Белорусский национальный технический университет, Минск

ПРОЧНОСТЬ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ

Клус С. А.

Введение

В настоящее время элементы конструкций, подвергаемые облучению и неравномерному нагреву, представляют определенный интерес с точки зрения напряженно-деформированного состояния. Учитывая, что в перспективе Республика Беларусь собирается реализовать свою собственную ядерную программу эта проблема является достаточно актуальной.

В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние осесимметричного цилиндра в условиях объемных термических и радиационных деформаций. Как частный случай рассмотрен бесконечно длинный цилиндр, нагруженный равномерными внешним и внутренним давлениями для которого проведены расчеты напряженно-деформированного состояния представленные в графическом виде.

Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричное распределение напряжений и деформаций полого цилиндра в условиях неравномерного нагрева, реакторного облучения, а также под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений (рис. 1).

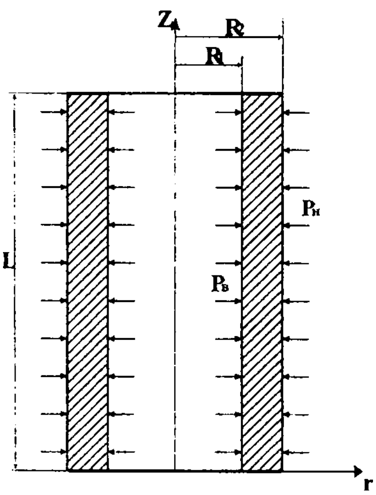

Рис.1. Полый цилиндр, нагруженный внутренним и внешним давлением

Тогда в цилиндрической системе координат (r, Z) поле напряжений и деформаций имеет отличные от нуля компоненты σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ (для упрощения примем σ_{13} и ε_{13} равным нулю). Введем относительные координаты $\xi = Z/R_1$ и $\rho = r/R_1$, изменяющихся в пределах $0 \le \xi \le L/R_1$ и $1 \le \rho \le R_2/R_1$, где R_1, R_2 – внутренний и наружный радиусы цилиндра; L – его высота, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ – напряжения и деформации соответственно в радиальном, окружном и осевом направлениях.

В данном случае дифференциальные уравнения равновесия имеют вид [1]

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi} = 0. \tag{1}$$

Деформации и перемещения точек цилиндра связаны следующими соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial u_1}{\partial \rho}; \varepsilon_{22} = \frac{1}{R_1}\frac{u_1}{\rho}; \varepsilon_{33} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial u_2}{\partial \xi}. \tag{2}$$

Физические уравнения с учетом объемных деформаций имеют вид

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] + \alpha T + \frac{1}{3}S.
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $T(r, Z)$ предполагается заданной функцией от координат, $S(T(r, Z), ф, t)$ – радиационное распухание.

Граничные условия:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -P_в \quad \text{при} \quad \rho = 1, \\
\sigma_{11} &= -P_н \quad \text{при} \quad \rho = R_2 / R_1, \\
\varepsilon_{33} &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \xi = L / R_1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Вывод основных формул

Решение задачи будем искать в перемещениях, для чего, согласно (3), выразим напряжения через деформации

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{11} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_{22} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) + \varepsilon_{33} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)].
\end{aligned} \tag{5}
$$

Подставляя (2) в (5) получим зависимость напряжений от перемещений:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{\nu}{R_1}(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \frac{u_1}{\rho}) + \frac{1}{R_1}\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)], \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{\nu}{R_1}(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{u_1}{\rho} + \frac{\partial u_1}{\partial \rho}) + \frac{1}{R_1}\frac{u_1}{\rho} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)], \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{\nu}{R_1}(\frac{u_1}{\rho} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \rho}) + \frac{1}{R_1}\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - (1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)].
\end{aligned} \tag{6}
$$

С учетом (6) уравнение равновесия (1) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\nu\left\{\frac{\partial^2 u_2}{\partial \rho \partial \xi} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{u_1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right\} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}(1-2\nu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - \frac{u_1}{\rho}\right) - (1+\nu)\frac{\partial}{\partial \rho}(\alpha\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{3}\frac{\partial S}{\partial \rho}) = 0, \\
&\nu\left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho \partial \xi} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right\} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - (1+\nu)\frac{\partial}{\partial \xi}(\alpha\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial S}{\partial \xi}) = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

А граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{\nu}{R_1}(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-\frac{\partial u_1}{\partial\rho}+\frac{u_1}{\rho})+\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_1}{\partial\rho}-(1+\nu)(\alpha T+\frac{1}{3}S)]=-P_B,$$
$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\frac{\nu}{R_1}(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-\frac{\partial u_1}{\partial\rho}+\frac{u_1}{\rho})+\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_1}{\partial\rho}-(1+\nu)(\alpha T+\frac{1}{3}S)]=-P_H, \quad (8)$$
$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_2}{\partial\xi}=0 при \xi=0;\xi=L/R_1.$$

Эти формулы были выведены для общего случая определения напряжений и деформаций полого цилиндра в условиях реакторного облучения и неравномерного нагрева. В следующем пункте рассмотрим конкретную задачу для полого бесконечно длинного цилиндра в тех же условиях.

