Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

Часть 3

Минск 2009

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра инженерной математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство к решению задач для студентов механико-технологического факультета

В 7 частях

Часть 3

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией В.А. Нифагина

Минск 2009

УДК 51(076.2)
~~ББК 22.1я7~~
В 93

Составители:
Е.А. Глинская, И.В. Прусова,
О.В. Дубровина, А.Н. Мелешко

Рецензент
А.Д. Корзников

Данное издание содержит теоретические сведения, подробный разбор типовых примеров и задач, задания для самостоятельной работы по разделам математического анализа.

Часть 1 данного издания «Элементы линейной и векторной алгебры» (составители: Н.К. Прихач, Н.А. Кондратьева, О.Г. Вишневская, Е.А. Глинская) и Часть 2 «Элементы аналитической геометрии» (составители: О.Г. Вишневская, И.В. Прусова, Н.К. Прихач, Н.А. Кондратьева) вышли в БНТУ в 2008 г.

ISBN 978-985-525-111-9 (Ч. 3)
ISBN 978-985-479-903-2

1. ПРЕДЕЛЫ

1.1.Числовая последовательность и ее предел

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве N. Она записывается в виде $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ или сокращенно (a_n), где $a_n = f(n)$ – общий член последовательности; n – номер члена последовательности.

Последовательность (a_n) называется *ограниченной* (*неограниченной*), если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется $|a_n| \leq M$ (если существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется $|a_n| > M$).

Число a называется *пределом последовательности* (a_n), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$, такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. При этом пишется $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то (a_n) называется *бесконечно малой последовательностью* (б. м. п.). Такие последовательности обладают следующими свойствами:

1. Алгебраическая сумма конечного числа б. м. п. есть б. м. п.
2. Произведение конечного числа б. м. п. есть б. м. п.
3. Произведение б. м. п. на ограниченную последовательность есть б. м. п.

Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой последовательностью* (б. б. п.), если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ $(a_n \neq 0)$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$ $(a_n \neq 0)$.

Если (a_n) и (b_n) сходятся, то справедливы следующие теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где c – const;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Примеры

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$.

В большинстве случаев нахождение пределов последовательностей связано с преобразованием общего члена последовательности и дальнейшим использованием понятий б. м. п. и б. б. п. и их свойств.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на n^2:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1/n}{1+1/n^2},$$

т. к. n – бесконечно большая последовательность, то $\dfrac{1}{n}$ – бесконечно малая последовательность, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cos(\pi n/3)}{n^2+1}$.

Решение. Последовательность $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ является б. м. п., т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$ (см. пример 1), последовательность $\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)$ является ограниченной, так как $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\le 1\ \forall n\in N$. Таким образом, последовательность $\left(\frac{n}{n^2+1}\cos\frac{n\pi}{3}\right)$ есть произведение б. м. п. на ограниченную последовательность, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos\frac{n\pi}{3}=0$.

3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n+2}-n$.

Решение. В числителе сумма n членов арифметической прогрессии, поэтому

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2+2n}{2}\cdot n=(1+n)\cdot n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n+2}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{n+2}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-2n}{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{2}{n}}=-1,$$

т. к. $\frac{2}{n}$ – б. м. п.

4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{2(n+1)!-(n+2)!}$.

Решение. Учитывая, что $(n+3)!=(n+3)(n+2)(n+1)!$, $(n+2)!=(n+2)(n+1)!$, имеем

$$a_n=\frac{(n+3)!}{2(n+1)!-(n+2)!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2(n+1)!-(n+2)(n+1)!}=$$

$$=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+2)(n+1)!\left(\frac{2}{n+2}-1\right)}=\frac{n+3}{\frac{2}{n+2}-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\dfrac{2}{n+2}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{2}{n+2}-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(n+3) = -1\cdot(\infty) = -\infty,$$

т. к. $\dfrac{2}{n+2}$ – б. м. п.

5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Решение. Умножим и разделим a_n на $\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)^2\right)$ и воспользуемся формулой $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n^3-n^2)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n^2\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}+n^2\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{1-\dfrac{2}{3^n}}=5$, т. к. $\dfrac{2}{3^n}$ – б. м. п.

7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

Решение. $a_n=\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\dots+(n-1))$; $1+2+3+\dots+(n-1)$ – арифметическая прогрессия, поэтому:

$$1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)=\frac{n}{2}(n-1)=\frac{n^2-n}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^2-n}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}.$$

8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Решение. Представим $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1+0=1.$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\sin\left(n^2\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4^{-n}-2\right)\left(5^{-n}-3\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\Big/\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{9n+2}+\frac{1}{n}\cos 2n\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^2-5}}$.

Ответы

1) 0; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0; 5) 0; 6) 6; 7) ∞; 8) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 9) $\frac{1}{3}$; 10) 1.

1.3. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ и записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to x_0$.

При помощи логических символов это определение можно записать:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) : \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (1.1)$$

Если в выражении (1.1) рассматривать только $x < x_0$ $(x > x_0)$, то имеем понятия левого (правого) предела функции в точке x_0, который обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)\right)$, или $f(x_0 + 0)$.

С помощью логических символов определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ записывается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (1.2)$$

Определение и обозначение предела при $x \to -\infty$ аналогичны.

Если в выражениях (1.1) и (1.2) $b = 0$, то $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (б. м. ф.) и записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (б. б. ф.) в точке x_0, если $\forall M \in R_+$, $\exists \delta(M) : \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$ и записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, при этом, если $f(x) > 0$ $\quad (f(x) < 0)$ $\quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \ne x_0$, то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right)$.

Связь между б. м. ф. и б. б. ф. следующая.

Если $f(x)$ – б. м. ф., то $\dfrac{A}{f(x)}$ – б. б. ф., где A – действительное число $\neq 0$.

Если $f(x)$ – б. б. ф., то $\dfrac{A}{f(x)}$ – б. м. ф., где $0 < A < \infty$.

Свойства функций, имеющих пределы при $x \to x_0$, $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$, выражаются следующей теоремой.

Теорема 1.1. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Свойства б. м. ф. аналогичны свойствам бесконечно малых последовательностей.

Произведение $f(x) \cdot g(x)$ при $x \to x_0$ есть б. б. ф., если $f(x)$ – б. б. ф. при $x \to x_0$, а $g(x)$ – или б. б. ф., или $|g(x)| < c$ в некоторой окрестности точки x_0.

По определению выполняются соотношения:

1) $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $\forall x \in R$;

2) $x(+\infty) = +\infty$, $x(-\infty) = -\infty$, $\forall x > 0$;

3) $x(+\infty) = -\infty$, $x(-\infty) = +\infty$, $\forall x < 0$;

4) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

5) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$.

Операции $(+\infty) + (-\infty) = \infty - \infty$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ не определены и называются *неопределенностями.* К неопределенностям относятся также отношения вида $\dfrac{0}{0}$; $0 \cdot \infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0.

В простейших случаях эти неопределенности раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения.

Кроме того, для всех элементарных функций в области их определения имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

При нахождении некоторых пределов полезно иметь в виду следующие свойства функций.

1. $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{a}{x} = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{a}{x} = +\infty;\quad \lim\limits_{x \pm\infty} \frac{a}{x} = 0$, где $a > 0,\ a \in R$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < a < 1, \\ +\infty & \text{при} \quad a > 1. \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad 0 < a < 1, \\ 0 & \text{при} \quad a > 1. \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad a > 1, \\ -\infty & \text{при} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{при} \quad a > 1, \\ +\infty & \text{при} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$

В дальнейшем будут использоваться первый и второй замечательные пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x \to x_0} (u(x))^{v(x)}$ необходимо иметь в виду, что если $\lim\limits_{x \to x_0} (u(x)) = a > 0,\ \lim\limits_{x \to x_0} (v(x)) = b$, то

$$\lim_{x \to x_0} (u(x))^{v(x)} = a^b.$$

Примеры

1. Доказать, пользуясь определением предела функции, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

Решение. Пусть $\varepsilon>0$, найдем такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, чтобы для всех значений x, отличных от 1 и удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, выполнялось неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$. Так как $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-1}\right|=|x-1|\ \forall x\neq 1$, то для $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)$ (а именно: $\delta=\varepsilon$), такое, что, для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\delta$, будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

Раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$

а) Пусть $f(x)$ – рациональная дробь. В этом случае числитель и знаменатель разлагают на множители.

Найти пределы.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^4+2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x+1)}{x^3(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{2x-3}=\dfrac{-1}{-7}=\dfrac{1}{7}$ (сокращение на $(x+2)$ возможно, т. к. $x\neq -2$, $x\to -2$).

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

Многочлен x^3+x-2 при $x=1$ равен 0, следовательно, он нацело разделится на $(x-1)$, т. е. $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$, $x^3-x^2-x+1=$ $=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$, поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{0}=\infty.$$

б) Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональные выражения. В этом случае иррациональность переводится из числителя в знаменатель или наоборот, а также используется замена переменной.

5. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\sqrt{1-x}=0.$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{3+x}-2\right)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\left(\sqrt{9+x}-2\right)\left(\sqrt{9+x}+2\right)\left(\sqrt{4-x}+3\right)}{\left(\sqrt{9+x}+2\right)\left(\sqrt{4-x}-3\right)\left(\sqrt{4-x}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{(5+x)\left(\sqrt{4-x}+3\right)}{\left(\sqrt{9+x}+2\right)(-5-x)}=-\lim_{x\to -5}\frac{\sqrt{4-x}+3}{\sqrt{9+x}+2}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2}{3}.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}.$

Вычислим этот предел при помощи замены переменной.

Пусть $x+4=t^2$, тогда $x=t^2-4$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-4}{2-t}=$

$=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t+2)}{2-t}=-\lim\limits_{t\to 2}(t+2)=-4.$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

а) Если вычисляется предел рациональной дроби вида $\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ при $x\to\infty$, то нужно разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени и перейти к вычислению предела.

10. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{9+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}}=\frac{1}{3}.$$

11. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\lim\frac{0}{1}=0.$$

12. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{0}=\infty.$$

б) Если $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональности, то и в этом случае ее числитель и знаменатель делят на x в старшей степени.

13. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{8x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\dfrac{\sqrt[4]{8x^4+1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[4]{8+\dfrac{1}{x^4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}.$$

Раскрытие неопределенности вида $\infty-\infty$

Эта неопределенность преобразуется к неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x-1-\left(x^2-7x+3\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{5}{2}.$$

Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при помощи первого замечательного предела

Найти пределы.

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin 5x}{5x}5x}{\dfrac{\sin 6x}{6x}6x}=\dfrac{5}{6}$.

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\cdot 2}{2x\cos 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\cos 2x}=\dfrac{2}{1}=2$.

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{matrix}\arcsin x=y\Rightarrow\\ x=\sin y,\ y\to0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\sin y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{\sin y/y}=\dfrac{1}{1}=1$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\operatorname{arctg}x}{2x+\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(2-\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$.

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}=\left|\begin{matrix}\dfrac{\pi}{2}-x=y\\ x\to\dfrac{\pi}{2},y\to0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\cos y}{y^2}=$

$$=\lim_{y\to0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2\sin\left(\dfrac{y}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\dfrac{y}{2}\cdot2\cdot\dfrac{y}{2}\cdot2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}=\left|\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\cdot\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2\sin x\cos x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-4\cos x(1+\cos x)=-4\cdot 1\cdot 2=-8.$$

Раскрытие неопределенности вида 1^∞ с помощью второго замечательного предела

Найти пределы.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3+2}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}\cdot\frac{2}{x+3}\cdot x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^{\frac{2x}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+3/x}}=e^2.$$

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e.$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}\right)^{2x}.$

Разделив числитель на знаменатель, получим $\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}=1+\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2-x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{x^2-x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{x^2-x+1}{2x+1}}\right)^{\frac{2x+1}{x^2-x+1}\cdot 2x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x}{x^2-x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+2/x}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=e^4.$$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=$

$=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a \mathrm{e}.$

Если $a=\mathrm{e}$, то имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln\mathrm{e}=1.$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left|a^x-1=y,\ a^x=1+y,\ x=\log_a(1+x),\ x\to 0,\ y\to 0\right|=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}=\dfrac{1}{\log_a \mathrm{e}}=\ln a.$

Если $a=\mathrm{e}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\ln\mathrm{e}=1.$

Результаты, полученные в примерах 24, 25 полезно использовать при решении примеров.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x}-1)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x}-1)\cdot 2x}{2x\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\dfrac{\sin x}{x}}=1\cdot 1\cdot 2=2.$

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-2x^2+11}{5x^2+3x^4+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+3x^2}{2x^3-100x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2-4}{7x^4-x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$;

7) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$;

8) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-\sqrt{x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$; 17) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; 21) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+1)-\ln(2x-1))$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{3^x-1}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; 25) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Ответы

1) $-\frac{1}{2}$; 2) ∞; 3) ∞; 4) 5; 5) 0; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{3}{2}$; 8) 3; 9) ∞; 10) 0;

11) $-\infty$; 12) $\frac{1}{2}$; 13) 4; 14) 8; 15) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 16) $\frac{1}{\cos^2 a}$; 17) $\frac{\pi}{2}$; 18) $\frac{1}{2}$; 19) e^{-4};

20) e^2; 21) 1; 22) 3; 23) $5/\ln 3$; 24) $3/2$; 25) e; 26) 1.

