Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика»

Методические указания и задания для проведения практических занятий по высшей математике со студентами экономических специальностей по теме “Дифференциальные уравнения”

Учебное электронное издание

Минск 2 0 1 9

Автор: Н.А.Шавель

Рецензент: ведущий научный сотрудник Института математики
НАН Беларуси, кандидат физ. – мат. наук, доцент Заяц Г. М.

В каждом разделе настоящего пособия содержатся краткие теоретические сведения, а также примеры подробного решения типовых задач, иллюстрирующие основные методы, применяемые при интегрировании дифференциальных уравнений в рамках представленных тем. В заключение каждого раздела приводятся варианты заданий, которые могут быть использованы для решения в аудитории на практическом занятии, для домашних заданий, а также при самостоятельной подготовке студентов. Издание предназначено для студентов экономических специальностей, а также для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу.

Содержание

Введение. Дифференциальные уравнения (ДУ).

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение вида

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)})=0,$$

связывающее независимую переменную *x*, неизвестную функцию $y=y(x)$ и ее производные $y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)}$.

Если дифференциальное уравнение записано в виде

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)}),$$

то говорят, что оно разрешено относительно старшей производной.

Порядком ДУ называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Решением ДУ называется функция $y=y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. График решения называется интегральной кривой ДУ. Процесс нахождения решений называется интегрированием ДУ.

Раздел 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные понятия и определения

ДУ первого порядка может быть задано:

в общем виде

$$F(x,\ y,\ y')=0;$$

в разрешенном относительно производной виде

$$y'=f(x,\ y);$$

с использованием дифференциалов

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Функции $P(x,y),Q(x,y)$ в последнем уравнении называют коэффициентами при дифференциалах.

Задача Коши для ДУ первого порядка имеет вид

$$y'=f(x,\ y),\ y(x_0)=y_0,$$

где $x_0,y_0\in R$, т.е. из множества решений ДУ требуется выделить то, которое удовлетворяет дополнительному ограничению. Это дополнительное ограничение называют **начальным условием**. Геометрический смысл задачи Коши для ДУ первого порядка состоит в том, что из всего множества интегральных кривых уравнения нужно выделить кривую, проходящую через заданную точку (x_0,y_0).

Функция $y = y(x,\ C)$ называется общим решением ДУ первого порядка в области $D \subset R^2$, если:

а) при любом допустимом значении постоянной $C = C_0$ функция $y = y(x,\ C_0)$ является решением данного уравнения;

б) для любой точки $(x_0,\ y_0) \in D$ существует единственное допустимое значение константы $C = C_0$, такое, что $y(x_0,\ C_0) = y_0$.

Частным решением ДУ называется любое решение которое может быть получено из общего при конкретном значении постоянной C (включая значения $C = \pm\infty$).

Общее решение, заданное в неявной форме

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0,$$

называют общим интегралом ДУ. При конкретном значении $C = C_0$ равенство

$$\Phi(x,\ y,\ C_0) = 0,$$

задающее неявно частное решение ДУ, называют частным интегралом.

Рассмотрим интегрирование некоторые классов ДУ первого порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

ДУ с разделяющимися переменными может быть представлено в виде

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0,$$

если оно записано через дифференциалы, или в виде

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

если оно разрешено относительно производной.

Таким образом, отличительной особенностью этого типа уравнений является возможность разделения переменных в коэффициентах при дифференциалах и в правой части разрешённого относительно производной ДУ. Процесс решения ДУ с разделяющимися переменными предполагает разделение переменных при дифференциалах .

Так, разделив обе части первого уравнения на выражение $Q_1(y) \cdot P_2(x)$, получаем ДУ с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получаем общий интеграл исходного ДУ

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

При решении уравнения вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ следует заменить производную y' на выражение $\frac{dy}{dx}$ и перейти к записи ДУ через дифференциалы:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Разделяя переменные, получаем уравнение

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx.$$

После интегрирования обеих частей получаем общий интеграл исходного ДУ

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$$

Пример 1.1. Проинтегрировать уравнение

$$xdx - ydy = x^2 ydy - xy^2 dx.$$

Решение. После простых алгебраических преобразований получаем уравнения

$$(x + xy^2)dx = (x^2 y + y)dy,$$

$$x(1 + y^2)dx = y(x^2 + 1)dy.$$

Коэффициенты при дифференциалах имеют вид $P(x) \cdot Q(y)$, следовательно, имеем ДУ с разделяющимися переменными. Делим обе его части на выражение $(x^2 + 1) \cdot (1 + y^2)$ и получаем ДУ с разделёнными переменными

$$\frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{y}{1 + y^2} dy.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{y}{1 + y^2} dy,$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 1)}{1 + y^2},$$

$$\ln\left|x^2 + 1\right| + \ln\left|C\right| = \ln\left|y^2 + 1\right|, \qquad \ln\left|y^2 + 1\right| = \ln\left|C(x^2 + 1)\right|$$

$y^2 + 1 = C \cdot (x^2 + 1)$ - общий интеграл исходного уравнения.

Пример 1.2. Решить задачу Коши

$$y' \operatorname{tg} x - y = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Решение. Разрешаем уравнение относительно производной:

$$y'=\frac{1+y}{\operatorname{tg}x}.$$

Правая часть ДУ имеет вид $f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, следовательно, это уравнение с разделяющимися переменными. Переходим к дифференциалам, разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y}{\operatorname{tg}x},\quad \frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{\operatorname{tg}x},\quad \int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{\cos x dx}{\sin x},$$

$$\int\frac{dy}{1+y}=\int\frac{d\sin x}{\sin x},\quad \ln|1+y|=\ln|\sin x|+\ln|C|,\quad \ln|1+y|=\ln|C\sin x|,$$

$y=C\sin x-1,\ C\in R$ - общее решение (решение $y=-1$, которое было «потеряно» после деления на $y+1$ входит в общее решение при $C=0$).

Для нахождения решения задачи Коши подставим $x=\frac{\pi}{2},\ y=0$ в общее решение:

$0=C\sin\frac{\pi}{2}-1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow y=\sin x-1$ - решение задачи Коши.

Однородные уравнения

В записи через дифференциалы однородное ДУ имеет вид

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

где коэффициенты при дифференциалах $P(x,y),\ Q(x,y)$ являются однородными относительно $x,\ y$ функциями одинакового порядка.

Замечание. Функция $\varphi(x,\ y)$ называется однородной относительно $x,\ y$ функцией порядка k, если для любого $t\in R$ имеет место $\varphi(tx,\ ty)=t^k\cdot\varphi(x,\ y)$.

Если однородное ДУ разрешено относительно производной, то его всегда можно представить в виде:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

т. е. правая часть уравнения является однородной относительно $x,\ y$ функцией порядка $k=0$.