Полый бесконечно длинный цилиндр

Рассмотрим осесимметричное распределение напряжений и деформаций полого бесконечно длинного цилиндра (т.е. $L/R_2>15$) в условиях неравномерного нагрева, реакторного облучения, а также под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений (рис.1).

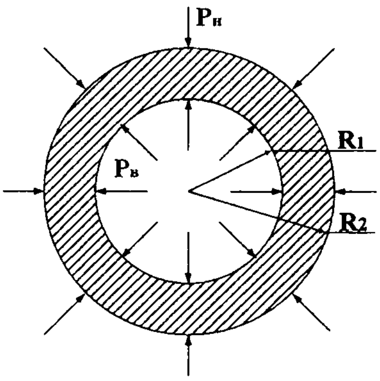

Рис. 2. Сечение цилиндра нагруженного внешним и внутренним давлениями

Основным отличием бесконечно длинного цилиндра состоит в том, что можно рассматривать не весь цилиндр, а лишь его отдельное сечение (рис. 2).

Тогда в цилиндрической системе координат поле напряжений имеет отличные от нуля компоненты σ_{11}, σ_{22}, $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22}$. Для полого открытого цилиндра выполняется условие плоской деформации ($\varepsilon_{33}=0$).

Тогда для решения задачи запишем следующие уравнения [1-2]

Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial r}+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{r}=0. \quad (9)$$

Деформации и перемещения точек цилиндра связаны следующими соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial r};\quad \varepsilon_{22}=\frac{u}{r}. \quad (10)$$

Физические уравнения записываются в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S,$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T + \frac{1}{3}S, \qquad (11)$$
$$0 = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})] + \alpha T + \frac{1}{3}S.$$

Где $T(r)$ предполагается заданной функцией от координат, $S(T(r), ф, t)$ функция, зависящая от температуры, времени, заданного нейтронного потока.

ГУ примем следующими:

$$\sigma_{11} = -P_в \text{ при } r = R_1,$$
$$\sigma_{11} = -P_н \text{ при } r = R_2. \qquad (12)$$

Вывод основных формул

Решение задачи будем искать в перемещениях, для чего, согласно (11), выразим напряжения через деформации

$$\sigma_{11} = \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\varepsilon_{11} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)],$$
$$\sigma_{22} = \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\varepsilon_{22} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)]. \qquad (13)$$

Подставляя (10) в (13) получим зависимость напряжений от перемещений:

$$\sigma_{11} = \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}) - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)],$$
$$\sigma_{22} = \frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{u}{r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)]. \qquad (14)$$

С учетом (6) уравнение равновесия (1) примет вид

$$(\nu - 1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + (1+\nu)(\alpha\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{3}\frac{\partial S}{\partial r}) = 0. \qquad (15)$$

ГУ запишутся в следующем виде:

$$\frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}) - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)] = -P_B,$$
$$\frac{\nu E}{2\nu^2 + \nu - 1}[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}) - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{2\nu^2 + \nu - 1}(1+\nu)(\alpha T + \frac{1}{3}S)] = -P_H. \qquad (16)$$

Решение задачи конечноразностным методом

Для решения задачи используем шаговый метод по времени, одновременно решая на каждом временном шаге уравнение (15) методом конечных разностей с учетом ГУ (16).

Разностное уравнение будет иметь вид

$$(\nu-1)\left(\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}-\frac{u_i}{r_i^2}+\frac{1}{r_i}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)+(1+\nu)(\alpha\frac{T_i-T_{i-1}}{h}+\frac{1}{3}\frac{S_i-S_{i-1}}{h})=0. \qquad (17)$$

Уравнение (17) записано для внутренних точек области, ограниченными точками 0 и n. ГУ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\nu E}{2\nu^2+\nu-1}[\frac{u_1-u_0}{h}-\frac{u_0}{r_0})-\frac{E}{2\nu^2+\nu-1}\frac{u_1-u_0}{h}-\frac{E}{2\nu^2+\nu-1}(1+\nu)(\alpha T_0+\frac{1}{3}S_0)]=-P_B,\\&\frac{\nu E}{2\nu^2+\nu-1}[\frac{u_n-u_{n-1}}{h}-\frac{u_n}{r_n})-\frac{E}{2\nu^2+\nu-1}\frac{u_n-u_{n-1}}{h}-\frac{E}{2\nu^2+\nu-1}(1+\nu)(\alpha T_n+\frac{1}{3}S_n)]=-P_H.\end{aligned} \qquad (18)$$

