми: $x-3y+5=0$ и $3x-y-2=0$.

22. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из точки $M(6;2)$ к прямой $4x+3y-10=0$.

23. Вычислить площадь квадрата, две противоположные стороны которого лежат на прямых $6x-8y-15=0$, $6x-8y+15=0$.

24. Найти проекцию точки $P(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;-3)$ и $B(-5;1)$.

25. Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1;3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

26. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная его вершину $A(2;-1)$, а также уравнения высоты $7x-10y+1=0$ и биссектрисы $3x-2y+5=0$, проведенных из одной вершины. Решить задачу, не вычисляя координат вершин B и C.

27. Написать уравнения сторон треугольника ABC, зная одну его вершину $B(2;-7)$, а также уравнения высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведенных из различных вершин.

28. Даны уравнения $y+4=0$, $7x+4y+5=0$ биссектрис двух внутренних углов треугольника и уравнение $4x+3y=0$ стороны, соединяющей вершины, из которых выходят данные биссектрисы. Написать уравнения двух других сторон треугольника.

29. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3;-1)$. Найти уравнения двух других сторон.

30. Даны стороны треугольника: $x-y+2=0\,(AB)$, $x=2\,(BC)$, $x+y-2=0\,(AC)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее (считая от вершины A) в отношении $1:3$.

Ответы

1) а) $2x-y-1=0$; $2/\sqrt{5}\,x-1/\sqrt{5}\,y-1/\sqrt{5}=0$; $p=1/\sqrt{5}$. б) $x+3y-5=0$; $1/\sqrt{10}\,x-3/\sqrt{10}\,y-5/\sqrt{10}=0$; $p=5/\sqrt{10}$. в) $y-2=0$, $p=2$. 2) а) $x+2y-2\sqrt{5}=0$; б) $y=-1/2x+\sqrt{5}$; в) $x/2\sqrt{5}+y/\sqrt{5}=1$; г) $1/\sqrt{5}\,x+2/\sqrt{5}\,y-2=0$. 3) $\sqrt{3}x+y-1=0$. 4) $x+y-5=0$, $x+y+5=0$. 5) $\varphi=45^\circ$. 6) $(6;0)$, $2x+3y-12=0$. 7) $2x+y+4=0$; $2x-y+4=0$; $2x+y-4=0$. 8) $x-5y+3=0$, $5x+y-11=0$. 9) Гипотенуза: $x+5y-40=0$ или $5x-y-18=0$. Катет: $2x-3y+11=0$. 10) а) пересекаются, $M_0(-3/4;-1/2)$, $\cos\alpha=1/\sqrt{5}$; б) параллельны, $d=\sqrt{2}$; в) совпадают.

11) $2x-5y-26=0$. 12) $7x-4y+34=0$. 13) $3x-2y-7=0$. 14) $Q(11;-11)$. 15) $x-3y-14=0$, $x-3y+16=0$, $3x+y-2=0$, $3x+y-32=0$. 16) $BC \parallel AD$, $3x-5y+5=0$, $x-y=0$, $y-1=0$. 17) $3x-5y+47=0$, $3x-5y-11=0$, $3x+5y+17=0$, $3x+5y-41=0$. 18) $S=9$ кв.ед. 19) $3x+2y-6=0$, $3x+8y+12=0$. 20) $3x-y+2=0$. 21) $4x-4y+3=0$, $2x+2y-7=0$. 22) 4. 23) 9. 24) $(-12;5)$. 25) $x+2y-7=0$; $x-4y-1=0$; $x-y+2=0$. 26) $x-5y-7=0$; $5x+y+17=0$; $10x+7y-13=0$. 27) $x-3y-23=0$; $7x+9y+19=0$; $4x+3y+13=0$. 28) $4x-3y=0$; $12x+5y+16=0$. 29) $x-y-7=0$; $x-2y-10=0$. 30) $5x-3y+2=0$.

1.3. Плоскость и прямая в пространстве

1°. Общее уравнение плоскости

Теорема. Всякая плоскость в пространстве может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x, y, z:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1.17}$$

если $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет некоторую плоскость в пространстве.

Уравнение (1.17) называется *общим уравнением плоскости*. Здесь A, B, C – координаты ненулевого вектора $\bar{n}(A,B,C)$, перпендикулярного плоскости, называемого *нормальным вектором плоскости.*

Положение плоскости в пространстве вполне определено, если известны точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащая ей, и нормальный вектор $\bar{n}(A,B,C)$.

Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{1.18}$$

и называется *уравнением плоскости с нормальным вектором* $\overline{n}(A,B,C)$. *и проходящей через точку* $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением (1.17):

1) $A=0$; параллельна оси Ox;

2) $B=0$; параллельна оси Oy;

3) $C=0$; параллельна оси Oz;

4) $D=0$; проходит через начало координат;

5) $A=B=0$; перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);

6) $A=C=0$; перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);

7) $B=C=0$; перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);

8) $A=D=0$; проходит через ось Ox;

9) $B=D=0$; проходит через ось Oy;

10) $C=D=0$; проходит через ось Oz;

11) $A=B=D=0$; совпадает с плоскостью xOy $(z=0)$;

12) $A=C=D=0$; совпадает с плоскостью xOz $(y=0)$;

12) $B=C=D=0$; совпадает с плоскостью yOz $(x=0)$.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

2°. Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении плоскости (1.17) коэффициент $D\neq 0$, то разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (1.19)$$

где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$. Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*: в нем a,b и c – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz.

3°. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ однозначно определяют положение плоскости P в пространстве.

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости P. Тогда векторы $\overline{M_1M}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, и $\overline{M_1M_3}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$ компланарны и, значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\left(\overline{M_1M},\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3}\right)=0$ или

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (1.20)$$

Равенство (1.20) и является *уравнением плоскости, проходящей через три точки*. Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, придем к уравнению вида (1.18).

4°. Нормальное уравнение плоскости

Пусть $\overline{n^\circ}$ – единичный вектор нормали к плоскости P, проведенный к ней из начала координат. Тогда его координатами будут направляющие косинусы: $\overline{n^\circ}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где α,β,γ – углы, образованные этим перпендикуляром с осями координат Ox, Oy, Oz. Пусть p – длина этого перпендикуляра, а $\bar{r}(x,y,z)$ – радиус-вектор текущей точки $M(x,y,z)$. Тогда *уравнение плоскости в векторной форме* имеет вид

$$\left(\bar{r},\overline{n^\circ}\right)-p=0,\ \ p\geq 0. \qquad (1.21)$$

В координатной форме уравнение (1.21) принимает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (1.22)$$

и называется *нормальным уравнением плоскости*.

Для приведения общего уравнения плоскости (1.17) к нормальному виду (1.22), следует все члены уравнения умножить на *нормирующий множитель* $\mu = \pm 1 \big/ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, где знак выбирается противоположным знаку свободного члена D.

5°. Уравнение плоскости, параллельной двум данным векторам

Положение плоскости в пространстве также определено единственным образом, если известны два неколлинеарных вектора $\overline{a_1}(m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{a_2}(m_2, n_2, p_2)$, параллельных плоскости, и точка, через которую эта плоскость проходит. В качестве нормального вектора плоскости P можно взять вектор векторного произведения $\overline{n} = \left[\overline{a}_1, \overline{a}_2\right]$, перпендикулярный к векторам $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$, а значит и к плоскости P. Зная точку, через которую проходит плоскость P, можно записать уравнение вида (1.18).

Также получить уравнение плоскости можно, выбрав произвольную точку $M(x, y, z)$ плоскости P и учитывая, что векторы $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ – компланарны. Значит, их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\left(\overline{M_0M}, \overline{a_1}, \overline{a_2}\right) = 0$ или в координатной форме получим равенство

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.23)$$

которое является *уравнением плоскости, параллельной двум векторам и проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

6°. Уравнение пучка плоскостей

Уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (1.24)$$

при произвольном λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую. Такое уравнение называют *уравнением пучка плоскостей.*

7°. Угол между двумя плоскостями

Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{n_1, n_2}\right) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \qquad (1.25)$$

где $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей.

