

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СРЕДЕ MATLAB/SIMULINK

Литвинов Е.А., Карпович С.Е. Жарский В.В.

The six degree of freedom spatial movement system has been examined. Algorithms and simulation programs for direct and inverse kinematic problems solving of spatial mechanism are presented. As a result of computer simulation the movement system's actuator spatial motion capabilities are obtained and investigated.

Введение

Многокоординатная пространственная система перемещений находит широкое применение в различных областях робототехники, при автоматизации технологических процессов в машиностроении и приборостроении. Наряду с другими, подобными антропоморфными системами, в последние годы находят всё большее применение манипуляционные многокоординатные системы на механизмах параллельной кинематики [1]. Такие системы обладают большей жёсткостью и динамической устойчивостью кинематических узлов и механизмов, в целом при той же кинематической мобильности, а также посредством выбора оптимальной структуры и геометрии подвижных звеньев позволяют находить область рабочего пространства в которой кинематические и точностные параметры на рабочей площадке выше, чем у исполнительных механизмов на входе системы [2]. Это одна из определяющих особенностей систем с механизмами параллельной кинематики, в которых за счёт кинематической мультипликации и редукции, а также усреднения случайных составляющих в кинематических, динамических и точностных характеристиках, достигается в процессе кинематического преобразования существенное повышение параметров назначения автоматизированного оборудования.

В этой связи алгоритмизация математических моделей и последующая компьютерная симуляция являются главными инструментами современного расчёта и проектирования таких механизмов с привлечением программных возможностей сред разработки, таких как MATLAB/Simulink [3].

Пространственный механизм системы перемещений с шестью степенями свободы

В работе рассматривается пространственный механизм системы перемещений с шестью степенями свободы, фотография которой представлена на рис. 1. Рассматриваемый механизм, в соответствии с его структурной схемой (рис. 2), состоит из подвижной площадки P , звеньев r_1, r_2, \dots, r_6 , жёстко связанных с вращающимися элементами двигателей $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$, которые, в свою очередь, посредством сферических шарниров и промежуточных шатунов l_1, l_2, \dots, l_6 связаны с площадкой P .

В соответствии со структурной схемой (рис. 2) механизма звенья r_1, r_2, \dots, r_6 являются входными, законы перемещения которых, задаются непосредственно управляющими двигателями.

Расчёт числа степеней свободы такого механизма может быть выполнен по формуле Сомова-Малышева [4]:

$$W = 6n - \sum_{k=1}^5 k \cdot p_k - v, \quad (1)$$

где W – число степеней свободы механизма, определяющее его структурную или максимальную кинематическую подвижность; p_k – число подвижных соединений звеньев механизма, называемых кинематическими звеньями, относящихся к k -му классу; k – целочисленный коэффициент, который в структурной формуле (1) численно равен классу кинематической пары, которая в свою очередь определяется по количеству независимых подвижностей m в рассматриваемой паре по формуле $k = 6 - m$; ν – число так называемых “лишних” степеней свободы, то есть внутренних степеней свободы механизма, не влияющих на конечную кинематическую подвижность исполнительного элемента (выходного звена) механизма, в данном случае лишние степени свободы это возможные вращения шатунов l_1, l_2, \dots, l_6 вокруг своих осей.

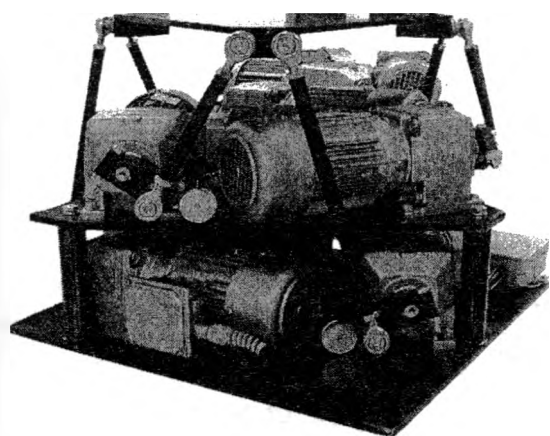


Рис. 1. Система перемещений с шестью степенями свободы

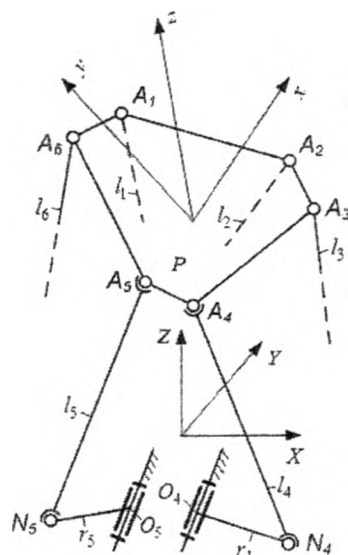


Рис. 2. Структурная схема пространственного механизма

Для рассматриваемого механизма в соответствии с его структурной схемой имеем:

