

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ В РАСЧЕТАХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Веремейчик А.И., Даркович С.С., Хвисевич В.М.

Calculation of statically indefinable rod systems is considered at a stretching-compression in case of joint action of mechanical, temperature loadings and discrepancy of manufacturing.

Введение. Постановка задачи

При решении определенного класса инженерных задач, а также в учебниках курса «Сопротивление материалов» при исследовании напряженно-деформированного состояния статически неопределимых систем существует традиционный подход составления деформационных уравнений [1]. В случае совместного воздействия на конструктивные элементы механических и температурных нагрузок такие уравнения составляются при действии нагрузок в отдельности. В этой связи целесообразно рассмотреть методику составления деформационных уравнений при совокупном действии нагрузок.

Рассматривается система, образованная стержнями, соединёнными между собой непосредственно или при помощи недеформируемых элементов. Шарнирное соединение в узлах – идеальное.

Как известно [2], расчёт любой стержневой конструкции начинается с определения усилий в отдельных стержнях. И здесь эффективным является метод сечений, приводящий к системе уравнений равновесия, из которых определяются неизвестные усилия.

В случае статически неопределимой стержневой системы на распределение усилий влияет жёсткость каждого стержня.

Для раскрытия статической неопределимости чаще всего используются два метода:

а) для простых случаев – метод перемещений (метод сравнения деформации).

б) для более сложных случаев – широко используемый в строительной механике метод сил.

В курсе сопротивления материалов, как наиболее наглядный и удобный, рассматривается метод сравнения деформаций. Он приводит к типовым решениям. Тем не менее, при одновременном действии нескольких факторов, например, силовой нагрузки, температуры, неточности изготовления, схема перемещений и написание уравнений совместности деформаций (перемещений) вызывает определённые трудности, которые возрастают от сложности конфигурации и количества “лишних” связей. На начальном этапе освоения метода это нередко приводит к ошибкам.

В данной работе предлагается отказаться от составления подробной схемы перемещений, которая неизбежно приводит к трудностям в написании уравнений перемещений. Любая стержневая система – это совокупность стержней и решение её необходимо начинать с рассмотрения одного стержня под влиянием действующих на него факторов.

Методика исследований

Рассмотрим особенности предлагаемого расчета на следующих примерах (рис. 1, 2, 3).

Действие механических усилий

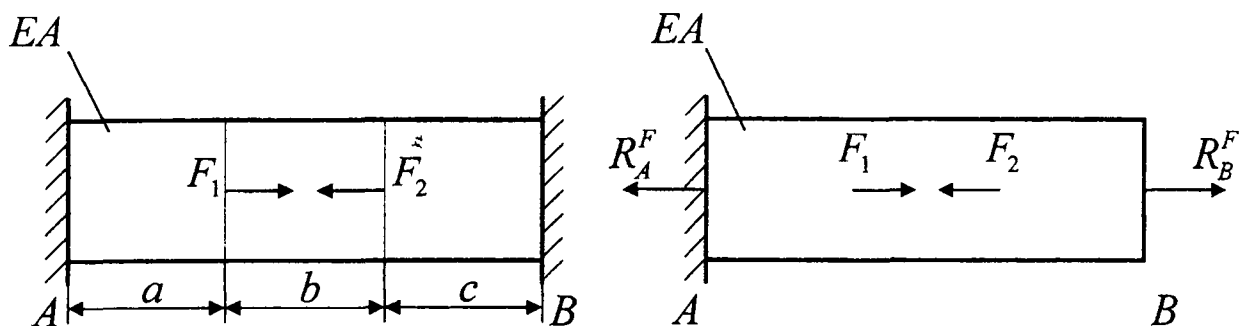


Рис. 1. Расчетная схема при действии механических усилий

Общая длина стержня не может измениться, следовательно,

$$\Delta_B^F = 0; \quad \text{или} \quad \Delta l_F + \Delta l_{R_B}^F = 0. \quad (1)$$

Деформации стержней от действия сил F_1, F_2 и реакции R_B :

$$\Delta l_F = \frac{F_1 a}{EA} - \frac{F_2 (a+b)}{EA}; \quad \Delta l_{R_B} = \frac{R_B (a+b+c)}{EA}; \quad (2)$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга), A – площадь поперечного сечения.

