



Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Робототехнические системы»

А.Р. Околов  
Е.Р. Новичихина  
Г.С. Свидерский

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

Учебно-методический комплекс

Часть 1

Минск  
БНТУ  
2012

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра «Робототехнические системы»

А.Р. Околов  
Е.Р. Новичихина  
Г.С. Свидерский

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности  
1-53 01 06 «Промышленные роботы  
и робототехнические комплексы»

В 2 частях

Часть 1

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Минск  
БНТУ  
2012

УДК 007.52:51(076.5)  
ББК 32.816я7  
О-51

Рецензенты:  
*Н.Н. Гурский, С.Н. Павлович*

**Околов, А.Р.**

О-51 Математическое обеспечение промышленных роботов: учебно-методический комплекс для студентов специальности 1-53 01 06 «Промышленные роботы и робототехнические комплексы»: в 2 ч. / А.Р. Околов, Е.Р. Новичихина, Г.С. Свидерский. – Минск : БНТУ, 2012. – Ч. 1 : Лабораторные работы. – 80 с.

ISBN 978-985-550-092-7 (Ч. 1).

Издание является первой частью учебно-методического комплекса. Цель выполнения лабораторных работ – повторение студентами лекционного материала и закрепление его на практике. Рассмотрены основные вопросы, связанные с математическим описанием динамики и кинематики промышленного робота, планированием и моделированием траектории движения робота, а также решением прямой и обратной задач кинематики и динамики.

Учебно-методический комплекс предназначен для студентов, инженеров и преподавателей, занимающихся проектированием и эксплуатацией промышленных роботов.

**УДК 007.52:51(076.5)**  
**ББК 32.816я7**

ISBN 978-985-550-092-7 (Ч. 1)  
ISBN 978-985-550-093-4

© Околов А.Р., Новичихина Е.Р,  
Свидерский Г.С., 2012  
© Белорусский национальный  
технический университет, 2012

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1**

### **Матрица однородного преобразования**

**Цель работы:** изучить матрицы однородного преобразования.

#### **1. Основные положения**

Матричная и векторная алгебра применяются для описания и представления расположения звеньев манипулятора относительно заданной абсолютной системы координат. Для этого каждому звену определяется связанная с ним система координат, оси которой параллельны осям сочленений звеньев.

Звенья манипулятора могут совершать вращательное и/или поступательное движение относительно абсолютной системы координат. Для описания вращательного движения связанной системы отсчета относительно абсолютной используется матрица поворота размерностью  $3 \times 3$ , для описания поступательного перемещения центра связанной системы координат относительно центра абсолютной системы координат используется вектор положения размерностью  $3 \times 1$ , а для учета совместного поступательного и вращательного движения используется матрица однородного преобразования размерностью  $4 \times 4$ .

#### **1.1 Матрица поворота**

Ориентацию одной системы относительно другой можно задать с помощью матрицы поворота.

Рассмотрим две системы координат: систему координат OXYZ с осями OX, OY, OZ и систему OUVW с осями OU, OV, OW.

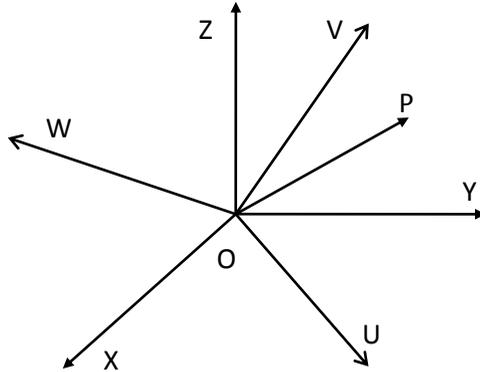


Рисунок 1.1 – две системы координат

Начала этих систем совпадают и расположены в точке  $O$ . Система  $OXYZ$  фиксирована в трехмерном пространстве и принята за абсолютную систему координат,  $OUVW$  вращается относительно абсолютной системы  $OXYZ$ . Пусть  $(i_x, j_y, k_z)$  и  $(i_u, j_v, k_w)$  - единичные векторы, направленные вдоль осей систем  $OXYZ$  и  $OUVW$  соответственно.

Матрица поворота определяет положение осей повернутой системы координат относительно абсолютной системы координат. Векторы столбцы этой матрицы задают в системе  $OXYZ$  координаты единичных векторов в направлении основных осей системы  $OUVW$ .

Значения элементов матрицы поворота можно определить как:

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix},$$

т. е. первый столбец матрицы поворота определяет координаты повернутой оси  $OU$  относительно осей абсолютной системы координат  $OXYZ$ , второй столбец определяет координаты оси  $OV$  в си-

системе OXYZ, третий столбец определяет координаты оси OZ в системе OXYZ.

С помощью матрицы поворота можно связать координаты точки  $P_{xyz}$ , заданные в абсолютной системе координат, с координатами той же точки  $P_{uvw}$ , заданными в повернутой системе координат.

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix}.$$

Ниже приводится ряд полезных свойств матриц поворота:

1. Каждый столбец матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси повернутой системы отсчета, заданный своими координатами относительно абсолютной системы координат. Каждая строка матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси абсолютной системы координат, заданный своими координатами относительно повернутой системы отсчета OUVW.

2. Поскольку каждый столбец и строка представляют собой координаты единичного вектора, длина векторов, определяемых строками и столбцами матрицы поворота, равна 1.

3. Поскольку столбцы (строки) матрицы поворота являются векторами, составляющими ортонормированный базис, скалярное произведение векторов, определяемых двумя различными столбцами (строками), равно нулю.

4. Операция обращения матрицы поворота совпадает с операцией транспонирования:  $R^{-1} = R^T$  и  $R \cdot R^T = I_3$ , где  $I_3$  - единичная матрица размерностью  $3 \times 3$ .

## 1.2 Однородные координаты

Поскольку трехмерная матрица поворота не несет информации о поступательном перемещении и используемом масштабе, вектор координат  $P = (p_x, p_y, p_z)^T$  в трехмерном пространстве дополняют четвертой координатой (или компонентой) так, что он принимает вид

$P=(wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$ . В этом случае говорят, что вектор  $P$  выражен в однородных координатах. Описание точек трехмерного пространства однородными координатами позволяет ввести в рассмотрение матричные преобразования, содержащие одновременно поворот, параллельный перенос, изменение масштаба и преобразование перспективы.

В общем случае изображение  $N$ -мерного вектора вектором размерностью  $N + 1$  называется представлением в однородных координатах. При таком представлении преобразование  $N$ -мерного вектора производится в  $(N+1)$ -мерном пространстве, а физический  $N$ -мерный вектор получается делением однородных координат на  $(N+1)$ -ю компоненту  $w$ . Так, вектор  $P=(p_x, p_y, p_z)^T$  положения в трехмерном пространстве в однородных координатах представляется расширенным вектором  $(wp_x, wp_y, wp_z, w)^T$ . Физические координаты связаны с однородными следующим образом:

$$p_x = \frac{wp_x}{w}, p_y = \frac{wp_y}{w}, p_z = \frac{wp_z}{w}.$$

Представление трехмерного вектора положения в однородных координатах не единственно. Например  $P_1=(w_1p_x, w_1p_y, w_1p_z, w_1)^T$  и  $P_2=(w_2p_x, w_2p_y, w_2p_z, w_2)^T$  являются различными однородными представлениями одного и того же вектора положения  $P=(p_x, p_y, p_z)^T$ . Таким образом, четвертую компоненту  $w$  вектора однородных координат можно рассматривать как масштабирующий множитель. Если эта компонента равна 1 ( $w=1$ ), то однородные координаты вектора положения совпадают с его физическими координатами. В робототехнике масштабирующий множитель всегда выбирают равным 1, а в задачах машинной графики он принимает любое положительное значение.

### *1.3 Однородная матрица преобразования*

Однородная матрица преобразования представляет собой матрицу размерностью  $4 \times 4$ , которая преобразует вектор, выраженный в однородных координатах, из одной системы отсчета в другую. Однородная матрица преобразования может быть разбита на четыре подматрицы:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Поворот} & \text{Сдвиг} \\ \text{Преобразование} & \text{Масштабирование} \\ \text{перспективы} & \end{bmatrix}.$$

Верхняя левая подматрица размерностью  $3 \times 3$  представляет собой матрицу поворота; верхняя правая подматрица размерностью  $3 \times 1$  представляет собой вектор положения начала координат повернутой системы отсчета относительно абсолютной; нижняя левая матрица размерностью  $1 \times 3$  задает преобразование перспективы; четвертый диагональный элемент является глобальным масштабирующим множителем. Однородная матрица преобразования позволяет выявить геометрическую связь между связанной системой отсчета OUVW и абсолютной системой OXYZ.

Если вектор  $P$  трехмерного пространства выражен в однородных координатах (т.е.  $P = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$ ), то, используя понятие матрицы преобразования, можно сформировать однородную матрицу преобразования  $ROT(k, Q)$ , задающую преобразование поворота вокруг вектора  $k$  на угол  $Q$  и имеющую размерность  $4 \times 4$ . Однородная матрица поворота получается соответствующим расширением обычной матрицы поворота, имеющей размерность  $3 \times 3$ .

Так однородное преобразование, описывающее поворот вокруг оси  $X$  на угол  $\beta$  будет иметь вид:

$$Rot(x, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот вокруг оси  $Y$  на угол  $\beta$ :

$$Rot(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот вокруг оси  $Z$  на угол  $\beta$ :

$$Rot(z, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы размерностью  $4 \times 4$  называются однородными матрицами элементарных поворотов.

Верхняя правая подматрица однородной матрицы преобразования, имеющая размерность  $3 \times 1$ , задает параллельный перенос системы координат  $OUVW$  относительно абсолютной системы  $OXYZ$  на вектор  $(dx, dy, dz)^T$

$$TRANS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица размерностью  $4 \times 4$  называется однородной матрицей элементарного сдвига.

Правая нижняя подматрица однородной матрицы преобразования размерностью  $1 \times 1$  определяет глобальное преобразование масштаба

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix},$$

где  $s > 0$ . Физические декартовы координаты вектора будут равны:

$$\rho_x = \frac{x}{s}, \quad \rho_y = \frac{y}{s}, \quad \rho_z = \frac{z}{s}, \quad w = \frac{s}{s} = 1.$$

Таким образом, четвертый диагональный элемент однородной матрицы преобразования определяет глобальное сжатие координат, если  $s > 1$ , и растяжение, если  $0 < s < 1$ .

Левая нижняя подматрица однородной матрицы преобразования размерностью  $1 \times 3$  определяет преобразование перспективы. Действие ее эквивалентно эффекту линзы.

Так например, для случая когда объемное изображение проецируется через линзу, имеющую фокусное расстояние  $f$ , при этом оптическая ось линзы проходит вдоль оси  $OY$  системы координат  $OXYZ$ , связанной с объемным телом, оптическое преобразование будет иметь вид:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Спроецированные однородные координаты точек тела определяются как:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 - \frac{y}{f} \end{bmatrix}.$$

Таким образом декартовы координаты спроецированного изображения получаются путем деления на весовой коэффициент  $1-y/f$ :

$$\frac{x}{(1-y/f)} i + \frac{y}{(1-y/f)} j + \frac{z}{(1-y/f)} k.$$

В робототехнике оптическое преобразование используется в задачах машинного зрения, когда с помощью камеры определяются в пространстве положение, форма и размеры объектов манипулирования или препятствий. При этом оптическое преобразование проецирует точки трехмерного пространства на плоскость. В случае когда оптическая ось линзы проходит вдоль оси ОУ системы координат ОХУZ, спроецированные на плоскость ОХZ координаты точки трехмерного пространства определяются из уравнений:

$$x = \frac{X}{(1-Y/f)},$$

$$z = \frac{Z}{(1-Y/f)}.$$

Две координаты точек изображения неоднозначно определяют расположение соответствующих точек трехмерного пространства. Информация о глубине изображения может быть получена при использовании методов стереоскопического изображения, т.е. с использованием результатов изображений двух камер, наблюдающих за одним объектом.

Множитель  $-1/f$  необходимо включить в последнюю строку первой колонки матрицы P, если оптическая ось линзы проходит вдоль

оси OX системы координат OXYZ. Если оптическая ось линзы проходит вдоль оси OZ системы координат OXYZ множитель  $-1/f$  необходимо включить в последнюю строку третьей колонки.

Таким образом с помощью матрицы однородного преобразования можно описать одновременно поворот и перенос одной системы координат относительно другой, задать масштабирование и преобразование перспективы. Матрицы однородного преобразования позволяет связать координаты точки  $P_{xyz}$ , заданные в абсолютной системе координат с координатами точки  $P_{uvw}$ , заданные в связанной системе координат.

$$P_{xyz} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times P_{uvw}$$

## 2. *Содержание работы*

Работа предполагает выполнение следующего задания:

1) Используя моделирующую программу, изучить элементы матрицы однородного преобразования.

## 3. *Методика выполнения работы*

1) В соответствии с заданием запишите вид матриц однородных преобразований, переводящих пирамиду из исходного положения в заданное.

