Белорусский национальный технический университет, Минск

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ДИНИМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ УСТРАНЕНИЯ ЛИШНИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Акимов В.А., Кожушко В.В., Куриленко А.В.

The general solution constructed satisfies identically the equilibrium equations within the area for the problem considered. The conditions of absence for longitudinal transferences on the planes z=±h are accomplished identically.

Рассмотрим вторую основную задачу динамической теории упругости для области, ограниченной двумя параллельными плоскостями. Система дифференциальных уравнений в перемещениях имеет вид {1}

$$\begin{aligned} &\Delta_2^2 u_1 + (\gamma-1)\partial_1(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0, \\ &\Delta_2^2 u_2 + (\gamma-1)\partial_2(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0, \\ &\Delta_2^2 u_3 + (\gamma-1)\partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\Delta_2^2 = \Delta^2 - c_2^{-2}\partial_t^2$; $\Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$; $\gamma = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}$; λ, μ – коэффициенты Ламе; c_2 – скорость распространения в упругом теле поперечной волны.

Решение системы уравнений (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma\Delta_1^2\varphi_1 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \\ u_2 &= \gamma\Delta_1^2\varphi_2 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3), \\ u_3 &= \gamma\Delta_1^2\varphi_3 - (\gamma-1)\partial_1(\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3). \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Delta_1^2 = \Delta^2 - c_1^{-2}\partial_t^2$, c_1 – скорость распространения в упругом теле продольной волны.

Как и в первой основной динамической задаче теории упругости для задачи А полагаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left[A_1\cos(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1) + B_1\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right] * \mathrm{f}(x,y,t), \\ \varphi_2 &= \left[A_2\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1) + B_2\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right] * \mathrm{f}(x,y,t), \\ \varphi_3 &= \left[A_3\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1) + B_3\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2)\right] * \mathrm{f}(x,y,t). \end{aligned} \tag{3}$$

Далее в (3) определяем вид операторных сомножителей исходя из однородных краевых условий для перемещений

Предварительно устанавливаем

$$\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3 = (\partial_1 \mathrm{A}_1 + \partial_2 \mathrm{A}_2 + \nabla_1 \mathrm{A}_3)\cos(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1) + (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \nabla_2 B_3)\cos^{-1}(h\nabla_2),$$

$$\begin{aligned} \gamma\Delta_1^2\varphi_1 &= (\gamma-1)c_2^{-2}\partial_t^2 B_1\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2) * \mathrm{f}(x,y,t), \\ \gamma\Delta_1^2\varphi_2 &= (\gamma-1)c_2^{-2}\partial_t^2 B_2\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2) * \mathrm{f}(x,y,t), \\ \gamma\Delta_1^2\varphi_3 &= (\gamma-1)c_2^{-2}\partial_t^2 B_3\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2) * \mathrm{f}(x,y,t). \end{aligned}$$

Полагая $\mathrm{B}_2 = \partial_1^{-1}\partial_2 \mathrm{B}_1$, получим операторные соотношения

$$(\gamma-1)^{-1}u_1=-\partial_1(\partial_1 A_1+\partial_2 A_2+\nabla_1 A_3)\cos(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)-\nabla_2(\nabla_2 B_1+\partial_1 B_3)\cos(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2),$$

$$(\gamma-1)^{-1}u_2=-\partial_2(\partial_1 A_1+\partial_2 A_3+\nabla_1 A_3)\cos(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)-\frac{\partial_2}{\partial_1}\nabla_2(\nabla_2 B_1+\partial_1 B_3)\cos(z\nabla_2)\cos(h\nabla_2),$$

$$(\gamma-1)^{-1}u_3=\nabla_1(\partial_1 A_1+\partial_2 A_2+\nabla_1 A_3)\sin(z\nabla_1)\cos^{-1}(h\nabla_1)+\frac{\nabla^2}{\partial_1}(\nabla_2 B_1+\partial_1 B_3)\sin(z\nabla_2)\cos^{-1}(h\nabla_2).$$

Считая $\partial_1 A_1+\partial_2 A_2+\partial_3 A_3=-\frac{\nabla_2}{\partial_1}(\nabla_2 B_1+\partial_1 B_3)$ и сокращая на $\frac{\nabla^2}{\partial_1}(\nabla_2 B_1+\partial_1 B_3)$ получим

$$u_1=\partial_1\left[cos(z\nabla_1)cos^{-1}(h\nabla_1)-cos(z\nabla_2)cos^{-1}(h\nabla_2)\right]*f(x,y,t),$$

$$u_2=\partial_2\left[cos(z\nabla_1)cos^{-1}(h\nabla_1)-cos(z\nabla_2)cos^{-1}(h\nabla_2)\right]*f(x,y,t),$$

$$u_3=\left[-\nabla_1 sin(z\nabla_1)cos^{-1}(h\nabla_1)+\frac{\nabla^2}{\nabla_2}sin(z\nabla_2)cos^{-1}(h\nabla_2)\right]*f(x,y,t).$$

Полагая в задаче В

$$\varphi_1=\left[D_1\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)+E_1\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right]*g(x,y,t),$$

$$\varphi_2=\left[D_2\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)+E_2\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right]*g(x,y,t),$$

$$\varphi_3=\left[D_3\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)+E_3\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right]*g(x,y,t).$$

Аналогичным образом определим перемещения в этом случае

$$u_1=\partial_1\left[\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)-\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right]*f(x,y,t),$$

$$u_2=\partial_2\left[\sin(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)-\sin(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right]*f(x,y,t),$$

$$u_3=\left[\nabla_1\cos(z\nabla_1)\sin^{-1}(h\nabla_1)-\frac{\nabla^2}{\nabla_2}\cos(z\nabla_2)\sin^{-1}(h\nabla_2)\right]*f(x,y,t).$$

Полное перемещение равно сумме перемещений задач А и В. В результате построено операторное решение второй основной динамической задачи теории упругости, удовлетворяющее условию и $u_{1|z=\pm h}=u_{2|z=\pm h}=0$ содержащее две произвольные аналитические функции. Уравнения равновесия внутри области удовлетворяются тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий, В. Теория упругости. – М.: Издательство «Мир», 1975. – 672 с.