

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

*A rigid, perfectly-plastic model of solids is applied to study the dynamic behavior of simply supported or clamped, arbitrarily shaped plates with an internal, free, arbitrarily shaped hole. Governing equations for dynamic behavior are obtained. Operating conditions of possible mechanisms of deformation are analyzed. Analytical expressions for the ultimate loads are obtained.*

Изучение динамического поведения элементов конструкций под действием взрывных нагрузок имеет большое значение для оценки степени их повреждаемости. В работе предложена общая методика, которая на основе модели жесткопластического тела позволяет рассчитывать динамическое поведение произвольной криволинейной пластины с произвольным свободным внутренним отверстием. Показано, что пластина может деформироваться по трем схемам. Для каждой схемы получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации в зависимости от уровня нагрузки и геометрических параметров пластины. Методика может быть применена в различных инженерных расчетах.

1. Рассмотрим пластину из идеального жесткопластического материала с произвольным кусочно-гладким выпуклым контуром  $L_1$ , шарнирно опертым или защемленным (рис. 1). В центральной части пластина имеет свободное отверстие с произвольным контуром  $L_2$ . Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки высокой интенсивности  $P(t)$ . Будем рассматривать нагрузки взрывного типа, которые характеризуются мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(t_0)$  в начальный момент времени  $t_0$  с последующим быстрым их уменьшением. Пластина покоится на вязком основании с коэффициентом сопротивления  $k$ . Известные в литературе решения задачи изгиба пластических пластин со свободным отверстием касаются только динамического поведения кольцевых пластин [1 – 3], криволинейных пластин частного вида [4], предельного анализа кольцевых [5] и квадратных пластин [6, 7].

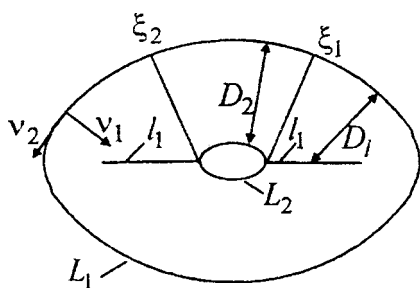


Рис. 1. Схема деформирования 1

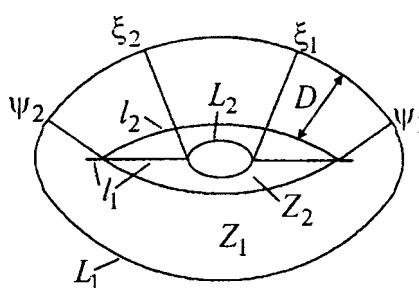


Рис. 2. Схема деформирования 2

Пусть уравнение контура пластины  $L_1$  задано в параметрической форме  $x = x_1(\varphi)$ ,  $y = y_1(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Радиус кривизны контура  $L_1$  (за исключением особых точек) равен  $R(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1'y_1'' - x_1''y_1')$ , где  $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$ ;  $(\square)' = \partial(\square)/\partial\varphi$ . Для определенности будем рассматривать пластины, симметричные относительно оси  $x$ ; геометрические размеры пластины по оси  $y$  не больше, чем по оси  $x$ , особые точки контура расположены только на

оси  $x$ . Мы не будем здесь рассматривать случай очень большого отверстия, когда деформируется не вся пластина и схема квазистатического разрушения будет аналогична локальному механизму, рассмотренному в работе [7] для квадратной пластины с прямоугольным отверстием. Модель жесткопластического тела позволяет рассмотреть и этот случай, но это будет самостоятельное исследование. Поэтому, ссылаясь на работу [7], считаем, что максимальный размер отверстия не больше, чем минимальный размер пластины, помноженный на 0,8.

