

UWZGLĘDNIENIE OPORU POWIETRZA W ANALIZIE RUCHU RZUCANEJ MONETY

Grabski J., Strzałko J., Kapitaniak T.

Numerical analysis of three dimensional coin tossing is presented. Coin model includes air resistance. It is assumed that the air resistance force is proportional to the velocity. Comparison of results with and without the air resistance shows that the air friction may be nonnegligible.

Wprowadzenie

W pracy analizowany jest przestrzenny ruch monety przy uwzględnieniu wpływu oporu powietrza na przebieg ruchu.

Badaniom ruchu rzuconej monety poświęconych jest wiele prac – począwszy od Kellera [3], Vulovica [4], poprzez Mizuguchi i Suwashita [6], aż do ostatnio opublikowanej pracy Diakonisa, Holmes i Montgomery'ego [1].

Celem tej pracy jest numeryczna analiza dynamiki trójwymiarowego modelu monety. Taki sposób rozwiązania zadania umożliwia zbadanie wpływu oporu powietrza na przebieg ruchu rzuconej monety. Przedstawiona praca stanowi kontynuację badań omówionych w [2].

Równania dynamiki ciała swobodnego

Równania dynamiki ciała swobodnego poruszającego się ruchem ogólnym można przedstawić w zapisie macierzowym w formie dwu równań:

– równania opisującego przyspieszenie środka masy ciała o postaci

$$M\mathbf{a}_c = \mathbf{f}, \quad (1)$$

– równania opisującego zmiany przestrzennej orientacji ciała (jego obroty)

$$J_c \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega} J_c \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m}_c. \quad (2)$$

W podanych równaniach \mathbf{M} jest macierzą mas ciała sztywnego ($\mathbf{M} = \text{diag} [m \ m \ m]$), \mathbf{a}_c jest wektorem bezwzględnego przyspieszenia środka masy ciała (punktu C), \mathbf{f} zawiera składowe wektora głównego sił działających na ciało sztywne, \mathbf{J}_c jest macierzą bezwładności ciała względem osi centralnych, $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\Omega}$ oznaczają wektor prędkości kątowej ciała oraz antysymetryczną macierz tych prędkości, a \mathbf{m}_c jest wektorem momentu sił zewnętrznych względem środka masy C .

Wektory \mathbf{a}_c i \mathbf{f} są wyrażone poprzez składowe określone w nieruchomym układzie współrzędnych (xyz) : $\mathbf{a}_c = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T$, $\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$, natomiast wielkości występujące w równaniu (2) – opisującym obroty – wygodnie jest przedstawić w ruchomym układzie współrzędnych, związanym z poruszającym się ciałem $(\xi\eta\zeta)$.

Równania (1) i (2) są ogólnymi równaniami dynamiki i opisują ruch ciała sztywnego o dowolnej geometrii i dowolnym rozłożeniu masy. Układy równań (1) i (2) w przypadku, gdy siły \mathbf{f} nie zależą od składowych wektora prędkości kątowej ciała, a momenty \mathbf{m}_c są niezależne od wektora przyspieszeń środka masy, co ma miejsce wówczas, gdy opory powietrza nie są uwzględniane, są równaniami niesprzężonymi.

W przypadku monety wykonanej z jednorodnego materiału i o kształcie osiowosymetrycznego walca (lub modelowanej jako walec) jej środek masy (punkt C) leży w środku geometrycznym walca (w punkcie B). Osie układu współrzędnych $(B\xi\eta\zeta)$ sztywno związanego z ciałem są osiami głównymi i centralnymi, a \mathbf{J}_c jest macierzą diagonalną.

Przy analizie ruchu monety o kształcie odbiegającym od walca lub wykonanej z niejednorodnego materiału (z defektem lub skazą), punkty B i C nie pokrywają się. W takim przypadku wygodniejsze w obliczeniach mogą być równania dynamiki ciała zapisane w postaci:

$$M(\mathbf{a}_B + \dot{\Omega} \mathbf{r}_C + \Omega \Omega \mathbf{r}_C) = \mathbf{f}, \quad (3)$$