Подставляя (2) в (1), находим: $R_B^F = -\frac{1}{a+b+c} (F_1 \cdot a - F_2 (a+b))$.

Действие температуры

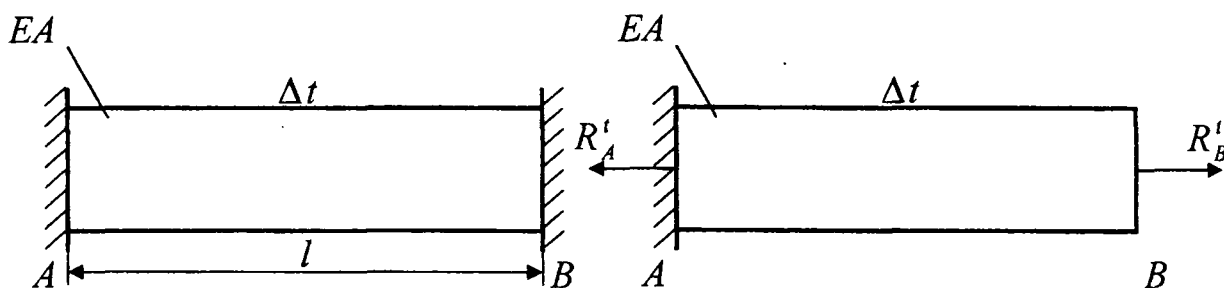


Рис. 2. Расчетная схема при действии температурных нагрузок

Аналогично примеру 1, $\Delta_B' = 0$; или $\Delta l_t + \Delta l_{R_B}' = 0$;

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot l + \frac{R_B' \cdot l}{EA} = 0;$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения, Δt – изменение температуры стержня.

Окончательно: $R_B' = -\alpha \cdot \Delta t \cdot EA$.

Действие монтажных напряжений

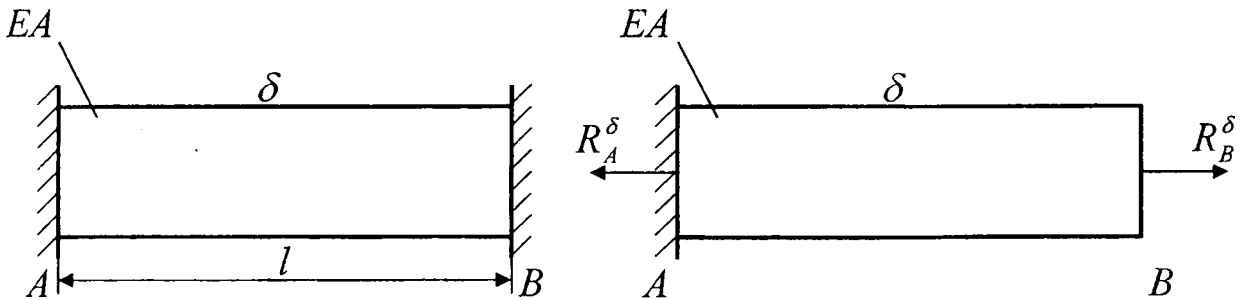


Рис. 3. Расчетная схема при действии монтажных напряжений

Аналогично рассмотренным ранее примерам, $\Delta_B^\delta = 0$; $\delta + \Delta l_R^\delta = 0$;

где δ – неточность изготовления, $\delta + \frac{R_B^\delta \cdot l}{EA} = 0$, откуда $R_B^\delta = -\frac{EA\delta}{l}$.

Примечание: В примерах 1, 2, 3, приняты значения Δt , δ , при которых длина стержня увеличивается. Если некоторый фактор уменьшает длину, его учитывают со знаком “–”.