2) Запустите в работу моделирующую программу «laba1.exe».

3) Ознакомьтесь с основными возможностями программы в «laba1\_описание.docx».

4) Зарисуйте вид исходного положения пирамиды и преобразованного.

5) Для 8-го пункта задания зарисуйте с помощью программы вид исходного положения пирамиды и преобразованного объемно-

го оптического изображения. Плоскостное оптическое изображение нарисуйте самостоятельно.

#### 4. Задание

Рассмотрим в декартовой системе координат пирамиду (рисунок 1.2).

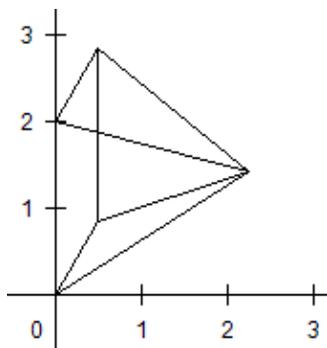


Рисунок 1.2 – Пирамида в декартовых системах координат

Вершины пирамиды могут быть описаны матрицей вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определить новое положение вершин пирамиды в случае:

1) Переноса пирамиды вдоль оси X на dx:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
dx	2	1	2,5	1,5	3	3,5

2) Переноса пирамиды вдоль оси Y на  $dy$ :

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$dy$	1,5	1	1,7	2	2,5	3

3) Переноса пирамиды вдоль оси Z на  $dz$ :

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$dz$	2	2,5	1,5	1	1,7	3

4) Поворота пирамиды вокруг оси X на угол  $\beta$ :

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$\beta$	90	180	-90	-180	270	-270

5) Поворота пирамиды вокруг оси Y на угол  $\beta$ :

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$\beta$	-180	-270	180	270	-90	90

6) Поворота пирамиды вокруг оси Z на угол  $\beta$ :

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$\beta$	270	90	-270	-90	180	-180

7) Масштабирования в S раз:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
s	2	1,5	0,5	0,3	1,9	0,7

8) Оптического преобразования:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
Оптическая ось	OX	OY	OZ	OX	OY	OZ
f	100	300	200	15	25	10

5. *Содержание отчета*

Отчет должен содержать следующие материалы:

1. Титульный лист.
2. Задание.
3. Подготовленные исходные данные и результаты моделирования.

6. *Литература*

1. К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. Робототехника. М.: Мир, 1989.
2. М. Шахинпур. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.
3. Справочник по промышленной робототехнике: Кн. 1. М.: Машиностроение, 1990.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### *Методы описания ориентации объекта в пространстве*

**Цель работы:** изучить методы описания ориентации объекта в пространстве.

#### *1. Основные положения*

Для описания ориентации объекта манипулирования в пространстве с ним связывают декартову систему координат (СК), которая перемещается вместе с объектом.

Ориентацию подвижной СК относительно абсолютной системы отсчета можно описать с помощью матрицы вращения  $R$  или матрицы направляющих косинусов размерностью  $3 \times 3$ . Матрица вращения удобна в качестве оператора матричного уравнения, однако является избыточной, так как для описания ориентации тела в пространстве достаточно задания трех величин (трех поворотов вокруг трех основных осей).

Матрицу вращения неудобно использовать для описания ориентации при формировании программы управления роботом. У оператора, программирующего положение и ориентацию рабочего органа манипулятора в пространстве, возникают большие сложности при определении и задании девяти элементов ортогональной матрицы. Значительно проще использовать для представления ориентации только три параметра, в качестве которых используются вращения вокруг осей декартовой СК.

Существует несколько способов задания ориентации с помощью трех вращений, при этом вращения могут задаваться как вокруг осей базовой системы координат так и вокруг собственных осей.

#### *1.1 Углы тангаж, крен и рысканье (Pitch, Roll, Yaw)*

Произвольную ориентацию СК в пространстве можно получить с помощью ее следующих вращений:

- 1) вращение вокруг оси  $X$  на угол  $\psi$  (рысканье);

- 2) вращение вокруг оси  $Y$  на угол  $\varphi$  (тангаж);
- 3) вращение вокруг оси  $Z$  на угол  $\theta$  (крен).

Все вращения выполняются относительно осей абсолютной системы координат  $XYZ$ , а углы  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  образуют систему “тангаж”, “крен”, “рысканье” (наклон, вращение, качание).

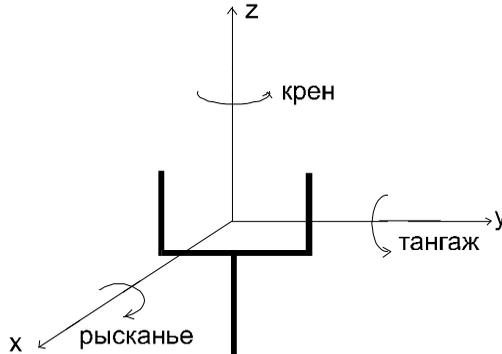


Рисунок 2.1- Система углов тангаж, крен, рысканье

Математически результат этих трех вращений можно записать следующим образом:

$$R_{PY}(\varphi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \varphi) \cdot \text{Rot}(y, \theta) \cdot \text{Rot}(x, \psi) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi \cdot c\theta & c\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi & c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi & 0 \\ s\varphi \cdot c\theta & s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\psi & s\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta \cdot s\psi & c\theta \cdot c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.2 Углы Эйлера

Другим способом достижения требуемой ориентации СК в пространстве является использование системы углов Эйлера. В этом случае все вращения выполняются вокруг собственных осей по-

движной системы координат. Существуют различные системы углов Эйлера, отличающиеся порядком вращений вокруг осей, например Z-Y-X, Z-Y-Z, Z-X-Z.

Часто выбор той или иной системы углов связан с конструкцией запястья манипулятора. Так для манипулятора типа “Puma” выбрана система углов Эйлера Z-Y-Z.

В этом случае определен следующий порядок вращений:

- 1) вращение вокруг оси Z1 на угол  $\varphi$ ;
- 2) вращение вокруг оси Y2 на угол  $\theta$ ;
- 3) вращение вокруг оси Z3 на угол  $\psi$ .

Три угла, однозначно определяющие указанный порядок вращений, называются углами Эйлера.

Математически результат этих трех вращений можно записать следующим образом:

$$R = \text{Rot}(z, \varphi) \times \text{Rot}(y, \theta) \times \text{Rot}(z, \psi) =$$

$$= \begin{bmatrix} c\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi - s\varphi \cdot s\psi & -c\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi & c\varphi \cdot s\theta & 0 \\ s\varphi \cdot c\theta \cdot c\psi + c\varphi \cdot s\psi & -s\varphi \cdot c\theta \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\psi & s\varphi \cdot s\theta & 0 \\ -s\theta \cdot c\psi & s\theta \cdot s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### ***1.3 Эквивалентное представление ориентации с помощью вектора и угла.***

Получить желаемую ориентацию подвижной СК в пространстве можно выполнив ее поворот на некоторый угол вокруг произвольного вектора, заданного в абсолютной СК.

Пусть выполнен поворот подвижной СК на угол  $\theta$  вокруг произвольного направления, описываемого единичным вектором  $K$  с координатами  $(K_x, K_y, K_z)$ . Тогда матрица, описывающая такое вращение примет следующий вид:

$$R(k, \theta) =$$

$$\begin{bmatrix} k_x k_x \cdot \text{vers}\theta + c\theta & k_y k_x \cdot \text{vers}\theta - k_z s\theta & k_z k_x \cdot \text{vers}\theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y \cdot \text{vers}\theta + k_z s\theta & k_y k_y \cdot \text{vers}\theta + c\theta & k_z k_y \cdot \text{vers}\theta - k_z s\theta & 0 \\ k_x k_z \cdot \text{vers}\theta - k_y s\theta & k_y k_z \cdot \text{vers}\theta + k_z s\theta & k_z k_z \cdot \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поскольку вектор  $K$  не всегда является единичным ( $|K|$  не равен 1), необходимо выполнить его нормирование, разделив значение каждой координаты на длину вектора, и использовать в расчетах полученные значения  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ .

## ***2. Содержание работы***

Работа предполагает выполнение следующего заданий:

- 1) Используя моделирующую программу, изучить способы задания ориентации с помощью углов тангаж, крен и рысканье.
- 2) Используя моделирующую программу, изучить способы задания ориентации с помощью углов Эйлера.
- 3) Используя исходные данные, самостоятельно нарисовать вид подвижной системы координат, полученной в результате поворота СК на некоторый угол вокруг произвольного вектора  $K$ , заданного в абсолютной СК.

## ***3. Методика выполнения работы***

- 1) Запустите в работу моделирующую программу «laba2.exe».
- 2) Ознакомьтесь с основными возможностями программы через «laba2\_описание.docx».
- 3) С помощью программы задайте требуемые значения углов тангаж, крен, рысканье и углов Эйлера. Результаты моделирования приведите в отчете.
- 4) В случае изменения ориентации с помощью вектора и угла, сперва выполните нормирование вектора  $K$ . После этого запишите как будет выглядеть матрица вращения в численном виде. По чис-

ленным значениям направляющих косинусов постройте оси подвижной системы координат.

#### 4. Задание

1) С помощью моделирующей программы задайте требуемые значения углов тангаж, крен, рысканье и углов Эйлера. Результаты моделирования приведите в отчете в виде изображений осей базовой и подвижной системы координат, а также результирующих матриц вращений.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
Yaw	90	90	-90	-90	90	-90
Pitch	-90	90	-90	90	90	-90
Roll	90	90	-90	90	-90	90

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$\varphi$	90	90	-90	-90	90	-90
$\theta$	-90	90	-90	90	90	-90
$\psi$	90	90	-90	90	-90	90

2). Определите матрицу поворота  $R(k, \theta)$ , задающую поворот на угол  $\theta$  вокруг вектора  $K$ , и постройте по полученным значениям направляющих косинусов повернутую систему координат.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
$K=(x,y,z)$	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,1,1)	(1,3,1)	(2,1,2)	(1,1,2)
$\theta$	90	-90	180	-180	270	-270

## ***5. Содержание отчета***

Отчет должен содержать следующие материалы:

1. Титульный лист.
2. Задание.
3. Подготовленные исходные данные и результаты моделирования в виде изображений осей базовой и подвижной системы координат, а также результирующих матриц вращений.

## ***6. Литература***

1. К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. Робототехника. М.: Мир, 1989.
2. М. Шахинпур. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.
3. Справочник по промышленной робототехнике: Кн. 1. М.: Машиностроение, 1990.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### *Виды изображения объёмных тел в координатах экрана монитора, алгоритмы изображения движущихся тел*

**Цель работы:** ознакомиться с некоторыми видами проецирования, освоить метод описания движения объёмного тела с помощью углов тангаж, крен, рысканье.

#### *1. Основные положения*

Для изображения движения объёмной модели робота на экране монитора необходимо уметь преобразовывать координаты точек трехмерного пространства в координаты точек двухмерного пространства.

Для получения перспективной проекции объёмного тела на плоскость экрана задаётся необходимое количество точек, принадлежащих объекту, для которых предстоит вычислить координаты точек изображения  $P1(u, v)$  (координаты экрана). Для этого нужно преобразовать координаты точки объекта  $P$  из так называемых мировых координат  $(X, Y, Z)$  в экранные координаты  $(u, v)$  её проекции  $P1$ . Это отображение удобно выполнять в два этапа.

Первый этап будем называть видовым преобразованием – точка  $P$  остается на своем месте, но система мировых координат  $(X_m, Y_m, Z_m)$  переходит в систему видовых координат  $(X_v, Y_v, Z_v)$ , связанных с объектом (рисунок 3.1).

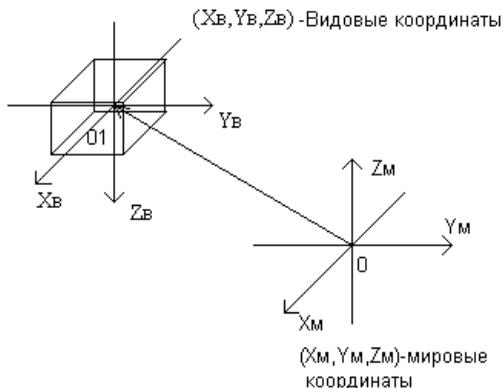
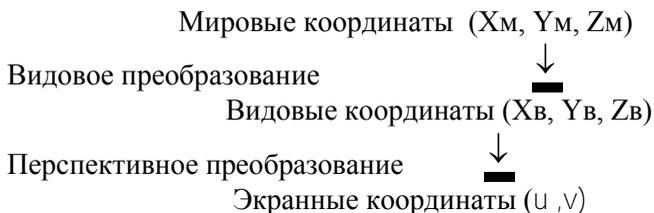


Рисунок 3.1 – Видовое преобразование

Второй этап называется перспективным преобразованием. Это преобразование точки  $P$  в точку  $P1$ , объединенное с переходом из системы трехмерных видовых координат в систему двумерных экранных координат  $(u, v)$ :



В данной работе будем считать, что размер картинка и размер объемного тела равны, и мировая система координат совмещена с видовыми осями координат предмета. Если рассмотреть однородную матрицу преобразования для данного случая, то можно сказать следующее:

1. Координаты вектора положения имеют нулевые значения, то есть начало координат мировой системы совпадает с началом координат видовой системы.