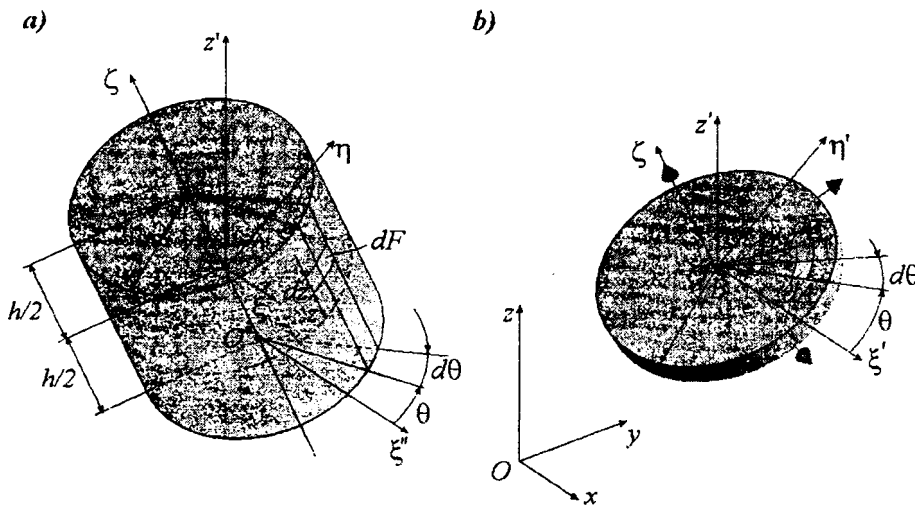
$$\mathbf{J}_B \dot{\omega} + \Omega \mathbf{J}_B \omega + M \mathbf{R}_C \mathbf{a}_B = \mathbf{m}_B, \quad (4)$$

przy czym \mathbf{a}_B jest wektorem bezwzględnego przyspieszenia punktu B , \mathbf{r}_C i \mathbf{R}_C zawierają składowe wektora \mathbf{r}_C , określającego położenie punktu C względem B , \mathbf{J}_B jest macierzą bezwładności ciała w układzie osi $(B\xi\eta\zeta)$, a \mathbf{m}_B jest wektorem momentów sił zewnętrznych względem punktu B . Macierz \mathbf{J}_B dla monety niesymetrycznej w ogólnym przypadku nie będzie macierzą diagonalną, gdyż osie $B\xi$, $B\eta$, $B\zeta$ nie będą osiami głównymi (poza przekątną w \mathbf{J}_B wystąpią różne od zera momenty dewiacyjne).

W przeciwieństwie do równań (1)–(2) równania (3) i (4) są równaniami sprzężonymi nawet wtedy, gdy rozpatrywany jest swobodny rzut ciała i opory powietrza są pomijane.

Uwzględnienie oporu powietrza

Dla określenia prawych stron równań (1)–(2) oraz (3)–(4) należy wyznaczyć składowe sił działających na ciało i momenty tych sił względem osi układu $(B\xi\eta\zeta)$.



Rys. 1. Oznaczenia wielkości wykorzystywanych przy wyznaczaniu sił oporu:
a) na powierzchni walcowej, b) na płaszczyznach

Rozpatrywany jest model monety o kształcie walca o promieniu podstawy r i wysokości h (rys. 1), poruszający się ruchem ogólnym. Na podstawie zależności kinematycznych dla ciała sztywnego określany jest rozkład prędkości na zewnętrznych powierzchniach walca. Przyjęto, że opór powietrza występuje tylko na tej części powierzchni walca, na której wektory prędkości jej punktów mają zwrot zgodny z wektorem normalnym do tej powierzchni i skierowanym za zewnątrz ciała.

Wektor sił oporu powietrza \mathbf{f}_r wyznaczany jest jako suma oporów na obu płaszczyznach podstawy walca (\mathbf{f}_1 i \mathbf{f}_2) oraz oporów na bocznej powierzchni (\mathbf{f}_3)