Таким образом, в общем случае действия различных факторов уравнения перемещений имеет универсальный вид:

$$\Delta l_F + \Delta l_t + \delta + \Delta l_R = 0. \quad (3)$$

На примерах 1, 2, 3 показано, что итоговая величина неизвестной реакции от действия совокупности факторов равна:

$$R_B = R_B^F + R_B^t + R_B^\delta, \quad (4)$$

что предлагает эффективный способ проверки правильности результатов решения задачи. В этом случае необходимо приложить все действующие факторы и провести расчет от суммарного действия на стержни механических нагрузок, неточности изготовления или температуры. Затем приложить каждый фактор в отдельности (что хорошо показывает долю каждого из них), результаты сложить и сравнить с предыдущим расчетом.

В рассмотренном примере общая длина бруса после деформации не изменяется, т.е. если система состоит из нескольких стержней непосредственно соединенных между собой или через жёсткие элементы, то необходимо составить геометрическое соотношение (или соотношения), которое учитывает конфигурацию системы.

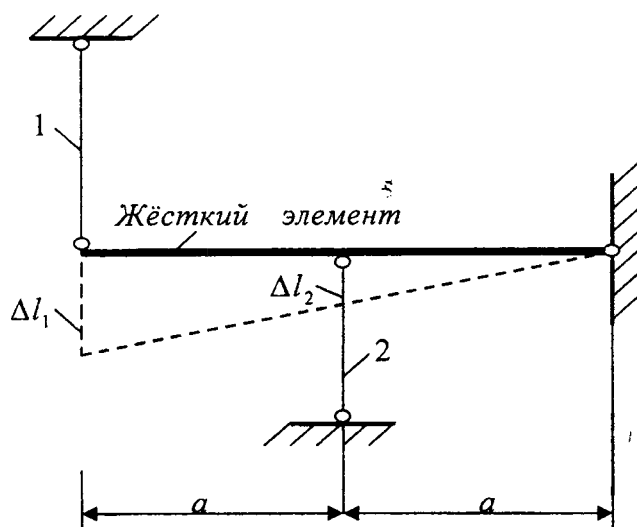


Рис. 4. Схема статически неопределимой стержневой системы

Геометрическое соотношение для приведённой схемы:

$$\Delta l_1 = -2\Delta l_2$$

При этом длина стержней 1 и 2 не остаётся постоянной, а изменяется на величину:

$$\text{I стержень: } \Delta l_F^I + \Delta l_i^I + \delta^I = \Delta l_1,$$

$$\text{II стержень: } \Delta l_F^{II} + \Delta l_i^{II} + \delta^{II} = \Delta l_2.$$

Окончательное решение:

$$\Delta l_F^I + \Delta l_i^I + \delta^I = -2(\Delta l_F^{II} + \Delta l_i^{II} + \delta^{II}). \quad (5)$$

В уравнении (5) Δl_F^I и Δl_F^{II} - удлинения, вызванные внешними силами (нагрузками) и в приведённом примере записываются через усилия в стержнях:

$$\Delta l_F^I = \frac{N_1 l_1}{(EA)_I}, \quad \Delta l_F^{II} = \frac{N_2 l_2}{(EA)_{II}}.$$

Остальные деформации в уравнении (5) определяются по методике, изложенной выше в примерах 2 и 3.

Заключение

Рассмотренная методика расчета апробирована студентами машиностроительного факультета Брестского государственного технического университета при выполнении расчетно-проектировочного задания по курсу «Механика материалов» «Расчет статически неопределимых стержневых систем» [3]. Она позволяет не только максимально упростить решение рассматриваемых в курсе сопротивления материалов статически неопределимых задач, но и формализовать процесс вычисления с последующим машинным расчётом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. – 775 с.
2. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
3. Хвисевич, В.М., Савченко, В.А., Даркович, С.С., Веремейчик, А.И., Мазырка, М.В. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по механике материалов «Осевое растяжение и сжатие прямолинейных стержней» для студентов специальностей 36.01.01, 36.01.03, 37.01.06 – Брест, изд-во БрГТУ, 2004. – 42 с.