Введем криволинейную ортогональную систему координат  $(v_1, v_2)$ , связанную с декартовой системой координат  $(x, y)$  соотношениями

$$x = x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / L(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / L(v_2).$$

Кривые  $v_1 = \text{const}$  находятся на расстоянии  $v_1$  от контура  $L_1$  и имеют радиус кривизны  $\rho_1 = R(v_2) - v_1$ . Прямые линии  $v_2 = \text{const}$  перпендикулярны контуру  $L_1$  (радиус кривизны  $\rho_2 = \infty$ ). В этом случае уравнение контура пластины  $L_1$  имеет вид  $v_1 = 0$ ,  $0 \leq v_2 \leq 2\pi$ . Уравнение отверстия  $L_2$  задано и имеет вид:  $v_1 = D_2(v_2)$ ,  $\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2$ ,  $2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1$ .

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения  $P_{\max}$  возможно существование трех схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки ("низких" нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные ("средних" нагрузках), пластина вращается вокруг контура  $L_1$  с углом поворота  $\alpha_1$  и деформируется в некоторую линейчатую поверхность. При этом, как и в случае отсутствия отверстия [8 – 10], в пластине возможно образование пластической шарнирной линии  $l_1$ , которая может состоять из нескольких участков (см. рис. 1). На  $l_1$  нормальный изгибающий момент равен предельному  $M_0$ . Назовем такую схему деформирования схемой 1. Положение линии  $l_1$  не зависит от времени и определяется формой опорного контура пластины из условия равенства расстояний по нормали к внешнему контуру от контура  $L_1$  до линии  $l_1$  [9, 10]. В силу симметрии пластины шарнир  $l_1$  расположен на оси  $x$  и в случае, если на контуре  $L_1$  имеются особые точки, то шарнир  $l_1$  проходит через них. Уравнение шарнира  $l_1$  имеет вид ([8]):  $v_1 = D_l(v_2)$ ,  $0 \leq v_2 \leq \pi$ , где

$$D_l(v_2) = \left| \frac{y_1(v_2)}{x_1'(v_2)} \right| L(v_2); \quad \min(D_l(0), D_l(\pi)) = \min_{0 \leq v_2 \leq 2\pi} R(v_2).$$

При достаточно высоких значениях  $P_{\max}$ , как и в случае кольцевых пластин при так называемых "высоких" нагрузках [1, 3], динамика рассматриваемой пластины может сопровождаться возникновением нестационарной пластической шарнирной замкнутой кривой линии  $l_2$  с нормальным изгибающим моментом равным  $M_0$ . При этом внутренняя часть пластины между линиями  $l_2$  и  $L_2$  движется поступательно и деформируется в линейчатую поверхность. Возможны ситуации, когда шарнир  $l_2$  проходит через шарнир  $l_1$  (схема 2, представленная на рис. 2), и когда линия  $l_2$  окружает шарнир  $l_1$  либо шарнир  $l_1$  не образуется (схема 3, приведенная на рис. 3).

Рассмотрим подробно схему 1. Считаем, как и в случае отсутствия отверстия [9, 10], угол поворота плоскости пластины  $\alpha_1$  не зависит от параметра  $v_2$ .

Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [11]:

$$K = A - N, \tag{1}$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} u^* ds, \quad A = \iint_S [P(t) - k\dot{u}] \dot{u}^* ds, \tag{2}$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m + M_0 \iint_S (|\kappa_1^*| + |\kappa_2^*|) ds. \quad (3)$$

Здесь  $K$ ,  $A$ ,  $N$  – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно;  $S$  – площадь пластины;  $\rho$  – поверхностная плотность материала пластины;  $u$  – прогиб;  $ds$  – элемент площади;  $l_m$  – линии разрыва угловых скоростей;  $M_m$  – изгибающий момент на  $l_m$ ;  $[\dot{\theta}^*]_m$  – разрыв угловой скорости на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ ;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. В выражении для  $N$  суммирование проводится по всем линиям разрыва угловой скорости, включая границу  $L_1$  пластины. Величины с верхним индексом “\*” – допустимые скорости. Точки над символами обозначают производные по времени  $t$ .