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \quad (5)$$

przy czym:

$$\mathbf{f}_1 = -\lambda \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}_{A+}|^b \mathbf{v}_{A+} \rho d\theta \right) d\rho, \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_2 = -\lambda \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}_{A-}|^b \mathbf{v}_{A-} \rho d\theta \right) d\rho, \quad (7)$$

gdzie: r oznacza promień monety, \mathbf{v}_{A+} jest wektorem zawierającym składowe prędkości punktu leżącego na płaszczyźnie monety $\zeta = \frac{h}{2}$, a \mathbf{v}_{A-} odnosi się do składowych prędkości punktu leżącego na płaszczyźnie monety $\zeta = -\frac{h}{2}$, $|\mathbf{v}_{A+}|$ i $|\mathbf{v}_{A-}|$ oznaczają wartości wektorów prędkości, λ jest współczynnikiem oporu, a b liczbą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ (dla $b=0$ opór powietrza jest liniowo zależny od prędkości, a dla $b=1$ siły oporu zależą od kwadratu prędkości). Prędkości \mathbf{v}_{A+} i \mathbf{v}_{A-} są wyznaczane z zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{A+} &= \mathbf{v}_B + \Omega_0 \mathbf{r}_{BA+}, & \mathbf{v}_{A-} &= \mathbf{v}_B + \Omega_0 \mathbf{r}_{BA-}, \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_C + \Omega_0 \mathbf{r}_{CB}, & \mathbf{v}_C &= [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{BA+} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & \frac{h}{2} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_{BA-} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & -\frac{h}{2} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie Ω_0 jest macierzą zawierającą składowe prędkości kątowej o kierunkach osi układu xyz .

Siła oporów powietrza powstająca na bocznej powierzchni walca (\mathbf{f}_3) jest wyznaczana jako

$$\mathbf{f}_3 = -\lambda \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}|^b \mathbf{v} r d\theta \right) dz. \quad (9)$$

Symbolem \mathbf{v} została oznaczona prędkość punktu na bocznej powierzchni walca, a ρ_3 jest wektorem określającym położenie tego punktu, przy czym

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \Omega_0 \rho_3, \quad (10)$$

$$\rho_3 = [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad z]^T.$$

Równania dynamiki monety (1), opisujące przyspieszenie środka masy przy spadku z uwzględnieniem oporu powietrza, mają postać:

$$m\ddot{x} = f_x, \quad m\ddot{y} = f_y, \quad m\ddot{z} = f_z - mg. \quad (11)$$

Moment względem punktu B wywołany siłami oporu powietrza został opisany zależnością

$$\mathbf{m}_{rB} = -\lambda \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |\mathbf{v}_A|^b \mathbf{R}_{BA} \mathbf{v}_A \rho d\theta \right) d\rho, \quad (12)$$

przy czym:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \Omega_0 \mathbf{r}_{CA}, \quad \mathbf{v}_C = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_{CA} = \mathbf{r}_{CO} + \mathbf{r}_{OA} = [r_{Ox} + \rho \cos \theta \quad r_{Oy} + \rho \sin \theta \quad 0]^T,$$

gdzie Ω_0 jest macierzą zawierającą składowe prędkości kątowej o kierunkach xyz , \mathbf{R}_{BA} jest antysymetryczną macierzą zawierającą składowe wektora \mathbf{r}_{BA} ($\mathbf{R}_{BA} = \tilde{\mathbf{r}}_{BA}$), natomiast \mathbf{r}_{CA} jest wektorem położenia punktu A względem C .

Model uproszczony – dwuwymiarowy (cienka moneta)

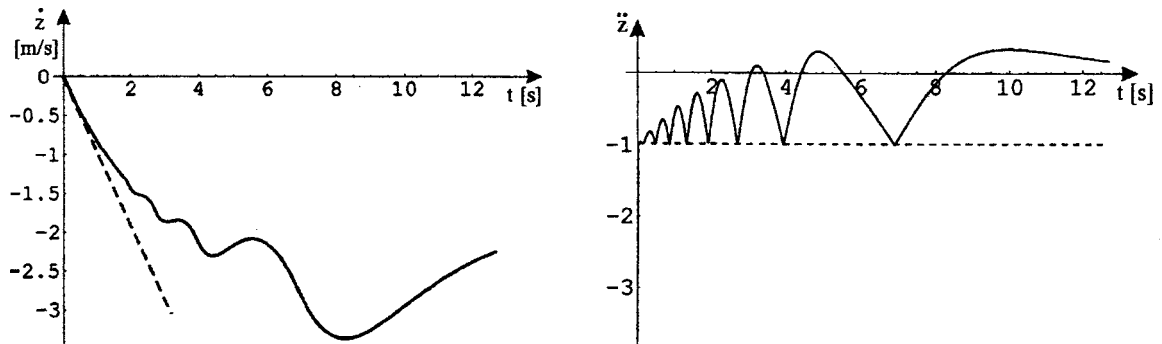
W przypadku symetrycznej i cienkiej monety (rys. 1b) i przy założeniu, że punkty B i C pokrywają się, po scałkowaniu równania (20) otrzymuje się

$$\mathbf{m}_{rB} = \left[-\frac{1}{4} \pi r^4 \lambda \omega_\xi \quad -\frac{1}{4} \pi r^4 \lambda \omega_\eta \quad -\frac{1}{2} \pi r^4 \lambda \omega_\zeta \right]^T. \quad (14)$$