2. Преобразование перспективы отсутствует, то есть значения нижней левой подматрицы  $(1 \times 3)$  равны 0.

3. Четвертый диагональный элемент, который является глобальным масштабирующим множителем, равен 1.

Существует несколько видов проецирования.

Рассмотрим такие из них:

1. Фронтальная диметрия.
2. Горизонтальная изометрия
3. Ортогональное проецирование

Любой из перечисленных методов имеет свой оператор (матрицу) преобразования для проецирования, и матричное уравнение в общем виде можно задать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a1 & b1 & c1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Параметры  $\alpha$ ,  $\alpha1$ ,  $b$ ,  $b1$ ,  $c$ ,  $c1$  являются коэффициентами искажения, для каждого вида проецирования они свои.

Рассмотрим каждый из методов проецирования в отдельности.

Изображение фронтальной диметрии приведено на рисунок 3.2.



Рисунок 3.2 - Фронтальная диметрия

Для фронтальной диметрии:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a1 & b1 & c1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \cdot \cos(a) & 1 & 0 \\ e \cdot \sin(a) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

При этом для коэффициентов искажения (см. рисунок 3.2) имеют место равенства:

$$\begin{aligned} e1=e3=1, \\ e2=e. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В программе, которая используется в лабораторной, работе коэффициент  $e$  равен  $0.5$ , а угол  $\alpha$  между осями  $OY$  и  $OX$  (см. рисунок 3.2) равен  $225^\circ$ .

Изображение горизонтальной изометрии приведено на рисунке 3.3.

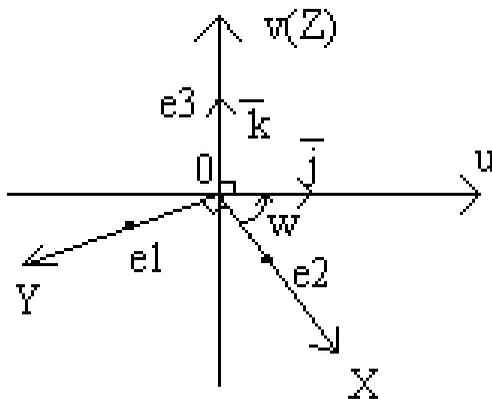


Рисунок 3.3 - Горизонтальная изометрия

Матричное уравнение для данного вида проецирования имеет вид:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ -\cos(\omega) & -\sin(\omega) & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Точки  $e_1, e_2, e_3$  имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\sin(\omega), -\cos(\omega)), \\ e_2 &= (\cos(\omega), -\sin(\omega)), \\ e_3 &= (0, 1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Угол  $\omega$  – это угол между вектором  $j$  и осью  $OY$  (см. рисунок 3.3).

В программе, используемой в лабораторной работе, угол  $\omega$  равен  $20^\circ$ .

Изображение осей при ортогональном проецировании приведено на рисунке 3.4.

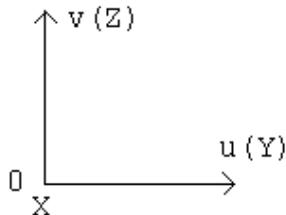


Рисунок 3.4 - Изображение осей при ортогональном проецировании

Матричное уравнение для ортогонального проецирования имеет вид:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.6) видно, что при изображении на экране ось  $OX$  будет преобразована в точку рисунка 3.4.

Для описания движения объёмного тела в пространстве декартовых координат можно использовать несколько систем задания ориентации:

1. углы Эйлера;
2. углы тангаж, крен, рысканье;
3. поворот на угол вокруг вектора.

В данной работе используется описание движения с помощью углов тангаж, крен, рысканье.

Угол рысканья - поворот вокруг оси  $OX$  на угол  $\varphi$ .

Угол крена - поворот вокруг оси  $OZ$  на угол  $\psi$ .

Угол тангаж - поворот вокруг оси  $OY$  на угол  $\theta$ .

Следует заметить, что последовательность поворота на углы крен, тангаж и рысканье ещё называют последовательностью трёх поворотов на углы Крылова.

Определим следующую последовательность поворотов. Первый поворот выполняется вокруг оси  $OX$  на угол  $\varphi$ ; второй поворот происходит вокруг оси  $OY$  на угол  $\theta$ ; третий - вокруг оси  $OZ$  на угол  $\psi$ . Матрица вращения получается путём умножения трёх матриц элементарных вращений:

$$\begin{aligned} \text{Result}(\varphi, \theta, \psi) &= \text{Rot}(z, \varphi) \times \text{Rot}(y, \theta) \times \text{Rot}(x, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi \cdot c\theta & c\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi - s\varphi \cdot c\psi & c\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi & 0 \\ s\varphi \cdot c\theta & s\varphi \cdot s\theta \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\psi & s\varphi \cdot s\theta \cdot c\psi - c\varphi \cdot s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta \cdot s\psi & c\theta \cdot c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для изображения движущейся фигуры формулы фронтальной симметрии будут иметь следующий вид (8):

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \cdot \cos(a) & 1 & 0 \\ e \cdot \sin(a) & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \text{Result} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \right), \quad (3.8)$$

где  $(X, Y, Z)$  – координаты объекта в пространстве;

$(u, v)$  - координаты объекта на экране;  
 $[Result]$  – “ матрица–результат ” трёх вращений, формула(3.7).

Формулы горизонтальной изометрии для движущейся фигуры имеют следующий вид(3.9):

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ -\cos(\omega) & -\sin(\omega) & 1 \end{bmatrix} \times \left( [Result] \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \right). \quad (3.9)$$

Формулы при ортогональном проецировании для движущейся фигуры имеют следующий вид(2.1.10):

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left( [Result] \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \right). \quad (3.10)$$

## ***2. Содержание работы***

Работа предполагает выполнение следующих заданий:

1)С помощью программы, используемой в лабораторной работе, изучить различные методы описания трёхмерных объектов в пространстве декартовых координат. Про моделировать движение осей координат с помощью углов тангаж, крен и рысканье. Программа не понимает отрицательных значений углов!!!

2)Написать программу, в которой необходимо построить трёхмерную модель объекта и проворачивать её согласно варианту задания. Пример выполнения программы посмотреть посредством опции программы «Движение»⇒ «Открыть», где демонстрируется движение трёхмерных объектов: куба и пирамиды.

## ***3. Методика выполнения работы***

1. Для выполнения первой части работы необходимо:

- 1.1. Запустить в работу моделирующую программу “Lb3.exe”.
- 1.2. Ознакомиться с основными возможностями программы через меню “О программе” ⇒ “Help”.
- 1.3. С помощью программы задать требуемые значения углов тангаж, крен, рысканье и значения координат конечных точек осей. Результаты моделирования для каждого метода привести в отчёте.
2. Для выполнения второй части работы необходимо:
  - 2.1. Подготовить исходные данные в виде координат  $(X, Y, Z)$  вершин трёхмерного объекта.
  - 2.2. Составить матрицу, описывающую ориентацию (формула (3.7)) в соответствии с исходными данными.
  - 2.3. Для заданного вида проецирования преобразовать координаты вершин объекта  $(X, Y, Z)$  в координаты экрана  $(u, v)$ , используя формулы (3.8)-(3.10).
  - 2.4. Реализовать двигающуюся модель трёхмерного объекта на экране, изменяя значение углов вращения: тангаж, крен и рысканье.
  - 2.5. Результаты моделирования привести в отчете в виде копий экрана в начальный и конечный моменты движения.

#### 4. Задание

1) С помощью программы изучить три метода описания трёхмерных объектов в пространстве декартовых координат. Продемонстрировать движение осей координат при разных видах проецирования, используя следующие исходные данные:

Таблица 3.1 – Исходные данные

№ варианта	1	2	3	4	5	6
Оси, вокруг которых задается вращение	OX	OY	OZ	OY	OX	OZ
Углы вращения	90	180	270	90	180	360
Изменяемые оси	X	Y	Z	Z	Y	X
Значение координаты крайней точки оси	50	90	70	80	150	130

2) Написать программу результатом, которой является построение трёхмерной модели и её вращения в заданной системе координат. Последовательность поворотов может быть любой.

Таблица 3.2 – Исходные данные

№ варианта	1	2	3	4	5	6
Вид проецирования	Фронтальная диметрия	Фронтальная диметрия	Ортогональное проецирование	Горизонтальная изометрия	Ортогональное проецирование	Горизонтальная изометрия
Оси, вокруг которых производятся вращения	oy,oz	ox,oz	ox,oy,oz	ox,oz	ox,oy,oz	oy,oz
Углы вращения	90,90	180,180	360,360,360	90,90	360,360,360	180,180
Вид трёхмерной фигуры	Куб	Куб	Параллелепипед	Пирамида	Параллелепипед	Пирамида

### **5. Содержание отчета**

Отчёт должен содержать следующие материалы:

- 1.Титульный лист.
- 2.Задание
- 3.Математическая постановка и решение задачи.
- 4.Листинг программы.
- 5.Распечатку исходных данных и результатов моделирования.

### **6. Литература**

- 1.А.К.Лапковский. Алгоритмы изображения движущихся тел при параллельном и центральном проецировании. Аксонометрия и компьютеризация изображения. Минск. Наука и техника.,1993.
- 2.Л.Аммерал. Принципы программирования в машинной графике. Москва. Сол Систем.,1992.

## ***ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4***

### ***Моделирование движение робота в пространстве обобщенных координат***

**Цель работы:** изучить виды интерполяций.

#### ***1. Основные положения***

##### ***1.1. Классификация способов интерполяции траектории***

Потребительские характеристики универсального ПР в значительной мере определяются набором движений различных типов, которые может выполнять его манипулятор. При этом характер выполняемых движений рабочего органа манипулятора между начальным и конечным положениями зависит от используемого в СУ алгоритма управления и принятого метода расчета промежуточных точек траектории. Сейчас в микропроцессорных СУ ПР наиболее часто применяется линейная и круговая интерполяция в декартовой системе координат, линейная интерполяция в пространстве обобщенных координат манипулятора.

При движении с линейной интерполяцией в обобщенных координатах манипулятор совершает движение за минимально необходимое время за счет минимально необходимых перемещений звеньев. При линейной интерполяции в декартовых координатах рабочая точка инструмента (РТИ) манипулятора движется по прямой линии от начальной к конечной точке. Ориентация РТИ также изменяется по линейному закону. Этот тип движения рекомендуется использовать в тех случаях, когда траектория движения РТИ манипулятора имеет первостепенное значение. Так как некоторые звенья манипулятора совершают большие перемещения, чем необходимо для выполнения движения в конечную точку, могут возникнуть излишние ускорения (торможения) звеньев. При круговой интерполяции в декартовых координатах РТИ манипулятора движется по дуге (окружности), проходящей через три заданные точки. Ориентация

инструмента манипулятора относительно траектории остается неизменной. Замечания, касающиеся линейной интерполяции в декартовых координатах справедливы и для круговой интерполяции.

В последнее время находит все большее применение сплайн интерполяции. Сущность сплайн интерполяции заключается в представлении траектории между узловыми точками кривой, описываемой степенным полиномом третьей, четвертой или пятой степени. При этом коэффициенты полинома выбираются так, чтобы обеспечить непрерывность функции положения, скорости и ускорения при переходе с одного сегмента на другой.

Все алгоритмы сплайн интерполяции могут применяться как для интерполяции в обобщенных координатах, когда каждая обобщенная координата рассчитывается как степенная функция (со своими коэффициентами), так и для интерполяции в декартовых координатах, когда сначала рассчитывается  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а затем решается обратная задача кинематики.

В данной лабораторной работе рассматривается способ линейной интерполяции траектории в пространстве обобщенных координат.

## ***1.2. Алгоритм интерполяции в обобщенных координатах***

При движении манипулятора с интерполяцией в обобщенных координатах в любой момент времени отношение пройденного пути к общему пути должно быть одинаковым для всех его звеньев. Время движения РТИ манипулятора в конечную точку определяется временем, которое требуется звену с максимальным значением перемещения. Назовем это звено «ведущим». Существуют различные варианты алгоритма интерполяции в обобщенных координатах. Приведенный ниже алгоритм предполагает, что максимально допустимое значение скоростей и ускорений приводов звеньев манипулятора одинаковы, закон изменения скорости – трапецеидальный (рисунок 4.1).

