

## **МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И ГОМОГЕНИЗАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Чигарев А.В., Миронов Д. Н., Каминский Э.**

Технические и природные системы имеют, как правило, сложную структуру, в которой можно выделить несколько уровней иерархии. Детальное моделирование геометрических параметров в принципе было возможно всегда, в то время как расчет физических полей, в частности напряженно-деформированного состояния в динамике очень сложен даже для современных суперкомпьютеров, так как практически невозможно точно сформулировать все граничные и начальные условия. Поэтому важными инструментами изучения сложных систем остаются методы, позволяющие сводить исследования данной системы к более простой, в определенном смысле эквивалентной данной системе. Здесь существует два крайних подхода:

1. метод гомогенизации (метод осреднения);
2. метод дискретизации (контрастизации).

Метод гомогенизации нашел широкое применение в описании процессов деформирования и разрушения композиционных неоднородных сред, а также конструкций. Целесообразно применять этот метод в том случае, когда число структурных элементов велико, т.е. масштаб отдельных элементов значительно меньше масштаба тела (системы). При этом считается, что объем и геометрия эквивалентного тела, граничные и начальные условия остаются неизменными, а внутренняя структура заменяется эффективной (гомогенизированной) средой, неизвестные свойства которой подлежат определению. Этот подход, в частности, применим и в теориях сложных, армированных оболочек, других конструкций. Этот подход применяется в тех случаях, когда система (конструкция) имеет сложную граничную геометрию, причем масштаб отдельных элементов значительно меньше масштаба всего тела. Например, такой подход применим в теории оболочек с внешними и внутренними повреждениями.

Из вышесказанного следует, что если конструкция (тело) имеет сложную внутреннюю структуру и геометрию, то можно выделить иерархию структур и проводить операции гомогенизации последовательно. В начале вычисляем эффективные характеристики внутренней структуры, а затем эффективные геометрические характеристики тела в целом. Однако, если масштаб геометрической неоднородности, например, шероховатости, имеет один порядок с масштабом внутренней неоднородности, то тогда сначала находим эффективную геометрию, а затем эффективные внутренние свойства. Ясно, что эффективная среда может служить интегральной оценкой свойств реальной среды соответственно и информация, полученная на основе модели эффективной среды имеет интегральный характер и достаточно удовлетворительна, если разброс между значениями параметров не слишком велик. Например, в принципе можно вычислить эффективные характеристики тела, содержащие трещину, причем эти характеристики могут совпадать с характеристиками той же среды с равномерным распределением микропор, микротрещин или тела с непрерывно изменяющимися характеристиками. Однако с точки зрения надежности первый случай требует более детального исследования. Поэтому, в качестве третьего этапа решения задачи необходимо моделировать эффективным телом с трещиной, что позволит оценить ресурс, а далее рассмотреть систему трещин.

Как правило, макроскопические трещины могут быть надежно обнаружены существующими методами и в этом случае вопрос стоит не о продлении работы поврежденной детали, а о ее замене. В дальнейшем рассмотрим вопросы диагностирования характеристик деталей двигателя, а также прогнозирования слабых мест с точки зрения трещиностойкости.

Второй подход в моделировании сложных систем связан с дискретизацией (контрастизацией) структуры тела, что математически соответствует переходу от распределенной системы, описываемой уравнениями в частных производных к системе с сосредоточенными параметрами описываемыми, обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Процедура дискретизации осуществляется обычно по принципу выделения в сложной системе (конструкции) конструктивных элементов и стягивание их объемов в некоторые характерные точки таким образом, что исходное твердое тело, заменяется системой материальных точек, связанных между собой элементами жесткости. С точки зрения вибрации характерными точками являются центры масс, центры жесткости. Поэтому для каждого структурного элемента двигателя определяем центр масс по обычным формулам

$$\bar{r}_{O_k} = \frac{\int_{V_k} \bar{r}_k \rho_k dV}{\int_{V_k} \rho_k dV}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $k$  – номер структурного элемента двигателя,  $\rho_k$  – плотность  $k$ -го элемента,  $O_k$  – центр масс  $k$ -го элемента.