Подстановкой $y=z\cdot x$, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция, однородное ДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $z(x)$.

Пример 1.3. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения

$$2xydx+(y^2-x^2)dy=0.$$

Решение. Коэффициенты при дифференциалах $P(x,y)=2xy$, $Q(x,y)=y^2-x^2$ являются однородными функциями второго порядка относительно x, y:

$$P(tx,\,ty)=2\cdot tx\cdot ty=t^2\cdot 2xy=t^2\cdot P(x,\,y)\,,$$

$$Q(tx,\,ty)=(tx)^2-(ty)^2=t^2x^2-t^2y^2=t^2(x^2-y^2)=t^2Q(x,y),\ t\in R\,.$$

Следовательно, имеем однородное ДУ. Применяем подстановку $y=z\cdot x$, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда

$$dy=d(z\cdot x)=dz\cdot x+z\cdot dx$$

и ДУ принимает вид:

$$2x^2\cdot zdx+(z^2-1)x^2(dz\cdot x+zdx)=0\,,$$

$$(z^3+z)dx+x(z^2-1)dz=0\,.$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $z(x)$. Делим обе его части на выражение $(z^3+z)\cdot x$ и интегрируем:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{z^2-1}{z^3+z}dz=0\,,\qquad\qquad \int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{2z}{z^2+1}-\frac{1}{z}\right)dz=0\,,$$

$$\ln|x|+\ln\left|z^2+1\right|-\ln|z|=\ln|C|,$$

$$\left(z^2+1\right)\cdot\frac{x}{z}=C\,.$$

Возвращаемся к исходным переменным, подставляя $z=\dfrac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\frac{x^2}{y}=C\,.$$

$y^2+x^2=Cy$ – общий интеграл исходного уравнения.

Пример 1.4. Решить задачу Коши

$$y=x(y'-e^{\frac{y}{x}}),\ \ y(1)=0\,.$$

Разрешим ДУ относительно производной:

$$y'=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}\,.$$

Правая часть ДУ имеет вид $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, значит, имеем однородное ДУ. Применяем подстановку $y=z\cdot x$, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'=(z\cdot x)'=z'x+z$ и после подстановки уравнение принимает вид:

$$z'x+z=z+e^z\,,\qquad\qquad z'x=e^z\,,$$

$$z' = \frac{e^z}{x} \ \ldots\ldots$$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^z}{x}, \quad e^{-z}dz = \frac{dx}{x}, \quad \int e^{-z}dz = \int \frac{dx}{x}, \quad -e^{-z} = \ln|x| - \ln|C|,$$

$$e^{-z} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \quad z = -\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Возвращаемся к исходным переменным, подставляя $z = \frac{y}{x}$: $\frac{y}{x} = -\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

$y = -x\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|$ - общее решение исходного уравнения.

Для нахождения решения задачи Коши подставим $x = 1,\ y = 0$ в общее решение:

$0 = -\ln\ln|C| \ \Rightarrow\ C = e \ \Rightarrow\ y = -x\ln\ln\left|\frac{e}{x}\right| = -x\ln(1 - \ln|x|)$ - решение задачи Коши.

Линейные уравнения первого порядка

Линейное ДУ первого порядка имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $p(x), q(x)$ - заданные функции, т. е. неизвестная функция $y(x)$ и её производная $y'(x)$ входят в уравнение линейно.

Общее решение линейного ДУ можно найти с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x),\ v = v(x)$ – новые неизвестные функции. Данная подстановка сводит решение линейного ДУ первого порядка к последовательному интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными. После подстановки исходное ДУ принимает вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u \cdot (v' + p(x)v) = q(x).$$

Поскольку одна из неизвестных функций может быть выбрана произвольно, то можно выбрать $v(x)$ так, чтобы последнее уравнение упростилось, а именно, чтобы $v' + pv = 0$. Для этого в качестве $v(x)$ следует выбрать любое частное решение ДУ с разделяющимися переменными

$$v' = -p(x)v,$$

например, $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

Тогда $u(x)$ следует находить как общее решение ДУ с разделяющимися переменными

$$u'v(x)=q(x),$$

откуда $u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y=u\cdot v=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$.

Пример 1.5. Решить задачу Коши

$$y'+\frac{y}{x}=2\ln x,\ \ y(1)=\frac{1}{2}.$$

Решение. Задача Коши поставлена для линейного уравнения первого порядка. Применим подстановку $y=u\cdot v$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – новые неизвестные функции.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=2\ln x,$$

$$u'v+u(v'+\frac{v}{x})=2\ln x.$$

Функцию $v(x)$ выберем так, чтобы выражение в скобках обращалось в ноль:

$$v'+\frac{v}{x}=0.$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Находим $v(x)$ как частное решение этого ДУ:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=-\ln|x|,\quad \ln|v|=\ln\left|x^{-1}\right|,\quad v=\frac{1}{x}.$$

Для определения $u(x)$ также получаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$u'\cdot\frac{1}{x}=2\ln x,\qquad u'=2x\ln x,$$

$$u=2\int x\ln x dx=\begin{vmatrix} a=\ln x & db=xdx \\ da=\dfrac{dx}{x} & b=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=2(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+C$$

Тогда

$y=u\cdot v=(x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}+C)\cdot\dfrac{1}{x}=x\ln x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{C}{x}$ – общее решение исходного уравнения.

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим $x=1,\ y=\dfrac{1}{2}$ в общее решение:

$$\frac{1}{2}=\ln 1-\frac{1}{2}+C \quad \Rightarrow \quad C=1 \quad \Rightarrow \quad y=x\ln x-\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$ - решение задачи Коши.

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

где $p(x),q(x)$ - заданные функции, $\alpha\in R$ $(\alpha\neq 1,\ \alpha\neq 0)$. С помощью подстановки $y=u\cdot v$ решение уравнения Бернулли, как и решение линейного ДУ, сводится к последовательному интегрированию двух ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 1.6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'+4xy=2xe^{-x^2}\cdot\sqrt{y}.$$

Решение. Это уравнение Бернулли $\left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right)$. Применим подстановку $y=u\cdot v$, где $u=u(x),\ v=v(x)$ – новые неизвестные функции.

$$u'v+uv'+4xuv=2xe^{-x^2}\sqrt{uv},$$

$$u'v+u(v'+4xv)=2xe^{-x^2}\sqrt{uv}.$$

Функцию $v(x)$ выберем так, чтобы выражение в скобках обращалось в ноль:

$$v'+4xv=0.$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Находим $v(x)$ как частное решение этого ДУ:

$$\frac{dv}{dx}=-4xv,\ \frac{dv}{v}=-4xdx,\ \int\frac{dv}{v}=-\int 4xdx,$$

$$\ln|v|=-2x^2,\ v=e^{-2x^2}.$$

Для определения $u(x)$ также получаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$u'\cdot e^{-2x^2}=2xe^{-x^2}\sqrt{u\cdot e^{-2x^2}},$$

$$u'=2x\sqrt{u},\quad \frac{du}{\sqrt{u}}=2xdx,\quad \int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int 2xdx,$$

$$2\sqrt{u}=x^2+C,\quad u=\frac{(x^2+C)^2}{4}.$$

Тогда

$$y = u \cdot v = \frac{e^{-2x^2}(x^2 + C)^2}{4}$$ – общее решение исходного уравнения.