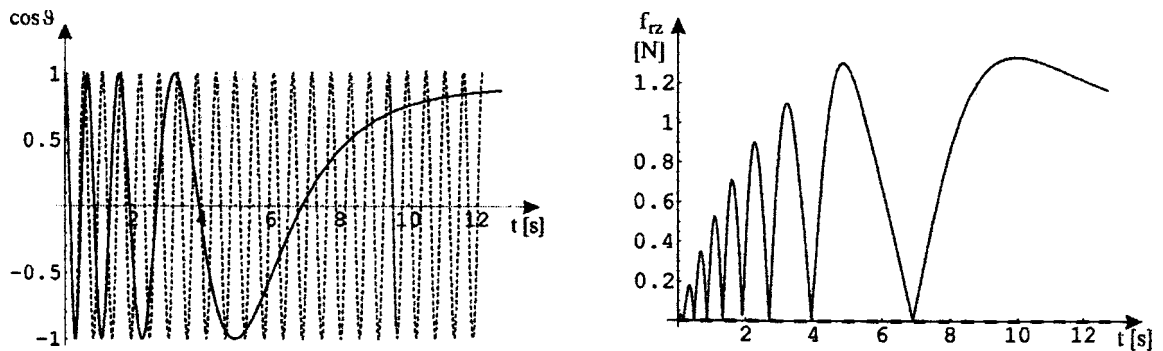
Na rysunku 2 jest pokazany przykładowy przebieg zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznej monety przy uwzględnieniu oporu powietrza, a na rys. 3 jest przedstawiony przebieg zmian kąta obrotu oraz pionowa składowa siły oporu. Obliczenia zostały przeprowadzone dla takich danych dla modelu monety, jakie były przyjęte w pracy [6] (to jest: $r=1$ m, $m=1$ kg, $g=1$ m/s²). Rozpatrywany był identyczny przypadek rzutu – spadek monety z zadanej wysokości z_0 z zerową prędkością początkową środka masy i zadaną początkową prędkością kątową. Wartości składowych siły oporu (5) – dla pionowego rzutu monetą (i dla $b=0$) – są określone jako

$$\mathbf{f}_r = \left[0 \quad 0 \quad -\pi r^2 \lambda \dot{z} |\cos \vartheta| \right]^T, \quad (15)$$

gdzie ϑ oznacza kąt odchylenia osi ζ monety od osi z .



Rys. 2. Przebiegi zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznej monety: linia ciągła oznacza wyniki z uwzględnieniem oporu powietrza, linia przerywana – bez oporu powietrza (wyniki dla $\lambda=0.188$)



Rys. 3. Przebiegi zmian cosinusa kąta nachylenia monety ϑ i składowej pionowej siły oporu f_{rz} (wyniki dla $\lambda=0.188$)

Z porównania przebiegów poszczególnych wielkości przy uwzględnieniu oporu powietrza i przy pominięciu tych sił oporu wynika, że wpływ oporu może być znaczący (tak jest dla $\lambda=0.188$). Prędkość i przyspieszenie środka masy nie są liniami prostymi – jak przy pominięciu oporu – lecz mają charakter oscylacyjny (podobnie jest z siłą f_{rz}). Częstość tych oscylacji maleje w miarę zmniejszania się prędkości kątowej monety. Przebieg zmian funkcji $\cos \vartheta$ wskazuje, że zmiany kąta ϑ zachodzą coraz wolniej, a przy dostatecznie długim czasie spadania ϑ osiąga ustaloną wartość.

