Белорусский государственный университет, Минск

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Мартыненко Т.М.

The general methods of the resolution of the partial differential equations of the first order for a prescribed of the strain state of thin-walled elastic shells of the given type (momentless or pure moment) are obtained.

Оболочками в теории упругости называются пространственные деформируемые тела, у которых одно измерение (толщина) мало по сравнению с двумя другими. Поэтому даже строгая теория оболочек является приближенной и заключается в построении такой математической модели, которая сводит трехмерную задачу об определении НДС к двумерной. В связи с этим, все двухмерные задачи теории оболочек по сути являются приближенными, основанными на введении упрощающих гипотез. Если в качестве таковых взять гипотезы Кирхгофа–Лява, то получаемая при этом разрешающая система уравнений примет такой вид:

– уравнения равновесия [1, с 252, 253, (5,56), (5,57)]; [2, с 42, 44, (7,4), (7,8)]:

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BT_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial AT_{\beta\alpha}}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}T_{\alpha\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_\beta\right)+\frac{N_\alpha}{R_\alpha}+q_\alpha=0;$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BT_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial AT_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_{\beta\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_\alpha\right)+\frac{N_\beta}{R_\beta}+q_\beta=0; \tag{1}$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial AN_\beta}{\partial\beta}\right)-\frac{T_\alpha}{R_\alpha}-\frac{T_\beta}{R_\beta}+q_n=0.$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BM_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial AM_{\beta\alpha}}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta\right)-N_\alpha=0;$$

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BM_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial AM_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha\right)-N_\beta=0; \tag{2}$$

$$T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha}+\frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha}-\frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta}=0.$$

– закон Гука [1, с 248, (5,46)]; [2, с 53, (10.8), (10,9)]:

$$T_\alpha=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\alpha+\mu\varepsilon_\beta\right),\quad T_\beta=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\beta+\mu\varepsilon_\alpha\right),\quad T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}=S=\frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega;$$

$$M_\alpha=\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\left(\chi_\alpha+\mu\chi_\beta\right),\quad M_\beta=\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\left(\chi_\beta+\mu\chi_\alpha\right), \tag{3}$$

$$M_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha}=H=\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\tau.$$

– условия совместности деформации [1, с 241, (5,34)]; [2, с 34-35, (5,6)1,2,3]:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(A\chi_\alpha)-\chi_\beta\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial B\tau}{\partial\alpha}-\tau\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\omega}{R_\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{1}{R_\beta}\left(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial\beta}-\frac{\partial B\omega}{\partial\alpha}-\varepsilon_\beta\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\chi_\beta)-\chi_\alpha\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{\partial A\tau}{\partial\beta}-\tau\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\omega}{R_\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{R_\alpha}\left(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial\alpha}-\frac{\partial A\omega}{\partial\beta}-\varepsilon_\alpha\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)=0;$$

$$\begin{aligned}&\frac{\chi_\alpha}{R_\beta}+\frac{\chi_\beta}{R_\alpha}+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left(B\frac{\partial\varepsilon_\beta}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha)-\frac{1}{2}A\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\omega\right)+\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left(A\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_\alpha-\varepsilon_\beta)-\frac{1}{2}B\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega\right)\right)=0.\end{aligned}\qquad(4)$$

где A, B, $\frac{1}{R_\alpha}$, $\frac{1}{R_\beta}$, $\frac{1}{R_{\alpha\beta}}$ – геометрические характеристики срединной поверхности оболочки. Эта система уравнений позволяет решать задачи теории оболочек двумя путями: в усилиях– моментах и в перемещениях их срединной поверхности. Первый путь сводится к определению усилий – моментов T_α, T_β, S, M_α, M_β, H в полной аналогии с задачами теории упругости в напряжениях, а второй связан с определением перемещений, поэтому система уравнений приводится к решению трех дифференциальных уравнений относительно компонентов вектора перемещений точек срединной поверхности. В обоих случаях разрешающие системы уравнений будут линейными для малых перемещений и иметь переменные коэффициенты, что затрудняет их исследование в общем случае. Поэтому усилия ученых, занимающихся расчетом оболочек, были направлены на поиск возможностей упрощения задач. Получаемые при этом математические модели содержат два типа погрешностей, первая из которых связана с погрешностью основных допущений теории оболочек (гипотез Кирхгофа–Лява) вторая – связана с упомянутой выше погрешностью решений систем (1)–(4).