- число подвижных звеньев $n = 13$;
- число кинематических пар 5-го класса $p_5 = 6$, равно числу вращательных подвижностей в шести приводах двигателей $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$;
- число кинематических пар 4-го класса $p_4 = 0$, так как такие пары в рассматриваемом механизме отсутствуют;
- число кинематических пар 3-го класса $p_3 = 12$, равно общему числу шарнирных соединений A_1, A_2, \dots, A_6 и N_1, N_2, \dots, N_6 ;
- число кинематических пар 1-го и 2-го класса $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$, так как такие кинематические пары в механизме отсутствуют;
- число лишних степеней свободы $\nu = 6$, так как в механизме возможны шесть вращений шатунов, не влияющих на конечную подвижность выходного звена.

С учётом вышесказанного получим:

$$W = 6n - \sum_{k=1}^5 k \cdot p_k - \nu = 6 \cdot 13 - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 12 - 6 = 6,$$

где $n = 13$; $p_5 = 6$; $p_4 = 0$; $p_3 = 12$; $p_1 = p_2 = 0$; $\nu = 6$.

Полученное значение $W = 6$ говорит о том, что манипуляционный механизм со структурой, приведённой на рис. 2, в общем случае может реализовать перемещение платформы с шестью степенями свободы, обеспечивая при этом возможность формирования программных движений выходного звена, в данном случае площадки P , по трём независимым линейным перемещениям в пространстве, определяющим её плоскопараллельное перемещение, и трём независимым угловым перемещениям, определяющим конечное ориентационное перемещение площадки.

Прямая задача кинематики пространственного механизма

Прямая задача кинематики решается в следующей постановке. По заданным геометро-конструктивным параметрам механизма, входным переменным параметрам, задаваемым обобщёнными угловыми координатами поворота подвижных элементов шести приводов необходимо определить положение и ориентацию подвижной площадки относительно абсолютной неподвижной системы координат $OXYZ$ [5]. Укрупнённая структура решения прямой задачи показана на рис. 3, из которой следует, что входными задаваемыми переменными будут углы поворота валов двигателей ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$), выраженные как углы поворота соответствующих кривошипов $O_1N_1, O_2N_2, \dots, O_6N_6$ (рис. 2).

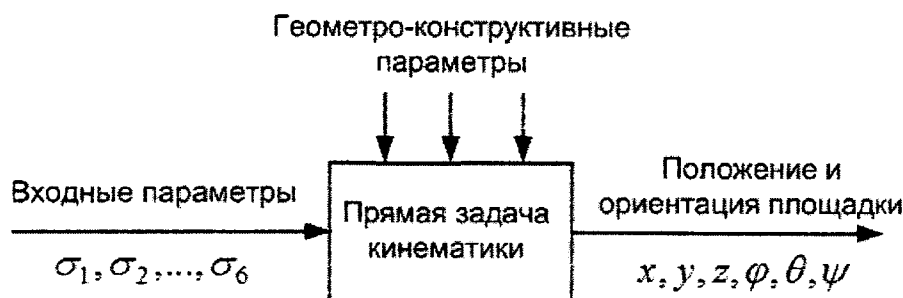


Рис. 3. Структура решения прямой задачи кинематики

Сферические шарниры, показанные на рис. 2 точками N_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), связаны с рабочей площадкой P шестью шатунами с длинами N_iA_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), которые в точке A_i сопрягаются с площадкой тоже сферическими шарнирами. Это конструктивное исполнение механизма может быть аналитически описано векторным условием неизменности в процессе движения длин самих шатунов:

$$|\vec{R}^{(N_i)} - \vec{R}^{(A_i)}| = l, \quad (2)$$

где $\vec{R}^{(N_i)}$, $\vec{R}^{(A_i)}$ – радиус-векторы соответственно точек N_i и A_i в декартовой системе координат $OXYZ$.