Практические задания

Задание 1.1.

а) Проинтегрировать уравнения

1. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$ (Ответ: $arctgx = \sqrt{4+y^2} + C$ - общий интеграл).

2. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$ (Ответ: $(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = C(y^2+2)^{\frac{1}{2}}$ - общий интеграл).

3. $y\ln y + xy' = 0$ (Ответ: $y = e^{\frac{1}{Cx}}$ - общее решение).

4. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0$ (Ответ: $arctgy = 2\sqrt{2-x^2} + C$ - общий интеграл).

5. $\ln\cos ydx + x\,\mathrm{tg}\,ydy = 0$ (Ответ: $\cos y = e^{Cx}$ - общий интеграл).

6. $(xy^2 + x)dx - (x^2y + y)dy = 0$ (Ответ: $y^2 + 1 = C(x^2+1)$ - общий интеграл).

7. $(1+e^{2x})y^2y' = e^x$ (Ответ: $y = \sqrt[3]{3arctge^x + C}$ - общее решение).

8. $x(1+e^{2y})dx - e^{x+y}dy = 0$ (Ответ: $arctge^y = C - xe^{-x}$ - общий интеграл).

б) Решить задачу Коши

1. $(1+e^x)y' = ye^x$, $y(0) = 2$ (Ответ: $y = C(e^x+1)$ - общее решение, $y = e^x + 1$ - решение задачи Коши).

2. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$, $y(1) = 0$ (Ответ: $(x^2+4)(y^2+5) = C$ - общий интеграл, $(x^2+4)(y^2+5) = 25$ - решение задачи Коши).

3. $y'\sin^2 x = xy + x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ (Ответ: $y = C\sin xe^{-xctgx} - 1$- общее решение, $y = \sin xe^{-xctgx} - 1$ - решение задачи Коши).

4. $y(1+\ln y) + xy' = 0$, $y(1) = e$ (Ответ: $y = e^{\frac{C}{x}-1}$ - общее решение, $y = e^{\frac{2}{x}-1}$ - решение задачи Коши).

Задание 1.2.

а) Проинтегрировать уравнения

1. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$ (Ответ: $\sin\frac{y}{x} = Cx$ - общий интеграл).

2. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$ (Ответ: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx$ - общий интеграл).

3. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$ (Ответ: $y = x\ln^2\left|\frac{C}{x}\right|$ - общее решение).

4. $(\sqrt{x^2 - y^2} + y)dx - xdy = 0$ (Ответ: $\arcsin\frac{y}{x} = \ln|Cx|$ - общий интеграл).

5. $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$ (Ответ: $y(\ln\frac{y}{x} - 1) = C$ - общий интеграл).

6. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$ (Ответ: $2arctg\frac{y}{x} = \ln\left|C\sqrt{x^2 + y^2}\right|$ - общий интеграл).

7. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$ (Ответ: $\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln\left|\frac{C}{y}\right|$ - общий интеграл).

8. $(x\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y)dx + xdy = 0$ (Ответ: $2\sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \ln|x| = C$ - общий интеграл).

б) Решить задачу Коши

1. $y' = \frac{x + 2y}{x}$, $y(-1) = 2$ (Ответ: $y = Cx^2 - x$ - общее решение, $y = x^2 - x$ - решение задачи Коши).

2. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$, $y(1) = 3$ (Ответ: $y = x\sqrt[3]{3\ln\left|\frac{C}{x}\right|}$ - общее решение, $y = x\sqrt[3]{3(9 - \ln|x|)}$ - решение задачи Коши).

3. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$, $y(1) = 0$, $y(1) = 0$ (Ответ: $y = x - \frac{x}{\ln|Cx|}$ - общее решение, $y = \frac{x\ln|x|}{\ln|x| + 1}$ - решение задачи Коши).

4. $xdy - ydx = ydy$, $y(0) = 1$ (Ответ: $Cy = e^{-\frac{x}{y}}$ - общий интеграл, $y = e^{-\frac{x}{y}}$ - решение задачи Коши).

Задание 1.3.

а) Проинтегрировать уравнения

1. $xy' + y + \cos x = 0$ (Ответ: $y = \frac{C - \sin x}{x}$ - общее решение).

2. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$ (Ответ: $y = \sin x\cos x + C\cos x$ - общее решение).

3. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$ (Ответ: $y = (x + C)(x^2 + 1)$ - общее решение).

4. $y' + \dfrac{y}{x} = e^{x^2}$ (Ответ: $y = \dfrac{e^{x^2} + C}{x}$ - общее решение).

5. $(y\sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$ (Ответ: $y = C\cos x + \sin x$ - общее решение).

6. $y'(xy+1) + y^2 + 1 = 0$ (Ответ: $x = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}(C - \ln(y + \sqrt{y^2+1}))$ - общий интеграл).

7. $dx - (\sin^2 y + xctgy)dy = 0$ (Ответ: $x = C\sin y - \sin y \cos y$ - общее решение).

8. $(2x + y - 4\ln y)y' = y$ (Ответ: $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2$ - общий интеграл).

б) Решить задачу Коши

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x,\ y(\pi) = 0$ (Ответ: $y = x(C - \cos x)$ - общее решение, $y = -x(1 + \cos x)$ - решение задачи Коши).

2. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1$ (Ответ: $y = \dfrac{2x^3}{7} + \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ - общее решение, $y = \dfrac{2x^3}{7} + \dfrac{5}{7\sqrt{x}}$ - решение задачи Коши).

3. $y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{2\ln x}{x} = 0,\ y(1) = 2$ (Ответ: $y = 2\ln x + 2 + Cx$ - общее решение, $y = 2\ln x + 2$ - решение задачи Коши).

4. $ydx - (x + y^2)dy = 0,\ y(2) = -1$ (Ответ: $x = y^2 + Cy$ - общее решение, $x = y^2 - y$ - решение задачи Коши).

Задание 1.4.

а) Проинтегрировать уравнения

1. $y' + \dfrac{y}{x} = 3\sqrt{y}$ (Ответ: $y = (x + \dfrac{C}{\sqrt{x}})^2$ - общее решение).

