Белорусский государственный университет, Минск

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

И.М. Мартыненко, В.А. Казакевич

The asymptotic method for cubic anisotropy bodies are developed in the present paper.

Теория упругости кубически анизотропных тел начала систематически развиваться в последнее десятилетие, несмотря на то, что теоретические основы этой теории были заложены еще в курсе “Механике сплошной среды“ Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица в 1954г. Появление в законе Гука третьей материальной константы существенно усложняет исследование законов деформации тел с кубической анизотропией. Это можно увидеть, анализируя известную работу И.М.Лифшица и Л.Н.Розенцвейга (ЖЭТФ т.16, 1946). В настоящей статье развит асимптотический метод исследования задач кубически анизотропной теории упругости.

Рассмотрим твердое упругое тело, главные линии анизотропии которого коллинеарны осям координат, а внешние поверхностные усилия вызывают в нем двухмерное НДС, следующее такому закону [1], [2], [3]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (A_{11} - A_{12})\varepsilon_{\alpha\alpha} + A_{12}\theta, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2A_{44}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2, \quad \alpha \neq \beta, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}, \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \theta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}, \tag{2}$$

где u_α – компоненты вектора перемещений, A_{ij} – материальные константы.

Поэтому в плоском случае из (1) получаем:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = A_{11}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - A_{12}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = A_{44}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right). \tag{3}$$

При отсутствии объемных (массовых) сил уравнения равновесия приводятся к такому виду:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) следует

$$\begin{aligned} &A_{44}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + A_{11}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2} + (A_{12} + A_{44})\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \\ &A_{11}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2} + (A_{12} + A_{44})\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

В матричном виде (5) записывается так

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=\begin{Vmatrix} A_{11}\partial_\alpha^2+A_{44}\partial_\beta^2 & (A_{12}+A_{44})\partial_\alpha\partial_\beta \\ (A_{44}+A_{12})\partial_\alpha\partial_\beta & A_{44}\partial_\alpha^2+A_{11}\partial_\beta^2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{Vmatrix}=0, \tag{6}$$

$\partial_\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $\partial_\beta=\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}$, $\alpha\neq\beta$.

Поэтому

$$\det M=A_{11}A_{44}\left(\partial_\alpha^2+\partial_\beta^2\right)^2+\partial_\alpha^2\partial_\beta^2(A_{11}+A_{12})[A_{11}-A_{12}-2A_{44}].$$

Если $A_{11},A_{44}>0,(A_{11}+A_{12})>0,[A_{11}-A_{12}-2A_{44}]>0$, то $\det M>0$ и система (6) принадлежит к эллиптическому типу. В практических приложениях часто выполняется неравенство $A_{44}<A_{11},A_{12}$. Поэтому отношение $A_{44}^2/(A_{11}A_{12})<1$. Следовательно, величину A_{44}/A_{11} можно рассматривать как малый параметр $\varepsilon=A_{44}/A_{11}$. Тогда система (5) преобразуется к следующему виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta^2}+q\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=0 \\ &\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha^2}+q\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=0 \end{aligned},\quad q=(A_{12}+A_{44})/A_{11}. \tag{7}$$

Решение системы (7) будем искать в виде следующих рядов

$$u_\alpha=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m U_m(x_\alpha,x_\beta),\quad u_\beta=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m V_m(x_\alpha,x_\beta). \tag{8}$$

Внося (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\left(\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\beta^2}+q\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)=0, \\ &\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\left(\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\beta^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha^2}+q\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при ε^m, $m=0,1\ldots$, получим для определения U_m, V_m такую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 U_{m-1}}{\partial x_\beta^2} + q\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$
$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\beta^2} + \frac{\partial^2 V_{m-1}}{\partial x_\alpha^2} + q\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \qquad (10)$$

При $m=0$ в (10) появятся неизвестные функции. U_{-1}, V_{-1}, положим эти функции равными нулю (это вытекает из формулы (8)). и система (10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x_\alpha^2} + q\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_\beta^2} + q\frac{\partial^2 U_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0; \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha^2} + q\frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= -\frac{\partial^2 U_{m-1}}{\partial x_\beta^2} \\ \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_\beta^2} + q\frac{\partial^2 U_m}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= -\frac{\partial^2 V_{m-1}}{\partial x_\alpha^2} \end{aligned}, \quad m = 1,2,3... \qquad (12)$$

К уравнениям (11), (12) следует присоединить граничные условия, которые можно получить обычными рассуждениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М. Механика сплошных сред. – М., Наука, 1954. – С. 682–683.

2. Мартыненко, И.М. Волновые движения в кубически анизотропных телах // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: “Технопринт”. – 2004. – Вып. 17. – С. 99–102.

3. Мартыненко, И.М. Асимптотика собственных значений и собственных функций в кубически анизотропных средах // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: “Технопринт”. – 2007. – Вып. 22. – С. 270–278.