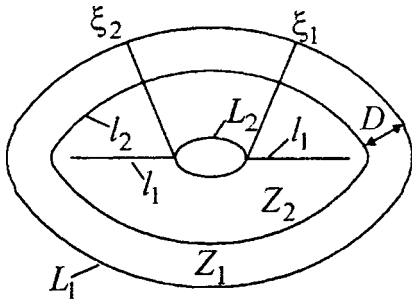


Рис. 3. Схема деформирования 3

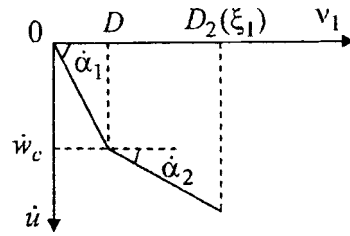


Рис. 4. Скорости прогибов пластины для схем 2, 3

Скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде:

$$(v_1, v_2) \in S: \dot{u}(v_1, v_2, t) = \dot{\alpha}_1(t)v_1. \quad (4)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины равны:

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v_1} = \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{R(v_2) - v_1}. \quad (5)$$

Выражения (2) будут равны:

$$K = \rho \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_S v_1^2 ds, \quad A = P(t) \dot{\alpha}_1^* \iint_S v_1 ds - \dot{\alpha}_1^* k \dot{\alpha}_1 \iint_S v_1^2 ds, \quad (6)$$

$$ds = L \left(1 - \frac{v_1}{R}\right) dv_1 dv_2.$$

Мощность внутренних сил (3) вычисляем как в [12], учитывая, что на свободном контуре  $L_2$  нормальный изгибающий момент  $M_{nn}$  равен нулю,  $M_{nn} = M_0$  на  $l_1$ ,  $M_{nn} = -(1-\eta)M_0$  на  $L_1$  ( $\eta = 0$  при защемлении контура  $L_1$  и  $\eta = 1$  при его шарнирном опирании). Тогда имеем

$$N = \dot{\alpha}_1^* M_0 \left[ (2-\eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2 \right]. \quad (7)$$

Подставляя полученные выражения (6), (7) в (1), получим уравнение движения для схемы деформирования 1:

$$\left(\rho \ddot{\alpha}_1 + k \dot{\alpha}_1\right) \iint_S v_1^2 ds = P(t) \iint_S v_1 ds - M_0 \left[ (2-\eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2 \right]. \quad (8)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}_1(0) = \alpha_1(0) = 0. \quad (9)$$

Предельную нагрузку определим из (8) при учете (9) и  $\ddot{\alpha}_1 = 0$ . Тогда имеем

$$P_0 = M_0 \left[ (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left( 1 - \frac{D_2}{R} \right) d v_2 \right] / \iint_S v_1 ds. \quad (10)$$

Рассмотрим подробно схему 2 (рис 2). Обозначим область пластины между контурами  $L_1$  и  $l_2$  через  $Z_1$ , а оставшуюся часть – через  $Z_2$ . Области  $Z_1$  и  $Z_2$  являются линейчатыми поверхностями. Поскольку шарнирная линия  $l_2$  движется поступательно, то все ее точки движутся с одинаковой скоростью, которую обозначим через  $\dot{w}_c(t)$ . Действуя как в работе [8], из непрерывности скоростей на  $l_2$  получим, что нормаль к линии  $l_2$  является также нормалью к контуру  $L_1$  и что расстояние  $D$  между  $L_1$  и  $l_2$  не зависит от параметра  $v_2$ . Тогда уравнение шарнира  $l_2$  для схемы 2 имеет вид:  $v_1 = D$ ,  $\psi_1 \leq v_2 \leq \psi_2$ ,  $2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1$  ( $\psi_1 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \psi_2$ ). Вследствие непрерывности скоростей на линии  $l_2$  область  $Z_1$  вращается вокруг опорного контура  $L_1$  с одинаковой скоростью, обозначенной через  $\dot{\alpha}_1(t)$ , на интервалах  $\psi_1 \leq v_2 \leq \psi_2$ ,  $2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1$ . Как и в [9, 10], считаем, что на остальной части контура  $L_1$  скорость поворота области  $Z_1$  вокруг  $L_1$  также равна  $\dot{\alpha}_1(t)$ . Также считаем, что область  $Z_2$  вращается вокруг подвижного шарнира  $l_2$  со скоростью  $\dot{\alpha}_2(t)$ , не зависящей от параметра  $v_2$ . Тогда скорости прогибов пластины для схемы 2 будут представлены в виде:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \in Z_1: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}_1(t) v_1, \\ (v_1, v_2) \in Z_2: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{w}_c(t) + \dot{\alpha}_2(t)(v_1 - D), \end{aligned} \quad (11)$$