1.5. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Чтобы сравнить две бесконечно малые функции (в дальнейшем б. м. ф.) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$, находят предел их отношения при $x\to x_0$. При этом:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется *б. м. ф. более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$ при $x\to x_0$ и записывается это так: $\alpha(x)=0(\beta(x))$;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, $c\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *б. м. ф. одного порядка малости*; в частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными б. м. ф. при* $x\to x_0$ и обозначается это так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$;

3) если существует число $k \in R_+$, такое, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c$ и $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ *называется б. м. ф. порядка* k по сравнению с $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

Классификация б. б. ф. проводится аналогично.

При раскрытии неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ используют теорему о замене б. м. ф. (б. б. ф.) эквивалентными им, пользуясь таблицей эквивалентных б. м. ф. при $x \to x_0$.

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$. 2. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$. 3. $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

4. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$. 5. $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x)$. 6. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

7. $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln b}$. 8. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$. 9. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

Здесь $\alpha(x)$ – б .м. ф. при $x \to x_0$.

Примеры

1. Сравнить при $x \to 0$ б. м. ф. $\beta(x) = x$ со следующими б. м. ф.:

а) $\alpha(x) = x - \sin x$; б) $\alpha(x) = \sqrt[5]{xe^x}$; в) $\alpha(x) = x\cos\frac{1}{x^2}$; г) $\alpha(x) = \sin 3x$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$, следовательно $x - \sin x = 0(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{xe^x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{5}} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = 1\cdot\infty = \infty$, следовательно $\alpha(x) = \sqrt[5]{xe^x}$ есть б. м. ф. более низкого порядка малости, чем $\beta(x) = x$ при $x \to 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}$ и этот предел не существует, то б. м. ф. $\alpha(x) = x\cos\frac{1}{x^2}$ не сравнима с $\beta(x) = x$ при $x \to x_0$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x}=3$, следовательно, б. м. ф. $\alpha(x)=\sin 3x$ и $\beta(x)=x$ одного порядка малости при $x\to 0$.

2. Определить порядок малости б. м. ф. $\alpha(x)$ по сравнению с б. м. ф. $\beta(x)=x$ при $x\to 0$, если

а) $\alpha(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{1+x}$; б) $\alpha(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x^k(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{1}{6}}\right)}{x^k(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^{\frac{1}{6}}}{1+x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{3}-k}=1$,

если $k=\dfrac{1}{3}$, следовательно, порядок малости $\alpha(x)$ по сравнению с $\beta(x)$ при $x\to 0$ равен $\dfrac{1}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{1}{4}}\left(1+x^{\frac{1}{12}}\right)}{x^k}=1$, если $k=\dfrac{1}{4}$.

3. Определить порядок роста б. б. ф. $f(x)=\dfrac{x^4}{\left(x^2-1\right)^2}$ относительно б. б. ф. $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$ при $x\to 1$.

Решение. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\varphi^k(x)}$ и подберем k такое, чтобы этот предел имел конечное значение, отличное от нуля.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4(x-1)^k}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4}{(x+1)^2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^k}{(x-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}(x-1)^{k-2}=\frac{1}{4},\text{ если } k=2.$$

Значит, $f(x)$ – б. б. ф. порядка $k=2$ по сравнению с б. б. ф. $\varphi(x)$ при $x\to 1$.

4. Используя таблицу эквивалентных б. м. ф., найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+\mathrm{arctg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\left(e^{3x}-1\right)^2}}{\mathrm{tg}\,x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^3(1+x)}{3\sin^2 x+x}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+\mathrm{arctg}2x}=\left|\begin{array}{ll} e^{2x}-1\sim 2x, & \mathrm{arctg}2x\sim 2x \\ \arcsin 3x\sim 3x, & \text{при } x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x-7x^2}{3x+2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(2-7x)}{5x}=\frac{2}{5};$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\left(e^{3x}-1\right)^2}}{\mathrm{tg}\left(x^2\right)}=\left|\begin{array}{l} e^{3x}-1\sim 3x \\ \qquad\qquad \text{при } x\to 0 \\ \mathrm{tg}\,x^2\sim x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(3x)^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{9}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{9}}{x^{\frac{4}{3}}}=\infty;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\ln^3(1+x)}{3\sin^2 x+x}=\left|\begin{array}{l} \ln(1+x)\sim x \\ \qquad\qquad \text{при } x\to 0 \\ \sin x\sim x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x+1}=0.$$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Сравнить бесконечно малые функции:

1) $\alpha(x)=\mathrm{sh}\,x$; $\beta(x)=x$, $x\to 0$; 2) $\alpha(x)=\sin^2\left(\sqrt{5x}\right)$; $\beta(x)=x$, $x\to 0$.

Найти пределы, используя таблицу эквивалентных б. м. ф.:

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}(a>0)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{\mathrm{tg}\left(3x^2\right)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\sin^2 x+x^2}}{\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{\arcsin^2 x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x\cdot\mathrm{arctg}5x}{x^4-x^3+x^2}$; 10) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t^2}-\cos t}{t^2}$.

Ответы

1) $\alpha(x) \sim \beta(x)$; 2) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости; 3) $a^a \ln a$; 4) $-\frac{1}{3}$;

5) 4; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}0$; 7) $2\sqrt{2}$; 8) 6; 9) 40; 10) $\frac{3}{2}$.

1.6. Непрерывность и точки разрыва функции

I. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

На практике применяются и другие определения непрерывности функции в точке x_0.

II. $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

а) $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

б) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$;

в) и выполняются равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

III. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества, то она непрерывна на этом множестве.

Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Точку x_0 называют *точкой разрыва функции* $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ – не определена в этой точке;

2) $f(x)$ определена в точке x_0, но не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (то есть $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$).

Различают следующие случаи точек разрыва функции:

1) если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и при этом $x_0 \notin D(f)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва*;

2) если не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но существуют конечные односторонние пределы, причем $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то точка x_0 называется *разрывом первого рода*, а разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ – *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0;

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$ или не существует, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

Примеры

1. Исследовать на непрерывность функции:

а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$; в) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$; г) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\in[0,1), \\ 4-x, & x\in(1,4]. \end{cases}$

Решение. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ определена на всем множестве R за исключением точки $x=0$. Следовательно, точка $x=0$ является точкой разрыва данной функции.

Выясним характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы в этой точке:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2};$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, существуют конечные односторонние пределы, но $f(0-0)\neq f(0+0)$. Значит, $x=0$ – точка разрыва первого рода. Скачок этой функции равен $f(0+0)-f(0-0)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

График этой функции (рис. 4.1) построим с учетом того, что $E(y)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=0$.

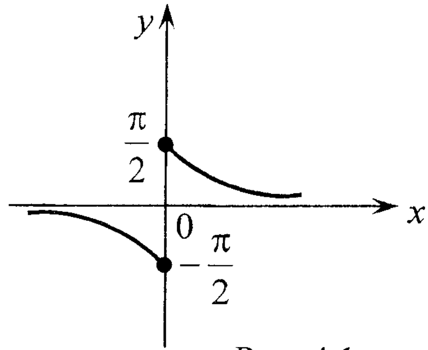

Рис. 4.1

б) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ является элементарной и непрерывна на своем множестве задания R, кроме точки $x=1$. Точка $x=1$ – точка разрыва функции. Так как

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}=3^{\infty}=\infty;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}=0.$$

Один из односторонних пределов равен ∞, значит $x=1$ – разрыв второго рода. Укажем поведение графика функции (рис. 4.2) лишь в окрестности точки разрыва.

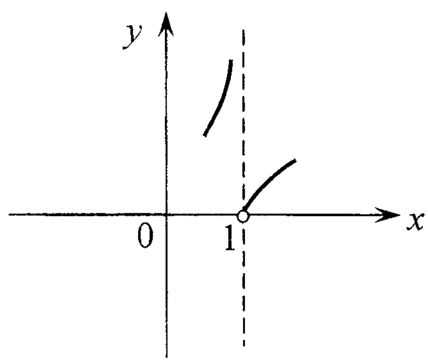

Рис. 4.2

в) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ не определена лишь в одной точке $x=2$, значит $x=2$ – точка разрыва.

Найдем односторонние пределы:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2-0}\left(x^2+2x+4\right)=12.$$

Аналогично $f(2+0)=12$.

Здесь $f(2-0)=f(2+0)\neq f(2)$, следовательно, $x=2$ – точка разрыва первого рода, а именно, устранимый разрыв.

Функцию $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ можно доопределить в точке $x=2$ таким образом, чтобы она была непрерывной на R, достаточно для этого значение функции в точке $x=2$ принять равным 12, то есть функция $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & \forall x\neq 2,\\ 12, & x=2\end{cases}$ будет уже непрерывной в точке $x=2$.

г) $f(x)=\begin{cases}x^3+2, & x\in[0,1),\\ 4-x, & x\in[1,4]\end{cases}$ является составной. Составляющие ее функции непрерывны на своей области задания. Точкой разрыва может быть лишь точка $x=1$, в которой меняется аналитическое выражение функции.

Найдем односторонние пределы:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^3+2\right)=3;\ f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(4-x)=3.$$

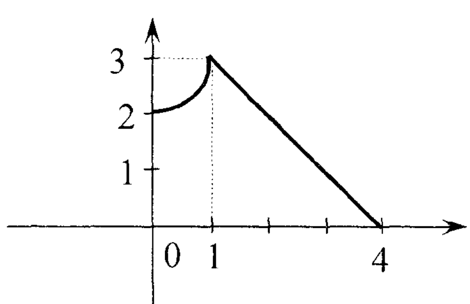

Рис. 4.3

Согласно заданию функции $f(1)=4-1=3$. Так как $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$, то в точке $x=1$ функция непрерывна. Ее график представлен на рис. 4.3.

1.7. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и указать характер точек разрыва:

1) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$; 3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x\le 2; \end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x\left(\sqrt{x+3}-1\right)}$; 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

7) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$; 8) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le -1, \\ \sqrt{x^2-1}, & -1\le x\le 1, \\ x, & x>1; \end{cases}$

9) $f(x)=\dfrac{1}{1+4^{\frac{1}{x}}}$; 10) $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$.

Ответы

1) $x=0$ –°разрыв второго рода;
2) $x=1$ –°разрыв первого рода;
3) $x=1$ –°разрыв первого рода;
4) $x=0$ –°разрыв второго рода;
5) $x=0$, $x=-2$ –°разрывы первого рода;
6) $x=0$ –°разрыв первого рода;
7) $x=2$ –°разрыв первого рода;
8) $x=\pm 1$ –°разрывы первого рода;
9) $x=0$ –°разрыв первого рода;
10) $x=1$ –°разрыв первого рода;
$x=2$ –°разрыв второго рода.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная функции. Дифференцирование сложных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой δ – окрестности точки x_0 и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$, где $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Предел отношения $\dfrac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ при условии, что последнее произвольным образом стремится к нулю называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0. Этот предел обозначается $f'(x_0)$; $y'(x_0)$; $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Другие обозначения производной в точке x: $(f(x))'$; $\dfrac{df(x)}{dx}$; $\dfrac{d}{dx} f(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$; y'_x; $\dot{y}$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y = f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$, где α – величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox, поэтому уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно к касательной, называется *нормалью к графику функции* $y = f(x)$ *в этой точке*.

Если $f'(x_0) = 0$, нормаль имеет уравнение $x = x_0$.

Если функция $x = f(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки (координата x такой точки есть известная функция времени t), то производная $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ есть ее скорость в момент времени t. В этом заключается механический смысл производной:

$$v(t) = s'(t).$$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в некоторой точке x, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

$$(cu)' = cu';$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}, \text{ (где } c - \text{const}); \qquad (2.1)$$

$$(u + v)' = u' + v'; \qquad (2.2)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; \qquad (2.3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad (2.4)$$

Формулы (2.2) и (2.3) обобщаются на случай алгебраической суммы (произведения) любого конечного числа функций $u_k = u_k(x)$ $\left(k = \overline{1.n}\right)$, имеющих производную в точке x:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n',$$

$$(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n'.$$

Приведем таблицу основных производных.