2. $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x^3}{2y}$ (Ответ: $y^2 = x^4(\ln|x| + C)$ - общий интеграл).

3. $y' + xy = (x-1)e^x y^2$ (Ответ: $y = \dfrac{1}{e^x + Ce^{\frac{x^2}{2}}}$ - общее решение).

4. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ (Ответ: $y = (tgx + \dfrac{\ln|\cos x|}{x} + \dfrac{C}{x})^2$ - общее решение).

5. $2(1-x^2y^2)dx+\dfrac{dy}{xy}=0$ (Ответ: $y=\dfrac{1}{x^2+1+Ce^{x^2}}$ - общее решение).

6. $y'x(x+xy+1)=1$ (Ответ: $x=\dfrac{1}{Ce^{-y}-y}$ - общий интеграл).

7. $dx-x(xe^y-2)dy=0$ (Ответ: $x=\dfrac{1}{e^y+Ce^{2y}}$ - общее решение).

8. $xy'(x^3\cos y+tgy)=1$ (Ответ: $x=\dfrac{1}{\cos y\sqrt[3]{C-3tgy}}$ - общий интеграл).

9. $\sin y dx-x(x^2+\cos y)dy=0$ (Ответ: $x=\dfrac{\sin y}{\sqrt{2(\cos y+C)}}$ - общее решение).

б) Решить задачу Коши

1. $y'-y=2xy^2,\ y(0)=1$ (Ответ: $y=\dfrac{1}{2-2x+Ce^{-x}}$ - общее решение, $y=\dfrac{1}{2-2x-e^{-x}}$ - решение задачи Коши).

2. $(x^2+y^3)dx-xy^2dy=0,\ y(1)=-2$ (Ответ: $y=x\sqrt[3]{C-\dfrac{3}{x}}$ - общее решение, $y=-x\sqrt[3]{5+\dfrac{3}{x}}$ - решение задачи Коши).

3. $3(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=3$ (Ответ: $y=\dfrac{-3}{x(\ln x+C)}$ - общее решение, $y=\dfrac{3}{x(1-\ln x)}$ - решение задачи Коши).

4. $dx-x(xe^y-2)dy=0,\ y(-1)=0$ (Ответ: $x=\dfrac{1}{e^y+Ce^{2y}}$ - общее решение, $x=\dfrac{1}{e^y-2e^{2y}}$ - решение задачи Коши).

Раздел 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Основные понятия и определения

ДУ второго порядка может быть задано:

в общем виде

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0;$$

в разрешенном относительно старшей производной виде

$$y'' = f(x,\ y,\ y').$$

Задача Коши для ДУ второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x,\ y,\ y'),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',$$

где $x_0, y_0, y_0' \in R$, т.е. в точке $x = x_0$ задаются значения искомой функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$. Геометрический смысл задачи Коши для ДУ второго порядка состоит в том, что из множества интегральных кривых уравнения нужно выделить ту кривую, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) под заданным углом к оси OX (тангенс угла равен y_0').

Функция $y = y(x,\ C_1,\ C_2)$ называется общим решением ДУ второго порядка в некоторой области $G \subset R^3$, если

а) при любых допустимых значениях констант $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0$ функция $y = y(x,\ C_1^0,\ C_2^0)$ является решением ДУ;

б) для любой точки $(x_0, y_0, y_0') \in G$ существуют единственные допустимые значения констант $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0$, такие, что $y(x,\ C_1^0,\ C_2^0) = y_0$, $y'(x,\ C_1^0,\ C_2^0) = y_0'$.

Таким образом, общее решение ДУ второго порядка зависит от двух произвольных постоянных.

Частным решением ДУ второго порядка называется любое решение которое может быть получено из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1,\ C_2$ (включая значения $\pm\infty$).

Общее решение, заданное в неявной форме

$$\Phi(x,\ y,\ C_1, C_2) = 0,$$

называют общим интегралом ДУ второго порядка. При конкретных значениях констант $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0$ равенство

$$\Phi(x,\ y,\ C_1^0, C_2^0) = 0,$$

задающее неявно частное решение ДУ, называют частным интегралом.

Один из основных методов решения произвольных ДУ второго порядка – понижение порядка уравнения. Рассмотрим некоторые типы ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1. $y'' = f(x)$.

Общее решение находят двукратным интегрированием:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx + C_1 \right) dx = \iint f(x)\,dx\,dx + C_1 x + C_2 \text{ -}$$

общее решение исходного уравнения.

2. $F(x,\ y',\ y'')=0$, т.е. ДУ не содержит искомой функции $y(x)$. Подстановкой $y'=z(x),\ y''=z'(x)$ исходное уравнение сводится к ДУ первого порядка относительно новой неизвестной функции $z(x)$.

3. $F(x,\ y',\ y'')=0$, т.е. ДУ не содержит независимой переменной x. Подстановкой $y'=z(y),\ y''=\left(z\left(y(x)\right)\right)'=z'(y)\cdot y'(x)=z'\cdot z$ исходное уравнение сводится к ДУ первого порядка относительно новой неизвестной функции $z(y)$.

Пример 2.1. Решить задачу Коши

$$y''=x+e^{-x},\ y(0)=-1,\ y'(0)=1.$$

Решение. Это уравнение вида $y''=f(x)$. Находим его общее решение двукратным интегрированием

$$y'(x)=\int(x+e^{-x})dx=\frac{x^2}{2}-e^{-x}+C_1,$$

$$y(x)=\int(\frac{x^2}{2}-e^{-x}+C_1)\,dx=\frac{x^3}{6}+e^{-x}+C_1x+C_2$$

Чтобы получить решение задачи Коши подставляем начальные условия $x=0,\ y=-1,\ y'=1$ в $y(x),\ y'(x)$:

$$-1=0+e^{-0}+C_1\cdot 0+C_2\ \Rightarrow\ C_2=-2$$

$$1=0-e^{-0}+C_1\ \Rightarrow C_1=2$$

Подставляя найденные значения $C_1=2,\ C_2=-2$ в общее решение, получаем решение задачи Коши:

$$y(x)=\frac{x^3}{6}+e^{-x}+2x-2.$$

Пример 2.2. Проинтегрировать ДУ второго порядка, используя методы понижения порядка:

$$y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x.$$

Решение. Это уравнение вида $F(x,\ y',\ y'')=0$, т.е. не содержит искомой функции $y(x)$. Используем подстановку $y'=z(x),\ y''=z'(x)$. Получаем ДУ первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$z'+\operatorname{tg}x\cdot z=\sin 2x.$$