Jednowymiarowy model monety

Dla monety, która podczas ruchu obraca się wokół poziomej osi – o stałym kierunku, do analizy dynamiki może być użyty jednowymiarowy model ciała. W takim przypadku moneta jest traktowana tak jak pręt poruszający się ruchem płaskim w płaszczyźnie yz (rys. 4).

Siłę oporu powietrza \mathbf{f}_r i jej moment \mathbf{m}_{rB} wyznacza się – podobnie jak dla modelu trójwymiarowego – jako:

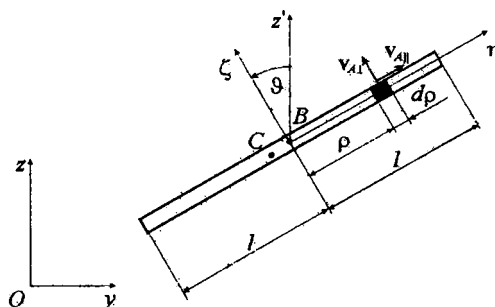
$$\mathbf{f}_r = -\lambda_1 \int_{-l}^l |\mathbf{v}_{A\perp}|^b \mathbf{v}_{A\perp} d\rho - \lambda_2 \int_{-l}^l |\mathbf{v}_{A\parallel}|^b \mathbf{v}_{A\parallel} d\rho, \quad (16)$$

$$\mathbf{m}_{rB} = -\lambda_1 \int_{-l}^l |\mathbf{v}_{A\perp}|^b \mathbf{R}_{BA} \mathbf{v}_{A\perp} \rho d\rho, \quad (17)$$

gdzie: l oznacza połowę długości pręta, \mathbf{v}_A jest wektorem zawierającym składowe prędkości punktu (A), leżącego w odległości ρ od jego środka (B), $\mathbf{v}_{A\perp}$ i $\mathbf{v}_{A\parallel}$ są składowymi wektora \mathbf{v}_A o kierunku prostopadłym i równoległym do powierzchni monety, λ_1 i λ_2 są współczynnikami oporu w kierunku prostopadłym i równoległym do powierzchni, a b liczbą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Wektory występujące w równaniach (16) i (17) wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \Omega_O \mathbf{r}_{BA}, & \mathbf{v}_B &= [0 \ \dot{y} \ \dot{z}]^T, \\ \mathbf{r}_{BA} &= [0 \ r_{By} + \rho \cos \vartheta \ r_{Bz} + \rho \sin \vartheta]^T. \end{aligned} \quad (18)$$



Rys. 4. Jednowymiarowy model monety – oznaczenia

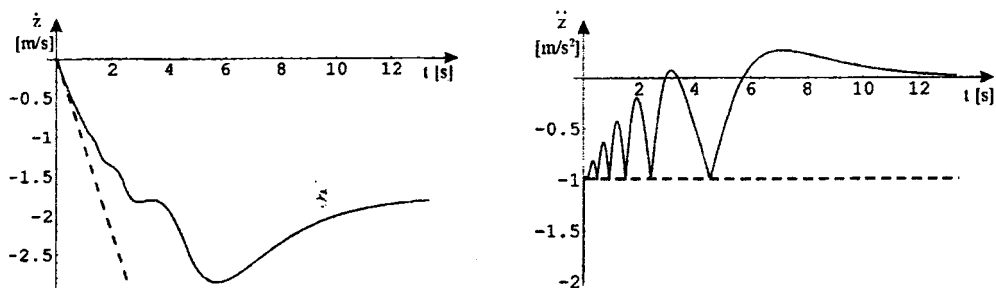
Wartości składowych siły oporu ($\mathbf{f}_r = [f_{rx} \ f_{ry} \ f_{rz}]^T$) – dla $b=0$ i $\lambda_2=0$ – są określone jako

$$\mathbf{f}_r = [0 \ -2l\lambda_1\dot{y}|\sin \vartheta| \ -2l\lambda_1\dot{z}|\cos \vartheta|]^T. \quad (19)$$