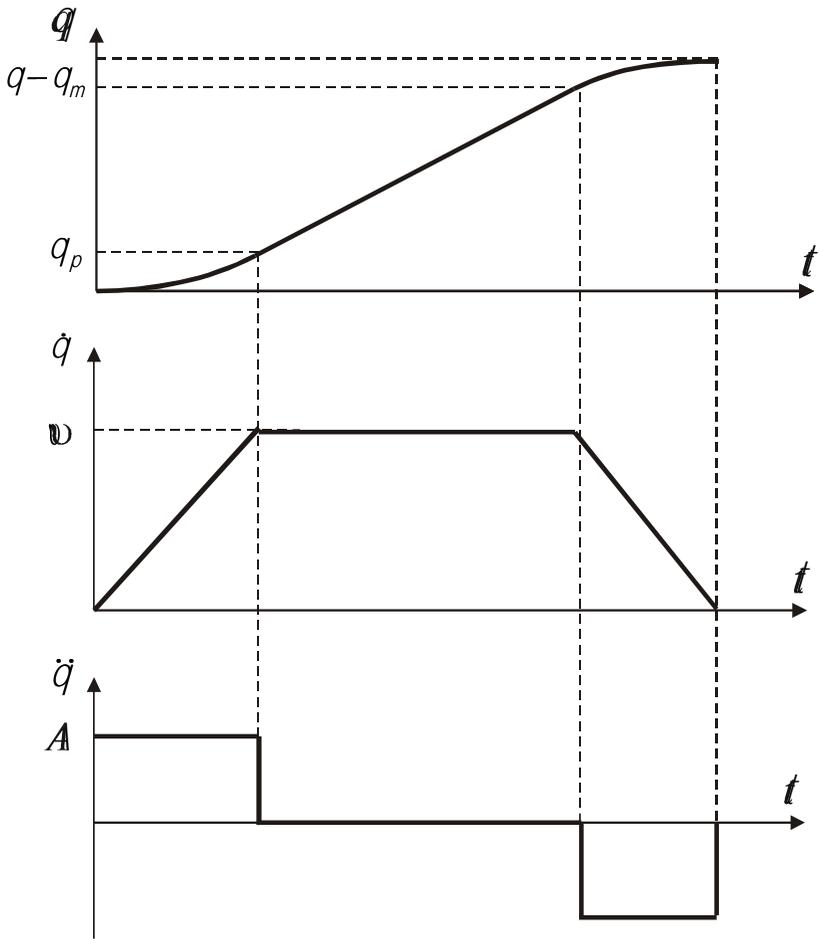


Рисунок 4.1 – Графики изменения скорости, ускорения

Пусть известны координаты  $(q_1^H \dots q_i^H)$ , где  $i$  - число степеней подвижности манипулятора) начальной и конечной  $(q_1^K \dots q_i^K)$  точек отрезка траектории. Необходимо определить координаты текущей точки  $(q_1^J \dots q_i^J)$  РТИ манипулятора при ее движении по траектории.

Получим выражение для расчета траектории движения «ведущего» звена.

Определим диапазоны перемещения звеньев манипулятора:

$$\Delta q_i = q_i^K - q_i^H. \quad (4.1)$$

Величину пути «ведущего» звена найдем как:

$$q = \max |\Delta q_i|. \quad (4.2)$$

Расчет коэффициентов пропорциональности для «ведомых» звеньев выполним по формуле:

$$K_{ni} = \frac{\Delta q_i}{q}. \quad (4.3)$$

Для «ведущего» звена коэффициент равен:

$$K_n = \text{sign} \Delta q_i \max \bar{\cdot} 1. \quad (4.4)$$

Скорость движения  $i$ -го звена равна:

$$v_i = v \cdot K_{ni}, \quad (4.5)$$

где  $v$  - заданная скорость движения по траектории. ( $v = v_{\max}$ ).

Определим время разгона как:

$$\underline{t}_p = \frac{v}{A}, \quad (4.6)$$

где  $A$  - максимально допустимое значения ускорения.  
Определим путь разгона как:

$$\underline{q}_p = \frac{v^2}{2A}. \quad (4.7)$$

Тогда длина участка равномерного движения равна:

$$\underline{q}_{pв} = |\Delta q| - 2q_p. \quad (4.8)$$

Определим время движения с постоянной скоростью:

$$\underline{t}_{pв} = \frac{q_{pв}}{v}. \quad (4.9)$$

Величины значений  $\underline{t}_m$ ,  $\underline{q}_m$  для участка торможения совпадают со значениями  $\underline{t}_p$ ,  $\underline{q}_p$ .

Расчет текущих значений пути на участке разгона ( $0 < t < t_p$ ) может быть выполнен по формуле:

$$q_i = q_i^H + \frac{1}{2} A t^2 \cdot K_{ni}. \quad (4.10)$$

На участке равномерного движения ( $0 < t < t_{pв}$ ):

$$q_i = q_p + v \cdot t \cdot K_{ni}. \quad (4.11)$$

На участке торможения ( $0 < t < t_m$ ):

$$q_i = q_k - \frac{1}{2} A K_{ni} (t_k - t_i). \quad (4.12)$$

## 2. Содержание работы

Работа предполагает выполнение следующего задания: построить для двухзвенного манипулятора графики положения, скорости и ускорения в зависимости от времени.

## 3. Задание

На рисунке 4.2 показан манипулятор с двумя степенями подвижности. Зная начальные ( $q_1^H, q_2^H$ ) и конечные ( $q_1^K, q_2^K$ ) положения звеньев манипулятора, максимальные скорости  $v$  и ускорения  $A$  движения звеньев, необходимо спланировать движение манипулятора с линейной интерполяцией траектории в обобщенных координатах. Результаты для каждого из звеньев представить в виде графиков положения, скорости и ускорения в зависимости от времени.

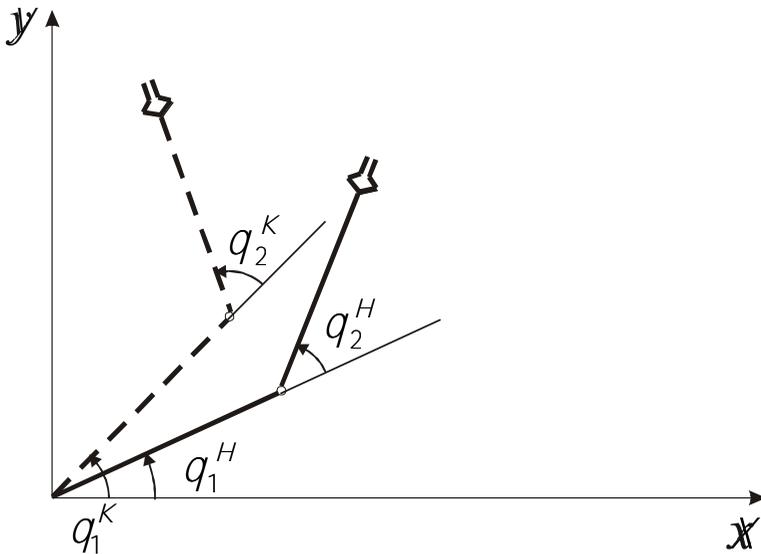


Рисунок 4.2 – Манипулятор с двумя степенями подвижности

#### 4. Методика выполнения работы

1. По заданным значениям начальных  $q_i^H$  и конечных  $q_i^K$  положений звеньев манипулятора, скорости и ускорению определить (вручную):

- диапазон перемещений звеньев манипулятора (см. формулу 4.1);
- величину пути «ведущего» звена (4.2);
- коэффициенты пропорциональности для «ведущего» (4.4) и «ведомого» звеньев.
- параметры участков разгона ( $t_p, q_p$ ), равномерного движения ( $t_{pe}, q_{pe}$ ) и торможения ( $t_m, q_m$ ) (см. формулы 4.6 – 4.9).

2. Составить программу расчета текущих значений пути на участке разгона (4.10), равномерного движения (4.11), торможения (4.12). Программа должна обеспечивать построение графиков положения, скорости и ускорения в зависимости от времени (строится по текущим значениям пути  $q_i$ , его первой и второй производных).

#### 5. Исходные данные

№ варианта	$q_1^H$	$q_2^H$	$q_1^K$	$q_2^K$	$v$	$A$
1	10	20	30	50	50	600
2	50	-30	20	-40	80	700
3	120	-100	80	-50	70	800
4	-10	80	-50	30	60	500
5	30	-10	60	-30	40	300

№ варианта	$q_1^H$	$q_2^H$	$q_1^K$	$q_2^K$	$v$	$A$
6	100	130	-60	-10	70	700

## 6. *Содержание отчета*

Отчет должен содержать следующие материалы:

1. Титульный лист.
2. Задание.
3. Расчеты и результаты вычислений, сделанные вручную на этапе подготовки.
4. Листинг программы.
5. Распечатку исходных данных и результатов вычисления в форме графиков положений, скорости и ускорения «ведущего» и «ведомого» звеньев.

## 7. *Пример реализации*

Элемент программы реализующей расчет текущих значений пути, скорости и ускорения на участке разгона, равномерного движения и торможения для двухзвенного манипулятора (программа реализована на языке программирования Pascal):

```

if (t>0)AND(t<tp) then
begin
qq:=qn+1/2*a*t*t*k;
vv:=a*t*k;
aa:=a*k;
end
else if (t>tp)AND(t<(tp+tpv)) then
begin
qq:=qp+v*t*k;
vv:=v*k;
aa:=0;

```

```
end
else
begin
qq:=qk-1/2*a*k*sqr(tk-t);
vv:=a*k*(tk-t);
aa:=-a*k;
end;
```

Условные обозначения:

t – текущий момент времени;  
tp – время разгона;  
tpv – время равномерного движения;  
tk – конечное время проведения расчетов;  
k – коэффициент пропорциональности;  
qq – текущее положение;  
vv – текущее значение скорости;  
aa – текущее значение ускорения;  
k – коэффициент пропорциональности;  
qp – начальное положение;  
qr – положение после разгона;  
qk – конечное положение;  
v – максимальное значение скорости;  
a – максимальное значение ускорения.

## 8. Литература

1. К. Фу, Р.Гонсалес, К. Ли. Робототехника. М.: Мир, 1989.
2. М. Шахинпур. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.
3. Справочник по промышленной робототехнике: Кн. 1. М.: Машиностроение, 1990
- 4.А.К.Лапковский. Алгоритмы изображения движущихся тел при параллельном и центральном проецировании. Аксонометрия и компьютеризация изображения. Минск. Наука и техника.,1993.
- 5.Л.Аммерал. Принципы программирования в машинной графике. Москва. Сол Систем.,1992.

## ***ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5***

### ***Планирование прямолинейных траекторий в пространстве декартовых координат***

**Цель работы:** изучить планирование прямолинейных траекторий в пространстве декартовых координат.

#### ***1. Основные положений***

Начальная, конечная и промежуточные опорные точки траектории могут быть заданы как в обобщенных, так в декартовых координатах. Поэтому планирование траектории может также осуществляться также, как в обобщенных, так и в декартовых координатах (см. лаб. раб. №4 - Моделирование движение робота в пространстве обобщенных координат).

Известно, что отработка траектории движения манипулятора выполняется в пространстве обобщенных координат. Поэтому если планирование осуществляется в декартовых координатах, то для ее отработки необходимо решать обратную кинематическую задачу о положении манипулятора.

Преимущество планирования траектории в пространстве декартовых координат наглядность и предсказуемость траектории движения конечного звена (схвата) манипулятора.

Преимуществами планирования траектории в пространстве обобщенных координат является:

- Планируется непосредственно траектория, которую должны отработать приводы звеньев манипулятора;
- Планирование траектории требует небольшого количества вычислений, а, следовательно, и машинного времени;
- Траекторию легче планировать, так как в этом случае отсутствует понятие ориентации.

В данной лабораторной работе рассматривается способ линейной интерполяции в пространстве декартовых координат.

## 2. Алгоритм линейной интерполяции траектории в декартовых координатах

Для перемещения вдоль прямой линии в декартовых координатах с заданной скоростью и изменением ориентации инструмента манипулятора используется линейная интерполяция.

Рассмотрим алгоритм линейной интерполяции:

Пусть в декартовой системе координат  $(x_0, y_0, z_0)$ , связанной с основанием манипулятора заданы две точки (рисунок 5.1). Положение и ориентация систем координат первой и второй точки в базовой системе координат описывается преобразованиями  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Тогда положение и ориентация системы координат начальной точки описывается преобразованием  $P_3$ :

$$P_3 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & x_3 \\ n_y & o_y & a_y & y_3 \\ n_z & o_z & a_z & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1^{-1} \cdot P_2. \quad (5.1)$$

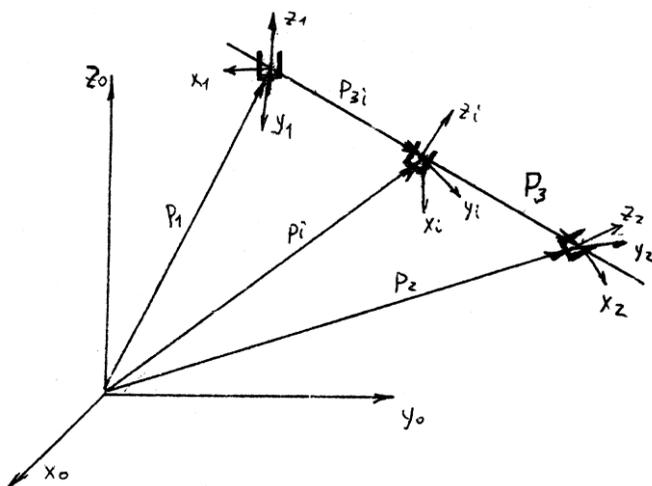


Рисунок 5.1 - Манипулятор с заданными двумя точками на основании

Необходимо найти такие законы изменения времени элементов преобразования  $P_{3j}$ , чтобы:

1. Рабочая точка инструмента (РТИ) манипулятора двигалась вдоль прямой, соединяющей начало системы координат начальной и конечной точек, с заданной скоростью (формирование элементов столбца положения  $X_{3j}, Y_{3j}, Z_{3j}$  преобразования  $P_{3j}$ ).