8°. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

С помощью формулы (1.25) можно получить *условие перпендикулярности* двух плоскостей:

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (1.26)$$

Если две плоскости параллельны, то параллельны и их нормальные векторы. Учитывая условие параллельности векторов, получаем *условие параллельности двух плоскостей*:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 \neq D_1/D_2. \qquad (1.27)$$

9°. Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* P: $Ax + By + Cz + D = 0$ называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость P.

Искомое расстояние находится по формуле

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (1.28)$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости. Знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: «плюс», если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.

Примеры

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$ параллельно плоскости $3x-y+4z-1=0$.

Решение. Т. к. искомая плоскость параллельна данной, то в качестве ее нормального вектора можно взять нормальный вектор $\bar{n}(3;-1;4)$ данной плоскости. По формуле (1.18) получаем искомое уравнение:

$$3(x-2)-1(y+3)+4(z-1)=0 \text{ или } 3x-y+4z-13=0.$$

2. Уравнение плоскости $2x+3y-6z+21=0$ привести к нормальному виду.

Решение. Находим нормирующий множитель (который берем со знаком «минус», т. к. $D=21>0$): $\mu=-1/\sqrt{2^2+3^2+6^2}=-1/7$. Итак, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид $-(2/7)x-(3/7)y+(6/7)z-3=0$.

3. Из точки $P(2;3;-5)$ на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Решение. Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, служат следующие точки: $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$. Используя соотношение (1.20), запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 15x + 10y - 6z - 60 = 0.$$

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5;4;3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение. Используя уравнение (1.19) плоскости в отрезках, в котором $a = b = c$, имеем $x/a + y/a + z/a = 1$. Координаты точки A удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство $5/a + 4/a + 3/a = 1$, откуда $a = 12$. Итак, получаем уравнение $x + y + z - 12 = 0$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;1;3)$, $M_2(6;2;1)$ и перпендикулярной к плоскости $4x + 2y - z + 4 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;1;3)$, можно записать в виде (1.18): $A(x-2) + B(y-1) + C(z-3) = 0$.

Т. к. плоскость проходит и через точку $M_2(6;2;1)$, то ее координаты удовлетворяют последнему уравнению, т. е. $4A + B - 2C = 0$.

Искомая плоскость перпендикулярна к данной плоскости, поэтому на основании условия (1.26) $4A + 2B - C = 0$. Итак, для определения коэффициентов A, B, C получена система уравнений

$$\begin{cases} 4A + B - 2C = 0, \\ 4A + 2B - C = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид $B = -C, \quad A = 3/4C$.

Подставляя его в уравнение, получим нужное уравнение плоскости

$$3/4C(x-2) - C(y-1) + C(z-3) = 0 \text{ или } 3x - 4y + 4z - 14 = 0.$$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-1;-5)$ и перпендикулярной к плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ и $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Решение. В качестве нормального вектора $\bar{n}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный нормальным векторам $\overline{n_1}(3;-2;2)$ и $\overline{n_2}(5;-4;3)$ данных плоскостей, т. е. векторное произведение векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$:

$$\bar{n}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=2i+j-2k.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(2;1;-2)$, получаем

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ или } 2x+y-2z-15=0.$$

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;2;1)$ параллельно вектору $\bar{a}(2;0;1)$.

Решение. Задача имеет единственное решение, т. к. векторы $\overline{M_1M_2}(-1;1;0)$ и $\bar{a}(2;0;1)$ неколлинеарны. В качестве нормального вектора к плоскости может быть взят вектор

$$\bar{n}=\left[\overline{M_1M_2},\bar{a}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i+j-2k.$$

Уравнение плоскости имеет вид

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0 \text{ или } x+y-2z=0.$$

Второй способ. Точка $M(x;y;z)$ принадлежит искомой плоскости в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\bar{a}$ компланарны. Следовательно,

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

откуда $x+y-2z=0$.

8. Две грани куба лежат соответственно на плоскостях $x+2y-2z-1=0$, $x+2y-2z+5=0$. Вычислить объем данного куба.

Решение. Достаточно найти длину ребра куба, равную расстоянию между данными параллельными плоскостями. Это расстояние равно расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Выберем на первой плоскости произвольную точку. Приняв, например, что $y_0=1$, $z_0=1$, из уравнения $x+2y-2z-1=0$ найдем $x_0=1$.

По формуле (1.28) находим расстояние от точки $M_0(1;1;1)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$.

$$d=\frac{|1+2\cdot1-2\cdot1+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

Т. к. $V=a^3$ и $a=d=2$, то $V=8$ куб. ед.

9. Даны точки $A_1(4;7;8)$, $A_2(-1;13;0)$, $A_3(2;4;9)$. Вычислить угол между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение. Используя формулу (1.20), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ откуда } 6x-7y-9z+97=0.$$

Нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ имеет координаты $\overline{n_1}(6;-7;-9)$, нормальный вектор плоскости Oxy – $\overline{n_2}(0;0;1)$. Тогда, в соответствии с формулой (1.25)

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{0\cdot6+0\cdot(-7)+1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}}=\frac{-9}{\sqrt{166}}\approx-0{,}7.$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+3y+5z-4=0$ и $x-y-2z+7=0$ и параллельной оси Oy.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка плоскостей (1.24):

$$x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7)=0;$$

$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $3-\lambda=0$, т. е. $\lambda=3$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получаем $4x-z+17=0$.

1.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;1;1)$, параллельно плоскости $-2x+y-z+1=0$ и вычислить расстояние между плоскостями.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;1;1)$ и $M_2(2;0;1)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+z+1=0$.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;1;1)$, параллельно векторам $\overline{a_1}(0;1;2)$ и $\overline{a_2}(-1;0;1)$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;0)$ и $M_2(2;1;1)$ параллельно вектору $\overline{a}(3;0;1)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-1)$ и $M_2(1;3;-4)$ и образующей угол $\pi/3$ с плоскостью $2x+y-z+7=0$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;7;-5)$, и отсекающей от осей координат положительные и равные отрезки.

7. Написать уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $2x-y+5z-3=0$ и $2x-10y+4z-2=0$.

8. Написать уравнение плоскости, равноудаленной от двух заданных плоскостей $5x-3y+z+3=0$ и $10x-6y+2z+7=0$.

9. Известны координаты вершин тетраэдра $A(2;0;0)$; $B(5;3;0)$; $C(0;1;1)$; $D(-2;-4;1)$. Написать уравнения его граней.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;1;-1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x-y+5z+3=0$ и $x+3y-z-7=0$.

11. Найти длину перпендикуляра, опущенного их точки $M_0(2;3;-5)$ на плоскость $4x-2y+5z-12=0$.

12. На плоскости $2x-5y+2z+5=0$ найти такую точку M, чтобы прямая OM составляла с осями координат равные углы.

13. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $M(4;-3;12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

14. Найти уравнения плоскостей, проходящих через оси координат перпендикулярно плоскости $3x-4y+5z-12=0$.

15. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $M_1(1;-4;2)$ и $M_2(7;1;-5)$.

16. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M(1;-1;-1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая – ось Oz.

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $M_1(4;-2;1)$ и $M_2(2;4;-3)$.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+5y+9z-13=0$, $3x-y-5z+1=0$ и точку $M_0(0;2;1)$.

19. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ и через точки $M_1(0;3;0)$ и $M_2(1;1;1)$.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+2y+3z-5=0$ и $3x-2y-z+1=0$, и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oz.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

22. Какой угол образует с плоскостью $x + y + 2z - 4 = 0$ вектор $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$?

23. На оси Ox найти точку, отстоящую от плоскости $6x + 2y + 3z - 12 = 0$ на расстоянии $d = 6$.

24. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $3x + 2y - 6z - 1 = 0$, $16x + 12y - 15z - 7 = 0$.

25. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(2; -2; 6)$ и плоскости: $x + y + z - 2 = 0$.

26. Записать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - 2y - z - 6 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 7$.

27. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M_0(-2; 7; 3)$ параллельно плоскости: $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1;5;6)$, $M_2(-1;7;10)$.

29. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

30. Три грани тетраэдра, расположенного во втором октанте $(x < 0,\ y > 0,\ z > 0)$, совпадают с координатными плоскостями. Написать уравнение четвертой грани, зная длину ребер, ее ограничивающих: $|AB| = 6$; $|BC| = \sqrt{29}$; $|AC| = 5$, и найти длину высоты OH тетраэдра.

Ответы

1) $2x - y + z - 2 = 0$; $1/\sqrt{6}$. 2) $x + 2y - 2 = 0$. 3) $x - 2y - z = 0$. 4) $-x + 2y - 3z - 3 = 0$. 6) $x + y + z - 3 = 0$. 7) $3x - 6y + 7z - 4 = 0$ и

$x+4y+3z-2=0$. 8) $20x-12y+4z+13=0$. 9) $x-y+3z-2=0$, $x-y-2=0$, $5x-2y+12z-10=0$, $5x-2y+21z-19=0$. 10) $2x-y-z-2=0$. 11) $7\sqrt{5}/3$. 12) $M(5;5;5)$. 13) $4x-3y+12z-169=0$. 14) $5y+4z=0$, $5x-3z=0$, $4x+3y=0$. 15) $6x+5y-7z-27=0$. 16) $\pi/3$. 17) $x+7y+10z=0$. 18) $x+y+z-3=0$. 19) $x-z=0$. 20) $5x+2y+5z-9=0$. 21) $x-y+2=0$. 22) $\arcsin(5/6)$. 23) $M_1(9;0;0)$, $M_2(-5;0;0)$. 24) $M_1(0;37/67;0)$, $M_2(0;12/17;0)$. 25) $N(0;0;8)$. 26) $2x-2y-z-27=0$, $2x-2y-z+15=0$. 27) $(-1/15;4/15;-1/3)$. 28) $x-y-2z+22=0$. 29) (8). 30) $3\sqrt{5}x-6y-4\sqrt{5}z+12\sqrt{5}=0$; $4\sqrt{5}/\sqrt{161}$.

1.5. Прямая

1°. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно однозначно определить пересечением двух плоскостей

$$\left.\begin{aligned} P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

нормальные векторы $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ которых непараллельны. Уравнения (1.29) называются *общими уравнениями прямой* в пространстве.

2°. Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{a}(m;n,p)$ – вектор, параллельный прямой L, называемый *направляющим вектором* этой прямой, и $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x,y,z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{a}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ и вектора $\bar{a}(m;n,p)$ пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{1.30}$$

Уравнения (1.30) называются *каноническими* уравнениями прямой в пространстве и определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельную вектору $\bar{a}(m, n, p)$.

3°. Параметрические уравнения прямой

От канонических уравнений прямой, вводя параметр *t*, нетрудно перейти к *параметрическим уравнениям*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{1.31}$$

или в *векторной* форме

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{a}t; \tag{1.32}$$

где $\bar{r}$ и $\bar{r}_0$ – радиус-векторы точек M и M_0, $\bar{a}$ – направляющий вектор прямой, t – параметр.

4°. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая L проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора $\bar{a}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Т. к. прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то, согласно уравнениям (1.30), уравнения L имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1.33}$$

Уравнения (1.33) называются уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.

5°. Угол между прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Под *углом между прямыми* понимают угол между направляющими векторами $\overline{a_1}(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{a_2}(m_2;n_2;p_2)$. Величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi = \cos\left(a_1\hat{,}a_2\right) = \frac{\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2}{\left|\overline{a}_1\right|\left|\overline{a}_2\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (1.34)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (1.34) следует взять по модулю.

6°. Условие перпендикулярности двух прямых

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то скалярное произведение их направляющих векторов $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$, т. е.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (1.35)$$

7°. Условие параллельности двух прямых

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то параллельны их направляющие векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (1.36)$$

8°. Условие компланарности двух прямых

Пусть прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, прямая L_2 – через точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ и $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Следовательно, необходимым и достаточным условием нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости является

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.37}$$

При выполнении условия (1.37) прямые L_1 и L_2 либо пересекаются, если $\overline{a_2} = \lambda \overline{a_1}$, либо параллельны, если $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$. Если условие (1.37) не выполняется, то прямые L_1 и L_2 являются *скрещивающимися.*

9°. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой (1.30), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\overline{a}(m; n, p)$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left|\overline{a} \times \overline{M_0 M_1}\right|}{\left|\overline{a}\right|}. \tag{1.38}$$

10°. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой L *и плоскостью* P называют угол φ, образованный прямой L и ее проекцией на плоскость P.

Если прямая L задана каноническими уравнениями (1.30), а плоскость P – общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда косинус угла между нормальным вектором $\overline{n}(A, B, C)$ к плоскости и направляющим вектором $\overline{a}$ прямой определяется

$$\cos\left(\widehat{\overline{n}, \overline{a}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\overline{n} \cdot \overline{a}}{\left|\overline{n}\right|\left|\overline{a}\right|},$$

и т. к. $\sin\varphi \geq 0$ для $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{1.39}$$

Если прямая L параллельна плоскости P, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{a}$ перпендикулярны, а потому $\bar{a} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0 \tag{1.40}$$

является *условием параллельности прямой и плоскости.*

Если прямая L перпендикулярна плоскости P, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{a}$ параллельны. Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \tag{1.41}$$

являются *условиями перпендикулярности* прямой и плоскости.

11°. Пересечение прямой с плоскостью

Для определения точки пересечения прямой с плоскостью нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой (1.31). Подставляя x, y, z из этих уравнений в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, получим уравнение относительно неизвестного параметра t:

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{1.42}$$

Возможны следующие случаи:

1) При $Am + Bn + Cp \neq 0$ уравнение (1.42) имеет единственное решение

$$t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp).$$

Подставив это значение t в параметрическое уравнение прямой, найдем координаты точки пересечения M.

2) При

$$Am + Bn + Cp = 0, \; Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \tag{1.43}$$

уравнение (1.42) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Условия (1.43) являются *условиями параллельности* прямой и плоскости.

3) При

$$Am + Bn + Cp = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (1.44)$$

любое значение t является решением уравнения (1.42), т. е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Равенства (1.44) называются *условиями принадлежности прямой плоскости.*

Примеры

1. Прямая L задана общими уравнениями $\begin{cases} x + 3y + 2z - 5 = 0, \\ 5x + y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$ Написать ее канонические уравнения, а также уравнение ее проекций на координатные плоскости.

Решение. Т. к. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, то для нахождения точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой приведем исходные уравнения к виду $\begin{cases} x + 3y = 5 - 2z, \\ 5x + y = -3 - 2z. \end{cases}$

Полагая z равным произвольному числу z_0, например $z = 0$ из данной системы найдем $y_0 = 2$, $x_0 = -1$, т. е. $M_0(-1;2;0)$.

В качестве направляющего вектора прямой может быть взят вектор $\bar{a} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}]$, где $\overline{n_1}(1;3;2)$, $\overline{n_2}(5;1;2)$ – нормальные векторы плоскостей, линией пересечения которых является заданная прямая. Таким образом,

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i + 8j - 14k.$$

По формуле (1.30) записываем искомые канонические уравнения

$$(x+1)/4 = (y-2)/8 = z/(-14) \quad \text{или} \quad (x+1)/2 = (y-2)/4 = z/(-7).$$

Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений $4x-2y+8=0$, $7x+2z+7=0$, $7y+4z-14=0$, описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно (уравнения прямой в проекциях).

2. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$ перпендикулярно плоскости $3x-z+5=0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $\bar{n}(3;0;-1)$ параллелен искомой прямой и, значит, его можно взять в качестве направляющего вектора этой прямой. Согласно соотношениям (1.31), параметрические уравнения искомой прямой есть $x=2+3t$; $y=-3$; $z=1-t$.

3. Дан треугольник с вершинами $A(1;4;-5)$, $B(-3;6;9)$, $C(5;6;7)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит медиана, проведенная из вершины B.

Решение. Используя формулы деления отрезка пополам, находим середину отрезка AC – точку $D(3;5;1)$. Составим уравнение прямой, проходящей через две точки B и D, используя формулу (1.33): $(x+3)/(3+3)=(y-6)/(5-6)=(z-9)/(1-9)$ или $(x+3)/6=(y-6)/(-1)=(z-9)/(-8)$.

4. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $(x-2)/2=(y-1)/3=(z-3)/1$.

Решение. Используя условие (1.41) перпендикулярности прямой и плоскости и полагая $A=m=2$; $B=n=3$; $C=p=1$; $D=0$, составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой. Это уравнение имеет вид $2x+3y+z=0$.

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Параметрические уравнения прямой запишутся так: $x=2+2t$; $y=1+3t$; $z=3+t$. Для определения t подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости: $2(2+2t)+3(1+3t)+3+t=0$, откуда $t=-5/7$. Координаты точки пересечения $M(4/7;-8/7;16/7)$.

Остается составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку M.

Используя соотношение (1.33), получим $x/(4/7)=y/(-8/7)=z(16/7)$ или $x/1=y/-2=z/4$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;2;-1)$ и пересекающей ось Ox под прямым углом.

Решение. Так как прямая перпендикулярна оси Ox и пересекает ее, то она проходит через точку $N(3;0;0)$. Составив уравнение прямой, проходящей через точки M и N по формуле (1.33), получаем $(x-3)/0=(y-2)/(-2)=(z+1)/1$.

6. Найти точку N, симметричную точке $M(1;1;1)$ относительно плоскости $x+y-2z-6=0$.

Решение. Искомая точка N принадлежит прямой L, проведенной из точки M перпендикулярно плоскости P. Уравнения прямой L, параллельной вектору $\bar{n}(1;1;-2)$ и проходящей через точку $M(1;1;1)$ имеют вид $(x-1)/1=(y-1)/1=(z-1)/(-2)$ или в параметрическом виде: $x=1+t$; $y=1+t$; $z=1-2t$.

Найдем точку пересечения прямой и плоскости, подставляя выражения для x, y, z в уравнение плоскости. Найдем $t=1$, откуда $x=2, y=2, z=-1$.

Воспользовавшись формулами деления отрезка пополам, найдем координаты симметричной точки: $2=(1+x_N)/2$, $2=(1+y_N)/2$, $-1=(1+z_N)/2$, откуда $x_N=3$, $y_N=3$, $z_N=-3$. Следовательно, $N(3;3;-3)$.

7. Дана прямая $(x-1)/2=y/3=(z+1)/(-1)$ и вне ее точка $M(1;1;1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной прямой.

Решение. Уравнение плоскости, проецирующей точку M на данную прямую, имеет вид $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$.

В качестве нормального вектора $\bar{n}(A,B,C)$ плоскости, перпендикулярной прямой, можно взять направляющий вектор данной прямой $\bar{a}(2;3;-1)$.

Тогда получим $2(x-1)+3(y-1)-1(z-1)=0$ или $2x+3y-z-4=0$.

Найдем проекцию точки M на прямую, для чего совместно решим систему уравнений $2x+3y-z-4=0$, $x=2t+1$; $y=3t$; $z=-t-1$ (параметрические уравнения прямой). Найдем $t=1/14$, отсюда $x=8/7$, $y=3/14$, $z=-15/14$. Тогда координаты симметричной точки можно найти, используя формулы для координат середины отрезка, т. е. $8/7=(1+x_N)/2$; $3/14=(1+y_N)/2$; $-15/14=(1+z_N)/2$ откуда $N(9/7;-4/7;-22/7)$.

8. Через прямую $(x+1)/2=(y-1)/(-1)=(z-2)/3$ провести плоскость, параллельную прямой $x/(-1)=(y+2)/2=(z-3)/(-3)$.

Решение. Запишем уравнения первой из заданных прямых с помощью уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости Oxy и Oyz: $(x+1)/2=(y-1)/(-1)$ или $x+2y-1=0$; $(y-1)/(-1)=(z-2)/3$ или $3y+z-5=0$.

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$x+2y-1+\lambda(3y+z-5)=0 \text{ или } x+(2+3\lambda)y+\lambda z-(1+5\lambda)=0.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости, определим λ так, чтобы соответствующая плоскость пучка была параллельна второй из заданных прямых.

Имеем $-1\cdot 1+2(2+3\lambda)-3\lambda=0$ или $3\lambda+3=0$, откуда $\lambda=-1$. Таким образом, искомая плоскость определяется уравнением $x-y-z+4=0$.

9. Найти уравнение проекции прямой $(x-1)/1=(y+1)/2=z/3$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

Решение. Запишем уравнения заданной прямой в виде уравнений двух плоскостей, проецируюших ее соответственно на плоскости Oxy и Oxz:

$$(x-1)/1=(y+1)/2, \text{ или } 2x-y-3=0, \ (x-1)/1=z/3 \text{ или } 3x-z-3=0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, запишется в виде: $2x - y - 3 + \lambda(3x - z - 3) = 0$, или $(2 + 3\lambda)x - y - \lambda z - 3(1 + \lambda) = 0$.

Используя условие перпендикулярности плоскостей, выберем из этого пучка плоскость, проецирующую данную прямую на заданную плоскость. Имеем $1 \cdot (2 + 3\lambda) + 1 \cdot (-1) + 2(-\lambda) = 0$, или $\lambda + 1 = 0$, откуда $\lambda = -1$. Итак, уравнение проецирующей плоскости имеет вид $2x - y - 3 + (-1) \cdot (3x - z - 3) = 0$, или $x + y - z = 0$.

Искомую проекцию можно определить как линию пересечения двух плоскостей – заданной и проецирующей:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Приведя эти уравнения прямой к каноническому виду, окончательно получим $x/1 = (y - 5/3)/(-1) = (z - 5/3)/0$.

10. Заданы скрещивающиеся прямые

$$L_1 : x/(-2) = (y - 1)/0 = (z + 2)/1$$

и

$$L_2 : (x + 1)/1 = (y + 1)/2 = (z - 2)/1.$$

Найти расстояние между прямыми и написать уравнения общего перпендикуляра L к этим прямым.

Решение. Найдем уравнение плоскости P, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2. Точка $M_1(0;1;-2)$ лежит на прямой L_1 и, следовательно, принадлежит искомой плоскости P. В качестве нормального вектора к этой плоскости возьмем вектор

$$\overline{n} = \left[\overline{a_1}, \overline{a_2}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2i - j - 4k.$$

Уравнение плоскости P: $-2x-(y-1)-4(z+2)=0$ или $2x+y+4z+7=0$.

Расстояние $d(L_1,L_2)$ равно расстоянию от любой точки прямой L_2, например, точки $M_2(-1;-1;2)$, до плоскости P. Нормальное уравнение плоскости P имеет вид $-2/\sqrt{21}\,x-1/\sqrt{21}\,y-4/\sqrt{21}\,z-7/\sqrt{21}=0$, откуда $d=\left|2/\sqrt{21}+1/\sqrt{21}-8/\sqrt{21}-7/\sqrt{21}\right|=12/\sqrt{21}$.

Для того чтобы составить уравнения общего перпендикуляра L, найдем уравнения плоскостей P_1 и P_2, проходящих через заданные прямые L_1 и L_2 соответственно и перпендикулярных плоскости P.

Имеем $M_1(0;1;-2)\in P_1$ и $\overline{n_1}=\left[\overline{a_1},\overline{n}\right]=i-10j+2k\perp P_1$ откуда P_1: $x-10y+2z+14=0$. Аналогично, $M_2(-1;-1;2)\in P_2$ и $\overline{n_2}=\left[\overline{a_2},\overline{n}\right]=-9i+6j+3k\perp P_2$ откуда P_2: $3x-2y-z+3=0$. Следовательно,

$$\begin{cases} x-10y+2z+14=0,\\ 3x-2y-z+3=0\end{cases}$$

– общие уравнения прямой $L=P_1\cap P_2$.

11. Найти угол между прямыми $L_1: x/2=(y-2)/(-1)=(z+2)/3$ и $L_2:\begin{cases} 2x+y-z-1=0,\\ 2x-y+3z+5=0.\end{cases}$

Решение. Направляющий вектор прямой L_1 $\overline{a_1}(2;-1;3)$, а $\overline{a_2}=\left[\overline{n_1},\overline{n_2}\right]$, где $\overline{n_1}(2;1;-1)$, $\overline{n_2}(2;-1;3)$. Откуда следует, что $\overline{a_2}=(2;-8;-4)$. Так как $\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=2\cdot2+(-1)\cdot(-8)+3\cdot(-4)=0$, то $\varphi=90^\circ$.