Чтобы оценить разброс масс от центра масс и неравномерность распределения ее в структурном элементе рассчитывается тензор инерции для каждого  $k$ -го элемента

$$I^{(k)} = \begin{pmatrix} I_{1,1}^{(k)} & I_{1,2}^{(k)} & I_{1,3}^{(k)} \\ I_{2,1}^{(k)} & I_{2,2}^{(k)} & I_{2,3}^{(k)} \\ I_{3,1}^{(k)} & I_{3,2}^{(k)} & I_{3,3}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

$$I_{i,j}^{(k)} = \int_{V_k} x_i x_j \rho dV, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leftrightarrow x, \quad 2 \leftrightarrow y, \quad 3 \leftrightarrow z, \quad I_{O_k} = I_{i,j}.$$

Определение центров физико-механической жесткости формально можно задать в виде

$$\bar{r}_{C_k} = \frac{\int_{V_k} \bar{r}_k \lambda_k^* dV}{\int_{V_k} \lambda_k^* dV}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $\lambda_k^*$  – представляет собой эффективные коэффициенты упругости, вычисленные для  $k$ -того структурного элемента.

Однако определение (3) дает характеристику, которая содержит мало информации об элементах конструкции. Более важным является центр конструкционной жесткости, который содержит информацию не только о распределении материальных коэффициентов жесткости по системе, но и учитывает то, что жесткость конструкции зависит от ее геометрии и распределения приложенных нагрузок.

Как известно, стержни являются широко распространенным элементом конструкции авиационного двигателя. Если стержень однородный, то геометрическая жесткость при кручении вычисляется по формуле.

$$C^* = 2 \iint_S \Phi d\Delta, \quad (4)$$

где  $\Phi$  – функция напряжений,  $S$  – площадь поперечного сечения.

Также имеют место формулы:

$$\tau_{xz} = G_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

где  $\alpha = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \omega_z d\Delta$  – срезной угол закручивания напряженного сечения на единицу длины стержня.

В случае, если сечение представляет собой многосвязную область, то геометрическая жесткость вычисляется по формуле  $[\lambda]$ :

$$C^* = 2 \left( \iint_S \Phi d\Delta + \sum_{k=1}^n C^* S_k \right),$$

где индекс  $k$  относится к сечению  $k$  – того элемента плоскостью перпендикулярной оси стержня. Из энергетических соображений следует, что геометрическая жесткость положительна.

Мембранная аналогия Прандтля для задачи о равновесии мембраны, закрепленной по нагруженному контуру  $\Gamma$  и нагруженной поверхностной нагрузкой  $P$ , сводится к граничной задаче для уравнения Пуассона.

Можно показать, что геометрическая жесткость сечения со структурными элементами связана с объемом депланированного объема формулой

$$V = \frac{P}{2T} C^*, \quad (4)$$

где  $T$  - интенсивность сил напряжения.

Аналогично и при кручении.

Мембранная аналогия позволяет делать некоторые оценки о распределении напряжений по сечению.

Как следует из (5) геометрическая жесткость имеет размерность момента инерции площади ( $L^4$ ). В случае круглого поперечного однородного сечения геометрическая жесткость при кручении равна полярному моменту инерции. Для сечений отличных от кругового отождествление геометрической жесткости с полярным моментом инерции ошибочно.

Имеет место оценка

$$C^* \leq I_p, \quad (7)$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции и равенство возможно только для кругового сечения.

Теорема Помса утверждает, что при заданной площади стержень круглого сечения имеет наибольшую жесткость. Более точная оценка имеет вид

$$C^* \leq \frac{4I_x I_y}{I_x + I_y}, \quad I_p = I_x + I_y, \quad (8)$$

где  $I_x, I_y$  – моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$  площади  $S$ .

### **Влияние накопления повреждений на поведение собственных частот деталей двигателя**

Заменим реальную распределенную систему, состоящую из  $n$  деталей дискретной системой материальных точек, координаты которых находятся в центрах инерции, связанных элементами жесткости, равным эффективным л коэффициентам упругости. При накоплении повреждений изменяются физико-механические характеристики системы в зависимости от уровня поврежденности. Пусть в некоторый начальный момент времени уровень поврежденное™ равен нулю, а коэффициенты упругости определяются тензором  $\Lambda^0$ . Деталь (конструкция) должна быть исключены из эксплуатации, когда уровень поврежденности равен единице и коэффициенты упругости определяются тензором  $\Lambda^k$ . Изменение  $\delta$  в зависимости от времени  $t$ , определяется кинетическими уравнениями, которые в общем виде можно записать следующим образом