2. Изменение ориентаций РТИ выполнялось бы с управляемой угловой скоростью, например, путем ее вращения вокруг фиксированной в пространстве оси (формирование матрицы вращения преобразования  $P_{i3}$ ).

Если законы формирования преобразования  $P_{i3}$  найдены, то положение и ориентация РТИ манипулятора при ее движении по прямой в базовой декартовой системе координат определим как:

$$P_i = P_1 \cdot P_{3j}. \quad (5.2)$$

Формирование законов изменения элементов столбца положения преобразования  $P_{3j}$  не вызывает затруднений. На этапе подготовки к интерполяции по заданному значению скорости и допустимому значению ускорения (торможения) найдем времена движения на участках разгона, торможения и равномерного движения.

Время и путь разгона:

$$t_p = \frac{v}{A}, \quad (5.3)$$

$$S_p = \frac{v^2}{2A}. \quad (5.4)$$

Длина участка равномерного движения равна:

$$S_{pв} = S - 2S_p. \quad (5.5)$$

Время движения с постоянной скоростью:

$$t_{p\phi} = \frac{S_{p\phi}}{v}. \quad (5.6)$$

Время и путь торможения равны времени и пути разгона.  
Суммарное значение пути определим как:

$$S = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}. \quad (5.7)$$

Расчет текущих значений пути  $S_i$  на участке разгона ( $0 < t < t_p$ ) может быть выполнен по формуле:

$$S_i = \frac{1}{2} At^2. \quad (5.7.1)$$

На участке равномерного движения ( $0 < t < t_{p\phi}$ ):

$$S_i = S_p + vt. \quad (5.7.2)$$

На участке торможения ( $0 < t < t_m$ ):

$$S_i = S - \frac{1}{2} A_m t^2. \quad (5.7.3)$$

Значение коэффициентов пропорциональности определим как:

$$K_x = \frac{x_3}{S}, \quad (5.8)$$

$$K_y = \frac{Y_3}{S}, \quad (5.9)$$

$$K_z = \frac{Z_3}{S}. \quad (5.10)$$

Тогда расчет текущих значений элементов столбца положения производится по следующим формулам:

$$x_{3i} = K_x S_i, \quad (5.11)$$

$$y_{3i} = K_y S_i, \quad (5.12)$$

$$z_{3i} = K_z S_i, \quad (5.13)$$

где  $S_i$  - текущее значение пути.

Для определения законов изменения элементов матрицы вращения преобразования  $P_{3i}$  воспользуемся методом двух вращений, т.е. переориентацию инструмента будет выполнять при помощи вращений вокруг двух осей. Первое вращение на угол  $\theta$  необходимо, чтобы перевести ось  $Z$  системы координат, связанной с РТИ манипулятора из начального положения в конечное. Оно выполняется вокруг фиксированной оси  $Y'_1$ . Ось  $Y'_1$  получена путем поворота оси  $Y_1$  вокруг оси  $Z_1$  на угол  $\psi$ . Второе вращение на угол  $\varphi$  необходимо, чтобы придать инструменту манипулятора требуемую ориентацию. Оно выполняется вокруг оси  $Z_2$ .

Первому вращению соответствует преобразование:

$$R_{\theta_j} = \begin{bmatrix} S^2\psi \cdot \mathcal{W}_j + \mathcal{C}\theta_j & -S\psi \cdot C\psi \cdot \mathcal{W}_j & C\psi \cdot \mathcal{S}\theta_j & 0 \\ -S\psi \cdot C\psi \cdot \mathcal{W}_j & S^2\psi \cdot \mathcal{W}_j + \mathcal{C}\theta_j & S\psi \cdot \mathcal{S}\theta_j & 0 \\ -C\psi \cdot \mathcal{S}\theta_j & -S\psi \cdot \mathcal{S}\theta_j & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

где

$$\mathcal{C}\theta_j = \cos \theta_j,$$

$$\mathcal{S}\theta_j = \sin \theta_j,$$

$$\mathcal{W}_j = 1 - \cos \theta_j.$$

Этому вращению соответствует преобразование:

$$R_{\varphi_i} = \begin{bmatrix} C\varphi_i & -S\varphi_i & 0 & 0 \\ S\varphi_i & C\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Тогда преобразование  $P_{3i}$  можно представить в виде:

$$P_{3i} = T_i \cdot R_{\theta_i} \cdot R_{\varphi_i}, \quad (5.16)$$

где

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{3i} \\ 0 & 1 & 0 & y_{3i} \\ 0 & 0 & 1 & z_{3i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы левого столбца преобразования  $P_{3i}$  - результат векторного произведения двух последующих столбцов:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ o_x & o_y & o_z \end{vmatrix} = \left( a_y a_z - a_y o_z \right) \vec{i} + \left( o_z a_z - o_x a_z \right) \vec{j} + \left( o_x a_y - o_y a_x \right) \vec{k} \quad (5.17)$$

Приравнивая соответствующие элементы матриц в уравнениях (5.1) и (5.16) имеем:

$$\psi = \text{arctg} \frac{a_y}{a_x}, \quad -\pi \leq \psi < \pi \quad (5.18)$$

Если оба элемента  $a_y$  и  $a_x$  равны нулю, тогда угол не определяется. Это вырожденных случай. В такой ситуации следует при- дать  $\psi$  нулевое значение  $\psi = 0$ .

$$\theta = \text{arctg} \frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{a_z}, \quad 0 \leq \theta < \pi \quad (5.19)$$

$$\varphi = \text{arcth} \frac{S\varphi}{C\varphi}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} S\varphi &= \left( S\psi \cdot C\psi \cdot V\theta \right) n_x + \left( C^2\psi \cdot V\theta + C\theta \right) n_y - S\psi \cdot S\theta \cdot n_z \\ C\varphi &= \left( S\psi \cdot C\psi \cdot V\theta \right) o_x + \left( C^2\psi \cdot V\theta + C\theta \right) o_y - S\psi \cdot S\theta \cdot o_z \end{aligned} \quad (5.21)$$

Коэффициенты пропорциональности  $K_\theta$  и  $K_\varphi$  находим как:

$$K_\theta = \frac{\theta}{S}, \quad (5.22)$$

$$K_{\varphi} = \frac{\varphi}{S}. \quad (5.23)$$

Расчет текущих значений углов  $\theta_j$  и  $\varphi_j$  производим по следующим формулам:

$$\theta_j = K_{\theta} \cdot S_j, \quad (5.24)$$

$$\varphi_j = K_{\varphi} \cdot S_j. \quad (5.25)$$

### ***3. Содержание работы***

Работа предполагает выполнение следующих заданий:

1. Построить прямолинейную траекторию в декартовых координатах  $X$  и  $Y$ .
2. Построить графики положения, скорости и ускорения в зависимости от времени.

### ***4. Задание***

В декартовой системе координат  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , связанной с основанием манипулятора, заданы две точки (рисунок 4.1). Положение и ориентация систем координат начальной и конечной точки в базовой системе координат описывается преобразованиями  $P_1$  и  $P_2$ .

Необходимо спланировать прямолинейную траекторию в базовой системе координат при движении манипулятора из начальной точки в конечную с заданной скоростью  $v$  и ускорением  $A$ .

## 5. Методика выполнения

1. По заданным значениям матриц однородных преобразований  $P_1$  и  $P_2$ , скорости и ускорения определить (вручную):

- преобразование  $P_3$  (1), где

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^T & -R_1^T p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- значение суммарного пути  $S$  (7), углы  $\varphi, \theta, \psi$  (18-20).
- коэффициенты пропорциональности  $K_x, K_y, K_z$  (8-10) и  $K_\theta, K_\varphi$  (22-23).
- параметры участков разгона  $(t_p, S_p)$ , равномерного движения  $(t_{\rho\theta}, S_{\rho\theta})$  и торможения  $(t_m, S_m)$  (3-6).

2. (на компьютере)

- пути  $S_j$  (7.1-7.3).
- элементов столбца положения  $x_{3j}, y_{3j}, z_{3j}$  (11-13).
- углов  $\theta_j, \varphi_j$  (24-25).
- элементов преобразования  $P_{3j}$  (16-17).
- элементов преобразования  $P_j$  (2).

Программа должна обеспечивать построение:

1. траектории движения РТИ манипулятора в декартовой системе координат (строится по текущим значениям столбца положений преобразования  $P_j$ ).

2. графиков положения, скорости, ускорения в зависимости от времени (строится по текущим значениям пути  $S_j$ , его первой и второй производных).

**6. Исходные данные**

№ варианта	$P_1$	$P_2$	$\nu$ $\nu$	$A$
1	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.86 & 0 & 0.4 \\ -0.86 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.93 & -0.37 & 0 & 6 \\ 0.37 & -0.93 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	60	500 0
2	$\begin{bmatrix} 0.98 & 0.21 & 0 & 3 \\ -0.21 & 0.98 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.24 & -0.97 & 0 & 5 \\ 0.97 & -0.24 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	70	650 0
3	$\begin{bmatrix} 0.86 & 0.5 & 0 & 2 \\ -0.5 & 0.86 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.78 & -0.61 & 0 & 4 \\ 0.91 & -0.78 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	80	800 0
4	$\begin{bmatrix} 0.21 & 0.98 & 0 & 1 \\ -0.98 & 0.21 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9 & -0.45 & 0 & 3 \\ 0.45 & -0.9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	75	700 0
5	$\begin{bmatrix} 0.72 & 0.7 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0.72 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.97 & -0.24 & 0 & 2 \\ 0.24 & -0.97 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	85	950 0
6	$\begin{bmatrix} -0.24 & -0.97 & 0 & 4 \\ 0.97 & -0.24 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9 & -0.45 & 0 & 2 \\ 0.45 & -0.9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	80	900 0

## ***7. Содержание отчета***

Отчет должен содержать следующие материалы:

1. Титульный лист
2. Задание
3. Расчеты и результаты вычислений, сделанные в ручную на этапе подготовке.
4. Листинг программы
5. Распечатку исходных данных и результатов вычислений в виде траектории движения РТИ манипулятора и графиков положения, скорости и ускорения в зависимости от времени.

## ***8. Пример реализации***

Элемент программы реализующей расчет текущих значений положения, скорости и ускорения на участке разгона, равномерного движения и торможения (программа реализована на языке программирования Pascal):

```
if (t>0)AND(t<tp) then
begin
ss:=1/2*a*t*t;
vv:=a*t;
aa:=a;
end
else if (t>tp)AND(t<(tp+tpv)) then
begin
ss:=sp+v*t;
vv:=v;
aa:=0;
end
else
begin
ss:=s-1/2*a*sqr(tk-t);
vv:=a*(tk-t);
aa:=-a;
end;
```

Условные обозначения:

$t$  – текущий момент времени;

$tr$  – время разгона (определяется по формуле (4.3));

$trv$  – время равномерного движения (определяется по формуле (4.6));

$tk$  – конечное время проведения расчетов;

$ss$  – текущее положение;

$vv$  – текущее значение скорости;

$aa$  – текущее значение ускорения;

$sp$  – положение после разгона ((определяется по формуле (4.4));

$s$  – конечное положение (суммарное значение пути, определяется по формуле (4.7));

$v$  – значение скорости (дано по условию);

$a$  – значение ускорения (дано по условию).

Для вычисления положения РТИ манипулятора в текущий момент в декартовой системе координат необходимо в предыдущей программе добавить расчет элементов столбца положения (формулы (4.11) – (4.13)), предварительно рассчитав коэффициенты пропорциональности (формулы (4.8) – (4.10)).

## 9. Литература

1. К. Фу, Р.Гонсалес, К. Ли. Робототехника. М.: Мир, 1989.

2. М. Шахинпур. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.

3. Справочник по промышленной робототехнике: Кн. 1. М.: Машиностроение, 1990

4.А.К.Лапковский. Алгоритмы изображения движущихся тел при параллельном и центральном проецировании. Аксонометрия и компьютеризация изображения. Минск. Наука и техника.,1993.

5.Л.Аммерал. Принципы программирования в машинной графике. Москва. Сол Систем.,1992.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

### *Моделирование движения робота по дуге окружности в пространстве декартовых координат*

**Цель работы:** изучить моделирование движения робота по дуге окружности в пространстве декартовых координат.

#### **1. Основные положения**

В тех случаях, когда необходимо, чтобы рабочая точка инструмента (РТИ) манипулятора двигалась с сохранением ориентации по дуге окружности, используется круговая интерполяция в декартовых координатах.