12. Дан треугольник с вершинами $A(1;1;1)$, $B(5;-3;2)$, $C(3;2;0)$. Составить параметрические уравнения прямой, на которой лежит его высота, проведенная из точки B.

Решение. Эту прямую можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей: плоскости, проходящей через три точки A, B, C, и плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно к вектору $\overline{AC}(2;1;-1)$. Составим их уравнения:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 5-1 & -3-1 & 2-1 \\ 3-1 & 2-1 & 0-1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x+2y+4z-7=0,\ 2(x-5)+1(y+3)-1(z-2)=0,\ 2x+y-z-5=0.$$

Следовательно, данная прямая определяется уравнениями:

$$x+2y+4z-7=0,\ 2x+y-z-5=0.$$

Приведем эти уравнения к параметрическому виду. Нам известна точка B, через которую проходит данная прямая. Найдем координаты направляющего вектора $\overline{a}=\left[\overline{n_1},\overline{n_2}\right]$. Так как $\overline{n_1}(1;2;4)$, $\overline{n_2}(2;1;-1)$, то $\overline{a}=(-6;9;-3)$ или $1/3\,\overline{a}=(-2;3;-1)$. Следовательно, параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$x=5-2t,\ y=-3+3t,\ z=2-t.$$

1.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнения проекций прямой $\begin{cases} x+2y+3z-26=0, \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

2. Привести к каноническому виду уравнения прямой $\begin{cases} 2x+3y-16z-7=0, \\ 3x+y-17z=0. \end{cases}$

3. Вычислить углы, образованные с осями координат прямой $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-3z+8=0. \end{cases}$

4. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и образующей с осями Ox и Oy углы $45°$ и $60°$.

5. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно:

а) вектору $\bar{a}=(2;-3;5)$; б) прямой $(x-1)/5=(y+2)/2=(z+1)/(-1)$;

в) оси Ox; г) оси Oz; д) прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z-3=0; \end{cases}$

е) прямой $x=-2+t;\ y=2t,\ z=1-t/2$.

6. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$

7. Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $C(-2;3;-5)$ и $D(0;4;-7)$ и точка пересечения диагоналей $M(1;2;-3{,}5)$. Найти уравнения стороны AB.

8. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x+2y+4z-8=0$ с координатными осями. Найти уравнение средней линии треугольника, параллельной плоскости Oxy.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;2;1)$ и образующей равные углы с векторами $\bar{a}=\bar{i}+\overline{2j}+2\bar{k},\ \bar{b}=\overline{3j},\ \bar{c}=3\bar{k}$.

10. Заданы прямая $L:(x-1)/2=y/1=(z+1)/0$ и точка $M(0;1;2)$. Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L;

г) вычислить расстояние $d(M;L)$;

д) найти проекцию точки M на прямую L.

11. Заданы плоскость P: $x+y-z+1=0$ и прямая L: $L:(x-1)/0=y/2=(z+1)/1$. Требуется:

а) вычислить $\sin\left(\widehat{P,L}\right)$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L перпендикулярно плоскости P;

в) написать уравнения проекции прямой L на плоскость P.

12. Доказать, что прямые $L_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и $L_2: (x+7)/3 = (y-5)/(-1) = (z-9)/4$ параллельны и найти расстояние $d(L_1, L_2)$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(7;1;0)$ параллельно плоскости $2x+3y-z-15=0$ и пересекающей прямую $x/1=(y-1)/4=(z-3)/2$.

14. Написать канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $(x-2)/3=(y+4)/(-2)=(z-1)/2$.

15. Найти точку, симметричную точке $M(2;2;5)$ относительно прямой $x=7-2t,\ y=5+3t,\ z=-2+4t$.

16. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x+2y+3z-5=0, \\ 3x-4y+2z+1=0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M(1;2;-1)$ и $N(-2;1;2)$.

17. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_1: $(x-21)/6=(y+5)/(-4)=(z-2)/(-1)$ параллельно прямой $L_2: (x+7)/3 = (y+4)/4=(z+3)/(-2)$.

18. Вычислить расстояние между прямыми $L_1: (x-6)/3=(y-3)/(-2)= (z+3)/4$ и L_2: $(x+1)/3=(y+7)/(-3)=(z-4)/8$.

19. Написать уравнение общего перпендикуляра к прямым L_1: $x/1=(y-9)/4=(z+2)/(-3)$ и L_2: $(x-2)/2=y/(-2)=(z+7)/9$.

20. Доказать, что прямые L_1: $(x-1)/2=(y+2)/(-3)=(z-5)/4$ и L_2: $(x-7)/3=(y-2)/2=(z-1)/(-2)$ лежат в одной плоскости и написать уравнение этой плоскости.

Ответы

1) $5y+5z-64=0,\ x=0;\ \ 5x+5z-2=0,\ y=0;\ \ 5x-5y+62=0,\ z=0.$

2) $(x+1)/5=(y-3)/2=z/1$. 3) $\cos\alpha=6/7$, $\cos\beta=3/7$, $\cos\gamma=2/7$.

4) $(x-1)/\sqrt{2}=(y+2)/1=(z-3)/(\pm 1)$. 5) а) $(x-2)/2=y/(-3)=(z+3)/5$;

б) $(x-2)/5=y/2=(z+3)/(-1)$; в) $(x-2)/1=y/0=(z+3)/0$;

г) $(x-2)/0=y/0=(z+3)/1$; д) $(x-2)/(-4)=y/8=(z+3)/10$;

е) $(x-2)/1=y/2=(z+3)/(-1/2)$. 6) $\cos\varphi=20/21$.

7) $(x-4)/2=(y-1)/1=(z+2)/(-2)$. 8) $x/2=(y-2)/(-1)=(z-1)/0$.

9) $x/1=(y-2)/(-1)=(z-1)/(-1)$. 10) а) $x-2y+z=0$; б) $2x+y-1=0$;

в) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ или $x/(-1)=(y-1)/2=(z-2)/5$; г) $18/\sqrt{30}$; д) $N(3/5;-1/5;-1)$.

11) а) $1/\sqrt{15}$; $M(1;-6;-4)$; б) $3x-y+2z-1=0$; в) $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$ 12) $d=25$.

13) $(x-7)/67=(y-1)/(-28)=z/70$. 14) $(x-3)/5=(y+2)/(-6)=(z+4)/9$.

15) $N(8;14;-1)$. 16) $5x+3y+29z-57=0$. 17) $4x+3y+12z-93=0$. 18) $127/13$.

19) $\begin{cases} 17x+16y+27z-90=0, \\ 31x+58y+6z-20=0. \end{cases}$ 20) $2x-16y-13z+31=0$.

2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Линии второго порядка в декартовой системе координат

Линией (*кривой*) *второго порядка* называется множество M точек плоскости, декартовы координаты x и y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (2.1)$$

где коэффициенты уравнения – постоянные действительные числа. Уравнение (2.1) называется *общим уравнением линии второго порядка*.

В общем случае уравнение (2.1) может определять так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если кривая невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой задает эллипс, гиперболу, параболу.

1°. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, $a > 0$, большая, чем расстояние между фокусами $|F_1F_2|$.

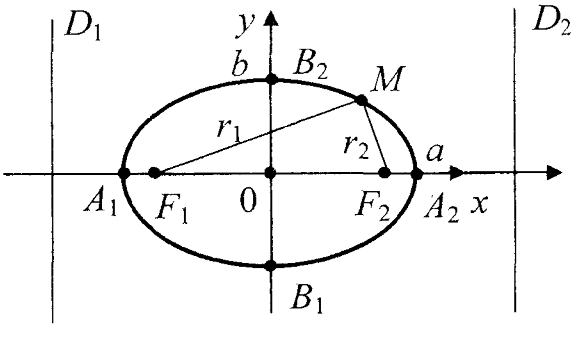

Рис. 2.1

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рис. 2.1, а фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, то получится простейшее (каноническое) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.2}$$

где a – большая, b – малая полуось эллипса, причем a, b и c (c – половина расстояния между фокусами) связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$.