Это линейное ДУ. Используем подстановку $z=u\cdot v$:

$$u'v+uv'+\operatorname{tg}xuv=\sin 2x$$

$$u'v+u(v'+\operatorname{tg}xv)=\sin 2x.$$

Функцию $v(x)$ находим как частное решение уравнения

$$v'+\operatorname{tg}x\cdot v=0,\qquad \frac{dv}{dx}=-\operatorname{tg}x\cdot v,\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x},$$

$$\ln|v|=\ln|\cos x|,\qquad v=\cos x.$$

Функцию $u(x)$ находим как общее решение уравнения

$$u'\cdot\cos x=\sin 2x,\quad u'=2\sin x,\quad u=\int 2\sin x dx=-2\cos x+C_1 .$$

Тогда

$$z(x)=u\cdot v=(-2\cos x+C_1)\cdot\cos x=-2\cos^2 x+C_1\cos x=-1-\cos 2x+C_1\cos x .$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$y'=-1-\cos 2x+C_1\cos x,\ y=\int(-1-\cos 2x+C_1\cos x)dx=$$

$=-x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_1\sin x+C_2$ – общее решение исходного уравнения.

Пример 2.3. Решить ДУ второго порядка, используя методы понижения порядка:

$$y\cdot y''+(y')^2=0 .$$

Решение. Это уравнение вида $F(x,\ y',\ y'')=0$, т.е. не содержит x. Используем подстановку $y'=z(y),\ y''=\left(z(y(x))\right)'=z'(y)\cdot y'(x)=z'\cdot z$.

Подставляя выражения для y', y'' в исходное уравнение, получим ДУ первого порядка, где y становится независимой переменной, $z(y)$ – неизвестной функцией:

$$yz\cdot z'+z^2=0,\ z(yz'+z)=0,\ yz'+z=0 .$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{z}{y},\quad \int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dy}{y},\quad \ln|z|=-\ln|y|+\ln|C_1|,\quad z=\frac{C_1}{y} .$$

Так как $y'=z$, то получаем ДУ с разделяющимися переменными $y'=\dfrac{C_1}{y}$.

Разделяем переменные и интегрируем : $\int ydy=\int C_1dx$

$\dfrac{y^2}{2}=C_1x+C_2$ общий интеграл исходного уравнения.

Практические задания

Задание 2.1.

а) Проинтегрировать уравнения

1. $y''=xe^{-x}$ (Ответ: $y=e^{-x}(x+2)+C_1x+C_2$ - общее решение)

2. $y''=\dfrac{1}{x^2+1}$ (Ответ: $y=xarctgx-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_1x+C_2$ - общее решение)

3. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ответ: $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C_1x+C_2$ - общее решение)

б) Решить задачу Коши

1. $y''=\cos\frac{x}{2},\ y(\pi)=1,\ y'(\pi)=1$ (Ответ: $y=-4\cos\frac{x}{2}+C_1x+C_2$ - общее решение, $y=-4\cos\frac{x}{2}-2x+2\pi+1$ - решение задачи Коши).

2. $y''=x-\ln x,\ y(1)=-1,\ y'(1)=-1$ (Ответ: $y=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-x+C_1x+C_2$ - общее решение, $y=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-x+\frac{1}{4}$ - решение задачи Коши).

3. $y''=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\ y(0)=-1,\ y'(0)=2$ (Ответ: $y=tgx+C_1x+C_2$ - общее решение, $y=tgx+x-1$ - решение задачи Коши).

Задание 2.2. а) Проинтегрировать уравнения

1. $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x$ (Ответ: $y=\frac{\ln^2|x|}{2}+C_1\ln|x|+C_2$ - общее решение).
2. $\operatorname{tg}x\cdot y''=2y'$ (Ответ: $y=C_1(2x-\sin 2x)+C_2$ - общее решение).
3. $xy''+y'=\sqrt{x}$ (Ответ: $y=\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C_1\ln|x|+C_2$ - общее решение).
4. $x\ln x\,y''-y'=0$ (Ответ: $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$ - общее решение).
5. $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x$ (Ответ: $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+C_1arctgx+C_2$ - общее решение).
6. $x(y''+1)+y'=0$ (Ответ: $y=C_1\ln|x|-\frac{x^2}{4}+C_2$ - общее решение).
7. $(1+x^2)y''=2xy'$ (Ответ: $y=C_1(x^3+3x)+C_2$ - общее решение).
8. $y''\operatorname{tg}x-y'=1$ (Ответ: $y=C_1\cos x-x+C_2$ - общее решение).
9. $xy''-y'+\frac{1}{x}=0$ (Ответ: $y=\frac{1}{2}\ln|x|+C_1x^2+C_2$ - общее решение).
10. $y''\operatorname{ctg}2x+2y'=0$ (Ответ: $y=C_1\sin 2x+C_2$ - общее решение).
11. $x^2y''=(y')^2$ (Ответ: $y=C_1x-C_1^2\ln|x+C_1|+C_2$ - общее решение).
12. $xy''=y'(\ln y'-\ln x)$ (Ответ: $y=e^{C_1x+1}(\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2})+C_2$- общее решение).

б) Решить задачу Коши

1. $xy''=y',\ y(2)=2,\ y'(2)=4$ (Ответ: $y=C_1x^2+C_2$ - общее решение, $y=x^2-2$ - решение задачи Коши).

2. $xy'' + y' = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$ (Ответ: $y = x + C_1 \ln|x| + C_2$ - общее решение, $y = x - \ln|x|$ - решение задачи Коши).

3. $y'' = y' + x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ (Ответ: $y = -\dfrac{x^2}{2} - x + C_1 e^x + C_2$ - общее решение, $y = -\dfrac{x^2}{2} - x + 1$ - решение задачи Коши).

4. $(1 + \sin x)\, y'' = \cos x \cdot y',\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$ (Ответ: $y = C_1(x - \cos x) + C_2$ - общее решение, $y = x - \cos x$ - решение задачи Коши).

Задание 2.3.