Рассмотрим алгоритм круговой интерполяции:

Пусть в декартовых координатах  $(X_0 Y_0 Z_0)$ , связанных с основанием манипулятора, заданы три точки. Положение и ориентация систем координат первой, второй и третьей точки в базовой системе координат описываются преобразованиями  $T_1, T_2, T_3$  соответственно (рисунок 6.1).

Необходимо, чтобы РТИ манипулятора двигался с сохранением ориентации по дуге окружности, проходящей через три заданные точки. Ориентация РТИ манипулятора относительно дуги задается в исходной точке траектории.

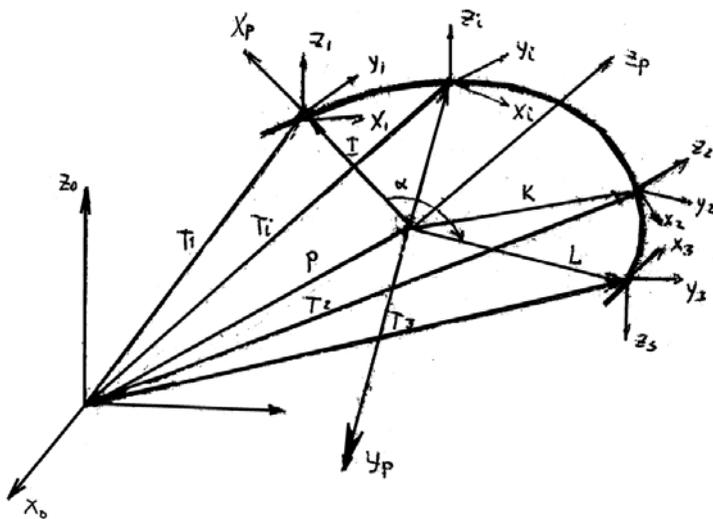


Рисунок 6.1 - Положение и ориентация систем координат первой, второй и третьей точки в базовой системе координат

Для выполнения круговой интерполяции на этапе подготовки необходимо определить:

- определение  $P$ , описывающее положение с ориентацией системы координат, начало которой совпадает с центром окружности, лежащей в плоскости  $xOy$  указанной системы и проходящей через три заданные точки в пространстве, а ось  $X$  проходит через первую заданную точку;
- преобразование  $I$ , описывающее положение и ориентацию системы координат первой точки в системе координат  $P$ ;
- угол  $\alpha$ , на который необходимо повернуть систему координат первой точки до совмещения с началом системы координат третьей точки.

Тогда положение и ориентацию РТИ манипулятора в любой точке дуги можно описать выражением:

$$T_i = P \cdot J_i I, \quad (6.1)$$

где преобразование  $J_i$  есть функция  $\alpha$ .  
 Преобразование будем искать в виде (рисунок 6.2):

$$P = P_1 \cdot P_2. \quad (6.2)$$

Преобразование описывает положение и ориентацию системы координат  $X_{p1}Y_{p1}Z_{p1}$  в системе координат  $X_0Y_0Z_0$ .

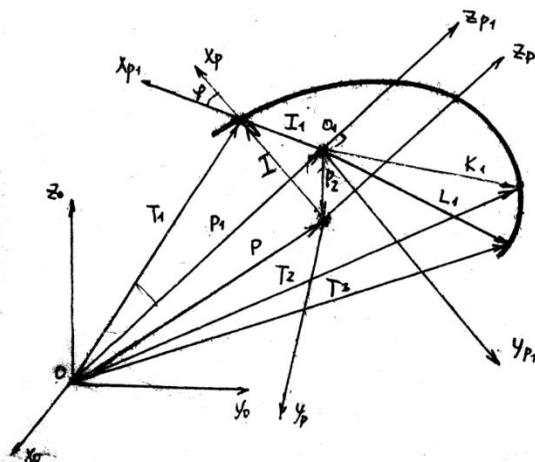


Рисунок 5.2 - Положение и ориентацию системы координат  $X_{p1}Y_{p1}Z_{p1}$  в системе координат  $X_0Y_0Z_0$

Начало этой системы  $O_1$  находится в точке пересечения нормального вектора плоскости окружности, выходящего из начала  $O$  системы  $X_0Y_0Z_0$  с этой плоскостью. Плоскость  $X_{p1}O_1Y_{p1}$  лежит в плоскости окружности, ось  $O_1X_{p1}$  проходит через начальную точку дуги  $T_1$ , а направление оси совпадает с направлением нормального вектора плоскости окружности. Преобразование  $P_2$  переводит систему  $X_{p1}Y_{p1}Z_{p1}$  в систему  $X_pY_pZ_p$ .

Уравнение, описывающее плоскость в декартовых координатах, имеет вид:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0. \quad (6.3)$$

Для определения коэффициентов  $A, B, C, D$  воспользуемся следующим математическим заданием уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки  $T_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $T_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $T_3(x_3, y_3, z_3)$ , не лежащие одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Тогда коэффициенты  $A, B, C, D$  можно определить следующим образом:

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Координаты начала системы координат  $X_{p1} Y_{p1} Z_{p1}$  в системе  $X_0 Y_0 Z_0$  определим по формулам:

$$X_{\rho 1} = -\frac{A \cdot D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$Y_{\rho 1} = -\frac{B \cdot D}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad (6.6)$$

$$Z_{\rho 1} = -\frac{C \cdot D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Направляющие косинусы единичного вектора оси  $O_1 Z_{\rho 1}$ , лежащего на нормали к плоскости окружности, определим как:

$$a_{X_{\rho 1}} = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$a_{Y_{\rho 1}} = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (6.7)$$

$$a_{Z_{\rho 1}} = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Где знак у корня выбирается противоположным знаком  $D$ .  
Направляющие косинусы единичного вектора оси  $O_1 X_{\rho 1}$  найдем по формулам:

$$n_{X_{\rho 1}} = \frac{X_1 - X_{\rho 1}}{m},$$

$$n_{Y_{\rho 1}} = \frac{Y_1 - Y_{\rho 1}}{m},$$

$$n_{Z_{\rho 1}} = \frac{Z_1 - Z_{\rho 1}}{m},$$

(6.8)

$$\text{где } m = \sqrt{(X_1 - X_{\rho 1})^2 + (Y_1 - Y_{\rho 1})^2 + (Z_1 - Z_{\rho 1})^2}.$$

Направляющие косинусы единичного вектора оси  $O_1 Y_{\rho 1}$  определим как результат векторного произведения единичных векторов двух других осей:

$$o_{X_{\rho 1}} = a_{Y_{\rho 1}} \cdot n_{Z_{\rho 1}} - a_{Z_{\rho 1}} \cdot n_{Y_{\rho 1}},$$

$$o_{Y_{\rho 1}} = a_{Z_{\rho 1}} \cdot n_{X_{\rho 1}} - a_{X_{\rho 1}} \cdot n_{Z_{\rho 1}}, \quad (6.9)$$

$$o_{Z_{\rho 1}} = a_{X_{\rho 1}} \cdot n_{Y_{\rho 1}} - a_{Y_{\rho 1}} \cdot n_{X_{\rho 1}}.$$

Таким образом получаем:

$$P_1 = \begin{bmatrix} n_{X_{\rho 1}} & o_{X_{\rho 1}} & a_{X_{\rho 1}} & X_{\rho 1} \\ n_{Y_{\rho 1}} & o_{Y_{\rho 1}} & a_{Y_{\rho 1}} & Y_{\rho 1} \\ n_{Z_{\rho 1}} & o_{Z_{\rho 1}} & a_{Z_{\rho 1}} & Z_{\rho 1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система координат  $X_{\rho} Y_{\rho} Z_{\rho}$  может быть получена путем параллельного переноса системы  $X_{\rho_1} Y_{\rho_1} Z_{\rho_1}$  в точку, являющуюся центром окружности и имеющую координаты  $X_{\rho_2} Y_{\rho_2}$  в системе  $X_{\rho_1} Y_{\rho_1} Z_{\rho_1}$ , и поворота этой системы на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Z_{\rho_1}$ . По этому преобразование  $P_2$  будем искать в виде:

$$P_2 = \begin{bmatrix} n_{X_{\rho_2}} & o_{X_{\rho_2}} & 0 & X_{\rho_2} \\ n_{Y_{\rho_2}} & o_{Y_{\rho_2}} & 0 & Y_{\rho_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Найдем координаты трех точек, заданных преобразованиями  $T_1, T_2, T_3$  в системе координат основания манипулятора, в системе координат  $X_{\rho_1} Y_{\rho_1} Z_{\rho_1}$ . Для этого определим преобразования, описывающие системы координат этих точек в системе координат  $X_{\rho_1} Y_{\rho_1} Z_{\rho_1}$ .

$$I_1 = P_1^{-1} \cdot T_1,$$

$$K_1 = P_1^{-1} \cdot T_2, \quad (6.11)$$

$$L_1 = P_1^{-1} \cdot T_3.$$

Из последней системы уравнений получим

$$x_{l_1} = n'_x \cdot x_1 + d'_x \cdot y_1 + a'_x \cdot z_1 + x',$$

$$y_{l_1} = 0,$$

$$x_{K_1} = n'_x \cdot x_2 + d'_x \cdot y_2 + a'_x \cdot z_2 + x',$$

(6.12)

$$y_{K_1} = n'_y \cdot x_2 + d'_y \cdot y_2 + a'_y \cdot z_2 + y',$$

$$x_{L_1} = n'_x \cdot x_3 + d'_x \cdot y_3 + a'_x \cdot z_3 + x',$$

$$y_{L_1} = n'_y \cdot x_3 + d'_y \cdot y_3 + a'_y \cdot z_3 + y',$$

где элементы  $n'_x, d'_x, a'_x, x'$  и т.д. являются элементами матрицы  $P_1^{-1}$ :

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^T & -R_1^T \cdot \rho_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n'_x & d'_x & a'_x & x' \\ n'_y & d'_y & a'_y & y' \\ n'_z & d'_z & a'_z & z' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Координаты центра окружности ( $a, b$ ) и ее радиус ( $R$ ) найдем, решив систему уравнений:

$$\left( x_{L_1} - a \right)^2 + \left( y_{L_1} - b \right)^2 = R^2,$$

$$\left( x_{K_1} - a \right)^2 + \left( y_{K_1} - b \right)^2 = R^2, \quad (6.14)$$

$$\left( x_{L_1} - a \right)^2 + \left( y_{L_1} - b \right)^2 = R^2.$$

Получим:

$$a = \frac{x_{L_1}^2 + y_{L_1}^2 - x_{K_1}^2 - 2b \cdot y_{L_1}}{2 \left( x_{L_1} - x_{K_1} \right)}, \quad (6.15)$$

$$b = \frac{\left( x_{K_1} - x_{L_1} \right) y_{L_1}^2 + \left( x_{K_1}^2 + y_{K_1}^2 \right) \left( x_{L_1} - x_{L_1} \right) + \left( x_{L_1} - x_{K_1} \right) \left( y_{L_1}^2 + y_{K_1}^2 \right)}{2 \left[ \left( x_{K_1} - x_{L_1} \right) y_{L_1} + y_{L_1} \left( x_{L_1} - x_{K_1} \right) \right]} + \frac{\left( x_{L_1} - x_{K_1} \right) \left( y_{L_1} + y_{K_1} \right)}{2 \left[ \left( x_{K_1} - x_{L_1} \right) y_{L_1} + y_{L_1} \left( x_{L_1} - x_{K_1} \right) \right]}, \quad (6.16)$$

$$R = \sqrt{\left( x_{L_1} - a \right)^2 + b^2}. \quad (6.17)$$

Преобразование  $l$ , описывающие положение и ориентацию системы координат первой точки окружности в системе координат  $X_p Y_p Z_p$ , определим по формуле

$$l = P^{-1} \cdot T_1. \quad (6.18)$$

Как уже отмечалось, любую систему координат с началом на полученной дуге окружности и ориентацией, равной ориентации в начальной точке дуги, можно описать уравнением (1). Преобразо-

вание  $J_i$  описывает поворот системы координат  $X_\rho Y_\rho Z_\rho$  на угол  $\alpha_i$  вокруг оси  $O_\rho Z_\rho$  и имеет вид:

$$J_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 & 0 \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Определим величину углового перемещения (угол  $\alpha$ ). Найдем координаты  $X_K, Y_K, X_L, Y_L$  промежуточной точки и конечной точки в системе координат  $X_\rho Y_\rho Z_\rho$ . Для этого определим соответствующие преобразования.

$$\begin{aligned} K &= P^{-1} \cdot T_2 \\ L &= P^{-1} \cdot T_3 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Искомые величины найдем по формулам, аналогичным (6.12). Тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Y_L}{X_L}, \quad (6.21)$$

где  $-\pi < \alpha \leq \pi$ .