Для пересчёта координат точек A_i из системы координат площадки P в неподвижную систему координат $OXYZ$ необходимо воспользоваться матричным равенством:

$$\vec{R}^{(A_i)} = M \cdot \vec{R}_{A_i}, \quad (3)$$

где \vec{R}_{A_i} – вектор координат точки A_i в системе координат площадки P ;

$$M = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\cos\psi & x \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & y \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В матрице M использованы x, y, z – координаты начала системы координат $Oxuz$ в системе координат $OXYZ$; φ, θ, ψ – углы Эйлера, однозначно определяющие ориентацию площадки. Последовательно используя векторное условие (2) для каждого из шести шатунов окончательно получим следующую систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} (x^{A_1} - x^{N_1})^2 + (y^{A_1} - y^{N_1})^2 + (z^{A_1} - z^{N_1})^2 = l_1^2 \\ (x^{A_2} - x^{N_2})^2 + (y^{A_2} - y^{N_2})^2 + (z^{A_2} - z^{N_2})^2 = l_2^2 \\ (x^{A_3} - x^{N_3})^2 + (y^{A_3} - y^{N_3})^2 + (z^{A_3} - z^{N_3})^2 = l_3^2 \\ (x^{A_4} - x^{N_4})^2 + (y^{A_4} - y^{N_4})^2 + (z^{A_4} - z^{N_4})^2 = l_4^2 \\ (x^{A_5} - x^{N_5})^2 + (y^{A_5} - y^{N_5})^2 + (z^{A_5} - z^{N_5})^2 = l_5^2 \\ (x^{A_6} - x^{N_6})^2 + (y^{A_6} - y^{N_6})^2 + (z^{A_6} - z^{N_6})^2 = l_6^2 \end{cases} \quad (5)$$

Если выразить в системе (5) параметры $x^{A_i}, x^{N_i}, y^{A_i}, y^{N_i}, z^{A_i}, z^{N_i}$ ($i=1, 2, \dots, 6$) через входные переменные $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ и выходные переменные $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, то в полученной вновь системе уравнений (5) переменные $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ и $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ будут связаны через трансцендентные нелинейные выражения, не позволяющие находить выходные переменные в явном виде. Поэтому для компьютерного моделирования прямой задачи в работе был использован пакет оптимизации Optimization Toolbox среды MATLAB/Simulink.

В среде MATLAB/Simulink разработана программа моделирования численного решения прямой задачи кинематики рассматриваемого пространственного механизма (рис. 4). Программа моделирования решения прямой задачи кинематики осуществляет численный поиск конечных значений выходных переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, определяющих положение и ориентацию в пространстве подвижной площадки P рассматриваемого механизма, которые однозначно соответствуют задаваемым в программе моделирования входным угловым значениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ поворота активных элементов управляющих приводов. Численный поиск решения базируется на оптимизации целевой функции соответствующей системы уравнений (5).

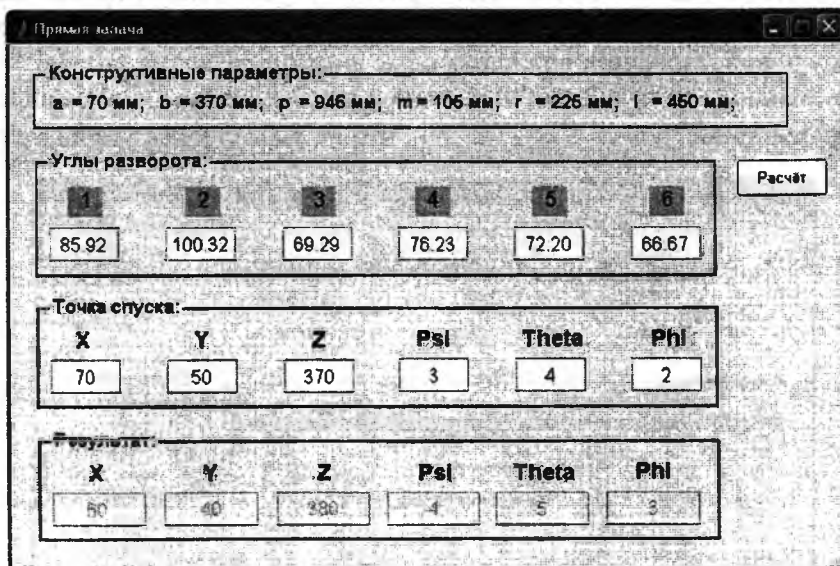


Рис. 4. Программа моделирования решения прямой задачи кинематики

Программа моделирования решения прямой задачи кинематики осуществляет численный поиск конечных значений выходных переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$, определяющих по-

ложение и ориентацию в пространстве подвижной площадки P рассматриваемого механизма, которые однозначно соответствуют задаваемым в программе моделирования входным угловым значениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ поворота активных элементов управляющих приводов. Численный поиск решения базируется на оптимизации целевой функции соответствующей системы уравнений (5). Программа поддерживает возможность выбора алгоритма оптимизации: крупно-масштабный алгоритм оптимизации (метод доверительных подпространств [6]) и средне-масштабный алгоритм оптимизации (метод Гаусса-Ньютона или метод Левенберга-Макуарда).