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$. $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ называются *вершинами* эллипса, оси симметрии Ox и Oy – главными осями, а центр симметрии 0 – центром эллипса.

Векторы $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ называются *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу (в силу определения эллипса для любой его точки $r_1+r_2=2a$). В частном случае $a=b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $x^2/a^2+y^2/a^2=1$, или $x^2+y^2=a^2$, т. е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-b^2/a^2}$ ($0\le \mathrm{e}<1$; при $\mathrm{e}=0$ эллипс является окружностью, а т. к. $c<a$, то $\mathrm{e}<1$).

Прямые $D_1: x=-a/\mathrm{e}$ и $D_2: x=a/\mathrm{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* эллипса.

Фокальные радиусы-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам $r_1=a+\mathrm{e}x$ и $r_2=a-\mathrm{e}x$.

Если центр эллипса с полуосями a и b смещен в точку $M_0(x_0,y_0)$, то его каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{2.3}$$

Примеры

1. Какую линию определяет уравнение $3x^2 + 4y^2 = 12$?

Разделим данное уравнение почленно на 12: $x^2/4 + y^2/3 = 1$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.2), заключаем, что оно определяет эллипс с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Найдем фокусы этого эллипса. Так как $c^2 = a^2 - b^2$, то $c^2 = 4 - 3 = 1$, $c = 1$. Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-1;0)$, $F_2(1;0)$.

2. Даны координаты точек $A(5/2;\sqrt{6}/4)$, $B(-2;\sqrt{15}/5)$ и радиус окружности $R = 1$, центр которой находится в начале координат. Требуется:

а) составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через данные точки A и B;

б) найти полуоси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса;

в) найти все точки пересечения эллипса с данной окружностью;

г) построить эллипс и окружность.

Решение.

а) Пусть $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ – искомое уравнения эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты данных точек. Следовательно, подставляя координаты точек, получим $\begin{cases} 25/4a^2 + 3/8a^2 = 1; \\ 4/a^2 + 3/5b^2 = 1. \end{cases}$ Отсюда находим $a^2 = 10$, $b^2 = 1$.

Итак, уравнение эллипса имеет вид $x^2/10 + y^2 = 1$.

б) $a = \sqrt{10}$, $b = 1$ – соответственно большая и малая полуоси эллипса. Для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$, значит $c^2 = 10 - 1 = 9$, откуда $c = \pm 3$. Следовательно, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;\,0)$ – соответственно левый и правый фокусы эллипса. Эксцентриситет эллипса $\text{е} = \dfrac{c}{a} = 3/\sqrt{10} = 3\sqrt{10}/10$.

в) Найдем точки пересечения эллипса с данной окружностью. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$. Решая систему уравнений $\begin{cases} x^2/10+y^2=1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ получим $\begin{cases} x^2+10y^2=10, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$ $9y^2=9$, $y^2=1$, $y=\pm 1$. Но $x^2=1-y^2$, значит $x^2=1-1=0$, откуда $x_{1,2}=0$. Итак, существуют две точки пересечения эллипса и окружности $M_1(0;1)$ и $M_2(0;-1)$.

г) Построить эллипс и окружность.

3. Большая ось эллипса равна 12, а директрисами его служат прямые $x=\pm 18$. Найти уравнение эллипса и его эксцентриситет.

Решение. По условию $2a=12 \Rightarrow a=6$. Из уравнений директрис $x=\pm 18$ и формулы $x=\pm a/\mathrm{e}$ находим $\pm 18=\pm a^2/c \Rightarrow c=a^2/18=2$. Тогда $b^2=a^2-c^2=36-4=32$. Следовательно, искомое уравнение эллипса есть $x^2/36+y^2/32=1$, а эксцентриситет его $\mathrm{e}=c/a=2/6=1/3$.

4. Эллипс касается оси Y в точке $A(0;5)$ и пересекает ось X в точках $B(5;0)$ и $C(11;0)$. Зная, что оси эллипса параллельны осям координат, составить его уравнение.

Решение. Будем искать уравнение эллипса в виде (2.3). Так как эллипс касается оси Y, то $x_0=a$. Далее, $y_0=5$, т. к. прямая AM_0 параллельна оси X и отсекает на оси Y отрезок $|OA|=5$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $(x-a)^2/a^2+(y-5)^2/b^2=1$. Полуось $a=|OM|=\dfrac{x_b+x_c}{2}=8$. В таком случае получим $(x-8)^2/64+(y-5)^2/b^2=1$ – уравнение эллипса. Найдем b^2. Так как $B(5;0)$ лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют его уравнению, т. е. $(5-8)^2/64+25/b^2=1 \Rightarrow b^2=320/11$. Итак, искомое уравнение эллипса $(x-8)^2/64+(y-5)^2/320/11=1$.

2°. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами $|F_1F_2| = 2c$.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.4}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, a – действительная полуось, b – мнимая полуось гиперболы. Координаты фокусов гиперболы: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;\,0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат.

Точки $A_1(-a;\,0)$ и $A_2(a;\,0)$ называются *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2| = 2a$, называется *действительной* осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2| = 2b$, *мнимой* осью.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине $2a$ действительной оси: $\mathrm{e} = c/a$.

Асимптотами гиперболы называют прямые, определяемые уравнениями $y = \pm(b/a)x$. Для построения асимптот гиперболы строят осевой прямоугольник со сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине $2a$ действительной оси: $\mathrm{e} = c/a > 1$.

Директрисами гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями: D_1 : $x = -a/\mathrm{e}$ и D_2 : $x = a/\mathrm{e}$.

Фокальные радиусы точки правой ветви гиперболы вычисляются по формулам: $r_1 = \mathrm{e}x - a$, $r_2 = \mathrm{e}x + a$; фокальные радиусы точки левой ветви гиперболы – по формулам: $r_1 = -\mathrm{e}x + a$, $r_1 = \mathrm{e}x + a$.

Гипербола с равными полуосями $(a = b)$ называются *равносторонней*; ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Ее асимптоты образуют прямой угол.

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот.

Такие две гиперболы называют *сопряженными*.

Примеры

1. На правой ветви гиперболы $x^2/16 - y^2/9 = 1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в два раза меньше ее расстояния от левого фокуса.

Решение. Для правой ветви гиперболы фокальные радиусы-векторы определяются по формулам $r_1 = \mathrm{e}x - a$, $r_2 = \mathrm{e}x + a$. Следовательно, имеем уравнение $\mathrm{e}x + a = 2(\mathrm{e}x - a)$, откуда $x = 3a/\mathrm{e}$; здесь $a = 4$, $\mathrm{e} = c/a = \sqrt{a^2 + b^2}/a =$ $= \sqrt{16 + 9}/4 = 5/4$, т. е. $9{,}6$.

Ординату находим из уравнения гиперболы: $y = \pm 3/4\sqrt{x^2 - 16} =$ $= \pm 3/4\sqrt{(48/5)^2 - 16} = \pm 3/4\sqrt{119}$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1\left(9{,}6; 0{,}6\sqrt{119}\right)$ и $M_2\left(9{,}6; -0{,}6\sqrt{119}\right)$.

2. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)$.

Решение. Согласно определению эксцентриситета, имеем $c/a=\sqrt{2}$, или $c^2=2a^2$. Но $c^2=a^2+b^2$, следовательно, $a^2+b^2=2a^2$, или $a^2=b^2$, т. е гипербола равносторонняя.

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе, т. е. $\left(\sqrt{3}\right)^2/a^2-\left(\sqrt{2}\right)^2/b^2=1$, или $3/a^2-2/b^2=1$. Поскольку $a^2=b^2$, получим $3/a^2-2/a^2=1$, т. е. $a^2=1$.

Таким образом, уравнение искомой гиперболы имеет вид $x^2-y^2=1$.

3. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $5x^2-4y^2=20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки $M\left(-4;\sqrt{5}\right)$.