$$\frac{d\delta}{dt} = f(\delta, \sigma_{i,j}, T, t, \dots), \quad (9)$$

или

$$\frac{d\delta}{dn} = f(\delta, \sigma_{i,j}, T, n, \dots). \quad (9)$$

Зависимость тензора эффективных коэффициентов упругости от поврежденности  $\delta(t)$  запишем в виде

$$\Lambda(\delta) = (1 - \delta)\Lambda^o + \delta\Lambda^k. \quad (10)$$

Будем считать, что в общем случае массы системы совершают поступательные и вращательные движения, поэтому в общем случае инерционные свойства системы описываются тензором инерции  $M$ . В процессе эксплуатации двигателя при воздействии термосиловых нагрузок происходит изменение масс деталей двигателя, что сказывается на характере распределения собственных частот. Положим, что зависимость тензора  $M$  от  $\delta$  имеет вид аналогичный (11):

$$M(\delta) = (1 - \delta)M^o + \delta M^k. \quad (12)$$

Лагранж..... системы в момент  $t$  запишется в виде

$$L = \frac{1}{2}[(M\bar{q}, \bar{q}) - (\Lambda\bar{q}, \bar{q})], \quad \bar{q} = (q_1, \dots, q_m), \quad (13)$$

где  $\bar{q}$  – вектор обобщенных координат,  $\dot{\bar{q}}$  – вектор обобщенных скоростей. Линейные колебания описываются уравнениями Лагранжа II рода.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

или в матрично-векторной форме

$$M\ddot{\bar{q}} + \Lambda\bar{q} = 0, \quad A = \|I_{\alpha\beta}\|, \quad \Lambda = \left\| \frac{\partial^2 W(0)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right\|, \quad (15)$$

где  $W(q_\alpha)$  – потенциальная энергия упруго деформированной системы.

Если в начальном состоянии отсутствуют начальные деформации и напряжения, то система будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия, определяемого условием

$$\frac{\partial W(0)}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Общее решение системы (15) представляется в виде

$$\bar{q} = \sum_{\alpha=1}^m u_\alpha (C_{1\alpha} \cos \omega_\alpha t + C_{2\alpha} \sin \omega_\alpha t) \quad (17)$$

где  $u_\alpha$  – собственные векторы системы,  $\omega_\alpha$  – собственные частоты системы. Собственные частоты располагаются в порядке возрастания

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\min(\Lambda\bar{q}, \bar{q})}{(M\bar{q}, \bar{q})}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\max(\Lambda\bar{q}, \bar{q})}{(M\bar{q}, \bar{q})}}. \quad (18)$$

Имеют место равенства

$$[M_{(\delta)}\bar{u}_\alpha(\alpha), \bar{u}_\alpha(\delta)] = 1, \quad \omega_\alpha^2(\delta) = [\Lambda(\delta)\bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)], \quad \omega_\alpha^2(\delta)Mu_\alpha(\delta) = \Lambda(\delta)u_\alpha(\delta). \quad (19)$$

Сформулируем задачи идентификации на основе частотного анализа. Пусть на основе измерений получены оценки собственных частот системы в зависимости от поврежденности.

Требуется на основе имеющегося спектра частот оценить изменение упругих свойств, масс, геометрии деталей двигателя. Однако получить замкнутую систему уравнений для одновременной оценки коэффициентов упругости, плотности и геометрии не удастся.

Поэтому будем поочередно решать задачи идентификации упругих коэффициентов и масс деталей.

Пусть при эксплуатации жесткость системы  $\Lambda$  не изменяется, т. е. упругие модули не зависят от поврежденности, а тензор инерции  $M$  изменяется. Продифференцировав первое и второе уравнения (19) по  $\delta$  считая, что  $\Lambda \equiv const$ , а  $M = M(\delta)$  имеем

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = 2 \left( \Lambda \bar{u}_k(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right), \quad (20)$$

$$[(M_2 - M_1) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] + 2 \left\{ M(\delta) \bar{u}_\alpha(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right\} = 0. \quad (21)$$

Учитывая третье соотношение (19) второе равенство примет вид:

$$2\omega_\alpha^{-2}(\delta) \left[ \Lambda \bar{u}_\alpha(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha}{d\delta} \right] = -[(M_2 - M_1) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)],$$

тогда (20) преобразуется к виду

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = \omega_\alpha^2(\delta) [(M_1 - M_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] \geq 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) является основой для построения алгоритма идентификации масс полиалитов двигателя.