1. $(c)' = 0;$ (2.5)

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in R;$ (2.6)

3. $(a^{x})' = a^{x}\ln a \quad (a \in R_{+});$

4. $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x};$ (2.7)

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a};$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$ (2.8)

7. $(\sin x)' = \cos x;$ (2.9)

8. $(\cos x)' = -\sin x;$ (2.10)

9. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

10. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

11. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x;$

12. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x;$

13. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$

14. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x};$

15. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

16. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

17. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

18. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Производная сложной функции

Пусть на множестве T задана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, причем функция $x = \varphi(t)$, (x – промежуточный аргумент) имеет в некоторой точке $t \in T$ производную $x' = \varphi'(t)$, а функция $y = f(x)$ – в соответствующей точке $x \in X$ (X – множество значений функции $x = \varphi(t)$) производную $y' = f'(x)$, тогда

$$y'(t) = f'(x)\varphi'(t),$$

т. е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Аналогично находится и производная сложной функции с большим числом промежуточных аргументов. Например, если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$ (два промежуточных аргумента), т. е. если $y = f(\varphi\{\psi(t)\})$, то

$$y'(t) = f'(u)\varphi'(x)\psi'(t). \qquad (2.11)$$

Производная обратной функции

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем в рассматриваемой точке x производная функции $y = f(x)$ не равна нулю, то для производной обратной функции в соответствующей точке y справедлива формула

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Из этой формулы следует, что

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{2.12}$$

Примеры

1. Используя определение производной, найти производные следующих функций: а) $f(x)=5x^3-2x^2+1$; б) $f(x)=\sin^2 x$.

Решение. а) Согласно определению производной для ее нахождения необходимо составить отношение приращения функции к приращению аргумента Δx и затем рассмотреть предел этого отношения при произвольном стремлении Δx к нулю. Дадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx, тогда получим новое значение функции:

$$f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2+1=5x^3+15x^2\Delta x+15(\Delta x)^2+5(\Delta x)^3-$$

$$-2x^2-4x\Delta x-2(\Delta x)^2+1;$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left(5x^3+15x^2\Delta x+15(\Delta x)^2+5(\Delta x)^3-2x^2-4x\Delta x-2(\Delta x)^2+1\right)-$$

$$-\left(5x^3-2x^2+1\right)=15x^2\Delta x+15x(\Delta x)^2+5(\Delta x)^3-4x\Delta x-2(\Delta x)^2.$$

Разделив приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{15x^2\Delta x+15x(\Delta x)^2+5(\Delta x)^3-4x\Delta x-2(\Delta x)^2}{\Delta x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=15x^2-4x+(15x-2)\Delta x+5(\Delta x)^2.$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(15x^2-4x+(15x-2)\Delta x+5(\Delta x)^2\right)=15x^2-4x.$$

Итак, $f'(x)=15x^2-4x$.

б) Поступая аналогично предыдущему случаю, найдем приращение функции в точке x:

$$\Delta y = \sin^2(x + \Delta x) - \sin^2 x.$$

Разделим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx, а затем перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2(x + \Delta x) - \sin^2 x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin(x + \Delta x) - \sin x)(\sin(x + \Delta x) + \sin x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) 2\cos\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\frac{\Delta x}{2} \right) = 2\cos x \sin x = \sin 2x.$$

2. Найти производные функций: а) $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{x^4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} - 4\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\varphi(x) = (1 - x^3)\ln x$; в) $s(t) = \frac{e^t \sin t}{2t^2 - 1}$.

Решение. а) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3} - x^{-4} + \frac{1}{\sqrt{5}} x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{5}{3}}.$$

Воспользовавшись последовательно формулами (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6), получим:

$$f'(x) = 6x^2 - (-4)x^{-3} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 4 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = 6x^2 + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{5x}} - \frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}.$$

б) Применяя сначала формулы (2.2) и (2.3), а затем формулы (2.6) и (2.8), найдем:

$$\varphi'(x) = -3x^2 \ln x + \frac{1}{x}\left(1 - x^3\right) = \frac{1 - x^3}{x} - 3x^2 \ln x .$$

в) При нахождении производной данной функции мы воспользуемся последовательно формулами (2.4), (2.3) и (2.2), а также (2.7), (2.9) и (2.6):

$$s'(t) = \frac{\left(e^t \sin t + e^t \cos t\right)\left(2t^2 - 1\right) - 4te^t \sin t}{\left(2t^2 - 1\right)^2} = \frac{e^t\left(\sin t + \cos t\right)}{2t^2 - 1} - \frac{4te^t \sin t}{\left(2t^2 - 1\right)^2} .$$

3. Вычислить частные значения производных следующих функций при указанных значениях аргумента:

а) $r(\varphi) = \varphi\cos\varphi + \sin\varphi,\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $v(t) = \frac{a^2 t - b^2 t^3}{ab\left(t^2 + 1\right)},\ \ t = 0$; в) $u(r) = \left(\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{m}\right)^2,\ \ r = -1$.

Решение. а) Найдем сначала производную в общем виде, используя формулы (2.2), (2.3), (2.6), (2.9) и (2.10):

$$r'(\varphi) = \cos\varphi - \varphi\sin\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi .$$

Подставляя в полученное выражение значение $\varphi = \frac{\pi}{4}$, получим

$$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right).$$

б) Воспользовавшись формулами (2.1), (2.2) и (2.4), а также учитывая, что a и b являются постоянными, получим:

$$v'(t) = \frac{\left(a^2 - 3b^2 t^2\right)\left(t^2 + 1\right) - \left(a^2 t - b^2 t^3\right)2t}{ab\left(t^2 + 1\right)^2} .$$

Полагая $t = 0$, имеем:

$$v(0) = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} .$$

в) Запишем сначала данную функцию в другом виде: $u(r) = r^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{2}{3}}$. Тогда, учитывая, что m является постоянной, найдем: $u'(r) = \frac{2}{3}r^{-\frac{1}{3}} - 2m^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{r}} - \frac{2\sqrt[3]{m}}{3\sqrt[3]{r^2}}$.

Соответственно, при данном значении $r = -1$

$$u'(-1) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{m} = -\frac{2}{3}\left(1 + \sqrt[3]{m}\right).$$

4. Для функции $f(x) = x^2 + 4x + 5$ найти $f'(-2)$ и $f'(0)$. Истолковать геометрически полученный результат.

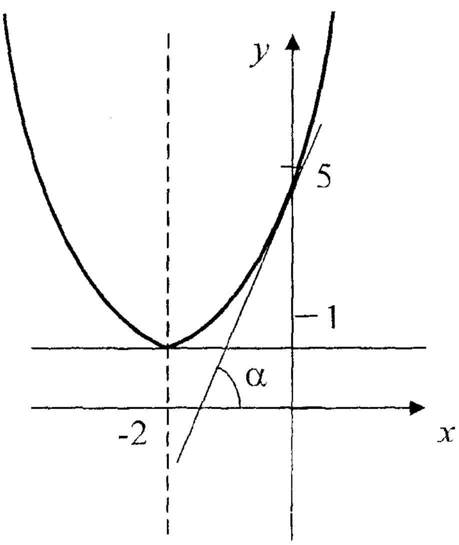

Рис. 2.1

Решение. Найдем производную данной функции $f'(x) = 2x + 4$ и ее частные значения $f'(-2) = 0$ и $f'(0) = 4$. Графиком данной функции является парабола, которую легко построить, если эту функцию записать в виде $f(x) = (x+2)^2 + 1$.

Из рис. 2.1 видно, что в точке с абсциссой $x = 0$ касательная образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс величины которого равен 4, а в точке с абсциссой $x = -2$ касательная параллельна оси Ox.

5. Найти производные следующих сложных функций, записав их сначала цепочкой основных элементарных функций: а) $y = \cos^3(2x - 5)$; б) $y = \sqrt[5]{\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)}$.

Решение. а) Запишем функцию $y = \cos^3(2x - 5)$ цепочкой основных элементарных функций: $y = u^3$ (степенная функция), $u = \cos v$ (тригонометрическая функция), $v = 2x - 5$ (линейная функция). Тогда согласно формуле (2.11) получим:

$$y'(x) = \left(u^3(v)\right)' u'(v)v'(x) = 3u^2(\cos v)'(2x-5)' = 3u^2(-\sin v)\cdot 2 =$$

$$=3\cos^2(2x-5)(-\sin(2x-5))\cdot 2=-6\cos^2(2x-5)\sin(2x-5).$$

б) Запишем данную функцию в виде $y=\left(\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)\right)^{\frac{1}{5}}$. Поступив, как в предыдущем случае, получим: $y=u^{\frac{1}{5}}$, где $u=\ln v$, $v=\operatorname{ctg} t$, $t=\frac{x}{4}$, тогда

$$y'(x)=\frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{v}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{20}\left(\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{4}x\right)\right)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{1}{4}x}\,\frac{1}{\sin^2\frac{1}{4}x}=$$

$$-\frac{1}{20\sqrt[5]{\ln^4\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{4}x\right)}\,\sin^2\frac{1}{4}x\,\operatorname{ctg}\frac{1}{4}x}.$$

6. Найти $\frac{dy}{dx}$, если а) $x=\mathrm{e}^{\arcsin y}$; б) $x=2-3y+y^3$.

Решение. а) Так как $\frac{dy}{dx}=\mathrm{e}^{\arcsin y}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, то согласно формуле (2.12) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\mathrm{e}^{\arcsin y}}=\sqrt{1-y^2}\ \mathrm{e}^{-\arcsin y}$. Заметим, что здесь можно выразить $\frac{dy}{dx}$ через переменную x. Действительно, из аналитического выражения данной функции следует, что

$$y=\sin\ln x. \tag{2.13}$$

Тогда $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\sin^2\ln x}\ x^{-1}=\frac{\cos\ln x}{x}$.

Легко заметить, что такой же результат можно получить, если продифференцировать выражение (2.13) по переменной x.

б) В данном случае

$$\frac{dy}{dx}=-3+3y^2=3(y^2-1),$$

значит,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\left(y^2-1\right)}.$$

Так как уравнение $x=2-3y+y^3$ неразрешимо относительно y, то полученное выражение для производной $\frac{dy}{dx}$ является окончательным.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Исходя из определения производной, найти производные следующих функций: а) $y=x^3-x$; б) $y=(x-2)^2$; в) $y=\cos^2 x$; г) $y=\frac{1}{x}$; д) $y=\sqrt{x}$.

Найти производные данных функций:

2. $y=3x^2-5x+2$; 3. $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$; 4. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$;

5. $\varphi(t)=\frac{10}{a\sin t-b\cos t}$; 6. $r(\alpha)=\frac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{1+2\operatorname{tg}\alpha}$; 7. $y=x^2\sin x$; 8. $v(t)=\frac{2t}{t+3}$;

9. $\psi(x)=\sqrt{x}\operatorname{arctg} x$; 10. $y=\frac{\ln x}{x}$; 11. $x(t)=\mathrm{e}^t\sin t$; 12. $\Phi(r)=\frac{\mathrm{e}^r-\ln r}{\mathrm{e}^r+\ln r}$;

13. $F(\omega)=\operatorname{sh}\omega\cos\omega$; 14. $r(\varphi)=\varphi^2\ln\varphi$; 15. $s(t)=\frac{t\mathrm{e}^t}{1-t^2}$; 16. $g(x)=\frac{4}{x}\arcsin x$.

17. Вычислить частные значения производных следующих функций при указанных значениях аргумента:

а) $y=\mathrm{e}^x\arcsin x+\operatorname{arctg} x$ при $x=0$; б) $f(x)=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}$ при $x=0{,}01$; в) $z=\frac{\cos t}{1-\sin t}$ при $t=\frac{\pi}{6}$; г) $y=\frac{a+b}{3-2x}+\frac{5x^4-1}{a-b}$ при $x=0$; д) $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$ при $\varphi=2$; е) $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ при $x=2$.

18. Для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ найти $f'(0)$ и $f'(1)$. Истолковать геометрически полученный результат.

19. В каких точках угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^3$ равен 3?

20. В какой точке касательная к параболе $y=x^2$ 1) параллельна оси Ox; 2) образует с осью Ox угол в 45°?

21. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y=x^2$ и $y=x^3$ параллельны?

Найти производные сложных функций:

22. $y=\sin^2(ax+b)$; 23. $y=\arcsin\sqrt{x}$; 24. $f(t)=\cos(3^t+3^{-t})$;

25. $F(v)=10^{v^2+v+1}$; 26. $\rho(x)=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; 27. $r(\varphi)=\dfrac{\cos\varphi}{3\sin^2\varphi}$; 28. $s(t)=\left(\dfrac{t^2}{3t+1}\right)^9$;

29. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$; 30. $r(\varphi)=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}}$; 31. $y=\dfrac{5^{2x}}{2+\sqrt{4+5^{2x}}}$;

32. $r(\varphi)=\dfrac{\varphi}{\cos^2 a\varphi}$; 33. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 34. $s(t)=\sin^4 t+\cos^4 t$; 35. $H(v)=\mathrm{e}^{2v}\ln\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}$;

36. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$; 37. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{-2x}}$; 38. $y=\operatorname{tg}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$; 39. $y=\sin^2 x\sin x^2$;

40. $h(x)=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; 41. $v(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$; 42. $g(x)=\sqrt[4]{\left(1+\operatorname{th}^2(x)\right)^3}$; 43. $\varphi(x)=\mathrm{e}^{ch^2 x}$.