Обратная задача кинематики пространственного механизма

Обратная задача кинематики формулируется следующим образом. При известных геометро-конструктивных параметрах механизма необходимо найти входные параметры, в данном случае $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$, которые обеспечивают заданное положение (x, y, z) и ориентацию (φ, θ, ψ) площадки. Укрупнённая структура решения обратной задачи показана на рис. 5:



Рис. 5. Структура решения обратной задачи кинематики

Решение обратной задачи кинематики в работе осуществлено на основании геометро-аналитического подхода, основанного на аналитической геометрии в трёхмерном пространстве и матричных преобразований. Предложенный подход позволил получить аналитические уравнения связи входных и выходных параметров разрешённые в явном виде относительно искомым выходных параметров $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$, что не удавалось другими методами.

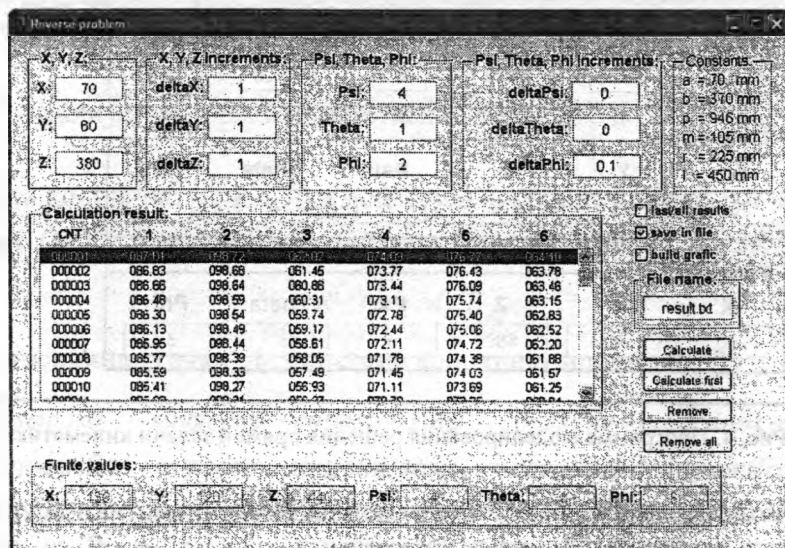


Рис. 6. Программа моделирования решения обратной задачи кинематики

Для моделирования обратной задачи в среде MATLAB/Simulink на основании математической модели приведенной в работе [7] был разработан алгоритм и расчётная программа. Программа моделирования решения обратной задачи кинематики представлена на рис. 6. Разработанная программа может проводить непосредственное и пошаговое решение обратной задачи кинематики, а так же осуществлять построение граничных областей движения площадки в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манипуляционные системы роботов / А. И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л. И. Тывес [и др.]; под общ. ред. А. И. Корендясева. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.: ил.
2. Карпович, С.Е., Матюшков, В.Е., Аваков, С.М. Построение математических моделей автоматизированного проектирования прецизионного оптико-механического оборудования для электронного оборудования. – Минск: НПО “Интеграл”, 2000. – 124 с.
3. Карпович, С.Е., Русецкий, А.М., Ляшук, Ю. Ф. Теория построения прецизионных механизмов оборудования производства электронной техники. Минск: ГНПК ТМ “Планар”, 1999. – 261 с.
4. Голдстейн, Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 375 с.
5. Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений / С.Е. Карпович, А. Яковлюк, М. Чех [и др.]; под ред. С.Е. Карповича. – Минск: Технопринт, 2004. – 187 с.
6. Coleman, T.F. and Y. Li, "An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds," SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, pp. 418–445, 1996.
7. E. Litvinov, S. Karpovich, A. Ahranovich. The 6-DOF Spatial Parallel Mechanism Control System Computer Simulation // Proceedings of 52st International Scientific Colloquium Ilmenau (Germany), September 10-13, 2007 TU-Ilmenau, 2007.