Преобразования  $P_i$  / и угол  $\alpha$  определяют, соответственно, центр окружности, исходную точку сегмента траектории и угловые перемещения (путь) на сегменте.

## 2. *Содержание работы*

Работа предполагает выполнение следующего задания:

- Построить траекторию движения робота с круговой интерполяцией траектории в декартовых координатах  $X$  и  $Y$ .

### 3. Задание

В декартовой системе координат заданы три точки. Положение и ориентация систем координат первой, второй и третьей точки в базовой системе координат  $X_0 Y_0 Z_0$  описываются преобразованиями  $T_1, T_2, T_3$ . Необходимо спланировать траекторию в базовой системе координат при движении РТИ манипулятора по дуге окружности из начальной точки в конечную с заданной скоростью  $U$  и ускорением  $A$ .

### 4. Методика выполнения работы

1. По известным матрицам преобразования  $T_1, T_2, T_3$  определить (вручную):

- коэффициенты  $A, B, C, D$  (6.5);

- координаты  $X_{\rho 1} Y_{\rho 1} Z_{\rho 1}$  начала системы координат  $X_{\rho 1} Y_{\rho 1} Z_{\rho 1}$  в системе  $X_0 Y_0 Z_0$  (6.6);

- направляющие косинусы  $a_{X_{\rho 1}}, a_{Y_{\rho 1}}, a_{Z_{\rho 1}}$  (6.7),

$n_{X_{\rho 1}}, n_{Y_{\rho 1}}, n_{Z_{\rho 1}}$  (6.8),  $o_{X_{\rho 1}}, o_{Y_{\rho 1}}, o_{Z_{\rho 1}}$  (6.9);

- элементы обратной матрицы  $P_1^{-1}$  (6.13);

- координаты трех точек в системе координат  $X_{\rho 1} Y_{\rho 1} Z_{\rho 1}$  (6.12);

- координаты центра окружности ( $a, b$ ) и ее радиус  $R$  (6.15-6.17);

- преобразование  $P$  (6.2);

- преобразование  $I$  (6.18);

- преобразование  $L$  (6.20);

- угол  $\alpha$  (6.21).

2. Для выполнения движения необходимо рассчитать (вручную) параметры участков разгона  $(t_p, \alpha_p)$ , торможения  $(t_m, \alpha_m)$ , равномерного движения  $(t_{pв}, \alpha_{pв})$  по методике, приведенной в лабораторной работе №2 (2.6-2.9). Вместо пути  $q$  необходимо использовать значение угла  $\alpha$ , вместо  $v$  и  $A$  необходимо использовать

$$\omega = \frac{v}{R} \text{ и } \varepsilon = \frac{A}{R}.$$

3. Составить программу расчета текущих значений на участках разгона, равномерного движения и торможения:

- угла  $\alpha_i$  (6.23-6.25);
- элементов преобразования  $J_i$  (6.19);
- элементов преобразования  $T_i$  (6.1).

4. Программа должна обеспечивать построение траектории движения РТИ манипулятора в декартовой системе координат  $X, Y$  по текущим значениям столбца положения преобразования  $T_i$ .

$$\alpha_{ip} = \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \quad (6.23)$$

$$\alpha_{ipв} = \alpha_p + \omega t^2, \quad (6.24)$$

$$\alpha_{im} = \alpha - \frac{1}{2} \varepsilon (t_m - t)^2, \quad (6.25)$$

5. *Исходные данные*

№ вар	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$v$	$A$
1	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.86 & 0 & 4 \\ -0.86 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	70	$\begin{bmatrix} 650 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0.98 & 0.21 & 0 & 3 \\ -0.21 & 0.98 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2.5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	75	$\begin{bmatrix} 700 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0.86 & 0.5 & 0 & 2 \\ -0.5 & 0.86 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	85	$\begin{bmatrix} 950 \\ 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0.21 & 0.98 & 0 & 1 \\ -0.98 & 0.21 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4.5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 3.9 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	70	$\begin{bmatrix} 700 \\ 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0.72 & 0.7 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0.72 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 5.5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	75	$\begin{bmatrix} 800 \\ 0 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.72 & 0 & -1 \\ -0.72 & 0.7 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6.5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	65	$\begin{bmatrix} 700 \\ 0 \end{bmatrix}$

№ вар	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$\nu$	$A$
7	$\begin{bmatrix} -0.93 & -0.37 & 0 & 6 \\ 0.37 & -0.93 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.5 \\ 7.1 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	60	500 0
8	$\begin{bmatrix} -0.24 & -0.97 & 0 & 5 \\ 0.97 & -0.4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	70	650 0
9	$\begin{bmatrix} -0.78 & -0.61 & 0 & 4 \\ 0.61 & -0.78 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 5.7 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	80	800 0
10	$\begin{bmatrix} -0.9 & -0.45 & 0 & 3 \\ 0.45 & -0.9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$	65	600 0

## *6. Содержание отчета*

Отчет должен содержать следующие материалы:

1. Титульный лист.
2. Задание.
3. Расчеты и результаты вычислений, сделанных вручную на этапе подготовки.
4. Листинг программы.
5. Распечатку исходных данных и результатов вычисления в форме траектории движения робота в декартовой системе координат  $X, Y$

## *10. Пример реализации*

Аналогично примеру, рассмотренному в лабораторной работе №5 - Планирование прямолинейных траекторий в пространстве декартовых координат.

## *11. Литература*

1. К. Фу, Р.Гонсалес, К. Ли. Робототехника. М.: Мир, 1989.
2. М. Шахинпур. Курс робототехники. М.: Мир, 1990.
3. Справочник по промышленной робототехнике: Кн. 1. М.: Машиностроение, 1990
4. А.К.Лапковский. Алгоритмы изображения движущихся тел при параллельном и центральном проецировании. Аксонометрия и компьютеризация изображения. Минск. Наука и техника.,1993.
5. Л.Аммерал. Принципы программирования в машинной графике. Москва. Сол Систем.,1992.

## ***ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7***

### ***Планирование сглаженных траекторий***

**Цель работы:** изучить планирование сглаженных траекторий.

#### ***1. Основные положения***

В предыдущих лабораторных работах, посвященных планированию траекторий, рассматривался только один прямолинейный сегмент в декартовых или обобщенных координатах (задавались только начальная и конечная точки траектории). Однако во многих случаях технологическая задача требует указания дополнительных точек, через которые должен пройти манипулятор при следовании из начального в конечное положение и желаемая траектория задается последовательностью дискретных точек. Эти точки называются промежуточными или узловыми. Соединяя между собой каждые две соседние точки, получаем много сегментную (многоугольную) кривую линию, которая может использоваться для описания всей желаемой траектории.

Типичная задача перемещения объекта манипулирования показана на рисунке 7.1.

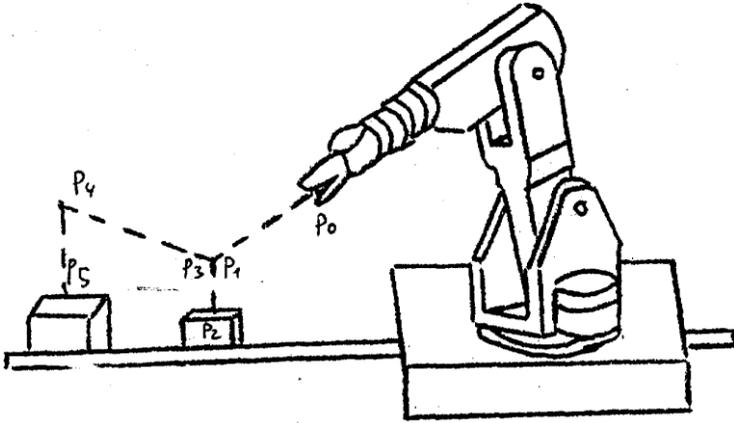


Рисунок 7.1 - Типичная задача перемещения

Манипулятор движется к объекту, захватывает его, поднимает и перемещает его на новое заданное место. Желаемая траектория движения охвата описывается при этом последовательностью дискретных точек  $P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5$  в виде многоугольной линии. Кроме того, желаемая траектория может быть описана и в пространстве обобщенных координат в виде многосегментной кривой.

Для того, чтобы манипулятор двигался по траектории плавно во время перехода от одного сегмента к другому, концы соседних сегментов должны изгибаться вблизи узловых точек. Функции, описывающие участки перехода от одного прямолинейного сегмента к другому, должны состыковываться друг с другом таким образом, чтобы выполнялись определенные граничные условия непрерывности, гарантирующие плавное движение манипулятора.

Полная желаемая траектория, таким образом, может быть описана последовательностью состыкованных (сопряженных) функций и она должна планироваться специальным образом в окрестностях узловых точек с целью плавного сопряжения сегментов.

Существуют различные методы определения траектории на участке сопряжения сегментов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим три из них.

## 2. Линейная интерполяция со сглаживанием отрезков

В настоящее время наиболее широко распространена линейная интерполяция со сглаживанием отрезков. В этом случае движение между узловыми точками  $P_j$  на участках  $[t_{(j-1)3}, t_{j1}]$  происходит по прямой линии (см. рисунок 7.2). Для обеспечения непрерывности скорости ускорения переход с одной прямой на другую в течение интервалов сопряжения  $[t_{j1}, t_{j3}]$  происходит по кривой, описываемой степенной функцией (полиномом). Полином может быть второй, третьей или четвертой степени в зависимости от требований условия непрерывности скорости и ускорения.

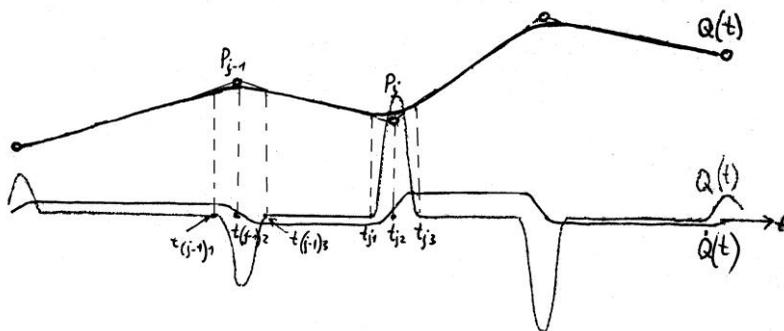


Рисунок 7.2 - Линейная интерполяция со сглаживанием отрезков

Таким образом, график положения будет описываться последовательностью полиномов первой и второй степени, которые стыкуются между собой с соблюдением соответствующих условий непрерывности.

Достоинством этого метода является точное следование вдоль прямых линий при планировании в декартовой системе координат, недостатком является то, что желаемая траектория (с учетом сопряжения) не проходит точно через промежуточные точки (см. рисунок 7.2).

## 3. Метод интерполяции по формуле Лагранжа

Теоретически можно провести непрерывную и гладкую кривую точно через последовательность узловых точек, используя формулу интерполяции Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots \\
 & \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n,
 \end{aligned}$$

где  $x_n$  - значения аргумента в опорных точках траектории.

$y_n$  - значения функции в этих точках.

В этом случае мы получаем высокую плавность траектории, без каких либо скачков скорости и ускорения (см. рисунок 7.3), однако при этом методе степень полинома растет пропорционально числу точек, что увеличивает время расчетов и колебательность.

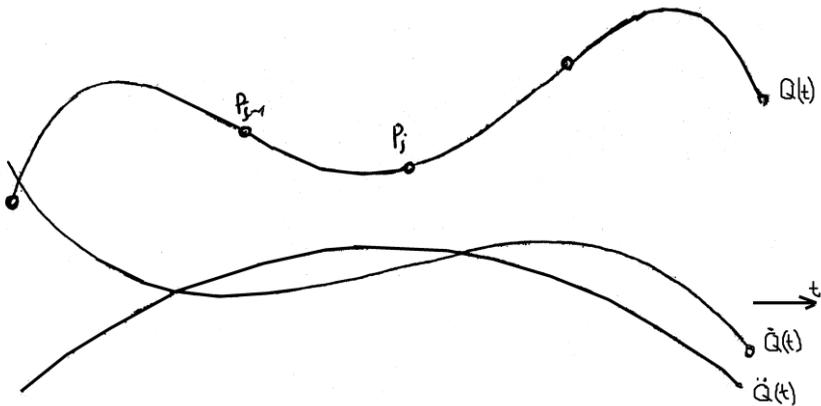


Рисунок 7.3 - Метод интерполяции по формуле Лагранжа

Кроме того, желаемую траекторию между узловыми точками очень трудно предугадать. По вышеперечисленным причинам метод интерполяции по формуле Лагранжа не нашел практического применения.

#### 4. Сплайн-интерполяция

Осуществить интерполяцию траектории можно с помощью кусочно-степенных полиномов - сплайнов. Сплайн-интерполяция позволяет достаточно точно описать произвольную пространственную кривую, без значительного увеличения количества запоминаемых точек.