Ответы

1. а) $3x^2-1$; б) $2(x-2)$; в) $-\sin 2x$; г) $-\dfrac{1}{x^2}$; д) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. 2. $6x-5$.

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^4}}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}$. 4. $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. 5. $-\dfrac{10(a\cos t+b\sin t)}{(a\sin t-b\cos t)^2}$.

6. $-\dfrac{\cos\alpha+2\sin\alpha+\dfrac{4}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}{(1+2\operatorname{tg}\alpha)^2}$. 7. $x(2\sin x+x\cos x)$. 8. $\dfrac{6}{(t+3)^2}$.

9. $\dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg}x+2x}{2x(1+x^2)}\sqrt{x}$. 10. $\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. 11. $\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)$. 12. $\dfrac{2\mathrm{e}^r(r\ln r-1)}{r(\mathrm{e}^r+\ln r)^2}$.

13. $\cos\omega \operatorname{ch}\omega - \operatorname{sh}\omega \sin\omega$. 14. $\varphi(2\ln\varphi + \varphi)$. 15. $\dfrac{(1+t+t^2-t^3)e^t}{(1-t^2)^2}$.

16. $\dfrac{4\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 17. а) 2; б) -9000; в) 2; г) $\dfrac{2}{9}(a+b)$; д) $\dfrac{5}{9}$; е) -1.

18. 0; $-\dfrac{1}{2}$. 19. $x_1=-1$; $x_2=1$. 20. $(0;0)$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$. 21. При $x=0$ и при $x=\dfrac{2}{3}$.

22. $a\sin 2(ax+b)$. 23. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$. 24. $(3^{-t}-3^t)\ln 3\sin(3^t+3^{-t})$.

25. $10^{v^2+v+1}(2v+1)\ln 10$. 26. $\dfrac{4a^2x}{a^4-x^4}$. 27. $-\dfrac{1}{3\sin^2\varphi}$. 28. $\dfrac{9t^{16}(3t^2+2t)}{(3t+1)^{10}}$. 29. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

30. $\dfrac{1}{2\cos 2\varphi}$. 31. $\dfrac{5^{2x}\ln 5}{\sqrt{4+5^{2x}}}$. 32. $(1+2a\varphi\operatorname{tg}a\varphi)\dfrac{1}{\cos^2 a\varphi}$. 33. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{(1-\sin x)\sin x}}$.

34. $-\sin 4t$. 35. $e^{2v}\left(\dfrac{1}{\sin v}+2\ln\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\right)$. 36. $2^{\frac{x}{\ln x}}\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$. 37. $\dfrac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg}e^{-2x})^2}$.

38. $-\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2\cos^2\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)}$. 39. $2\sin x(x\sin x\cos x^2+\cos x\sin x^2)$.

40. $\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)\left(2+\ln(2x+3)\right)\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. 41. $\dfrac{e^{t^2}}{(e^t+e^{-t})^2}\left(2t(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})\right)$.

42. $\dfrac{3\operatorname{th}x}{2\operatorname{ch}^2x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2x}}$. 43. $e^{\operatorname{ch}^2x}\operatorname{sh}2x$.

2.3. Логарифмическое дифференцирование

Производные неявных функций и функций, заданных параметрически

Логарифмическое дифференцирование заключается в том, что сначала логарифмируют данную функцию, а затем уже приступают к дифференцированию. Производную от логарифма функции $y=f(x)$, которая положительна и имеет производную в рассматриваемой точке $x\in X$, называют ее *логарифмической производной в точке* x и находят по формуле

$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

или

$$\left(\ln y\right)' = \frac{y'}{y}.$$

Логарифмическое дифференцирование используют при нахождении производной степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$. Его также целесообразно применять, когда заданная функция содержит операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию аргумента x, т. е. $y = y(x)$, то при нахождении производной этой функции предполагают, что в данное уравнение вместо y подставлено соответствующее выражение $y(x)$ и получено тождество $F(x, y(x)) = 0$. Затем дифференцируют по x это тождество (не забывая, что y есть функция аргумента x) и решают полученное уравнение относительно искомой производной. Как правило, она зависит от x и y.

Пусть y как функция аргумента x задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \text{где } t \in T.$$

Тогда производную этой функции можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \\ x = \varphi(t). \end{cases} \tag{2.14}$$

Примеры

1. Найти производные следующих степенно-показательных функций:

а) $y=\left(2x^3-4x+5\right)^{x^2+4}$; б) $y=\sqrt[x]{1+\sin^2 3x}$; в) $f(x)=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$; г) $\varphi(x)=(\operatorname{arctg}4x)^{x^2}$.

Решение. а) Логарифмируя данную функцию по основанию e, находим:

$$\ln y=\left(x^2+4\right)\ln\left(2x^3-4x+5\right).$$

Дифференцируем обе части этого равенства по x, учитывая что y есть функция x:

$$\frac{y'}{y}=2x\ln\left(2x^3-4x+5\right)+\left(x^2+4\right)\frac{6x^2-4}{2x^3-4x+5}.$$

Умножая обе части последнего равенства по y и подставляя $\left(2x^3-4x+5\right)^{x^2+4}$ вместо y, получим:

$$y'=\left(2x\ln\left(2x^3-4x+5\right)+\left(x^2+4\right)\frac{\left(x^2+4\right)\left(6x^2-4\right)}{2x^3-4x+5}\right)\left(2x^3-4x+5\right)^{x^2+4}.$$

б) Поступая, как и в предыдущем случае, находим

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln\left(1+\sin^2 3x\right).$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{y'}{y}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1+\sin^2 3x\right)+\frac{1}{x}\frac{2\sin 3x\cos 3x\cdot 3}{1+\sin^2 3x}$$

или

$$\frac{y'}{y}=-\frac{\ln\left(1+\sin^2 3x\right)}{x^2}+\frac{3\sin 6x}{x\left(1+\sin^2 3x\right)},$$

откуда имеем

$$y'=\sqrt[x]{1+\sin^2 3x}\left(\frac{3\sin 6x}{x\left(1+\sin^2 3x\right)}-\frac{\ln\left(1+\sin^2 3x\right)}{x^2}\right).$$

в) Логарифмируя функцию, получаем:

$$\ln f(x)=x(\ln x-\ln(x-1)).$$

Далее поступим уже известным образом:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x-\ln(x-1)+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right),$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\frac{x}{x-1}+1-\frac{x}{x-1},$$

$$f'(x)=\left(\ln\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}.$$

г) Выполняя последовательно такие же действия, как и в предыдущих случаях, будем иметь:

$$\ln\varphi(x)=x^2\ln\operatorname{arctg}4x,$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=2x\ln\operatorname{arctg}4x+x^2\frac{1}{\operatorname{arctg}4x}\frac{4}{1+16x^2}$$

$$\varphi'(x)=\left(2x\ln\operatorname{arctg}4x+x^2\frac{1}{\operatorname{arctg}4x}\frac{4}{1+16x^2}\right)(\operatorname{arctg}4x)^{x^2}.$$

2. Найти производную неявной функции $y=y(x)$, заданной уравнением:

а) $x^3-2xy^2+y^3=a^3$; б) $e^{xy}=x^2-y^2$; в) $\cos\frac{y}{x}=y^2$; д) $x^y=y^x$.

Решение. а) Дифференцируем обе части уравнения по переменной x, считая y функцией аргумента x (тогда $\frac{d}{dx}(y^2)=2yy'$ и $\frac{d}{dx}(y^3)=3y^2y'$) и учитывая, что $a^3=\text{const}$.

В итоге получим: $3x^2-2(y^2+2yy'x)+3y^2y'=0$.

Отсюда найдем: $(3y^2-4xy)y'=2y^2-3x^2$,

$$y'=\frac{2y^2-3x^2}{3y^2-4xy}.$$

б) Дифференцируя обе части уравнения по x с учетом, что y есть функция аргумента, имеем

$$e^{xy}(y + xy') = 2x - 2yy'.$$

Решив это уравнение относительно y', получим

$$y' = \frac{2x - ye^{xy}}{2y + xe^{xy}}.$$

в) Дифференцируя по x, имеем:

$$-\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xy' - y}{x^2} = 2yy',$$

откуда

$$y' = \frac{y\sin\frac{y}{x}}{2x^2y + x\sin\frac{y}{x}}.$$

г) Логарифмируем обе части данного уравнения (по основанию e), затем дифференцируем по x, рассматривая y как функцию аргумента x:

$$y\ln x = x\ln y,$$

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + x\frac{y'}{y}.$$

Решив последнее уравнение относительно y', получим:

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}.$$

3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически, если:

а) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t}, \\ y = \dfrac{1-t}{t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = \sqrt{1-\alpha^2}, \\ y = \arcsin\alpha. \end{cases}$

Решение. Найдем производную $\frac{dy}{dx}$, исходя из ее представления в виде (2.14).

а) Так как $$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \text{то}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\mathrm{tg}\,t.$$

Окончательно искомую производную запишем как функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\mathrm{tg}\,t, \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$$

В остальных случаях ход решения будет аналогичным.

б) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}, \\ \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1, \\ x = \dfrac{1+t}{t}. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\varphi} = a\sin\varphi, \\ \dfrac{dx}{d\varphi} = a(1-\cos\varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}, \\ x = a(\varphi - \sin\varphi). \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \\ \dfrac{dx}{d\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\alpha}, \\ x = \sqrt{1-\alpha^2}. \end{cases}$$

4. Найти при $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin 2\alpha, \\ y = \sin^2 \alpha, \end{cases}$ где $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Решение. Так как $\begin{array}{l} \dfrac{dy}{d\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha, \\ \dfrac{dx}{d\alpha} = 2\cos 2\alpha, \end{array}$ то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}2\alpha,$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\alpha=\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. Найти $\dfrac{dx}{dy}$, если: а) $\begin{cases} x = 1-t^2, \\ y = t-t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \sqrt{t}. \end{cases}$

Решение. Будем считать, что здесь задана параметрически переменная x как функция аргумента y. Тогда искомую производную можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}, \\ y = y(t). \end{cases}$$

а) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - 3t^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2t}{3t^2 - 1}, \\ y = t - t^3. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t}. \end{cases}$$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^x$; б) $r(\alpha) = (\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$; в) $s(\varphi) = \varphi^{e^\varphi}$; г) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$;

д) $\varphi(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$; е) $u(t) = \dfrac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$; ж) $y = \sqrt[x]{x}$; з) $y = (x^2 +)^{\sin x}$;

и) $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$; к) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; б) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; в) $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$; г) $y = \cos(x+y)$;

д) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$; е) $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; ж) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$;

з) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найти $\dfrac{dx}{dy}$, если а) $y^2\cos x = a^2\sin 3x$; б) $\sin(xy) = e^y$.

4. Вычислить при $x = 0$ значение производной неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением: а) $x^2 + xy + y^2 = 3$; б) $e^y + xy = e$.

5. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t}, \\ y = \arcsin\sqrt{t}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x = \cos 2\varphi, \\ y = \sin\varphi; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi), \\ y = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi). \end{cases}$

6. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если а) $\begin{cases} x = t^5, \\ y = t^3 + t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{tg}\alpha, \\ y = \operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}$

7. Найти при $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x = \sin^2\alpha, \\ y = \sin 2\alpha, \end{cases}$ где $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}\sqrt{2\alpha^3}, \\ y = \dfrac{1}{2}\alpha^2, \end{cases}$ где $\alpha \in [0; \infty)$.

8. Функция $y = y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = 3\cos\alpha, \\ y = 4\sin\alpha, \end{cases}$ $\alpha \in [-\pi; 0)$. Чему равна производная $\dfrac{dy}{dx}$, если: а) $x = 0$; б) $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$?

Ответы

1. а) $(1+\ln x)x^x$; б) $(2\cos 2\alpha \ln\cos\alpha - 2\sin^2\alpha)(\cos\alpha)^{\sin 2\alpha}$; в) $\left(\dfrac{1}{\varphi} + \ln\varphi\right)e^{\varphi}\varphi^{e^{\varphi}}$;

г) $\dfrac{2x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$; д) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - x - 1}{3x(x-1)(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$; е) $-\dfrac{(t+1)(5t^2+14t+5)}{(t+2)^4(t+3)^5}$; ж) $\dfrac{y}{x^2}\ln\dfrac{e}{x}$;

з) $\left(\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\ln\left(x^2+1\right)\right)\left(x^2+1\right)^{\sin x}$; и) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\dfrac{e^x}{2\left(1-e^x\right)}\right)\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

к) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\left((\arcsin x)^2-1\right)}\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

2. а) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; б) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; в) $-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$; г) $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$; д) -2^{y-x};

е) $\dfrac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$; ж) $\dfrac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-y^2}}{\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\sqrt{1-x^2}}$; з) $\dfrac{x+y}{x-y}$.