где области  $Z_1$  и  $Z_2$  определены так:

$$\begin{aligned} Z_1: \quad & \begin{cases} 0 \leq v_1 \leq D_1(v_2) & \text{при } 0 \leq v_2 \leq \psi_1, \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_2, 2\pi - \psi_1 \leq v_2 \leq 2\pi; \\ 0 \leq v_1 \leq D & \text{при } \psi_1 \leq v_2 \leq \psi_2, 2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1. \end{cases} \\ Z_2: \quad & \begin{cases} D \leq v_1 \leq D_1(v_2) & \text{при } \psi_1 \leq v_2 \leq \xi_1, \xi_2 \leq v_2 \leq \psi_2, \\ & 2\pi - \psi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_2, 2\pi - \xi_1 \leq v_2 \leq 2\pi - \psi_1; \\ D \leq v_1 \leq D_2(v_2) & \text{при } \xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2, 2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Скорости прогибов пластины в сечении  $v_2 = \xi_1$  изображены на рис. 4. Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины в области  $Z_1$  имеют вид (5) и в области  $Z_2$  равны:

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \dot{\alpha}_2(t) / [R(v_2) - v_1].$$

Учитывая введенные обозначения, выражения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} K &= \rho \left\{ \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} v_1^2 ds + \iint_{Z_2} [\ddot{\alpha}_2(v_1 - D) + \dot{w}_c] \left[ \dot{\alpha}_2^*(v_1 - D) + \dot{w}_c^* \right] ds \right\} = \\ &= \rho \left\{ \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1^* \iint_{Z_1} v_1^2 ds + \dot{\alpha}_2^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D)^2 ds + \dot{w}_c \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds \right] + \right. \\ &\quad \left. + \dot{w}_c^* \left[ \ddot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds + \dot{w}_c \iint_{Z_2} ds \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
A = & \dot{\alpha}_1^* \left[ P(t) \iint_{Z_1} v_1 ds - k \dot{\alpha}_1 \iint_{Z_1} v_1^2 ds \right] + \dot{\alpha}_2^* \left\{ P(t) \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds - \right. \\
& - k \left[ \dot{w}_c \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds + \dot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D)^2 ds \right] \left. + \dot{w}_c^* \left\{ P(t) \iint_{Z_2} ds - \right. \right. \\
& \left. \left. - k \left[ \dot{w}_c \iint_{Z_2} ds + \dot{\alpha}_2 \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds \right] \right\} \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Выражение (3) для мощности внутренних сил  $N$  представим в виде

$$N = \sum_{i=1}^5 N_i,$$

где  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$  – мощности внутренних сил на контуре  $L_1$ , внутри области  $Z_1$ , на линии  $l_2$ , внутри области  $Z_2$  и на шарнире  $l_1$  соответственно:

$$\begin{aligned}
N_1 = (1 - \eta) M_0 \iint_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dL_1 = \dot{\alpha}_1^* (1 - \eta) M_0 \int_0^{2\pi} L dv_2, \quad N_2 = M_0 \iint_{Z_1} \kappa_2^* ds = \dot{\alpha}_1^* M_0 \iint_{Z_1} \frac{L}{R} dv_1 dv_2, \\
N_3 = M_0 \iint_{l_2} [\dot{\theta}^*]_{l_2} dl_2 = 2(\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_2^*) M_0 L \int_{\psi_1}^{\psi_2} L \left(1 - \frac{D}{R}\right) dv_2, \\
N_4 = M_0 \iint_{Z_2} \kappa_2^* ds = \dot{\alpha}_2^* M_0 \iint_{Z_2} \frac{L}{R} dv_1 dv_2, \quad N_5 = M_0 \iint_{l_1} [\dot{\theta}^*]_{l_1} dl_1.
\end{aligned}$$

