Брестский государственный технический университет, Брест

К ИССЛЕДОВАНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Хвисевич В.М., Веремейчик А.И.

Один из этапов решения задач термоупругости методом граничных элементов – определение граничных значений напряжений [1, 2]. При вычислении напряжений в граничных точках рассматриваемой области могут быть использованы два подхода. Один из способов заключается в том, что используются интегральные формулы, полученные из интегральных представлений для напряжений предельным переходом точки x из области V на границу S. Этот подход является достаточно трудоемким, т.к. требуется вычисление интегралов (в том числе и сингулярных) по всей границе и по времени. Другой подход состоит в том, что тензор напряжений в узловых точках элементов конструкции вычисляется при помощи закона Дюгамеля-Неймана по значениям вектора поверхностных сил и касательной деформации. При этом закон Дюгамеля-Неймана используется в местной системе координат, связанной с касательными и нормальным направлениями на элементе. Для вычисления напряжений в граничных точках в данной работе используется второй подход.

Введем в граничной точке x на элементе местную систему координат, определенную ортогональными базисными векторами ($\tau(x), n(x)$ в случае плоской задачи), где $n(x)$ - вектор внешней нормали в точке x, $\tau(x)$ – касательный вектор (рис. 1).

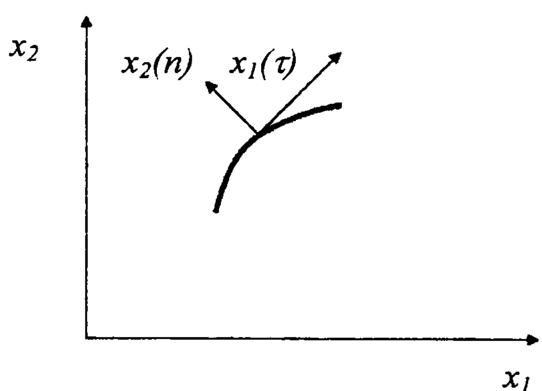

Рис. 1

В местной системе координат часть компонент тензора напряжений определяется по известным значениям поверхностных усилий. Остальные компоненты тензора напряжений находятся через касательные деформации и компоненты поверхностных сил. В двухмерных задачах поверхностные усилия $P_i'(x,t)$ и напряжения $\sigma_{1i}'(x,t)$, отнесенные к местной системе координат в точке x рассматриваемого элемента, связаны между собой соотношением:

$$\sigma_{i1}'(x,t) = P_i'(x,t). \tag{1}$$

Исключая из закона Дюгамеля-Неймана [3]

$$\sigma_{ij}' = 2\mu\left(\varepsilon_{ij}' + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}'\delta_{ij}\right) - \gamma\delta_{ij}T', \tag{2}$$

компоненты деформации $\varepsilon_{11}', \varepsilon_{33}'$, получим:

$$\sigma'_{22}(x,t)=\frac{1}{1-\nu}\left[\nu P'_1(x,t)+2\mu\varepsilon'_{22}(x,t)-\alpha_t E T'(x,t)\right].\tag{3}$$

Матрицу преобразования координат представим в виде:

$$\Pi^*(x)=\begin{vmatrix} n_1(x) & n_2(x) \\ \tau_1(x) & \tau_2(x) \end{vmatrix}.\tag{4}$$

Преобразуем компоненты поверхностных усилий от глобальной системы координат в локальную (местную):

$$\begin{aligned} P'_1(x,t)&=n_j(x)P_j(x,t),\\ P'_2(x,t)&=\tau_j(x)P_j(x,t). \end{aligned}\tag{5}$$

Деформации в местной системе координат определяются по формуле:

$$\varepsilon'_{22}(x,t)=\left.\frac{\partial u'_2(y,t)}{\partial y'_2}\right|_x=\tau_j(x)\frac{\partial u_j}{\partial \tau}(x,t).\tag{6}$$