Сущность сплайн-интерполяции заключается в представлении траектории между узловыми точками с помощью кривой, описываемой степенными полиномами третьей, четвертой или пятой степени вида.

$$q(t) = \sum_{n=0}^k q_n t^n.$$

При этом коэффициенты полиномов выбираются так, чтобы обеспечить непрерывность функций положения, скорости и ускорения при переходе с одного сегмента на другой. Последовательность степенных функций, сцепленных друг с другом, представляют желаемую траекторию, которая обеспечивает плавное движение манипулятора (см. рисунок 7.4).

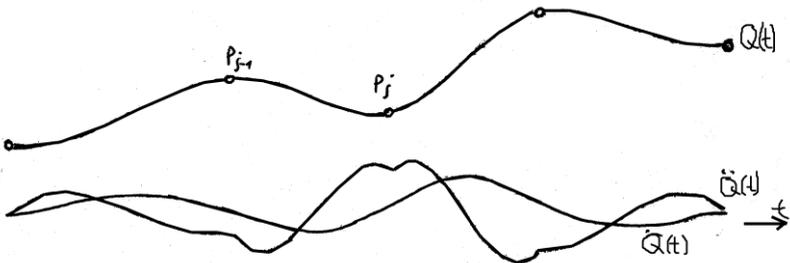


Рисунок 7.4 - Сплайн-интерполяция

Порядок полинома, выбранного для представления желаемой траектории, зависит от спецификации манипуляционной задачи. Когда заданы положения и скорость в начальные и конечные моменты времени, то этим четырем условиям удовлетворяет полином третьей степени с четырьмя неизвестными параметрами. Если в эти моменты времени также задано ускорение, тогда необходимо удовлетворение 6 условий и соответственно необходим полином 5 степени с шестью неизвестными параметрами.

### 5. Содержание работы

Работа предполагает выполнение следующего задания:

Построить графики положения, скорости и ускорения в зависимости от времени при планировании сглаженной траектории.

### 6. Методика выполнения работы

1. При планировании траектории методом линейной интерполяции с сопряжением отрезков рассмотрим рисунке 7.5:

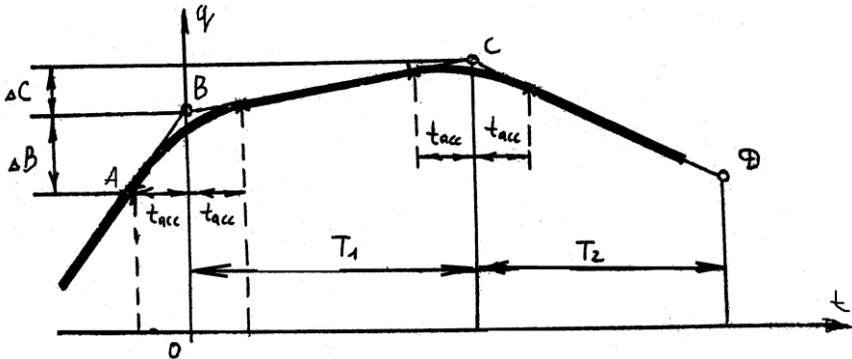


Рисунок 7.5 - Планирование траектории методом линейной интерполяции с сопряжением отрезков

Для интервала  $t_{acc} > t > -t_{acc}$  положение, скорость и ускорение вычисляются по следующим формулам:

$$q = \left[ \left( \Delta C \frac{t_{acc}}{T_1} + \Delta B \right) \left( -h \right)^2 - 2\Delta B \right] h + B + \Delta B,$$

$$\dot{q} = \left[ \left( \Delta C \frac{t_{acc}}{T_1} + \Delta B \right) \left( -h \right) - 2\Delta B \right] \frac{1}{t_{acc}},$$

$$\ddot{q} = \left( \Delta C \frac{t_{acc}}{T_1} + \Delta B \right) \left( -h \right) \frac{3}{t_{acc}^2},$$

где  $\Delta C = C - B,$

$$\Delta B = A - B,$$

$$h = \frac{t + t_{acc}}{2t_{acc}}.$$

При  $T_1 - t_{acc} > t > t_{acc}$  траектория формируется по следующим формулам:

$$q = \Delta C h + B,$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta C}{T_1},$$

$$\ddot{q} = 0,$$

$$h = \frac{t}{T_1}.$$

Таким образом, описанный метод предполагает циклическое использование указанных выше математических выражений для 2-х интервалов. При  $t = T_1 - t_{acc}$  необходимо выполнить следующее переопределение параметров в рассмотренных формулах:

$$T_1 := T_2,$$

$$A := x - \text{текущее положение},$$

$$B := C,$$

$$C := D,$$

$$\Delta C = C - B,$$

$$\Delta B = A - B,$$

$$t = -t_{acc} - \text{начальное время}.$$

2. Для интерполяции траектории полиномами можно воспользоваться интерполяционной формулой Лагранжа, имеющей следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \mathcal{Y}_0 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \mathcal{Y}_1 + \dots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \mathcal{Y}_n. \end{aligned}$$

где  $x_n$  - значение аргумента в опорных точках траектории

$\mathcal{Y}_n$  - значение функции в этих точках.

3. При выполнении сплайн-интерполяции траектории рассмотрим  $i$ -ый участок траектории (см. рисунок 6.6), который описывается следующим полиномом:

$$S = K_3 \tau^3 + K_2 \tau^2 + K_1 \tau + K_0,$$

где

$$t_{i-1} < t < t_i,$$

$$\tau = t - t_{i-1},$$

$$K_0 = S_{i-1},$$

$$K_1 = v_{i-1},$$

$$K_2 = \frac{3S_i - 3S_{i-1} - 2v_{i-1}t_m - v_i t_m}{t_m^2},$$

$$K_3 = \frac{v_i t_m + v_{i-1} t_m - 2S_i + 2S_{i-1}}{t_m^3},$$

$$t_m = t_i - t_{i-1}.$$

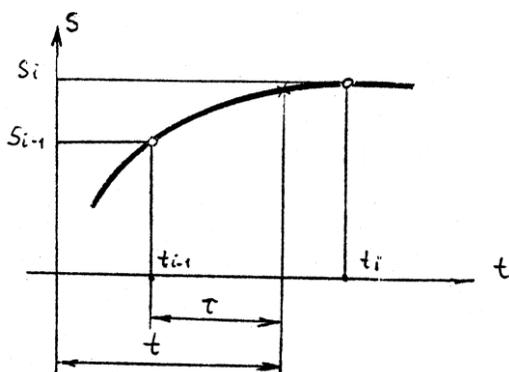


Рисунок 7.6 -  $i$ -ый участок траектории

## 7. Варианты заданий к лабораторной работе

### Вариант 1

Осуществить планирование траектории методом линейной интерполяции с сопряжением отрезков.

Таблица 7.1 - Исходные данные

№ вар.	Время					
	$t_{acc}$	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
1	0,1	0	1,0	1,4	2,0	5,1
2	0,15	0	1,0	2,0	3,0	3,7
3	0,2	0	1,0	2,0	4,0	11,0
4	0,25	0	1,0	4,0	12,0	18,0
5	0,3	0	1,0	7,5	8,4	12,0
6	0,35	0	8,0	10,0	12,0	13,0
№ вар.	Положение					
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	
1	100	200	400	600	700	-
2	800	400	250	200	100	
3	100	200	400	100	400	
4	100	400	200	800	200	
5	100	800	400	200	400	
6	800	400	200	100	800	

### Вариант 2

Осуществить планирование траектории с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

Таблица 7.2 - Исходные данные

№ вар.	Время				
	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
1	0	1,0	1,4	2,0	5,1
2	0	1,0	2,0	3,0	3,7
3	0	1,0	2,0	4,0	11,0
4	0	1,0	4,0	12,0	18,0
5	0	1,0	7,5	8,4	12,0
6	0	8,0	10,0	12,0	13,0

№ вар.	Положение				
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$
1	100	200	400	600	700
2	800	400	250	200	100
3	100	200	400	100	400
4	100	400	200	800	200
5	100	800	400	200	400
6	800	400	200	100	800

### Вариант 3

Выполнить сплайн-интерполяцию траектории.

Таблица 7.3 - Исходные данные

№ вар.	Время					Положение				
	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$
1	0	1,0	1,4	2,0	5,1	100	200	400	600	700
2	0	1,0	2,0	3,0	3,7	800	400	250	200	100
3	0	1,0	2,0	4,0	11,0	100	200	400	100	400
4	0	1,0	4,0	12,0	18,0	100	400	200	800	200
5	0	1,0	7,5	8,4	12,0	100	800	400	200	400
6	0	8,0	10,0	12,0	13,0	800	400	200	100	800
№ вар.	Скорость					-				
	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$					
1	0	300	500	200	0					
2	0	-50	-25	-27	0					
3	0	50	-50	4	0					
4	0	20	28	2	0					
5	0	33	-50	2	0					
6	0	-12	-22	150	0					

### 8. Содержание отчета

Отчет должен содержать следующие материалы:

1. Титульный лист
2. Листинг программы, содержащий фамилию, номер группы и вариант задания.

3. Распечатку исходных данных и результатов вычислений в форме графиков положений, скорости и ускорений.

### **9. Примеры реализации программы**

1 Метод интерполяции по формуле Лагранжа( язык программирования C#):

```
double[,] lagQR = new double[3, p1 + p2 + p3];
time[] - массив времени с определенным временем квантования
//Присвоить координаты Y
for (int j = 0; j < 3; j++)
{
    for (int i = 0; i < p1 + p2 + p3; i++)
    {
        lagQR[j, i] = ((time[i] - t[1]) * (time[i] - t[2]) * (time[i] -
t[3])) /
        ((t[0] - t[1]) * (t[0] - t[2]) * (t[0] - t[3])) * arr[j, 0] +
        ((time[i] - t[0]) * (time[i] - t[2]) * (time[i] - t[3])) /
        ((t[1] - t[0]) * (t[1] - t[2]) * (t[1] - t[3])) * arr[j, 1] +
        ((time[i] - t[0]) * (time[i] - t[1]) * (time[i] - t[3])) /
        ((t[2] - t[0]) * (t[2] - t[1]) * (t[2] - t[3])) * arr[j, 2] +
        ((time[i] - t[0]) * (time[i] - t[1]) * (time[i] - t[2])) /
        ((t[3] - t[0]) * (t[3] - t[1]) * (t[3] - t[2])) * arr[j, 3];
    }
}
return lagQR;
```

2 Сплайн-интерполяция (языки программирования C#):

```
public double[,] Spline(double[,] arr)
{
    TimeIntervals();
    double[,] splineQR = new double[3, p1 + p2 + p3];
    double tau, tm, k0, k1, k2, k3;
```

```

double[,] mass = OZK();
int min = 0;
int max = 80;
for (int j = 1; j < 4; j++)
{
    if (j == 1) { min = 0; max = p1; }
    if (j == 2) { min = p1-1; max = p1+p2; }
    if (j == 3) { min = p1+p2-1; max = p1+p2+p3; }

    for (int i = min; i < max; i++)
    {

        for (int k = 0; k < 3; k++)
        {
            tau = time[i] - t[j - 1];
            tm = t[j] - t[j - 1];
            k0 = mass[k, j - 1];
            k1 = speed[j - 1];
            k2 = (3 * mass[k, j] - 3 * mass[k, j - 1] - 2 * speed[j -
1] * tm - speed[j] * tm) / (tm * tm);
            k3 = (2 * mass[k, j - 1] - 2 * mass[k, j] + speed[j] * tm
+ speed[j - 1] * tm) / (tm * tm * tm);

            splineQR[k, i] = k3 * tau * tau * tau + k2 * tau * tau +
k1 * tau + k0;
        } } }

    return splineQR;
}

```

## 10. Литература

1. К. Фу., Р. Гонсалес, К. Ли. Робототехника. М. Мир., 1989
2. М. Шахинпур. Курс робототехники. М. Мир., 1990
3. Справочник по промышленной робототехнике: Кн. 1–М.: Машиностроение, 1990.

## *Содержание*

Лабораторная работа № 1 Матрица однородного преобразования.....	3
Лабораторная работа № 2 Методы описания ориентации объекта в пространстве.....	15
Лабораторная работа № 3 Виды изображения объёмных тел в координатах экрана монитора, алгоритмы изображения движущихся тел.....	21
Лабораторная работа № 4 Моделирование движение робота в пространстве обобщенных координат.....	30
Лабораторная работа № 5 Планирование прямолинейных траекторий в пространстве декартовых координат.....	39
Лабораторная работа № 6 Моделирование движения робота по дуге окружности в пространстве декартовых координат.....	51
Лабораторная работа № 7 Планирование сглаженных траекторий.....	66

Учебное издание

**ОКОЛОВ** Андрей Ромуальдович  
**НОВИЧИХИНА** Елена Романовна  
**СВИДЕРСКИЙ** Геннадий Сигизмундович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ РОБОТОВ**

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности  
1-53 01 06 «Промышленные роботы  
и робототехнические комплексы»

В 2 частях

Часть 1

**ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ**

Подписано в печать 16.10.2012. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 3,64. Тираж 50. Заказ 1308.

---

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный  
технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.  
Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.