Для определения  $N_5$  вычислим  $[\dot{\theta}^*]_{l_1}$  и  $dl_1$ . Как и в работе [12],

$$dl_1 = \frac{(1 - D_l / R) L^2}{|x_1'|} dv_2,$$

а  $[\dot{\theta}^*]_{l_1} = \dot{\alpha}_i |x_1'| / L$  в области  $Z_i$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда

$$\begin{aligned}
N_5 = 2\dot{\alpha}_1^* M_0 \left[ \int_0^{\psi_1} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 + \int_{\psi_2}^{\pi} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 \right] + \\
+ 2\dot{\alpha}_2^* M_0 \left[ \int_{\psi_1}^{\xi_1} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 + \int_{\xi_2}^{\psi_2} L \left(1 - \frac{D_l}{R}\right) dv_2 \right],
\end{aligned}$$

и полная мощность внутренних сил пластины  $N$  определяется выражением

$$N = M_0 \left[ \dot{\alpha}_1^* (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 - 2\dot{\alpha}_2^* \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2 \right]. \quad (14)$$

Из (14) видно, что величина  $N$  не зависит от расстояния  $D(t)$ .

Подставляя полученные выражения (12) – (14) в равенство (1) и учитывая независимость функций  $\dot{\alpha}_1^*$ ,  $\dot{\alpha}_2^*$ ,  $\dot{w}_c^*$ , получим после небольших преобразований уравнения:

$$(\rho \ddot{\alpha}_1 + k \dot{\alpha}_1) \iint_{Z_1} v_1^2 ds = P(t) \iint_{Z_1} v_1 ds - M_0 (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2, \quad (15)$$

$$\rho \ddot{\alpha}_2 + k \dot{\alpha}_2 = 2M_0 \frac{\left( \iint_{Z_2} ds \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2}{\left( \iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left( \iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}, \quad (16)$$

$$\rho \ddot{w}_c + k \dot{w}_c = P(t) - 2M_0 \frac{\left[ \iint_{Z_2} (v_1 - D) ds \right] \int_{\xi_1}^{\xi_2} L \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) dv_2}{\left( \iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left( \iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}. \quad (17)$$

Условие непрерывности скоростей на границе областей  $Z_1$  и  $Z_2$  дает равенство

$$\dot{\alpha}_1 D = \dot{w}_c. \quad (18)$$

В области  $Z_1$  для  $\psi_1$  и  $\psi_2$  справедливо равенство:

$$D = D_l(\psi_1) = D_l(\psi_2). \quad (19)$$

Система уравнений (15) – (19) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2. Начальные условия имеют вид (9) и

$$\dot{\alpha}_2(0) = \alpha_2(0) = \dot{w}_c(0) = w_c(0) = 0, \quad (20)$$

$$D(0) = D_l(\psi_1(0)), \quad D(0) = D_l(\psi_2(0)). \quad (21)$$

Начальное значение  $D(0)$  определяется в зависимости от значения  $P_{\max}$ , как это будет показано ниже.

Заметим, что из неравенства Коши-Буняковского для гильбертова пространства интегрируемых функций, определенных на  $Z_2$ , с интегрируемым квадратом и скалярным произведением функций  $f$ ,  $g$ , определенным как  $\iint_{Z_2} fg ds$ , следует, что, если область  $Z_2$  не вырождена, то выполняется неравенство

$$\left( \iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left( \iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2 > 0, \quad (22)$$

и тогда из (16) получим, что  $\rho \ddot{\alpha}_2 + k \dot{\alpha}_2 > 0$  для рассматриваемой схемы 2. При отсутствии отверстия  $\xi_1 = \xi_2$  и из (16) при учете начальных условий (20) следует, что  $\alpha_2 = 0$ , а область  $Z_2$  движется поступательно.