а) Проинтегрировать уравнения

1. $y'' = 3y^2 (y')^3$ (Ответ: $\dfrac{y^4}{4} + C_1 y = C_2 - x$ - общий интеграл).
2. $y'' + (y')^3 = 0$ (Ответ: $y^2 + C_1 y = 2x + C_2$ - общий интеграл).
3. $2y\, y'' = 1 + (y')^2$ (Ответ: $4(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2$ - общий интеграл).
4. $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2(y')^2$ (Ответ: $ctgy = C_2 - C_1 x$ - общий интеграл).
5. $y'' \cdot y^3 - 1 = 0$ (Ответ: $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$ - общий интеграл).
6. $2(y')^2 = (y - 1)\, y''$ (Ответ: $y = 1 - \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$ - общее решение).
7. $yy'' = (y')^2 - y'$ (Ответ: $y = \dfrac{C_2 e^{C_1 x} - 1}{C_1}$ - общее решение).
8. $y''(2 - y) = 4(y')^2$ (Ответ: $(2 - y)^5 = C_1 x + C_2$ - общий интеграл).
9. $y'' + 2y(y')^3 = 0$ (Ответ: $\dfrac{y^3}{3} + C_1 y = x + C_2$ - общий интеграл).
10. $9(y'')^2 - 4y' = 0$ (Ответ: $3(y + C_1)^{\frac{1}{3}} = x + C_2$ - общий интеграл).
11. $y'' \cdot \sqrt{y} = (y')^3$ (Ответ: $\dfrac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} + C_1 y = C_2 - x$ - общий интеграл).
12. $yy'' + 2y' = (y')^2$ (Ответ: $y = \dfrac{C_2 e^{C_1 x} - 2}{C_1}$ - общее решение).

б) Решить задачу Коши

1. $yy'' = (y')^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$ (Ответ: $y = C_2 e^{C_1 x}$ - общее решение, $y = 2e^{-x}$ - решение задачи Коши).

2. $yy'' = y' + (y')^2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ (Ответ: $y = \frac{C_2 e^{C_1 x} + 1}{C_1}$ - общее решение, $y = -\frac{e^{-2x} + 1}{2}$ - решение задачи Коши).

3. $\operatorname{ctg} y' \cdot y'' = (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ (Ответ: $\sin y = C_1 x + C_2$ - общий интеграл, $x = -\sin y$ - решение задачи Коши).

4. $y'' - (y')^2 + y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{1}{2}$ (Ответ: $y = \frac{x^2 - 1}{4}$ - решение задачи Коши).

Раздел 3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Основные понятия и определения

Линейные ДУ второго порядка имеют вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где $p(x), q(x), f(x)$ - заданные функции. Таким образом, неизвестная функция $y(x)$ и её производные $y'(x), y''(x)$ входят в данное уравнение линейно. Функции $p(x), q(x)$ называют коэффициентами линейного ДУ второго порядка. Функцию $f(x)$ называют правой частью данного уравнения.

Если $p(x) \equiv p \in R$, $q(x) \equiv q \in R$, то уравнение называют линейным ДУ с постоянными коэффициентами.

Если $f(x) \neq 0$, то данное уравнение называется линейным неоднородным ДУ (ЛНДУ).

Если правая часть $f(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

и называется линейным однородным ДУ (ЛОДУ).

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \; p, q \in R.$$

Для нахождения его общего решения составляют характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

При решении этого квадратного уравнения возможны три случая:

1. $D = p^2 - 4q > 0$. Уравнение имеет два действительных различных корня $\lambda_1,\ \lambda_2 \in R$ (кратность каждого корня $k = 1$). Тогда общее решение исходного ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ C_1,\ C_2 \in R.$$

2. $D = p^2 - 4q = 0$. Уравнение имеет два равных корня $\lambda_1,\ \lambda_2 = \lambda$ (говорят, что корень λ имеет кратность $k = 2$). Тогда общее решение исходного ЛОДУ имеет вид

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x),\ C_1,\ C_2 \in R.$$

3. $D = p^2 - 4q < 0$. Уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$ (кратность каждого корня $k = 1$). Тогда общее решение исходного ЛОДУ имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x),\ C_1,\ C_2 \in R.$$

Пример 3.1. Решить задачу Коши:

$$y'' - y' - 6y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -9.$$

Решение. Это линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Находим корни $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3$. Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x},\ C_1,\ C_2 \in R.$$

Для решения задачи Коши вычислим

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$$

и подставим начальные условия $x = 0,\ \ y = 2,\ \ y' = -9$ в выражения для $y,\ y'$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 3C_2 - 2C_1 = -9. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = -1.$$

Подставляя найденные значения $C_1 = 3,\ C_2 = -1$ в общее решение, получаем

$$y = 3e^{-2x} - e^{3x} \text{ - решение задачи Коши.}$$

Пример 3.2. Решить задачу Коши:

$$y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Решение. Это линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Уравнение имеет корень $\lambda = 3$ кратности $k = 2$. Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},\ C_1,\ C_2 \in R.$$

Для решения задачи Коши вычислим

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x}$$

и подставим начальные условия $x=0,\ y=1,\ y'=0$ в выражения для $y,\ y'$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 1, \\ 3C_1 + C_2 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow\ C_1 = 1,\ C_2 = -3.$$

Подставляя найденные значения $C_1 = 1,\ C_2 = -3$ в общее решение, получаем

$$y = e^{3x} - 3xe^{3x} \quad \text{- решение задачи Коши.}$$

Пример 3.3. Решить задачу Коши:

$$y'' + 6y' + 13y = 0,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 2.$$

Решение. Это линейное однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0.$$

Находим корни $\lambda_1 = -3 + 2i,\ \lambda_2 = -3 - 2i$. Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x,\ C_1,\ C_2 \in R.$$

Подставим в $y(x)$ первое начальное условие $x = \pi,\ y = 0$:

$$0 = C_1 e^{-3\pi} \cos 2\pi + C_2 e^{-3\pi} \sin 2\pi = C_1 e^{-3\pi} + C_2 \cdot 0 = C_1 e^{-3\pi} \Rightarrow C_1 = 0.$$

Учитывая, что $C_1 = 0$, вычисляем производную

$$y' = (C_2 e^{-3x} \sin 2x)' = -3C_2 e^{-3x} \sin 2x + 2C_2 e^{-3x} \cos 2x$$

и подставляем в неё второе начальное условие $x = \pi,\ y' = 2$:
$2 = -3C_2 e^{-3\pi} \sin 2\pi + 2C_2 e^{-3\pi} \cos 2\pi = 2C_2 e^{-3\pi} \Rightarrow C_2 = e^{3\pi}$.

Подставляя найденные значения $C_1 = 0,\ C_2 = e^{3\pi}$ в общее решение, получаем

$$y = e^{3\pi} \cdot e^{-3x} \sin 2x = e^{3(\pi - x)} \sin 2x \text{ - решение задачи Коши.}$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x),\ p, q \in R.$$

Линейное однородное ДУ (ЛОДУ) вида

$$y'' + py' + qy = 0$$

называется **соответствующим** исходному линейному неоднородному ДУ.

Общее решение линейного неоднородного ДУ задается формулой

$$y = \overline{y} + \tilde{y}(x),$$

где $\overline{y}(x)$ – общее решение соответствующего ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$, а $\tilde{y}(x)$ – любое частное решение данного ЛНДУ.