Аналогичным образом дифференцируя первые два соотношения (19) с учетом, что  $M = const$ , а  $\Lambda = \Lambda(\delta)$ , тогда получим

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = [(\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{u}_k(\delta), \bar{u}_k(\delta)] + 2 \left[ \Lambda(\delta) \bar{u}_\alpha(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right]. \quad (23)$$

$$2 \left[ M \bar{u}_k(\delta), \frac{d\bar{u}_\alpha(\delta)}{d\delta} \right] = 0. \quad (24)$$

После замены в (23)  $\Lambda(\delta) \bar{u}_\alpha(\delta)$  на  $\omega_\alpha^2(\delta) M \bar{u}_\alpha(\delta)$  с учетом (24) получим

$$\frac{d\omega_\alpha^2(\delta)}{d\delta} = [(\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] \geq 0. \quad (25)$$

Соотношение (25) является основной для идентификации упругих модулей.

Формула (22) говорит о том, что с ростом поврежденности, вследствие уменьшения инерционных свойств системы элементов двигателя, собственные частоты колебаний увеличиваются, а из формулы (25) следует, что снижение жесткости элементов вследствие накопления повреждений, ведет к уменьшению частот собственных колебаний. Таким образом, при термосиловых нагрузках на элементы двигателя идет процесс накопления повреждений, ведущий к уменьшению массы и к уменьшению жесткости элементов двигателя, однако при вибродиагностических испытаниях частотный анализ может не дать информацию об изменении физико-механических характеристик деталей двигателя. Условием такой ситуации является равенство изменения распределения частот вследствие изменения массы и жесткости, которое следует из сравнения соотношений (22) и (25).  $\approx$

$$[(\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] = -\omega_\alpha^2(\delta) [(M_1 - M_2) \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)] \quad (26)$$

Это возможно, если полная энергия остается постоянной:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_\alpha^2}{2} (M_1 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) - \frac{1}{2} (\Lambda_1 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) = \\ = \frac{\omega_\alpha^2}{2} (M_2 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) - \frac{1}{2} (\Lambda_2 \bar{u}_\alpha(\delta), \bar{u}_\alpha(\delta)) = const. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда следует, что жесткость и масса системы остаются неизменными на каждой из собственных частот.

### Учет диссипации энергии при виброиспытаниях системы

Учет внутреннего трения при вибрации обычно осуществляется добавлением диссипативных сил в уравнения динамики (2.15) вследствие чего получаем

$$M \ddot{\bar{q}} + \Lambda \bar{q} = -D \bar{q}, \quad (28)$$

где  $D$  – матрица коэффициентов вязкости, элементы которой зависят от поврежденности  $\delta$ .

Как известно корни характеристического уравнения для уравнения (28) имеют отрицательные действительные части, т. е. спектр частот смещается с мнимой оси для уравнения (15) в комплексную плоскость для уравнения (28). Решение имеет вид

$$q = (C_1 + iC_2) \bar{u}_1 e^{(\alpha+\beta)t} + (C_1 - iC_2) \bar{u}_2 e^{(\alpha-i\beta)t}, \quad (29)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Известно, что накопление макроскопических повреждений проявляется как рост вязкости деформируемого тела, поэтому для матрицы  $D$  можно принять зависимость от  $\delta$  в виде

$$D(\delta) = D_1(1-\delta) + \delta D_2, \quad D_1 \geq D_2. \quad (30)$$

Соответствующим образом можно оценить как будет изменяться распределение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости. Учет вязкости может быть связан с изменением коэффициентов теплопроводности в силу термовязкой аналогии.

В дальнейшем основное внимание будет уделено оценкам изменения инерционных и жесткостных характеристик при вибрационных испытаниях, поэтому вопрос об оценках коэффициентах вязкости рассматриваться не будет, хотя вопросы учета ползучести, релаксации при термосиловых нагрузках актуальны.

### Учет связей элементов системы и распределение собственных частот двигателя

Корпус двигателя представляет собой оболочку и накладывает ограничения на степени свободы элементов двигателя при вибрации. Если рассматривать колебания системы в цилиндрической системе координат, то оболочка накладывает связи на крутильные колебания, продольные смещения и смещения в радиальном направлении.

Пусть связь имеет вид

$$\bar{S} \bar{q} = 0, \quad (31)$$

где  $\bar{S} = (S_1, S_2 \dots S_n) \neq 0$  – вектор с постоянными компонентами.