Из условия  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$  определим величину нагрузки  $P_1$ , которая является минимальным значением  $P_{\max}$ , при котором реализуется схема 2. Значение функции  $D(t)$ , соответствующее нагрузке  $P_1$ , обозначим через  $D^*$ . Из (15), (16) при условии  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$  при  $t \geq 0$  получим

$$\frac{P(t)}{M_0} \iint_{Z_1} v_1 ds = (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 + \frac{2 \left( \iint_{Z_2} v_1^2 ds \right) \left( \iint_{Z_2} ds \right) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2}{\left( \iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left( \iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}. \quad (23)$$

Дифференцируя (18) по времени и исключая с помощью полученного равенства функции  $\ddot{\alpha}_1$ ,  $\ddot{w}_c$  из (15), (17), учитывая начальные условия, имеем

$$\frac{P_{\max}}{M_0} \iint_{Z_1} v_1 [D(0) - v_1] ds = (2 - \eta) D(0) \int_0^{2\pi} L dv_2 - \frac{2 \left( \iint_{Z_2} v_1^2 ds \right) \left\{ \iint_{Z_2} [v_1 - D(0)] ds \right\} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2}{\left( \iint_{Z_2} ds \right) \iint_{Z_2} v_1^2 ds - \left( \iint_{Z_2} v_1 ds \right)^2}. \quad (24)$$

Считая в (23), (24)  $P_{\max} = P_1$  и  $D(0) = D^*$ , получим, что  $P_1$  определяется из равенства

$$P_1 = M_0(2 - \eta) \frac{\int_0^{2\pi} Ldv_2 \iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds}{\left( \iint_{Z_1(D^*)} v_1 ds \right) \left( \iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds \right) - \left( \iint_{Z_1(D^*)} v_1^2 ds \right) \left( \iint_{Z_2(D^*)} ds \right)}, \quad (25)$$

где  $Z_i(D^*)$  – области  $Z_i$  ( $i = 1, 2$ ) при  $D = D^*$ , а  $D^*$  удовлетворяет уравнению

$$(2 - \eta) \int_0^{2\pi} Ldv_2 = F(D^*) \left[ 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( 1 - \frac{D_2}{R} \right) Ldv_2 \right], \quad (26)$$

с учетом равенств (19) и где

$$F(D) = \frac{\left( \iint_{Z_1(D)} v_1 ds \right) \left( \iint_{Z_2(D)} v_1 ds \right) - \left( \iint_{Z_1(D)} v_1^2 ds \right) \left( \iint_{Z_2(D)} ds \right)}{\left( \iint_{Z_2(D)} ds \right) \iint_{Z_2(D)} v_1^2 ds - \left( \iint_{Z_2(D)} v_1 ds \right)^2}. \quad (27)$$

Заметим, что поскольку  $\iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds \geq D^* \iint_{Z_2(D^*)} ds$  и  $D^* \iint_{Z_1(D^*)} v_1 ds \geq \iint_{Z_1(D^*)} v_1^2 ds$ , то в (25),

(27) справедливо неравенство

$$\left( \iint_{Z_1(D^*)} v_1 ds \right) \left( \iint_{Z_2(D^*)} v_1 ds \right) - \left( \iint_{Z_1(D^*)} v_1^2 ds \right) \left( \iint_{Z_2(D^*)} ds \right) \geq 0.$$

Уравнение (24) позволяет определить начальное значение  $D(0)$  при  $P_{\max} > P_1$  и деформировании по схеме 2.

Рассмотрим подробно схему деформирования 3 (рис. 3). В отличие от схемы 2 в этом случае шарнир  $l_1$  может находиться только в области  $Z_2$ , поэтому схема 3 может реализоваться только для пластин с гладким контуром. Как и в схеме 2, область  $Z_1$  вращается вокруг опорного контура  $L_1$  со скоростью  $\dot{\alpha}_1(t)$ , а шарнир  $l_2$  находится на расстоянии  $D(t)$  от опорного контура  $L_1$ . Область  $Z_2$  движется поступательно со скоростью  $\dot{w}_c(t)$  и вращается вокруг шарнира  $l_2$  со скоростью  $\dot{\alpha}_2(t)$ . Скорости прогибов в пластине представлены в виде (11), где области  $Z_1$  и  $Z_2$  определены следующим образом:

$$Z_1: \quad 0 \leq v_1 \leq D \quad \text{при} \quad 0 \leq v_2 \leq 2\pi; \quad (28)$$

$$Z_2: \quad \begin{cases} D \leq v_1 \leq D_1(v_2) & \text{при} \quad 0 \leq v_2 \leq \xi_1, \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_2, \\ & 2\pi - \xi_1 \leq v_2 \leq 2\pi; \\ D \leq v_1 \leq D_2(v_2) & \text{при} \quad \xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2, 2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1. \end{cases} \quad (29)$$