Рассмотрим частный случай, когда правая часть линейного неоднородного ДУ $f(x)$ является функцией специального вида:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $\alpha, \beta \in R$, $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены от x степеней n, m соответственно. Решение линейного неоднородного ДУ в этом случае проводят по следующей схеме:

1. Составляют характеристическое уравнение соответствующего ЛОДУ $y'' + py' + qy = 0$ и находят его корни. Выписывают общее решение соответствующего ЛОДУ $\overline{y}(x)$.

2. По виду правой части линейного неоднородного ДУ $f(x)$ выписывают контрольное число $\gamma = \alpha + \beta i$. Если число γ не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ, то частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищут в виде

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x).$$

Если же число γ является корнем характеристического уравнения ЛОДУ кратности k, то частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищут в виде

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x),$$

где $l = \max\{\mathrm{m};\mathrm{n}\}$, $R_l(x)$, $S_l(x)$ - многочлены от x степени l с неопределенными коэффициентами.

Подставляя выражение для $\tilde{y}(x)$ в исходное ЛНДУ, вычисляем значения неопределенных коэффициентов многочленов $R_l(x)$, $S_l(x)$, при которых уравнение обращается в верное равенство. Затем, подставляя найденные значения коэффициентов многочленов в $\tilde{y}(x)$, получаем частное решение ЛНДУ.

3. Общее решение исходного ЛНДУ записываем в виде $y = \overline{y} + \tilde{y}(x)$.

Пример 3.4. Найти частное решение ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$2y'' + y' = 3x^2 + 8x - 5,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$$

Решение. Это ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Для соответствующего ЛОДУ $2y'' + y' = 0$ составляем характеристическое уравнение

$$2\lambda^2 + \lambda = 0,\ \lambda(2\lambda + 1) = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Общее решение соответствующего ЛОДУ имеет вид

$$\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

По виду правой части исходного ЛНДУ (в нашем примере $\alpha = 0, \beta = 0$) выписываем контрольное число $\gamma = \alpha + \beta i = 0 + 0 \cdot i = 0$. Оно является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ кратности $k = 1$, поэтому частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищем виде $\tilde{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Вычисляем производные:

$$\tilde{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$\tilde{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\tilde{y}''(x) = 6Ax + 2B.$$

Подставляем $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ в ЛНДУ и приравниваем слева и справа коэффициенты при

$$x^2: \ 3A = 3 \ \Rightarrow \ A = 1,$$
$$x: \ 12A + 2B = 8 \ \Rightarrow \ B = -2,$$
$$x^0: \ 4B + C = -5 \ \Rightarrow \ C = 3.$$

Подставляя найденные значения A, B, C в выражение для $\tilde{y}(x)$, получаем $\tilde{y}(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$. Таким образом, общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + x^3 - 2x^2 + 3x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычисляем

$$y' = -\frac{C_2}{2} e^{-\frac{x}{2}} + 3x^2 - 4x + 3.$$

и подставляем начальные условия $x = 0, \ y = -1, \ y' = 2$ в выражения для $y, \ y'$:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = -1 \\ y'(0) = -\dfrac{C_2}{2} + 3 = 2, \end{cases} \text{откуда } C_1 = -3, \ C_2 = 2.$$

Подставляя C_1, C_2 в общее решение ЛНДУ, получаем решение задачи Коши

$$y = -3 + 2e^{-\frac{x}{2}} + x^3 - 2x^2 + 3x.$$

Пример 3.5. Решить задачу Коши

$$y'' + 6y' + 13y = (8x + 4)e^{-x}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2.$$

Решение. Это ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Для соответствующего ЛОДУ $y'' + 6y' + 13y = 0$ составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0, \qquad D = 6^2 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-6\pm4\sqrt{-1}}{2}=-3\pm2i.$$

Общее решение соответствующего ЛОДУ имеет вид

$$\overline{y}=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x).$$

По виду правой части исходного ЛНДУ (в нашем примере $\alpha=-1, \beta=0$) выписываем контрольное число $\gamma=\alpha+\beta i=-1+0\cdot i=-1$. Оно не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ, поэтому частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищем виде $\tilde{y}(x)=(Ax+B)e^{-x}$. Вычисляем производные:

$$\tilde{y}(x)=(Ax+B)e^{-x}$$

$$\tilde{y}'(x)=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x}=e^{-x}(-Ax+A-B)$$

$$\tilde{y}''(x)=-Ae^{-x}-e^{-x}(-Ax+A-B)=e^{-x}(Ax-2A+B).$$

Подставляем $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ в ЛНДУ:

$$e^{-x}(8Ax+(4A+8B))=(8x+4)e^{-x}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части равенства, получаем:

$$\begin{cases} 8A=8 \\ 4A+8B=4 \end{cases}, \text{ откуда } A=1,\ B=0.$$

Подставляя найденные значения A, B в выражение для $\tilde{y}(x)$, получаем $\tilde{y}(x)=xe^{-x}$. Таким образом, $y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)+xe^{-x}$ – общее решение исходного ЛНДУ.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Вычисляем

$$y'=-3e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)+e^{-3x}(-2C_1\sin2x+2C_2\cos2x)+e^{-x}-xe^{-x}.$$

и подставляем начальные условия $x=0,\ y=1,\ y'=2$ в выражения для $y,\ y'$:

$$\begin{cases} y(0)=C_1=1 \\ y'(0)=-3C_1+2C_2+1=2, \end{cases} \text{ откуда } C_1=1,\ C_2=2.$$

Подставляя C_1, C_2 в общее решение ЛНДУ, получаем решение задачи Коши

$$y=e^{-3x}(\cos2x+2\sin2x)+xe^{-x}.$$

Пример 3.6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y'-2y=10e^x\cos x.$$

Решение. Это ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Для соответствующего ЛОДУ $y''+y'-2y=0$ составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\lambda-2=0,\ D=1^2+4\cdot 2=9,$$

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=\frac{-1+3}{2}=1,\qquad \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=\frac{-1-3}{2}=-2..$$

Общее решение соответствующего ЛОДУ имеет вид

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

По виду правой части исходного ЛНДУ (в нашем примере $\alpha=1, \beta=1$) выписываем контрольное число $\gamma=\alpha+\beta i=1+1\cdot i=1+i$. Оно не является корнем характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ, поэтому частное решение ЛНДУ $\tilde{y}(x)$ ищем виде $\tilde{y}(x)=e^x(A\cos x+B\cos x)$. Вычисляем производные:

$$\tilde{y}(x)=e^x(A\cos x+B\cos x)$$

$$\tilde{y}'(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x(-A\sin x+B\cos x)=e^x((A+B)\cos x+(B-A)\sin x)$$

$$\tilde{y}''(x)=e^x((A+B)\cos x+(B-A)\sin x)+e^x((-A-B)\sin x+(B-A)\cos x)=$$
$$=e^x(2B\cos x-2A\sin x)$$

Подставляем $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ в ЛНДУ и приравниваем слева и справа коэффициенты при

$$e^x\cos x:\ -2A+A+B+2B=-A+3B=10,$$
$$e^x\sin x:\ -2B+B-A-2A=-3A-B=0.$$

Получили систему

$$\begin{cases}-A+3B=10,\\ -3A-B=0,\end{cases} \text{откуда } A=-1,\ B=3.$$

Подставляя найденные значения *A*, *B* в выражение для $\tilde{y}(x)$, получаем $\tilde{y}(x)=e^x(-\cos x+3\sin x)$. Таким образом, $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+e^x(-\cos x+3\sin x)$ – общее решение исходного ДУ.