Решение. Разделив обе части данного уравнения на 20, получим $x^2/4-y^2/5=1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.4), заключаем, что $a^2=4$, $b^2=5$, т. е. $a=2$, $b=\sqrt{5}$. Так как $b^2=c^2-a^2$, то $c^2=a^2+b^2=9$, $c=3$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$, $\mathrm{e}=c/a=3/2$. Поскольку точка M лежит на левой ветви гиперболы, то $r_1=-3/2(-4)+2=8$, $r_2=-3/2(-4)-2=4$. Отметим, что $r_1-r_2=8-4=4=2a$.

3. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой, лежащих в той же плоскости.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат, имеет вид

$$y^2=2px; \tag{2.5}$$

уравнение ее директрисы $x=-p/2$.

Парабола, определяемая уравнением (2.5), имеет фокус $F(p/2;0)$. Фокальный радиус ее точки $M(x,y)$ вычисляется по формуле $r=x+p/2$ $(p>0)$.

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат, определяется уравнением

$$x^2 = 2py; \tag{2.6}$$

Фокус этой параболы находится в точке $F(0; p/2)$; уравнение ее директрисы имеет вид $y = -p/2$. Фокальный радиус точки $M(x, y)$ параболы (2.6) выражается формулой $r = y + p/2$. При $p > 0$ параболы (2.5) и (2.6) обращены в положительную сторону соответствующей оси, а при $p < 0$ – в отрицательную сторону.

Примеры

1. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 16x$. Вычислить расстояние от точки $M(1;4)$до фокуса.

Решение. Сравнивая уравнение $y^2 = 16x$ с уравнением (2.5), находим, что $2p = 16$, откуда $p = 8$, $p/2 = 4$. В соответствии с формулой $x = -p/2$ получаем уравнение $x = -4$ директрисы параболы. Фокус параболы находится в точке $F(4;0)$. Точка $M(1;4)$ лежит на параболе, т. к. ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2 = 16x$. Фокальный радиус точки M $r = x + p/2 = 5$.

2. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

Решение. Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды – точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$; полагая в нем $x = 6$, $y = 8$, находим $8^2 = 2p \cdot 6$, откуда $2p = 32/3$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2 = 32x/3$.

3. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

Решение. Искомое уравнение параболы $x^2 = 2py$, уравнение биссектрисы $y = x$. Таким образом, получаем точки пересечения параболы с биссектрисой: $O(0;0)$ и $M(2p,2p)$. Длина хорды определяется как расстояние между двумя точками: $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$, откуда $2p = 8$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2 = 8y$.

2.2. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка

1°. Уравнения, не содержащие члена с произведением координат

Рассмотрим уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат x и y, не содержащее члена с xy, т. е. уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) определяет на плоскости xOy эллипс, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат, в зависимости от знака произведения коэффициентов A и C.

1. Пусть $AC > 0$ (эллиптический тип); тогда определяемая этим уравнением кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку); при $A = C$ эллипс превращается в окружность.

2. Пусть $AC < 0$ (гиперболический тип); тогда соответствующая кривая является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей;

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

3. Пусть $AC = 0$ (т. е. либо $A = 0$, $C \neq 0$, либо $C = 0$, $A \neq 0$; параболический тип); тогда уравнение определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (действительные различные, действительные совпадающие или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y (т. е. если уравнение имеет вид $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ или $Cy^2 + 2Ey + F = 0$).

Вид кривой и расположение ее на плоскости легко устанавливаются *преобразованием сдвига*: $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ (x_0, y_0 – координаты нового начала, x', y' – новые координаты). Это преобразование равносильно параллельному переносу осей и начала старой системы координат (точки O) в точку $O'(x_0, y_0)$.

Примеры

1. Какую линию определяет уравнение $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0$?

Решение. Вынося за скобки коэффициенты при квадратах координат и выделяя полные квадраты, получаем $9(x^2 + 4x + x) + 16(y^2 - 4y + 4) - 36 - 64 - - 44 = 0$, т. е. $9(x+2)^2 + 16(y-2)^2 = 144$ или $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(-2;2)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x' = x + 2$, $y' = y - 2$. После преобразования координат получим уравнение $x'^2/16 - y'^2/9 = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями $a = 4$, $b = 3$ и центром в точке $x' = 0$, $y' = 0$, т. е. $x + 2 = 0$, $y - 2 = 0$, откуда $x = -2$, $y = 2$.

2. Рассмотрим уравнение $x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 20 = 0$. Так как $AC = 3 > 0$, то уравнение определяет фигуру эллиптического типа. Дополнив члены до полных квадратов, получим $(x-2)^2 + 3(y-1)^2 = -13$. Очевидно, этому уравнению соответствует пустое множество.

3. Рассмотрим уравнение $4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 15 = 0$. Так как $AC = -4 < 0$, то уравнение определяет фигуру гиперболического типа. Преобразуем данное уравнение: $4(x+2)^2 - (y-1)^2 = 0$, которое эквивалентно следующим двум: $2(x+2) - (y-1) = 0$; $2(x+2) + (y-1) = 0$ или $2x - y + 5 = 0$; $2x + y + 3 = 0$.

Этим уравнениям в декартовой прямоугольной системе координат соответствует пара пересекающихся в точке $O'(-2;1)$ прямых.

2°. Упрощение общего уравнения второй степени

Общее уравнение кривой второго порядка относительно прямоугольных декартовых координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{2.8}$$

Применив *преобразование поворота осей координат* с использованием формул

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.9}$$

освобождаясь в уравнении от члена с произведением координат, приходим к уравнению вида (2.7).

Примеры

Привести к каноническому виду уравнение $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись формулами (2.9) поворота осей координат:

$$6(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 8(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 12(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) -$$

$$- 26(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 11 = 0,$$

или

$$\left(6\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha\right)x'^2 + \left(8\cos^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha\right)y'^2 + [16\sin\alpha\cos\alpha +$$

$$+6\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\big]x'y'-\left(12\cos\alpha+26\sin\alpha\right)x'-\left(26\cos\alpha-12\sin\alpha\right)y'+11=0.$$

Найдем α, приравняв нулю коэффициент при $x'y'$, т. е. $16\sin\alpha\cos\alpha+6\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=0$, или $3\mathrm{tg}^2\alpha-8\mathrm{tg}\alpha-3=0$. Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha_1=3$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2=-1/3$; примем $\mathrm{tg}\,\alpha=3$, тогда $\sin\alpha=\pm3/\sqrt{10}$, $\cos\alpha=\pm1/\sqrt{10}$; возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение принимает вид $9x'^2-y'^2-9\sqrt{10}x'+\sqrt{10}y'+11=0$, или $9\left(x'^2-\sqrt{10}x'\right)-\left(y'^2-\sqrt{10}y'\right)=-11$, отсюда $9\left(x'-\sqrt{10}/2\right)^2-\left(y'-\sqrt{10}/2\right)^2=9$.

Приняв за новое начало точку $O'\left(\sqrt{10}/2;\sqrt{10}/2\right)$, применим формулы преобразования координат $x'=x''+\sqrt{10}/2$, $y'=y''+\sqrt{10}/2$; получим $9x''^2-y''^2=9$, или $x''^2-y''^2/9=1$. Это уравнение гиперболы.

2.3. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y, z которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0. \qquad (2.10)$$

Это уравнение называется *общим уравнением поверхности второго порядка* и может определять сферу, эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид, эллиптический или гиперболический параболоид, цилиндрическую или коническую поверхность второго порядка. Оно может также определять совокупность двух плоскостей, точку, прямую или не иметь геометрического смысла (определять мнимую поверхность).

При $D=0$, $E=0$, $F=0$ общее уравнение принимает вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Gx+2Hy+2Kz+L=0$$

и легко упрощается с помощью параллельного переноса осей координат, что позволяет сразу установить его геометрический смысл.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка:

1. Эллипсоид: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

2. Гиперболоид

   а) однополостный: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$;

   б) двуполостный: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$.

3. Конус второго порядка: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$.

4. Параболоид

   а) эллиптический: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z$;

   б) гиперболический: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = z$.