3. а) $\dfrac{2y\cos x}{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}$; б) $\dfrac{e^y-x\cos(xy)}{y\cos(xy)}$.

4. а) $-0{,}5$; б) $-e^{-1}$.

5. а) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t}{2},\\ x=\ln\left(1+t^2\right);\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}t},\\ x=e^t\sin t;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3},\\ x=\dfrac{3at}{1+t^3};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2}{1-4t^3},\\ x=t-t^4;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2t\cos 2t,\\ x=\ln t;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{t}},\\ x=\sqrt{1-t};\end{cases}$ ж) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{4\sin\varphi},\\ x=\cos 2\varphi;\end{cases}$ з) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\varphi,\\ x=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).\end{cases}$

6. а) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{5t^3}{3t+2},\\ y=t^3+t^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=-\operatorname{tg}^2\alpha,\\ y=\operatorname{ctg}\alpha.\end{cases}$

7. а) 2; б) 0,443. 8. а) 0; б) $\dfrac{4}{3}$.

2.5. Дифференциал функции.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Определение 2.1. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x \in X$, если ее приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{2.15}$$

где $A = \text{const}$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение 2.2. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ может быть представлено в виде (2.15), то главная часть этого приращения, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом функции* $y = f(x)$ *в точке* x.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом dy, $df(x)$ или df.

Таким образом,

$$dy = A\Delta x.$$

Обычно дифференциал функции находят, пользуясь его аналитическим выражением:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2.16}$$

Дифференциал независимой переменной равен ее приращению, т. е.

$$dx = \Delta x.$$

Поэтому

$$dy = f'(x)dx. \tag{2.17}$$

Из формул (2.16) и (2.17) следует, что задача нахождения дифференциала функции $f(x)$ равносильна нахождению ее производной. Поэтому большинство теорем и формул, относящихся к производным, сохраняют свою силу и для дифференциала. Так, например, если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента, то

$$d(cu)=cdu, \tag{2.18}$$

$$d(u \pm v)=du \pm dv,$$

$$d(uv)=udv+vdu,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Формула (2.17) сохраняет свою силу в том случае, если аргумент x сам является дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной $(x=\varphi(t))$, т. е. форма дифференциала не зависит от того, является аргумент данной функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это важное свойство дифференциала функции принято называть *инвариантностью его формы*.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям основано на использовании приближенного равенства

$$\Delta y \approx dy$$

или

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2.19}$$

Приближенное равенство (2.19) позволяет по известному значению функции $y=f(x)$ и ее производной в точке x_0 вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке, достаточно близкой к x_0 (т. е. при достаточно малом приращении Δx).

Примеры

1. Найти приращение и дифференциал функции $y=x^3+4$ при переходе аргумента от значения $x_1=2$ к значению $x_2=2{,}01$.

Решение. Найдем сначала приращение заданной функции при произвольных значениях x и Δx:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 + 4 - (x^2+4) =$$

$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4 - x^3 - 4 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Таким образом, $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Первый член приращения функции содержит Δx в первой степени, т. е. является линейной частью приращения функции относительно Δx, следовательно, по определению 2.2.

$$dy = 3x^2\Delta x.$$

Найдем теперь Δy и dy при заданных числовых значениях аргумента. Учитывая, что $\Delta x = x_2 - x_1 = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$, получим:

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}01 + 3\cdot 2\cdot (0{,}01)^2 + (0{,}01)^3 = 0{,}12 + 0{,}0006 + 0{,}000001 = 0{,}120601$$

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = 3\cdot 2\cdot 0{,}01 = 0{,}12.$$

Вычислим абсолютную погрешность, которую мы допустим, если заменим приращение функции ее дифференциалом:

$$|\Delta y - dy| = |0{,}120601 - 0{,}12| = 0{,}000601.$$

Относительная погрешность

$$\frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} = \frac{0{,}000601}{0{,}120601} \approx 0{,}00498 \approx 0{,}005 \text{ (или 0,5 \%)}.$$

2. Найти dy, если: а) $y = (x^2+1)(\sqrt{x}+3)$; б) $y = 5 - \dfrac{1}{\cos^2(2x-1)}$;

в) $y = \sqrt[6]{\ln \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{4}}$; г) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.17), согласно которой надо найти производную данной функции и умножить ее на дифференциал независимой переменной.

а) $y' = 2x\left(\sqrt{x}+3\right)+\left(x^2+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x}+6x+\frac{1}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+6x$,

$$dy = y'dx = \left(\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+6x\right)dx;$$

б) $y' = 5^{-\frac{1}{\cos^2(2x-1)}}\ln 5\frac{2}{\cos^2(2x-1)}\left(-\sin(2x-1)\right)\cdot 2 = -5^{-\frac{1}{\cos^2(2x-1)}}\ln 5\frac{4\sin(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}$,

$$dy = -5^{-\frac{1}{\cos^2(2x-1)}}\ln 5\frac{4\sin(2x-1)}{\cos^3(2x-1)}dx;$$

в) $y' = \frac{1}{6}\left(\ln \operatorname{tg}^2\frac{x}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}2\operatorname{tg}\frac{x}{4}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\frac{1}{4} = \frac{1}{6}\left(\ln \operatorname{tg}^2\frac{x}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}\frac{1}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}} = \frac{1}{6\sin\frac{x}{2}\sqrt[6]{\ln^5 \operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}}$,

$$dy = \frac{dx}{6\sin\frac{x}{2}\sqrt[6]{\ln^5 \operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}}.$$

г) В этом случае будем считать, что данное уравнение задает неявную функцию $y = y(x)$, следовательно, ее производную найдем, дифференцируя обе части этого уравнения по x:

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' = 0;$$

$$y' = -\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = -\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}.$$

Тогда $dy = -\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}dx$.

3. Выразить дифференциал сложной функции через x и dx, а также через t и dt, если:

а) $y = x^2+2x,\quad x = t^3+1$; б) $y = \arcsin x,\ x = e^t$; в) $y = \operatorname{tg} x,\quad x = \sqrt{v};\quad v = \cos t$.

Решение. а) Воспользовавшись инвариантностью формы дифференциала, получим:

$$dy = (2x+2)dx = 2(x+1)dx.$$

Учитывая, что $x = t^3 + 1$ и $dx = (t^3+1)' dt = 3\,t^2 dt$, находим выражение дифференциала через t и dt:

$$dy = 6t^2(t^3+2)\,dt.$$

б) Поступая, как и в предыдущем случае, имеем:

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; \quad dy = \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}dt.$$

в) Здесь, кроме того, учтем, что промежуточный аргумент x сам является сложной функцией:

$$dy = \frac{1}{\cos^2 x}dx; \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{v}}dv; \quad dv = -\sin t\,dt,$$

$$dy = -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}\,\cos^2\sqrt{\cos t}}dt.$$

4. Найти дифференциал функции $f(x) = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ в точке $x = 1$, если $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Найдем сначала дифференциал функции при произвольных x и Δx, воспользовавшись формулой (2.16):

$$df(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right)\Delta x.$$

Тогда $df(x)\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,1}} = \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2\cdot 2}\right)\cdot 0{,}1 = 0{,}125.$

Рассмотрим теперь задачи на применение дифференциала функции к приближенным вычислениям.

5. Показать, что при $x \to 0$ с точностью до бесконечно малой функции высшего порядка малости, чем Δx, имеет место приближенное равенство

$$(1+\Delta x)^n \approx 1+n\Delta x. \qquad (2.20)$$

Решение. Рассмотрим функции $y=x^n$. Тогда $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$; $dy=nx^{n-1}\Delta x$. Так как $\Delta y \approx dy$ с точностью до бесконечно малой функции высшего порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, то $(x+\Delta x)^n-x^n \approx nx^{n-1}\Delta x$; $(x+\Delta x)^n \approx x^n+nx^{n-1}\Delta x$.

Полагая $x=1$, получаем

$$(1+\Delta x)^n \approx 1+n\Delta x$$

при достаточно малых Δx.

6. Вычислить приближенно: а) $(1{,}02)^6$; б) $\sqrt[3]{0{,}9843}$; в) $\dfrac{1}{(1{,}003)^3}$.

Решение. Приближенные вычисления выполним, воспользовавшись формулой (2.20):

а) $(1{,}02)^6=(1+0{,}02)^6 \approx 1+6\cdot 0{,}02=1+0{,}12=1{,}12$ $(\Delta x=0{,}02;\quad n=6)$;

б) $\sqrt[3]{0{,}9843}=(1-0{,}0157)^{\frac{1}{3}} \approx 1+\dfrac{1}{3}(-0{,}0157) \approx 1-0{,}0052=0{,}995$ $\left(\Delta x=-0{,}0157;\quad n=\dfrac{1}{3}\right)$;

в) $\dfrac{1}{(1{,}003)^3}=(1{,}003)^{-3}=(1+0{,}03)^{-3} \approx 1+(-3)\cdot 0{,}003=1-0{,}009=0{,}991$ $(\Delta x=0{,}003;\quad n=-3)$.

7. Доказать, что с точностью до бесконечно малой функции высшего порядка малости, чем Δx, при $\Delta x \to 0$ справедливы приближенные равенства:

а) $\sin\Delta x \approx \Delta x$ (Δx–выражается в радианах);

б) $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) \approx \dfrac{\Delta x}{x}$;

в) $e^{\Delta x} \approx 1+\Delta x$;

Решение. а) Найдем приращение Δy и дифференциал dy функции $y=\sin x$:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x, \quad dy=\cos x\,\Delta x.$$

Поскольку $\Delta y\approx dy$, то

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x\approx\cos x\,\Delta x.$$

Отсюда $\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\,\Delta x$ и при $x=0$ получаем: $\sin\Delta x\approx\Delta x$.

б) Рассмотрим функцию $y=\ln x$. Ее приращение $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-$ $-\ln x=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$ и дифференциал $dy=\dfrac{1}{x}\Delta x$.

Поскольку $\Delta y\approx dy$, то $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\approx\dfrac{\Delta x}{x}$.

В частности, при $x=1$ $\ln(1+\Delta x)\approx\Delta x$.

в) Рассмотрим функцию $y=e^x$. Найдем ее приращение и дифференциал:

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x,$$

$$dy=e^x\Delta x.$$

Так как $\Delta y\approx dy$, то $e^{x+\Delta x}-e^x\approx e^x\Delta x$ или $e^{x+\Delta x}\approx e^x+e^x\,\Delta x$.

При $x=0$ $e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x$.

8. Вычислить приближенно: а) $\operatorname{tg}45^\circ6'$; б) $\sqrt[4]{82}$; в) $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.19), выбрав x_0 таким образом, чтобы значение данной функции и ее производной в этой точке было известно или легко вычислялось.

а) Рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{tg}x$. Согласно условию, необходимо найти значение этой функции в точке $x=45^\circ6'$. Так как $45^\circ6'=45^\circ+6'$, то примем $x_0=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$, а $\Delta x=6'=\dfrac{\pi}{1800}=0{,}0017$. Тогда $f(x_0)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$;

$$f'(x_0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left.\frac{1}{\cos^2x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2.$$

Подставив значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$ и Δx в формулу (2.19), получим:

$$\operatorname{tg}45^\circ 6' \approx 1 + 2 \cdot 0{,}0017 = 1 + 0{,}0054 = 1{,}0034.$$

б) Запишем прежде условие в другом виде:

$$\sqrt[4]{82} = \sqrt[4]{81+1} = 3\sqrt[4]{1+\frac{1}{81}}.$$

Следовательно, задача сводится к вычислению приближенного значения $\sqrt[4]{1+\frac{1}{81}}$. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[4]{x}$ и, принимая $x_0=1$, а $\Delta x = \frac{1}{81} \approx 0{,}012$, найдем ее значение в точке $x_0 + \Delta x = 1 + \frac{1}{81}$, воспользовавшись формулой (2.19).

Так как $f(x_0) = f(1) = 1$ и $f'(x_0) = f'(1) = \left.\frac{1}{4\sqrt[4]{x}}\right|_{x=1} = \frac{1}{4}$, то

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{81}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}012 = 1{,}003.$$

Тогда $\sqrt[4]{82} \approx 3 \cdot 1{,}003 = 3{,}009$.

в) Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$ и найдем ее значение в точке $x = 2{,}037$, предположив $x_0 = 2$, и $\Delta x = 0{,}037$. Тогда

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{3},$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \left.\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2-3}}\,\frac{8x}{\left(x^2+5\right)^2}\right|_{x=2} = \frac{16}{27}$$

и по формуле (2.19) найдем:

$$\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}} \approx \frac{1}{3} + \frac{16}{27} \cdot 0{,}037 \approx 0{,}333 + 0{,}022 = 0{,}355.$$

2.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти приращение и дифференциал функции:

а) $y=3x^2-x+3$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}02$; б) $y=x^2-2x$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}01$;

в) $y=2x^3-x^2+3$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}001$.

2. Дана функция $y=3x^2+5x-4$. Найти Δy и dy при произвольных значениях x и Δx, а затем при переходе от значения $x_1=2$ к значению $x_2=1{,}98$. Чему равна относительная погрешность, получаемая при замене приращения дифференциалом?

3. Сторона квадрата равна 8 см. На сколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на: а) 1 см; б) 0,5 см; в) 0,1 см? Найти главную линейную часть приращения площади этого квадрата и оценить относительную погрешность (в процентах) при замене приращения его главной частью.

4. Дана функция $y=x^3-x$. При $x=2$ вычислить Δy и dy, давая Δx следующие значения: а) $\Delta x=1$; б) $\Delta x=0{,}1$; в) $\Delta x=0{,}01$. Найти соответствующие значения относительной погрешности.

5. Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина маятника в сантиметрах и $g\approx 981\,\text{см/с}^2$ – ускорение силы тяжести. Если длина маятника $l=20\,\text{см}$, то на сколько нужно ее изменить, чтобы период T увеличился на 0,05 с?

Найти дифференциалы функций.

6. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$. 7. $y=5^{\ln \operatorname{tg} x}$. 8. $y=\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)$. 9. $S(t)=\dfrac{\cos t}{1-t^2}$.

10. $y=\sqrt{\arcsin x}+(\operatorname{arctg} x)^2$. 11. $u(t)=e^{-t}\left(2-2t-t^2\right)$. 12. $f(x)=\dfrac{x^n}{n^2}(1-n\ln x)$.

13. $g(\varphi)=(1-\ln\sin\varphi)\sin\varphi$. 14. $H(x)=\arccos^2\dfrac{a}{x}$. 15. $F(x)=x\ln\left(1-x^2\right)$.

16. $R(\varphi)=(\sin\varphi)^{\cos\varphi}+(\cos\varphi)^{\sin\varphi}$. 17. $\nu(t)=\dfrac{e^{-3t^2}\sin^3 4t\cos^2 6t}{(t^2-4t-1)^5}$.

18. $3xy^2-2x^2y+y^3-x^3=a^3$. 19. $\sin(x+y)=y^2$. 20. $e^{\frac{1}{y}}=xy$. 21. $\ln(1-x-y)=a^2y$.

22. Выразить дифференциал сложной функции через x и dx, а также через t и dt, если:

а) $y=\ln x,\ \ x=\cos t$; б) $y=\operatorname{arctg}x,\ \ x=t^2-1$; в) $y=x^3-2x+5,\ \ x=\operatorname{tg}t$;

г) $y=\arcsin x,\ \ x=e^t$; д) $y=x\cdot 4^x,\ \ x=\operatorname{sh}t$; е) $y=\operatorname{th}x,\ \ x=\dfrac{1}{t^5}$.

23. Доказать, что при $x\to 0$ с точностью до бесконечно малой функции высшего порядка малости, чем Δx, имеет место приближенное равенство $\operatorname{tg}\Delta x\approx\Delta x$.

24. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt[4]{17}$; б) $\operatorname{arctg}0{,}98$; в) $\sin 29^\circ$; г) $\ln 1{,}01$; д) $\operatorname{tg}44^\circ 56'$; е) $\arccos 0{,}4993$;

ж) $\cos 151^\circ$; з) $\dfrac{1}{(1{,}003)^3}$; и) $\dfrac{15{,}23}{0{,}9999}$; к) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$; л) $e^{0{,}003}$.

Ответы

1. а) 0,1001; 0,1; б) 0,401; 0,04; в) 0,048017002; 0,048; 2. – 0,3388; – 0,34; 0,3 %. 3. а) 16; 5,88 %; б) 8; 3,03 %; в) 1,6; 0,62 %; 4. а) 0,39; б) 0,0526; в) 0,0055.

5. Увеличить на 2,23 см. 6. $-\dfrac{6x^2dx}{(x^3-1)^2}$. 7. $5^{\ln\operatorname{tg}x}\dfrac{2\ln 5}{\sin 2x}dx$. 8. $-\dfrac{dx}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

9. $\dfrac{(t^2-1)\sin t+2t\cos t}{(1-t^2)^2}dt$. 10. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x}}+\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dt$. 11. $(t^2-4)e^{-t}dt$.

12. $-x^{n-1}\ln x dx$. 13. $\cos\varphi\ln\dfrac{1}{\sin\varphi}d\varphi$. 14. $\dfrac{2a\arccos\dfrac{a}{x}}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx$. 15. $\left(\ln(1-x^2)-\dfrac{2x^2}{1-x^2}\right)dx$.

16. $((\operatorname{ctg}^2\varphi-\ln\sin\varphi)\sin\varphi^{1+\cos\varphi}-(\operatorname{tg}^2\varphi-\ln\cos\varphi)\cos\varphi^{1+\sin\varphi})d\varphi$.

17. $\left(12(\mathrm{ctg}4t-\mathrm{tg}6t)-6t-\dfrac{10(t-2)}{t^2-4t-1}\right)-\dfrac{e^{3t^2}\sin^3 4t\cos^2 6t}{\left(t^2-4t-1\right)^5}dt$. 18. $\dfrac{3x^2-3y^2+4xy}{6xy-2x^2+3y^2}dx$

19. $\dfrac{\cos(x+y)}{2y-\cos(x+y)}dx$. 20. $-\dfrac{y^2}{x(1+y)}dx$. 21. $\dfrac{1}{a^2(x+y-1)-1}dx$ 22. а) $\dfrac{dx}{x}$; $-\mathrm{tg}\,t dt$;

б) $\dfrac{dx}{1+x^2}$; $\dfrac{2tdt}{1+\left(t^2-1\right)^2}$; в) $\left(3x^2-2\right)dx$; $\left(3\mathrm{tg}^2x-2\right)\dfrac{dt}{\cos^2 t}$; г) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$;

д) $4^x(1+x\ln 4)dx$; $4^{\mathrm{sh}t}(1+\mathrm{sh}\,t\ln 4)\mathrm{ch}\,tdt$; е) $\dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2x}$; $-\dfrac{5dt}{t^6\mathrm{ch}^2\dfrac{1}{t^5}}$. 24. а) 2,031; б) 0,7754;

в) 0,4848; г) 0,0100; д) 0,9976; е) 60°3'; ж) – 0,8747; з) 0,991; и) 15,246; к) 4,997; л) 1,003.

2.7. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 2.3. *Производной второго порядка* функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной $y'=f'(x)$. Вторая производная обозначается одним из символов: $f''(x)$; y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Таким образом, $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$.

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка: третья производная $f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$ (другие обозначения y''' или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$); четвертая производная $f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$ (другие обозначения y^{IY}, $y^{(4)}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$); производная n-го порядка $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ (другие обозначения $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$).

Механический смысл второй производной. Если функция $x=f(t)$ описывает закон прямолинейного движения точки, то $x''=f''(t)$ – ускорение этого движения в момент времени t.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка последовательно находят все ее производные низших порядков. В разделе 2 был указан способ нахождения неявной функции $y=y(x)$, заданной уравнением $F(x,y)=0$. При этом было замечено, что полученное выражение для y', как правило, содержит x и y. Для отыскания второй производной y'' неявной функции надо уже найденную первую производную продифференцировать по переменной x, считая y функцией x. Вторая производная, как правило, будет выражаться через x, y, y'. Поскольку y' уже найдена, то ее подставляют в полученное выражение для y'' и тем самым находят y'', выраженную окончательно через x и y. Аналогично находят y''', y^{IV} и т. д.

Для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ где } t \in T,$$

ее первая производная в разделе 2 была записана как функция, заданная параметрически. Аналогично записываются производные высших порядков:

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{(y'(x))'\ t}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'''(x) = \dfrac{(y''(x))'\ t}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \dfrac{d^3 y}{dx^3} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Определение 2.4. Дифференциал от дифференциала от функции $y = f(x)$ в данной точке x называется ее *вторым дифференциалом* (или *дифференциалом второго порядка*) в точке x. Обозначается второй дифференциал символом d^2y или $d^2 f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяются и обозначаются дифференциалы любого порядка:

третий дифференциал $d^3y = d(d^2y)$;

дифференциал n-го порядка $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

В случае, когда аргумент x является независимой переменной, для дифференциалов второго, третьего и n-го порядка справедливы соответственно представления:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2; \tag{2.21}$$

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3;$$

$$d^n y = f^n(x)(dx)^n.$$

Для сложной функции $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x. \tag{2.22}$$

Сравнив формулы (2.21) и (2.22), можно сделать вывод, что второй дифференциал (в отличие от первого) уже не обладает свойством инвариантности формы. Тем более не обладают свойством инвариантности последующие дифференциалы.

Примеры

1. Найти производные третьего порядка следующих функций:

а) $y = 2x^5 - 4x^3 + 2x + 1$; б) $y = \operatorname{arctg} 2x$; в) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(1-2x)^2}}$.

Решение. а) Найдем первую производную:

$$y' = 10x^4 - 12x^2 + 2.$$

Теперь найдем вторую производную: $y'' = (y')' = 40x^3 - 24x$. Продифференцируем еще раз и получим производную третьего порядка:

$$y''' = (y'')' = 120x^2 - 24.$$

б) Поступим, как в предыдущем случае:

$$y' = \frac{2}{1+4x^2};$$

$$y'' = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2};$$

$$y''' = -\frac{16(1+4x^2)^2 - 16x \cdot 2(1+4x^2)8x}{(1+4x^2)^4} = -16\frac{1+4x-16x^2}{(1+4x^2)^3} = \frac{16(12x^2-1)}{(1+4x^2)^3}.$$

в) Для нахождения первой и последующих производных здесь удобно ввести отрицательный показатель степени:

$$y = (1-2x)^{-\frac{2}{5}}.$$

Тогда $y' = -\frac{2}{5}(1-2x)^{-\frac{7}{5}}(-2) = \frac{4}{5}(1-2x)^{-\frac{7}{5}}$.

$$y'' = \frac{4}{5}\left(-\frac{7}{5}\right)(1-2x)^{-\frac{12}{5}}(-2) = \frac{56}{25}(1-2x)^{-\frac{12}{5}};$$

$$y''' = \frac{56}{25}\left(-\frac{12}{5}\right)(1-2x)^{-\frac{17}{5}}(-2) = \frac{1344}{125}(1-2x)^{-\frac{17}{5}};$$

$$y''' = \frac{1344}{125}\frac{1}{(1-2x)^3\sqrt[5]{(1-2x)^2}}.$$

2. Найти производные n-го порядка следующих функций:

а) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; б) $g(x) = x\ln x$; в) $s(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

Решение. а) $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$;

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3};$$

$$f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+2)^4};$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(x+2)^5};$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(x+2)^{n+1}}=(-1)^n\,\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

б) $g'(x)=\ln x+1$; $\quad g''(x)=\frac{1}{x}$; $\quad g'''(x)=-\frac{1}{x^2}$; $\quad g^{IV}(x)=\frac{2}{x^3}$; $\quad \ldots$;

$$g^{(n)}(x)=(-1)^n\,\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\quad (n\geq 2).$$

в) Представим функцию $s(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ в виде суммы двух дробей

$$s(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-1)};$$

$$s^n(x)=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n-1}}\right).$$

3. Найти вторую производную неявной функции $y=y(x)$, заданной уравнением: а) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; б) $\mathrm{e}^y=xy$; в) $y=\sin(x+y)$.

Решение. а) Дифференцируя по x обе части уравнения, где y есть функция аргумента x, получаем:

$$2b^2x+2a^2y\,y'=0.$$

Отсюда найдем

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Дифференцируя последнее равенство по x и при этом снова рассматривая y как функцию аргумента x, получаем:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Заменив здесь y' на $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$, имеем:

$$y'' = -\frac{b^2\left(y - x\left(-\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)\right)}{a^2 y^2} = -\frac{b^2\left(a^2 y^2 + b^2 x^2\right)}{a^4 y^3}.$$

Приняв во внимание условие, окончательно получим: $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$.

б) Дифференцируя обе части данного равенства по x, получаем: $e^y y' = xy' + y$, откуда $y' = \frac{y}{e^y - x}$.