Опуская промежуточные выкладки, получим соотношение для вычисления граничных значений компонентов тензора напряжений в точке x в момент времени t:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,t)=&\left[\left(n_i n_j+\frac{\nu}{1-\nu}\tau_i\tau_j\right)n_k+\left(n_i\tau_j+n_j\tau_i\right)\tau_k\right]\cdot\left[P_k(x,t)+\gamma n_k T(x,t)\right]+\\ &+\frac{2\mu}{1-\nu}\tau_i\tau_j\tau_k\frac{\partial u_k}{\partial\tau}(x,t)-\gamma\delta_{ij}T(x,t). \end{aligned}\tag{7}$$

Дискретный аналог уравнения (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,t)=&\sum_{\beta=1}^{M^*}\Big\{\left[P_k\left(y^{\beta q},t\right)+n_k\gamma T\left(y^{\beta q},t\right)\right]A_{ijk}^{\beta q}(\xi)+u_k\left(y^{\beta q},t\right)B_{ijk}^{\beta q}(\xi)-\\ &-\delta_{ij}\gamma T\left(y^{\beta q},t\right)N_\beta(\xi)\Big\},\quad i,j=1,2, \end{aligned}\tag{8}$$

где коэффициенты $A_{ijk}^{\beta q}$ и $B_{ijk}^{\beta q}$ вычисляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} A_{ijk}^{\beta q}&=\left[\left(n_i n_j+\frac{\nu}{1-\nu}\tau_i\tau_j\right)n_k+\left(n_i\tau_j+n_j\tau_i\right)\tau_k\right]N_\beta(\xi),\\ B_{ijk}^{\beta q}&=\frac{2\mu}{1-\nu}\frac{\tau_i\tau_j\tau_k}{I(\xi)}N'_\beta(\xi). \end{aligned}\tag{9}$$

В выражениях (9) учтено, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial\tau}&=\frac{1}{I(\xi)}\sum_{\beta=1}^{M^*}u_k\left(y^{\beta q},t\right)N'_\beta(\xi),\\ N'_\beta(\xi)&=\frac{d}{d\xi}N_\beta(\xi). \end{aligned}\tag{10}$$

Вычисление компонентов базисных векторов $n(x)$, $\tau(x)$ осуществляется следующим образом:

$$\tau_i(x)\Big|_{\bar{S}_q} = \frac{h_i^q(\xi)}{h^q(\xi)},$$
$$n_i(x)\Big|_{\bar{S}_q} = \frac{\omega_i^q(\xi)}{\omega^q(\xi)}, \tag{11}$$

где функции $h^q(\xi)$, $\omega^q(\xi)$ определяются через координаты узловых точек $x_i^{\beta q}$ и функции формы $N_\beta(\xi)$ на основе следующих формул:

$$\omega^q = \left(h_i^q h_i^q\right)^{1/2},\ h^q = \left(h_i^q h_i^q\right)^{1/2},$$
$$h_i(\xi) = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_1}\bigg|_{\bar{S}_q} = \sum_{\beta=1}^{M^*} y_i^{\beta q} N_{,1}^{\beta}(\xi),$$
$$N_{,1}^{\beta}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} N_\beta(\xi), \tag{12}$$
$$\omega_k^q(\xi) = \varepsilon_{kij} h_i^q(\xi) l_j^q(\xi),$$
$$l_i^q(\xi) = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_2}\bigg|_{\bar{S}_q} = \sum_{\beta=1}^{M^*} y_i^{\beta q} N_{,2}^{\beta}(\xi), \quad N_{,2}^{\beta}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} N_\beta(\xi).$$

По результатам расчетов на данном этапе решения задачи помимо напряжений определяются значения перемещений, деформаций, температуры во всех точках границы, что позволит в дальнейшем с использованием интерполяционных соотношений вычислить перемещения и температуры в любой точке границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия, К., Телес, Ж., Вроубел, Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Крауч, С, Старфилд, А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970. – 239 с.
4. Хвисевич, В.М., Веремейчик, А.И. Граничные интегральные уравнения двумерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической механике: сб. научн. трудов / БНТУ. – Минск: УП «Технопринт», 2001. – С. 99–103.