Уравнения движения пластины получим из (1). Для схемы 3 выражения (2), (3) имеют вид (12) – (14), в которых области  $Z_1$  и  $Z_2$  определены в (28), (29). Таким образом, динамическое поведение пластины при деформировании по схеме 3 описывается уравнениями (15) – (18), полученными для схемы 2, но при вычислении в них интегралов по областям  $Z_1$  и  $Z_2$ , определенным в (28), (29). Начальные условия имеют вид (9), (20). Начальное значение  $D(0)$  определяется в зависимости от значения  $P_{\max}$  из уравнения (24) при соответствующих областях  $Z_1$  и  $Z_2$ . Нагрузка  $P_2$ , которая является минимальным значением  $P_{\max}$ , при котором реализуется схема 3, вычисляется по формуле (25), в которой  $P_1$  заменено на  $P_2$ , а области  $Z_1$  и  $Z_2$  определены в (28), (29) и  $D^*$  заменено на  $D^{**}$  – значение функции  $D(t)$ , соответствующее нагрузке  $P_2$ . Величина  $D^{**}$  определяется из (26) при замене  $D^*$  на  $D^{**}$  и соответ-

вующих областях  $Z_1$  и  $Z_2$ . Для схемы 3 также выполняется неравенство (22) и, следовательно,  $\rho\ddot{\alpha}_2 + k\dot{\alpha}_2 > 0$  при движении по схеме 3.

Обозначим максимальное значение  $D$  для схемы 3 через  $D_3$ . Имеем  $D_3 = \min(D_1(0), D_1(\pi))$ . Тогда при выполнении условия

$$\min_{\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2} D_2(v_2) \leq D_3 \quad (30)$$

в динамике пластины возможны только схемы 1 и 3 в зависимости от величины нагрузки.

Можно показать, что функция  $F(D)$ , определенная в (27) для схемы 3 (т.е. при вычислении интегралов по областям  $Z_1$  и  $Z_2$ , определенным в (28), (29)) является монотонно возрастающей при условии

$$\min_{\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2} D_2(v_2) > D_3, \quad (31)$$

Обозначим ее через  $F_3(D)$ . Из (27) для пластин с гладким контуром следует, если форма и размер отверстия таковы, что выполняются неравенства (31) и

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2 \geq F_c, \quad F_c = (2 - \eta) \int_0^{2\pi} L dv_2 [2F_3(D_3)]^{-1},$$

тогда при разных уровнях нагрузки в пластине могут реализоваться схемы 1 и 3, а движения по схеме 2 не будет. Если выполняются неравенства (31) и

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(1 - \frac{D_2}{R}\right) L dv_2 < F_c, \quad (32)$$

то пластина в зависимости от уровня нагрузки может деформироваться по всем трем схемам.

2. Проведем анализ деформирования пластины, для которой выполняется неравенство (31), (32), и, следовательно, ее геометрические размеры позволяют деформироваться по всем рассмотренным трем схемам.

“Средние” нагрузки:  $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ . Деформирование происходит по схеме 1 и описывается уравнением (8), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и переменной правой частью. Начальные условия имеют вид (9). Момент остановки пластины  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}_1(t_f) = 0. \quad (33)$$

Прогибы в пластине находятся из (4).