Так как $e^y = xy$, то полученную производную можно представить в виде:

$$y' = \frac{y}{x(y-1)}.$$

Поступая далее, как и в предыдущем случае, будем иметь:

$$y'' = \frac{x(y-1)y' - y(y - 1 + xy')}{x^2(y-1)^2},$$

$$y'' = \frac{y - y\left(y - 1 + \frac{y}{y-1}\right)}{x^2(y-1)^2} = \frac{y(y^2 - 2y + 2)}{x^2(1-y)^3}.$$

в) Дифференцируя обе части данного равенства по x, получаем:

$$y' = \cos(x+y)(1+y'), \tag{2.23}$$

откуда

$$y' = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}. \tag{2.24}$$

Вторую производную найдем другим способом, который заключается в том, что дифференцируется равенство, не разрешенное относительно y', а затем полученное соотношение разрешается относительно y''.

Для нашего случая дифференцирование равенства (2.23) по x дает:

$$y'' = -\sin(x+y)(1+y')^2 + y''\cos(x+y).$$

Отсюда, учитывая условие и равенство (2.24), имеем:

$$y'' = -\frac{y\,(x+y')^{\,2}}{1-\cos(x+y)} = -\frac{y\left(1+\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}\right)^2}{1-\cos(x+y)}.$$

Выполнив несложные преобразования, окончательно получим:

$$y'' = -\frac{y}{1-\cos\,(x+y)^3}.$$

4. Найти вторую производную неявной функции $x = x(y)$, заданной уравнением: а) $\ln(x+y) = y$; б) $\operatorname{arctg} x = x + y$.

Решение. а) Дифференцируем обе части уравнения по y, считая x функцией аргумента y:

$$\frac{x'+1}{x+y} = 1,$$

откуда $x' = x + y - 1$.

Дифференцируя последнее равенство по y, получаем:

$$x'' = x' + 1.$$

Заменяя здесь x' через $x + y - 1$, имеем:

$$x'' = x + y.$$

б) Поступая, как и в предыдущем случае, будем иметь:

$$\frac{x'}{1+x^2} = x' + 1, \quad x' = -1 - \frac{1}{x^2};$$

$$x'' = \frac{2}{x^3}x', \quad x'' = -\frac{2(x^2+1)}{x^5}.$$

5. Найти производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases};\quad \text{б)}\ \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение. а) Найдем последовательно производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

а) В данном случае $\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, поэтому:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2t^2, \\ x = \ln t. \end{cases}$$

Тогда $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4t$ и, следовательно, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 4t^2, \\ x = \ln t. \end{cases}$$

б) Найдя $\frac{dy}{dt} = a\sin t$, $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, запишем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}, \\ x = a(t - \sin t) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}, \\ x = a(t - \sin t) \end{cases},$$

так как

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Далее, найдем производную от $\frac{dy}{dx}$ по параметру t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{\dfrac{1}{2\sin^2 t/2}}{a(1-\cos t)},\\ x=a(t-\sin t)\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{4\sin^2 t/2},\\ x=a(t-\sin t).\end{cases}$$

6. Найти d^2y, если а) $y=4^{-x^2}$; б) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.21), определив прежде первую и вторую производные.

а) Для данной функции

$$y'=4^{-x^2}\ln 4(-2x)=-2\ln 4x\cdot 4^{-x^2};$$

$$y''=-2\ln 4\left(4^{-x^2}+x\cdot 4^{-x^2}\ln 4(-2x)\right)=2\ln 4\cdot 4^{-x^2}\left(2x^2\ln 4-1\right).$$

Следовательно, $d^2y=2\ln 4\cdot 4^{-x^2}\left(2x^2\ln 4-1\right)(dx)^2$.

б) Считая, что данное уравнение задает y как неявную функцию аргумента x, дифференцируем обе его части по x и находим y':

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,\quad y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Дифференцируя последнее равенство по x, имеем:

$$y''=-\frac{\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Заменив y' на $-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, получим:

$$y''=-\frac{y^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{3y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}}.$$

Следовательно, $d^2y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^4y}}(dx)^2$.

2.8. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти вторые производные следующих функций:

а) $f(x)=(x^2+1)^3$; б) $x(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$; в) $w(z)=\sqrt{a^2-z^2}$; г) $H(v)=v\ln kv$;

д) $s(t)=\frac{1}{a+\sqrt{t}}$; е) $\varphi(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$; ж) $\psi(x)=\arcsin(a\sin x)$; з) $F(x)=x^x$.

2. Найти вторые производные данных функций при указанных значениях аргумента:

а) $f(x)=x^6-4x^3+4$, $f''(1)$; б) $\varphi(x)=\operatorname{arctg}x$, $\varphi''(1)$; в) $x(t)=t^3\ln t$, $x''(2)$.

3. Найти производные n-го порядка следующих функций:

а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $\varphi(x)=\ln(ax+b)$; в) $x(t)=\frac{t}{t^2-1}$; г) $r(\varphi)=\sin^4\varphi+\cos^4\varphi$;

д) $\psi(x)=x\,\mathrm{e}^x$; е) $v(x)=x^2\ln x$.

4. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$, если: а) $5x^2+3xy-2y^2+1=0$; б) $y=\operatorname{tg}(x+y)$;

в) $y=x+\ln y$; г) $y^2+2\ln y=x^4$; д) $\mathrm{e}^{x-y}=x+y$; е) $\sqrt{x^2+y^2}=a\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ $(a>0)$.

5. Найти $\frac{d^2x}{dy^2}$, если:

а) $x=\sin(x+y)$; б) $\cos x \sec y = c$; в) $e^{x+y}=xy$; г) $e^{y}\sin x = e^{-x}\cos y$.

6. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ при $x=1$ и $y=1$, если:

а) $x^2+y^2=2$; б) $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0$.

7. Найти производную $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln(1-t^2); \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=\alpha^2+2\alpha, \\ y=\ln(\alpha+1). \end{cases}$

8. Найти при $t=\dfrac{1}{2}$ значение $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если: а) $\begin{cases} x=2t^3, \\ y=t^2; \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=a\ln t, \\ y=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

9. Найти $\dfrac{d^2x}{dy^2}$, если: а) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t^2, \\ y=\operatorname{arctg} t; \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=e^{t}\cos t, \\ y=e^{t}\sin t. \end{cases}$

10. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, если: а) $y=\cos^2 x$; б) $y=x^5-7x^3+2$; в) $y^2=2px$;

г) $x^2-xy+y^2=1$; д) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x=1+e^{\alpha\varphi}, \\ y=a\varphi+e^{-\alpha\varphi}. \end{cases}$

11. Найти d^2y, если: а) $y=e^{\cos x}$; б) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; в) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; г) $y=\sqrt{1-x^2}$;

д) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$; е) $e^x+e^y=e^2$.

11. Выразить d^2y через x и dx, а также через t и dt:

а) $y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x=\operatorname{tg} t$; б) $y=\cos 2x$, $x=t^3$; в) $y=e^{-x^2}$, $x=\sin t$;

г) $y=(x+1)^5$, $x=\ln t$.

Ответы

1. а) $6(5x^4+6x^2+1)$; б) $2e^{-t^2}(2t^2-1)$; в) $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-z^2)^3}}$; г) $\dfrac{1}{v}$; д) $\dfrac{a+3\sqrt{t}}{4t\sqrt{t}(a+\sqrt{t})^3}$;

е) $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$; ж) $\dfrac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$; з) $\left((\ln x+1)^2+\dfrac{1}{x}\right)x^x$. 2. а) 6; б) $-\dfrac{1}{2}$;

в) $12\ln 2+10$; г) $-\sqrt{2}$; д) 2; е) $24e^{\frac{3\pi}{2}}$. 3. а) $2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\dfrac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$; в) $(-1)^n\dfrac{n!}{2}\left(\dfrac{1}{(t+1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(t-1)^{n+1}}\right)$; г) $4^{n-1}\cos\left(\varphi+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; д) $e^x(x+n)$;

е) $2(-1)^{n-1}\dfrac{(n-3)!}{x^{n-2}}$ $(n\ge 3)$. 4. а) $\dfrac{98(x^2+2)}{(4y-3x)^3}$; б) $-\dfrac{2(y^2+1)}{y^5}$; в) $\dfrac{y}{(1-y)^3}$;

г) $\dfrac{2x^2y}{(1+y^2)^3}\left(3(1+y^2)^3+2x^4(1-y^2)\right)$; д) $\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; е) $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

5. а) $\dfrac{x}{(\cos(x+y)-1)^3}$; в) $\dfrac{x((y-1)^2+(x-1)^2)}{y^2(1-x)^3}$; г) $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{e^{-x}\sin y+e^y\sin x}{e^{-x}\cos y+e^y\cos x}$. 6. а) -2;

б) $\dfrac{111}{256}$. 7. а) 0; б) $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2}{t^2-1},\\ x=\arcsin t;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2+t^2}{(a\cos t-t\sin t)^3};\\ x=at\cos t;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{2(\alpha+1)^4},\\ x=\alpha^2+2\alpha.\end{cases}$

8. а) $-\dfrac{8}{9}$; б) $\dfrac{5}{4\alpha}$. 9. а) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dy^2}=(1+t^2)(1+3t^2),\\ y=\operatorname{arctg}t;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3},\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$ 10. а) $4\sin 2x$;

б) $60x^2-42$; в) $\dfrac{3p^3}{y^5}$; г) $\dfrac{54x}{(x-2y)^5}$; д) $\begin{cases}\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{3}{8(1-t)^3},\\ x=2t-t^2;\end{cases}$ е) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=2e^{-3\alpha\varphi}-6e^{-4\alpha\varphi}$.

11. а) $e^{\cos x}(\sin^2 x-\cos x)(dx)^2$; б) $\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^3 x}(dx)^2$; в) $-\dfrac{4(dx)^2}{(x+1)^3}$; г) $-\dfrac{(dx)^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

д) $-\dfrac{81}{4y^3}(dx)^2$; е) $-(e^{2(x-y)}+e^{x-y})(dx)^2$.

12. а) $\begin{array}{l} d^2y = -\dfrac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}(dx)^2 + \dfrac{4x}{x^4-1}d^2x, \\ d^2y = -4\sec^2 2t(dt)^2; \end{array}$; б) $\begin{array}{l} d^2y = (-4\cos 2x)(dx)^2 - 2\sin 2x d^2x, \\ d^2y = (-36t^4\cos 2t^3 - 12t\sin 2t^3)dt^2; \end{array}$

в) $\begin{array}{l} d^2y = \left(4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2}\right)(dx)^2 - 2xe^{-x^2}d^2x, \\ d^2y = \left(e^{-\sin^2 t}\sin^2 2t - 2e^{-\sin^2 t}\cos 2t\right)dt^2; \end{array}$; г) $\begin{array}{l} d^2y = 20(x+1)^3(dx)^2 + 5(x+1)^4 d^2x, \\ d^2y = \dfrac{20(\ln t+1)^3 - 5(\ln t+1)^4}{t^2}dt^2. \end{array}$

3. ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

3.1. Теоремы о среднем

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках и имеет на концах интервала равные значения, то в этом интервале существует по крайней мере одно значение $x = \xi$, для которого $f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках, то в этом интервале существует по крайней мере одно значение $x = \xi$, для которого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi). \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Теорема Ролля получается из теоремы Лагранжа при $f(x_2) = f(x_1)$.

Замечание 3.2. Из формулы (3.1) получается формула Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \; x_1 < \xi < x_2. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) означает, что приращение функции на интервале равно произведению производной в некоторой промежуточной точке интервала на приращение независимой переменной.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируемы во всех его внутренних точках, причем $\varphi'(x)$ не обращается в нуль в этих точках, то в этом интервале существует по крайней мере одно значение $x = \xi$, для которого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Замечание 3.3. В частном случае при $\varphi(x)=x$ теорема Коши обращается в теорему Лагранжа.

Примеры

1. Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x)=x^2-2x$ на отрезке $[-1;3]$, найти соответствующее значение параметра ξ.

Решение. Функция $f(x)=x^2-2x$ непрерывна на отрезке $[-1;3]$ и дифференцируема на интервале $(-1;3)$. Кроме того, $f(-1)=f(3)=3$, поэтому на данном отрезке выполняются все условия теоремы Ролля, значит теорема справедлива. Найдем значение $\xi\in(-1;3)$, для которого выполняется равенство $f'(\xi)=0$.

Так как $f'(x)=\left(x^2-2x\right)'=2x-2$, то из равенства $2x-2=0$ следует, что $x=1$. Так как $1\in(-1;3)$, то $\xi=1$ есть искомое значение.

2. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)=|x|-2$ на отрезке $[-1;1]$, найти соответствующее значение параметра ξ (если оно существует).

Решение. Функция недифференцируема в точке $x=0$, принадлежащей интервалу $(-1;1)$. Следовательно, нарушается второе условие теоремы Ролля, и данную теорему нельзя применить для решения этой задачи.