Как известно, при наложении одной связи число степеней свободы уменьшается на единицу, т. е. одна из обобщенных координат, например,  $q_x$  может быть выражена через остальные  $q_2, \dots, q_n$ .

$$q_1 = \frac{\sum_{k=2}^n S_k q_k}{S_1}. \quad (32)$$

При наличии связей уравнения вибрации системы получаются из вариационного принципа на условный экстремум. При этом собственные частоты системы с учетом связей смещаются в сторону возрастания, причем максимальная  $\omega_n$  остается неизменной. Функция распределения  $f(\Omega^2)$  новых частот  $\Omega$  может быть получена в виде

$$f(\Omega^2) = \sum_{k=2}^n (\omega_m^2 - \Omega^2)^{-1} \cdot L_k^2, \quad (33)$$

где  $L_k^2$  – элементы матрицы  $L = P^T \cdot S$ ,  $P^T$  – матрица транспортированная по отношению к  $P$ ,  $P$  – матрица определяющая невырожденную замену переменных  $\bar{q} = P\bar{Q} \cdot \bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$  – вектор нормальных координат.

На рис. 1 изображен график функции распределения частот  $\Omega$ .

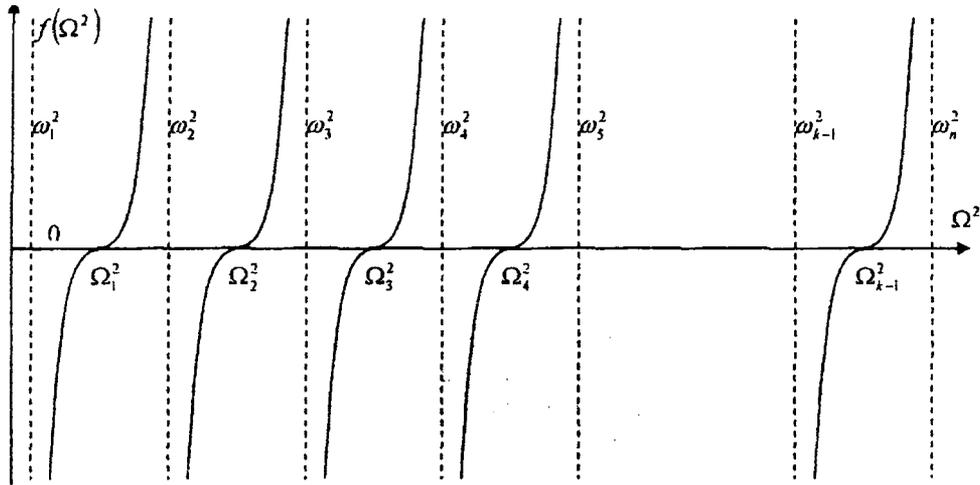


Рис. 1.

Из рис. 1 видно, что корни уравнения т. е. собственные частоты системы со связью находятся между соответствующими абсциссами асимптот

$$\omega_m^2 < \Omega_{m-1}^2 < \omega_{m+1}^2. \quad (34)$$

Если какое-либо значение  $L_k = 0$ , то член  $(\omega_k^2 - \Omega^2)$  с этим параметром исчезает из рассмотрения, а все остальные корни  $\Omega^2$  располагаются между оставшимися корнями  $\omega_i$ .

Таким образом, сочетание методов гомогенизации и дискретизации позволяет в принципе получить оценки изменения некоторых физико-механических свойств деталей сложной системы, какой является двигатель. Собственная частота (или спектр) новой детали может быть измерена или оценена теоретически, множество собственных частот деталей образует спектр собственных частот систем, который уточняется при сборке за счет наложения связей на каждую деталь. Система в сборе может быть протестирована методами вибродиагностики на прохождение системы через локальные резонансы отдельных деталей с наложенными связями, что позволяет создать частотный портрет новой системы. При дальнейших проверках будут получаться новые портреты, из которых методами идентифицирования можно получить оценки уровня накопления повреждений и получить оценки остаточного ресурса по жесткости, массе, геометрии. Принципиальная возможность этого следует из уравнений построенной математической модели.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко, Г.С., Балтич, О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – Киев: Наукова думка, 1981. – 218 с.
2. Абрамов, С.К. Резонансные методы исследования динамических свойств пластмасс. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978. – 136 с.
3. Теоретическая механика
4. Коцаньда С. Усталостное растрескивание металлов. – М.: Металлургия, 1990. – 622 с.
5. Sobczyk K. Stochastic dynamics of engineering systems. Mechanics of 21 st Century – ICTAM 04 – Proceeding, 1-42.