Общей теории оболочек предшествовала безмоментная теория, которая заключается в пренебрежении всеми моментами M_α, M_β, H. Она значительно более простая и в некоторых случаях дает вполне правильное представление о НДС оболочки. Из (3) следует, что это пренебрежение будет обоснованным, когда мала жесткость оболочки на изгиб: $\frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\approx 0$, или когда $\chi_\alpha=\chi_\beta=\tau=0$.

С учетом равенства нулю изгибных компонентов НДС формулы (1)–(4) приводят к такой разрешающей системе уравнений для определения искомой геометрии безизгибного состояния оболочки:

– уравнения равновесия

$$\begin{aligned}&\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BT_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial AT_{\beta\alpha}}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}T_{\alpha\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_\beta\right)+q_\alpha=0;\\&\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BT_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial AT_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_{\beta\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_\alpha\right)+q_\beta=0;\\&\frac{T_\alpha}{R_\alpha}-\frac{T_\beta}{R_\beta}+q_n=0.\end{aligned}\qquad(5)$$

– закон Гука

$$T_\alpha = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta\right), \quad T_\beta = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\beta + \mu\varepsilon_\alpha\right), \quad T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} = S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega; \qquad (6)$$

– условия совместности деформации

$$\frac{\omega}{R_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_\beta}\left(\frac{\partial A\varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\partial B\omega}{\partial \alpha} - \varepsilon_\beta\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) = 0; \quad \frac{\omega}{R_\beta}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{1}{R_\alpha}\left(\frac{\partial B\varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial A\omega}{\partial \beta} - \varepsilon_\alpha\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) = 0;$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\left(B\frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha\right) - \frac{1}{2}A\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta}\omega\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\left(A\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta\right) - \frac{1}{2}B\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\omega\right)\right) = 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Первый случай соответствует расчету гибкой оболочки (мембраны), а второй – безмоментной оболочке. Оба эти случая описываются одной и той же системой уравнений, но между ними существует определенное различие, так как абсолютно гибкая оболочка (например матерчатая) не в состоянии сопротивляться сжимающим усилиям (в ней появляются складки, т.е. происходит потеря устойчивости формы, а потому расчет подобной оболочки остается достоверным только при растягивающих полях напряжений). Оболочки с конечной жесткостью на изгиб могут находится в безмоментном НДС как при растягивающих, так и сжимающих усилиях. Они будут терять устойчивость лишь при достижении некоторых критических полей напряжений. Если для абсолютно гибких оболочек безмоментное НДС является единственно возможным, поскольку они не обладают сопротивлением изгибу, то для оболочек с конечной жесткостью на изгиб такое НДС является только одним из возможных состояний, а потому его существование возможно только при выполнении определенных условий, касающихся формы оболочки, характера действующего на нее нагрузки и закрепление краев. Как отмечает ряд авторов [1, 2], оболочки, испытывающие безмоментное НДС, являются наиболее прочными. Поэтому при конструировании оболочек всегда стремятся обеспечить их безмоментное НДС. Этим определяется практическое значение безмоментной теории. Если оболочка изготовлена из пластического материала, то роль изгибных напряжений в ней снижается за счет появления в ней пластической деформации, а в предельном состоянии напряжения рационально спроектированной оболочки мало отличается от безмоментного. Кроме того значение безмоментного НДС заключается в том, что оно входит в качестве одного из элементов в моментную теорию. Уравнения равновесия в безмоментной теории получим на основании уравнений (1), (2) при $M_\alpha = M_\beta = H = 0$. Тогда из (2) $N_\alpha = N_\beta = 0$. Таким образом, равенство нулю перерезывающих сил в (5) является следствием определения безмоментного НДС, а не условием выполнения уравнений неразрывности. Кроме того, применение в качестве математических моделей тех или иных расчетных методов решения задач теории оболочек являются результатом использования существующих в настоящее время приближенных методов решения задач математической физики. Обратные геометрические задачи теории тонкостенных упругих оболочек имеют родственную постановку в случае безмоментного и чисто-моментного НДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман, В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 456 с.

2. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.