“Высокие” нагрузки:  $P_1 < P_{\max} \leq P_2$ . При  $0 \leq t \leq t_*$  (первая фаза) деформирование происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (15) – (19) с начальными условиями (9), (20), (21), (23). Из (15), (16), (24) следует, что  $\dot{\alpha}_1(t) > \dot{\alpha}_2(t)$  для схемы 2 при невырожденном отверстии. Поскольку рассматривается взрывная нагрузка, а из (15), (16) получим, что при  $P(t) = 0$  будут выполняться равенства  $\rho\ddot{\alpha}_1 + k\dot{\alpha}_1 < 0$  и  $\rho\ddot{\alpha}_2 + k\dot{\alpha}_2 > 0$ , следовательно, в некоторый момент времени  $t_*$  выполняется равенство

$$\dot{\alpha}_1(t_*) = \dot{\alpha}_2(t_*), \quad (34)$$

и дальнейшее движение пластины происходит по схеме 1.

При  $t_* < t \leq t_f$  (вторая фаза) поведение пластины описывается уравнением (8) при начальных условиях  $\dot{\alpha}_1(t_*)$ ,  $\alpha_1(t_*)$ , определенных в конце первой фазы движения. Пластина останавливается в момент времени  $t_f$ , определяемый из уравнения (33). Все прогибы вычисляются из (11), (4) с учетом обеих фаз движения.



“Сверхвысокие” нагрузки:  $P_{\max} > P_2$ . При  $0 \leq t \leq t_1$  (первая фаза) деформирование происходит по схеме 3 и описывается уравнениями (15) – (18) с начальными условиями (9), (20), (24) при вычислении интегралов по областям  $Z_1$  и  $Z_2$ , определенным в (28), (29). Поскольку функция  $F_3(D)$  монотонно возрастающая, а  $P(t)$  взрывная нагрузка, то функция  $D(t)$  возрастающая. В некоторый момент времени  $t_1$  выполняется условие  $D(t_1) = D_3$ , и дальнейшее движение пластины происходит по схеме 2. При  $t = t_1$  определяются значения  $\dot{\alpha}_1(t_1)$ ,  $\alpha_1(t_1)$ ,  $\dot{\alpha}_2(t_1)$ ,  $\alpha_2(t_1)$ ,  $\dot{w}_c(t_1)$ ,  $w_c(t_1)$ .

Вторая и третья фазы движения при  $t_1 < t \leq t_*$  и  $t_* < t \leq t_f$  происходят аналогично движению в первой и второй фазах при “высоких” нагрузках при соответствующих начальных условиях, определенных в конце первой и второй фаз деформирования. Все прогибы в пластине вычисляются из (11), (4) с учетом всех фаз движения.

Представленные аналитические зависимости для описания механизмов развития пластических зон, времени остановки и остаточных прогибов позволяют построить простую программную процедуру для решения рассматриваемой сложной проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-08-08035-офи).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mazalov V. N., Nemirovsky Ju. V. Dynamical bending of rigid-plastic annular plates // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. – 1976. – V. 11, No. 1. – pp. 25 – 39.
2. Jones N. Finite deflections of a simply supported rigid-plastic annular plate loaded dynamically // *Int. J. Solids Structures*. – 1968. – V. 4. – pp. 593 – 603.
3. Mroz Z. Plastic deformations of annular plates under dynamic loads // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. – 1958. – V. 10, No. 4. – pp. 499 – 516.
4. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или жесткой шайбой // *Теоретическая и прикладная механика: Международ. науч.-техн. сб.* – Минск: БНТУ, 2006. – № 21. – С. 60 – 66.
5. Григорьев А. С. О несущей способности кольцевых пластин // *Инженерный сборник*. – 1953 – Т. 16. – С. 177 – 182.
6. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
7. Narasimhan R. K., Verreyya V. Yield line analysis of square slabs with central rectangular openings // *J. Inst. Eng. (India) Civil Eng. Div.* – 1978 – V. 59, No. 2. – pp. 138 – 143.
8. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // *Прикл. механика*. – 2001. – Т. 37, № 12. – С. 68 – 78.
9. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок // *Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та*. – 2002. – № 2. – С. 77 – 85.
10. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора // *Прикл. механика*. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 93 – 101.
11. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
12. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины // *ПМТФ*. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 108 – 120.