В качестве примера выполнен расчет полого бесконечно длинного цилиндра с данными, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

R1, m	0,003
R2, m	0,006
E, МПа	1,50E+05
λ, Вт/(м к)	18
qv, Вт/м^3	2,20E+09
α, град^(-1)	1,83E-06
Рн, МПа	16
Рв, МПа	25
Ts, K	300
ф, нейр/(см^(2) ч)	2,81E+19

Где E – модуль упругости, λ – коэффициент теплопроводности, q_V – объемное тепловыделение, α – коэффициент линейного расширения материала цилиндра, T_S – температура наружной поверхности цилиндра, ф – нейтронный поток.

Термическая функция задается следующим образом:

$$T(r)=T_S+\frac{q_v}{4\lambda}(R_2^2-r^2). \qquad (19)$$

Функция радиационного распухания имеет вид

$$S(r,t)=4.9\cdot10^{-51}(\phi t)^{1.71}10^{\frac{1.549\cdot10^4}{T(r)}-\frac{5.98\cdot10^6}{T^2(r)}}. \qquad (20)$$

Решение разностных уравнений (17) (18) в системе Mathcad 2000 Professional с использованием формул для распределения температуры в цилиндре (19) и радиационного распухания (20), а так же формул для напряжений (14), строим график зависимости напряжений от радиуса цилиндра рис. 3.

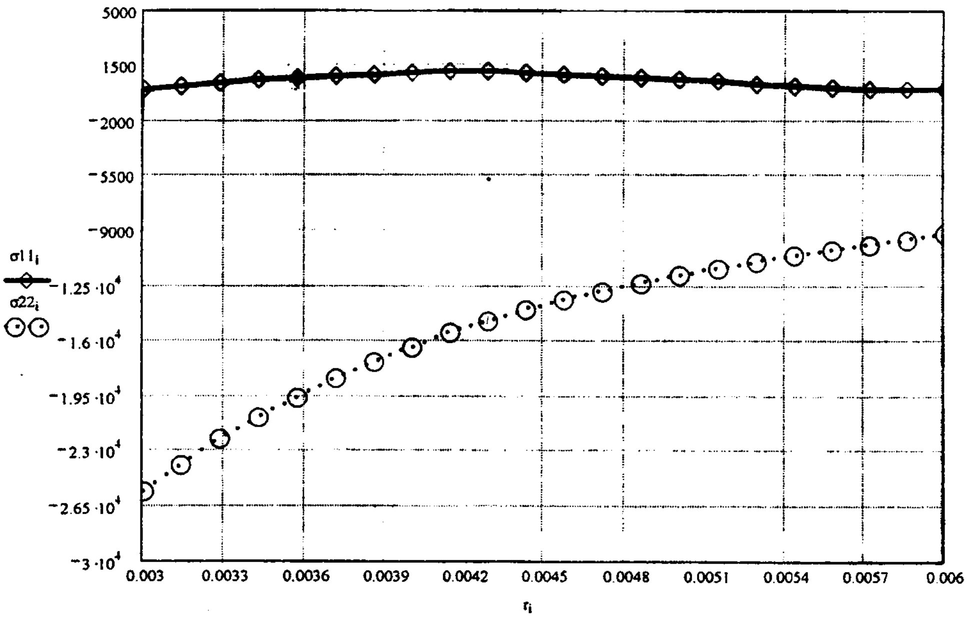

Рис. 3. Распределения по радиусу радиальных и окружных напряжений при $t = 1000$

Полученные данные (рис.3) показывают, что в любой момент времени можно получить поле терморадиационно упругих напряжений по сечению цилиндра и найти точки их максимальных значений с последующей оценкой несущей способностью цилиндра.

Заключение

Данный алгоритм решения поставленной задачи позволяет производить расчеты упруго-напряженно-деформированного состояния длинных полых цилиндров при значительных объемных изменениях, вызванных неравномерным нагревом и нейтронным облучением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И.С., Нестеренко, В.Б., Тверковкин, Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. – Мн.: Наука и техника, 1990.

2. Куликов, И.С., Тверковкин, Б.Е. Прочность тепловыделяюўіх элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов. – Мн.: Наука и техника, 1984.