5. Цилиндр второго порядка

   а) эллиптический: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

   б) гиперболический: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$;

   в) параболический: $y^2 = 2px,\ p > 0$.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений.*

Пример 1. Методом сечений исследовать форму поверхности, заданную уравнением $z = 2 - x^2/16 - y^2/25$.

Решение. Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z = h$. Из системы уравнений $\begin{cases} h = 2 - x^2/16 - y^2/25, \\ z = h \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2/16 + y^2/25 = 2 - h, \\ z = h \end{cases}$

видно, что при $h > 2$ уравнение не имеет решений относительно (x, y), т. е. рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z = 2$. При $h \le 2$ в любом сечении получается эллипс с полуосями $a = 4\sqrt{2-h}$, $b = 5\sqrt{2-h}$, вырождающийся в точку $x = y = 0$ при $h = 2$.

Дальнейшее уточнение формы поверхности можно получить, если рассмотреть сечения координатными плоскостями Oxy и Oyz.

Сечение плоскостью Oxz $(y=0)$ дает кривую $x^2 = 16(2-z)$, т. е. параболу с параметром $p=8$, вершиной в точке $x=0$, $z=2$ и ветвями, направленными в сторону убывания значений z. Сечение плоскостью Oyz $(x=0)$ дает параболу $y^2 = 25(2-z)$ с параметром $p = 25/2$, вершиной в точке $y=0$, $z=2$ и аналогично направленными ветвями.

Заданная поверхность есть эллиптический параболоид. Преобразование координат $x' = x$, $y' = y$, $z' = 2 - z$ (которое сводится к сдвигу начала в точку $O'(0,0,2)$ – вершину параболоида и обращению направления оси Oz) приводит его исходное уравнение к каноническому виду: $(x')^2/16 + (y')^2/25 = z'$.

2. Привести к каноническому виду уравнение $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - -18y - 72z + 13 = 0$.

Решение. Сгруппируем члены с одинаковыми координатами: $4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13$. Дополнив до полных квадратов выражения в скобках, получим

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = -13 + 4 + 9 + 36,$$

или

$$4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 36(z-1)^2 = 36.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1;1;1)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, $z = z' + 1$. Тогда уравнение поверхности запишется так: $4x'^2 + 9y'^2 + 36z'^2 = 36$, или $x'^2/9 + y'^2/4 + z'^2 = 1$. Это уравнение определяет эллипсоид; его центр находится в новом начале координат, а полуоси соответственно равны 3, 2 и 1.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Построить эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в)эксцентриситет; г) уравнения директрис.

2. Написать каноническое уравнение эллипса, если: а) $a = 5$, $c = 4$; б) $c = 3$, $\text{e} = 3/5$; в) $c = 2$ и расстояние между директрисами равно 5; г) $\text{e} = 1/2$ и расстояние между директрисами равно 32.

3. На эллипсе $x^2/25 + y^2/9 = 1$ найти точку, разность фокальных радиусов-векторов которой равна 6,4.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

5. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(0;0)$ и $F_2(1;1)$ являются фокусами, а длина большой оси равна 2.

6. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 24, малая ось равна 10.

7. Найти эксцентриситет эллипса, малая ось которого видна из фокуса под углом 120°.

8. Дано уравнение эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$. Найти точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса равно 1,5.

9. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

10. Написать каноническое уравнение гиперболы, если а) $b = 4$, $c = 5$; б) $c = 3$, $\text{e} = 3/2$; в) $a = 8$, $\text{e} = 5/4$; г) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm 4/3x$; д) $\text{e} = 3/2$ и расстояние между директрисами $8/3$.

11. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $x^2/8 + y^2/5 = 1$.

12. Через точку $M(0;-1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2-4y^2=12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

13. Угол между асимптотами гиперболы равен 60°. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

14. Найти уравнение множества точек, равноотстоящих от окружности $x^2+4x+y^2=0$ и от точки $M(2;0)$.

15. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p=1/2$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $M(4;-8)$;

в) фокус параболы находится в точке $F(0;-3)$.

16. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=12x$, если $y(M)=6$.

17. Написать уравнение параболы, если известны фокус $F(4;3)$ и директриса D: $y+1=0$.

18. На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

19. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y=x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

20. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=8x$, параллельной прямой $2x+2y-3=0$.

21. Составить простейшее уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

22. Какую линию определяет уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$?

23. Какую линию определяет уравнение $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$?

24. Какую кривую определяет уравнение $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$?

25. Показать, что кривая $y^2+10x+2y=0$ определяет параболу. Найти: а) фокальный параметр этой параболы; б) ось симметрии; в) фокус; г) уравнение директрисы.

26. Привести к каноническому виду уравнение $x^2-2xy+y^2-10x-$ $-6y+25=0$.

27. Определить вид поверхности $9x^2+4y^2+36z^2-36x+24y-72z+72=0$.

28. Какое геометрическое место точек определяется уравнением $x^2+4x-6y+22=0$.

29. Какая поверхность определяется уравнением $4x^2-y^2+4z^2-8x+$ $+4y+8z+4=0$?

30. Определить вид и параметры поверхности второго порядка, заданной уравнением $2x^2-3y^2+12x+12y-12z-42=0$.

Ответы

1) а) $a=5,\ b=3$; б) $F_1(-4;0),\ F_2(4;0)$; в) $e=4/5$; г) $D_1: x=-25/4$, $D_2: x=25/4$. 2) а) $x^2/25+y^2/9=1$; б) $x^2/25+y^2/16=1$; в) $x^2/5+y^2/1=1$; г) $x^2/64+y^2/48=1$. 3) $(4;1{,}8)$, $(4;-1{,}8)$, $(-4;1{,}8)$, $(-4;-1{,}8)$. 4) $4x+3y+12=0$. 5) $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$. 6) $x^2/25+y^2/169=1$. 7) $e=0{,}5$. 8) $M(-1;1{,}5)$, $N(-1;-1{,}5)$. 9) а) $a=3,\ b=4$; б) $F_1(-5;0),\ F_2(5;0)$; в) $e=-5/3$; г) $y=\pm 4/3x$; д) $x=\pm 9/5$. 10) а) $x^2/9-y^2/16=1$; б) $x^2/4-y^2/5=1$; в) $x^2/64-y^2/36=1$; г) $x^2/36-y^2/64=1$; д) $x^2/4-y^2/5=1$. 11) $x^2/3-y^2/5=1$; 12) $(-4;-3)$. 13) $e=2/\sqrt{3}$. 14) правая ветвь гиперболы $x^2-y^2/3=1$. 15) а) $y^2=-x$; б) $x^2=-2y$; в) $x^2=-12y$. 16) 6. 17) $y=1/8x^2-x+3$. 18) $M_1(2;4),\ M_2(2;-4)$.

19) $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$. 20) $x + y + 2 = 0$. 21) $y^2 = \sqrt{2}\,x$. 22) эллипс, $(x-1)^2/9 + {}$ $+ (y-2)^2/4 = 1$. 23) окружность, $(x-1/2)^2 + (y-1/3)^2 = 1$. 24) гипербола, $(x+1)^2/9 - (y-2)^2 = 1$. 25) а) $p = 5$; б) $y = -1$; в) $(-2{,}4;-1)$; г) $x = 2{,}6$. 26) парабола, $y''^2 = 4\sqrt{2}\,x''$. 27) эллипсоид, $(x-2)^2/4 + (y+3)^2/9 + (z-1)^2/1 = 1$. 28) параболический цилиндр, $x'^2 = 6y'$, ($x' = x + 2$, $y' = y - 3$). 29) конус, $x'^2 - y'^2/4 + z'^2 = 0$. 30) гиперболический параболоид, $x'^2/3 - y'^2/2 = 2z'$, $O(-3;\ 2;-4)$.

Оглавление

1. Прямые и плоскости 3
1.1. Прямая на плоскости 3
1.2. Задачи для самостоятельного решения 15
1.3. Плоскость и прямая в пространстве 19
1.4. Задачи для самостоятельного решения 28
1.5. Прямая 31
1.6. Задачи для самостоятельного решения 42
2. Линии и поверхности 46
2.1. Линии второго порядка в декартовой системе координат 46
2.2. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка 54
2.3. Поверхности второго порядка. 57
2.4. Задачи для самостоятельного решения 60