Практические задания

Задание 3.1.

а) Проинтегрировать линейные однородные ДУ второго порядка

1. $3y''-2y'-8y=0$ (Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$).
2. $y''+5y'=0$ (Ответ: $y=C_1+C_2e^{-5x}$).
3. $y''-3y=0$ (Ответ: $y=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2e^{-\sqrt{3}x}$).
4. $y''+6y'+9y=0$ (Ответ: $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$).
5. $4y''-4y'+y=0$ (Ответ: $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}$).

6. $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$ (Ответ: $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 x e^{-\sqrt{2}x}$).

7. $y'' + 2y' + 10y = 0$ (Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$).

8. $y'' + 16y = 0$ (Ответ: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$).

9. $y'' + 4y' + 6y = 0$ (Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$).

б) Решить задачу Коши

1. $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 4$ (Ответ: $y = e^{2x} - 2e^{-x}$).

2. $y'' + 3y' = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 6$ (Ответ: $y = 1 - 2e^{-3x}$).

3. $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$ (Ответ: $y = e^{-x}(x - 1)$).

4. $9y'' + 12y' + 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$ (Ответ: $y = e^{-\frac{2}{3}x}(2x + 3)$).

5. $y'' + y = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 3$ (Ответ: $y = -3\cos x - \sin x$).

6. $4y'' - 8y' + 5y = 0,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = -1$ (Ответ: $y = 2e^{x-\pi}\cos\frac{x}{2}$).

Задание 3.2.

а) Проинтегрировать линейные неоднородные ДУ второго порядка с правой частью специального вида

1. $y'' + 6y' + 13y = 13x^2 - x - 4$

(Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + x^2 - x$)

2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2$

(Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^3 - x^2 + x$)

3. $y'' - 4y' = 8x + 6$ (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^2 - 2x$)

4. $y'' + 9y = 6e^{-3x}$ (Ответ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \dfrac{e^{-3x}}{3}$)

5. $y'' - 4y = 8e^{2x}$ (Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + 2xe^{2x}$)

6. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$ (Ответ: $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + 3x^2)$)

7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$ (Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + xe^{2x})$)

8. $y'' + 2y' = 5\cos x$ (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \cos x + 2\sin x$)

9. $y'' - 2y' + 10y = 11\cos x - 7\sin x$

(Ответ: $y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos x - \sin x$)

10. $y'' + 16y = 8\cos 4x$ (Ответ: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x\sin 4x$)

11. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$

(Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 5\cos 5x + \sin 5x$).

12. $y'' + y' - 2y = 78e^{x}\sin 2x$

(Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} - e^{x}(3\cos 2x + 2\sin 2x)$)

б) Решить задачу Коши

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$

(Ответ: $y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + x^2 + 2x - 2$ - общее решение, $y = -e^{x}\sin 2x + x^2 + 2x - 2$ - решение задачи Коши).

2. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x - 2,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$

(Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2 + x^3 - x^2$ - общее решение, $y = \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2} + x^3 - x^2$ - решение задачи Коши).

3. $y'' + y' = 2x - 1,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

(Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - 3x$ - общее решение, $y = 2 - 3e^{-x} + x^2 - 3x$ - решение задачи Коши)

4. $y'' - 4y' = 8 - 16x,\ y(0) = y'(0) = 3$

(Ответ: $y = C_1e^{4x} + C_2 + 2x^2 - x$ - общее решение, $y = \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{5}{2} + 2x^2 - x$ - решение задачи Коши).

5. $6y'' - y' - y = 21e^{2x},\ y(0) = y'(0) = 3$

(Ответ: $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2e^{-\frac{x}{3}} + e^{2x}$ - общее решение, $y = 2e^{\frac{x}{2}} + e^{2x}$ - решение задачи Коши)

6. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(Ответ: $y = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} + 3xe^{4x}$ - общее решение, $y = -e^{4x} + e^{3x} + 3xe^{4x}$ - решение задачи Коши)

7. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x},\ y(0) = \frac{1}{5},\ y'(0) = 4$

(Ответ: $y = e^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{5}e^{5x}$ - общее решение, $y = e^{-4x}\sin 3x + \frac{1}{5}e^{5x}$ - решение задачи Коши).

8. $y'' + y = (2x - 1)e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 1$

(Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (x + \frac{1}{2})e^{-x}$ - общее решение, $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + (x + \frac{1}{2})e^{-x}$ - решение задачи Коши).

9. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

(Ответ: $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}} + 4\sin x + 3\cos x$ - общее решение,

$y = -2e^{\frac{x}{2}} - xe^{\frac{x}{2}} + 4\sin x + 3\cos x$ - решение задачи Коши)

10. $y'' + 25y = 12\sin x + 6\cos x,\ y(\pi) = \frac{3}{4},\ y'(\pi) = \frac{1}{2}$

(Ответ: $y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + \frac{\cos x}{4} + \frac{\sin x}{2}$ - общее решение,

$y = -\cos 5x - \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{\cos x}{4} + \frac{\sin x}{2}$ - решение задачи Коши)

11. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x,\ y(0) = y'(0) = 0$

(Ответ: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} + 3\cos 2x$ - общее решение,

$y = -e^{4x} - 2e^{-2x} + 3\cos 2x$ - решение задачи Коши)

12. $y'' + 4y = 9e^{-x}\cos x,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

(Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + e^{-x}\cos x$ - общее решение,

$y = -\cos 2x - \frac{\sin 2x}{2\sqrt{e^{\pi}}} + e^{-x}\cos x$ - решение задачи Коши)

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.- Москва: Наука, 1986.
2. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике./ Т.А. Сухая, В.Ф.Бубнов/. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.
3. Индивидуальные задания по высшей математике./ Под ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 3.
4. Высшая математика для экономистов./ Под редакцией Н. Ш. Кремера.- Москва: Юнити Дана, 2010.
5. Руководство к решению задач по высшей математике./ Под ред. Е.И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 2.