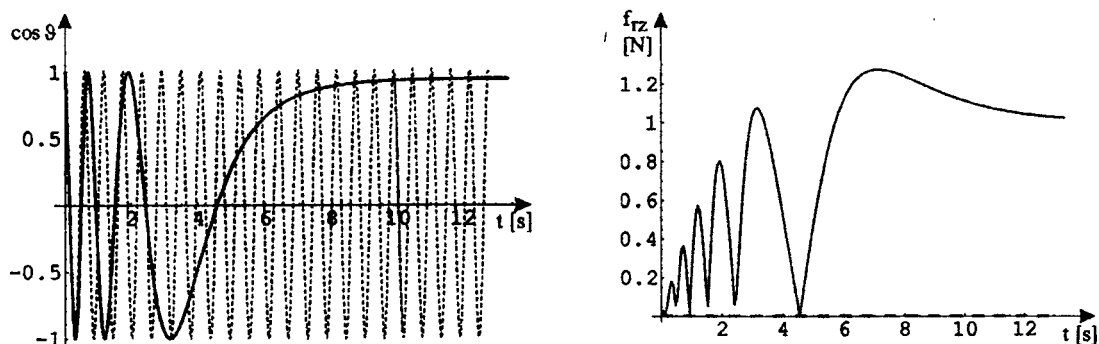
W przypadku symetrycznej monety (punkty B i C pokrywają się) po scałkowaniu równania (17) otrzymuje się

$$\mathbf{m}_{rB} = \left[-\frac{2}{3} l^3 \lambda_1 \dot{\vartheta} \ 0 \ 0 \right]^T. \quad (20)$$

Na rysunku 5 jest pokazany przykładowy przebieg zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznego pręta przy uwzględnieniu oporu powietrza, a na rys. 6 jest przedstawiony przebieg zmian kąta obrotu oraz pionowa składowa siły oporu. (Wartości liczbowe z pracy [6]: $r=1 \text{ m}$, $m=1 \text{ kg}$, $g=1 \text{ m/s}^2$).



Rys. 5. Przebieg zmian prędkości i przyspieszenia środka masy symetrycznego pręta (wyniki dla $\lambda_1=0.296$)



Rys. 6. Przebieg zmian cosinusa kąta nachylenia pręta ϑ i składowej pionowej siły oporu f_{rz} (wyniki dla $\lambda_1=0.296$)

Rezultaty przeprowadzonych obliczeń (rys. 2, 3, 5, 6) pokazują zgodność wyników dla modelu jedno- i dwu- wymiarowego, w przypadku odpowiednio dobranych współczynników oporu λ i λ_1 .

Zatem jednowymiarowy model monety może być wykorzystywany do analizy jej dynamiki nawet wówczas, gdy opór powietrza ma być uwzględniony. Symulacja rzutu monetą przeprowadzona dla jednowymiarowego modelu jest jednak ograniczona do takich przypadków, w których wektor prędkości kątowej monety jest poziomy i ma stały kierunek ($\omega = \dot{\vartheta}$).

Równania dynamiki monety sformułowane dla kątów Eulera

W pracy [2] zostały przedstawione równania dynamiki monety wyrażone poprzez parametry Eulera. W zamieszczonych niżej równaniach jako współrzędne użyte zostały kąty Eulera. Antysymetryczna macierz prędkości kątowej Ω dla klasycznych kątów Eulera (ζ - ξ - ζ) ma postać

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\varphi} \cos \vartheta & \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ 0 & -\dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta & \\ \text{asym.} & & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

a wektor prędkości kątowej ciała ω , o składowych określonych w układzie współrzędnych xyz , jest równy

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Wektor prędkości kątowej ciała ω_ξ w układzie współrzędnych $\xi\eta\zeta$ – związanych z poruszającym się ciałem – ma postać

$$\omega_{\xi} = \begin{bmatrix} \omega_{\xi} \\ \omega_{\eta} \\ \omega_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Równania dynamiki monety są przedstawione w dwóch grupach:

- równania opisujące przyspieszenie środka masy są podane wzorami (11),
- równania opisujące zmiany przestrzennej orientacji monety, wyrażone poprzez kąty Eulera, są określone następującymi równaniami (zostały tu podane uproszczone równania dla przypadku, gdy $J_{\xi} = J_{\eta} = \frac{J_{\zeta}}{2}$ oraz $J_{\xi\eta} = J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\xi} = 0$):

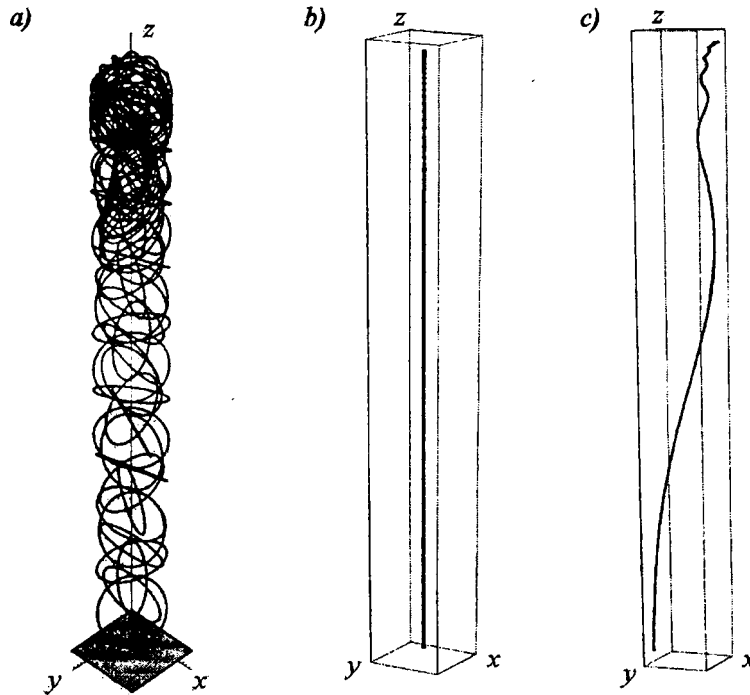
$$\ddot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \ddot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \cos \psi \sin \vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \psi \sin \vartheta - 2\dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \psi = \frac{2m_{\xi}}{J_{\zeta}}, \quad (24)$$

$$\ddot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \ddot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \sin \psi \sin \vartheta - 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \psi \sin \vartheta - 2\dot{\vartheta}\dot{\psi} \cos \psi = \frac{2m_{\eta}}{J_{\zeta}}, \quad (25)$$

$$\ddot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta = \frac{m_{\zeta}}{J_{\zeta}}. \quad (26)$$

Symulacja ruchu monety

Przykładowe wyniki symulacji ruchu monety są przedstawione na rys. 7. Są na nich pokazane rezultaty otrzymane w przypadku swobodnego spadku monety (z pominięciem oporu powietrza) oraz przy uwzględnieniu oporu powietrza i przesunięciu środka masy poza środek geometryczny.



Rys. 6. Symulacja pionowego rzutu monety (a) i tor środka jej masy: b) dla monety symetrycznej bez uwzględnienia oporu powietrza, c) przy uwzględnieniu oporu powietrza i braku symetrii monety

Uwzględnienie oporu powietrza powoduje, że tor środka masy monety nie jest linią prostą. Zmienia się również czas ruchu (w tym przypadku czas spadania z zadanej wysokości) oraz konfiguracja monety w położeniu końcowym (inny kąt ϑ_k niż przy pominięciu sił oporu).

Podsumowanie

Porównanie wyników otrzymanych dla jedno- dwu- i trój- wymiarowego modelu monety pozytywnie weryfikuje model trójwymiarowy. Użycie trójwymiarowego modelu monety pozwala na analizowanie takich przypadków, dla których modele jedno i dwu-wymiarowe są niewystarczające.

Przyjęty sposób opisu ruchu ciała może być użyty do sporządzenia map przedstawiających wynik rzutu monetą ("orzeł" lub "reszka") w przypadku jej przestrzennego ruchu. Tego rodzaju prace są obecnie wykonywane.

LITERATURA

1. Diaconis, P., Holmes, S., Montgomery, R.: Dynamical Bias in the Coin Toss. (2004).
2. Grabski J., Strzałko J., Perlikowski P., Kapitaniak T.: Wykorzystanie kwaternionów do opisu dynamiki ciała. Analiza ruchu rzuconej monety. Materiały Kongresu Mechaniki Polskiej, 2007.
3. Keller J.B.: The probability of heads. *American Math. Monthly*, 93, pp. 191–197, 1986.
4. Mizuguchi T., Suwashita M.: Dynamics of Coin Tossing. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, :274–277, 2006.
5. Nejmark J.I., Fufajev N.A.: *Dynamika układów nieholonomicznych*. PWN, Wrocław, 1971.
6. Vulović V.Ž., Prange R.E.: Randomness of true coin toss. *Physical Review A*, /1:576–582, 1986.