3. Записав формулу Лагранжа для функции $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$ на отрезке $[0;1]$, найти на интервале $(0;1)$ соответствующее значение параметра ξ.

Решение. Функция $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, ее производная существует во всех точках интервала $(0;1)$ и равна $f'(x)=3\sqrt{3}x^2+3$. Таким образом, выполняются условия теоремы Лагранжа. Значение параметра ξ найдем по формуле (3.2): $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\xi)$, т. е $\sqrt{3}+3=3\sqrt{3}\,\xi^2+3$. Откуда

$\xi = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значение $\xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ не принадлежит интервалу $(0; 1)$. Следовательно, искомое значение параметра ξ равняется $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Проверить справедливость теоремы Ролля для заданной функции и найти соответствующее значение параметра ξ (если оно существует).

1. $f(x) = |x|$ на отрезке $[-2,2]$.
2. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ на отрезке $[0;4]$.
3. $f(x) = \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
4. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$.
5. $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;3]$.

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для следующих функций и найти соответствующее значение параметра ξ (если оно существует).

6. $f(x) = |x|$ на отрезке $[-2;2]$.
7. $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.
8. $f(x) = |x-1|$ на отрезке $[0;3]$.
9. Доказать, что если производная $f'(x)$ тождественно равна нулю на интервале (a,b), то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале.
10. Функция $f(x) = \frac{5-x^2}{x^4}$ имеет на концах отрезка $[-1; 1]$ равные значения. Ее производная $f'(x)$ равна нулю только в двух точках $x = \pm\sqrt{10}$, расположенных за пределами этого отрезка. Какова причина нарушения заключения теоремы Ролля?

Ответы

1. Теорема Ролля неприменима, так как функция недифференцируема в точке $x=0$, принадлежащей интервалу $[-2;2]$. 2. Теорема справедлива, $\xi=2$. 3. Условия теоремы выполнены, $\xi=\pi$. 4. Условия теоремы не выполнены, так как производная функции $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$ не определена в точке $x=0$ интервала $[-1;1]$. 5. Условия теоремы не выполнены, так как $f(1)\neq f(3)$. 6. $\xi=\ln(e-1)$. 7. $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. 8. Теорема Лагранжа неприменима, так как функция $f(x)=|x-1|$ недифференцируема в точке $x=1$ отрезка $[0;3]$.

3.3. Правило Лопиталя

Раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ *и* $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пусть при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обе бесконечно малые или обе бесконечно большие. Тогда их отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено в точке $x=a$, и в этом случае говорят, что оно представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или соответственно $\dfrac{\infty}{\infty}$. Однако это отношение может иметь предел в точке $x=a$, который может быть как конечным, так и бесконечным. Нахождение этого предела называется раскрытием неопределенности. Одним из способов раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ является правило Лопиталя, основанное на следующей теореме.

Теорема Лопиталя. Пусть в некоторой окрестности точки $x=a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки $x=a$ и пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to a$ совместно стремятся к нулю или к бесконечности и существует предел отношения

$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ этих производных при $x \to a$, тогда существует также и предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ самих функций, и этот предел равен пределу отношения производных

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 3.4. Правило применимо и в случае $a = \infty$.

Замечание 3.5. Правило Лопиталя называют также правилом Лопиталя–Бернулли.

Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$. Для вычисления $\lim_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ – бесконечно малая, а $\varphi(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$ следует преобразовать произведение к виду $\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$) или к виду $\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и далее использовать правило Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$. Для вычисления $\lim_{x\to a}(f(x) - \varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие при $x \to a$, следует преобразовать разность к виду $f(x)\left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$, а затем раскрыть неопределенность $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ вида $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, то $\lim_{x\to a}(f(x) - \varphi(x)) = \infty$. Если же $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, то получаем неопределенность типа $0\cdot\infty$, рассмотренную выше.

Раскрытие неопределенностей вида 0^0, ∞^0, 1^∞. Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $(f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая, во втором случае – бесконечно большая, в третьем случае – функция, имеющая предел, равный единице. Функция $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, в третьем случае – бесконечно большой.

Логарифмируем предварительно равенство $y = (f(x))^{\varphi(x)}$, получаем

$$\ln y = \varphi(x)\ln(f(x)), \qquad (3.3)$$

и находим предел $\ln y$, после чего находим и предел величины y. Во всех трех случаях величина $\ln y$ в силу равенства (3.3) является неопределенностью типа $0\cdot\infty$, метод раскрытия которой приведен выше.

Примеры

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}$, $k>0$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, к которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{k\,x^{k-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k\,x^k}=0.$$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{a^x}$, $a>1$.

Решение. По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{a^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{a^x\ln a}=0$.

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{b^x}$, $k>0$, $b>1$.

Решение. В соответствии с правилом Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{b^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\left(\sqrt[k]{b}\right)^x}\right)^k$. Введем замену $a=\sqrt[k]{b}$, тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{b^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{a^x}\right)^k=0^k=0$.

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(x-x\cos x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0$, то можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - x\cos x}{x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(x - x\cos x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + x\sin x}{1-\cos x}.$$

Здесь также предел числителя и знаменателя равен нулю при $x\to 0$ $\lim_{x\to 0}(1-\cos x + x\sin x) = 0$ и $\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$. Следовательно, нужно повторно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + x\sin x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x + x\sin x)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x - x\sin x}{\cos x} = 3.$$

5. Найти предел $\lim_{x\to +0} x\ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$, которую раскроем, сведя к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, а далее воспользуемся правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to +0} x\ln x = \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to +0}(-x) = 0.$$

6. Найти $\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. В данном случае также имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Получаем:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(\sin(x-1))'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}.$$

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x-(x-1))'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$.

8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Раскроем ее. Для этого преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln^3 x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln^2 x)'}{(x)'}=6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$

$=6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=+\infty.$$

9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. Обозначим $y=x^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln\left(x^x\right)=\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применим правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Таким образом, $\ln\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$, откуда $\lim\limits_{x\to 0}y=1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

3.4. Задачи для самостоятельного решения

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-2^x}{7^x-3^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2e^{-x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\operatorname{ctg}\pi(x-2)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sin 2x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\operatorname{tg}x}$; 17) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ответы

1) $1\dfrac{4}{9}$; 2) $\dfrac{\ln 5-\ln 2}{\ln 7-\ln 3}$; 3) 1; 4) 0; 5) $-\infty$; 6) 0; 7) $\dfrac{1}{\pi}$; 8) a; 9) 0; 10) 1; 11) 0;

12) $\dfrac{1}{12}$; 13) 10; 14) 1; 15) 1; 16) 1; 17) 1; 18) e^{-2}; 19) e; 20) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

3.5. Формула Тейлора

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некотором промежутке, содержащем точку $x = a$.

Представление функции $f(x)$ в виде многочлена по степеням $x-a$ называется *формулой Тейлора* в окрестности точки $x = a$ и записывается в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \qquad (3.4)$$

где $R_n(x)$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора. Остаточный член можно записать в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1$$

или в форме Пеано

$$R_n(x) = o((x-a)^n),$$

где $o((x-a)^n)$ – бесконечно малая порядка выше n по сравнению с $x-a$.

Если $a = 0$, то формула (3.4) принимает вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$ и называется *формулой Маклорена.*

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \qquad (3.5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \ldots$$

Примеры

1. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$.

Решение. Данную функцию необходимо представить в виде

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \frac{\operatorname{arctg}'(0)}{1!}x + \frac{\operatorname{arctg}''(0)}{2!}x^2 + \frac{\operatorname{arctg}'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3),\ x \to 0.$$

Вычислим производные функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 0$:

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2},\ \operatorname{arctg}' x\big|_{x=0} = 1;$$

$$\operatorname{arctg}'' x = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ \operatorname{arctg}'' x\big|_{x=0} = 0;$$

$$\operatorname{arctg}''' x = \left(\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3},\ \operatorname{arctg}''' x\big|_{x=0} = -2.$$

Значение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 0$ равняется 0. Таким образом, получаем требуемое разложение $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

2. Многочлен $2x^3-3x^2+5x+1$ разложить по степеням двучлена $x+1$.

Решение. Вычислим значение функции $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ в точке $x=-1$: $f(-1)=-9$, а также значения ее производных в этой точке:

$$f'(x)=6x^2-6x+5,\ f'(-1)=17;$$

$$f''(x)=12x-6,\ f''(-1)=-18;$$

$$f'''(x)=12,\ f'''(-1)=12;$$

$$f^{(k)}(x)\equiv 0,\ k>3.$$

Тогда по формуле (3.4)

$$f(x)=-9+\frac{17}{1!}(x+1)-\frac{18}{2!}(x+1)^2+\frac{12}{3!}(x+1)^3=$$

$$=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3.$$

3. Записать формулу Тейлора для функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x=1$ и построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора третьей степени.

Вычислим значение функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x=1$, $y(1)=1$, а также значения производных этой функции до третьего порядка включительно в точке $x=1$.

$$y'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}},\ y'(1)=-\frac{1}{2};$$

$$y''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x^5}},\ y''(1)=\frac{3}{4};$$

$$y'''(x)=-\frac{15}{8\sqrt{x^7}},\ y'''(1')=-\frac{15}{8}.$$

По формуле (3.4) получаем

$$y(x)=1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{4\cdot 2!}(x-1)^2-\frac{15}{8\cdot 3!}(x-1)^3+R_3(x-1).$$

Тогда многочлен Тейлора третьей степени имеет вид:

$$P_3(x)=1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3$$

или, раскрывая скобки,

$$P_3(x)=-\frac{5}{16}x^3+\frac{21}{16}x^2-\frac{35}{16}x+\frac{35}{16}.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y(x)$ и $P_3(x)$ (рис. 3.1).

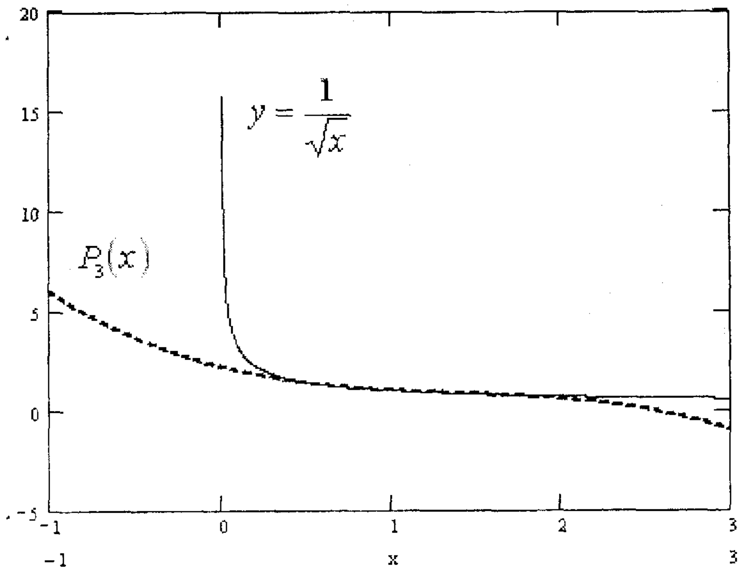

Рис. 3.1

Как видно из рис. 3.1, в окрестности точки $x=1$ графики этих функций совпадают.

4. Используя разложение элементарных функций в ряд Маклорена, получить разложение для функции $y=\sin^2 x$.

Преобразуем функцию $y=\sin^2 x$, используя формулы понижения степени: $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$.

Воспользуемся формулой (3.5), подставив в качестве аргумента $2x$:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+\ldots$$

Тогда $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{2^4x^4}{4!}-\dfrac{2^6x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\dfrac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+\ldots\right)=$

$$=\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}.$$

Таким образом, $y=\sin^2 x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}$.

3.6. Задачи для самостоятельного решения

Разложить по формуле Тейлора следующие функции.

1. $f(x)=2^x$ в точке $x_0=\log_2 3$. 2. $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{2}$ в точке $x_0=1$.

3. $f(x)=xe^x$ в точке $x_0=-1$.

Разложить по формуле Маклорена функции.

4. $f(x)=e^{2-x}$ до $o(x^4)$. 5. $f(x)=\arcsin x$ до $o(x^3)$.

6. Разложить многочлен $P(x)=x^4-3x^2+x-1$ по степеням $x+2$.

7. Разложить многочлен $P(x)=x^3+4x^2+8x+\dfrac{7}{8}$ по степеням $x-\dfrac{1}{2}$.

8. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o(x^k)$, $k=1,2,3$, построить в одной системе координат графики $f(x)$ и соответствующих многочленов Тейлора $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$.

Используя разложение элементарных функций в ряд Маклорена, получить разложение для следующих функций

9. $y=\sin\dfrac{5x}{2}$. 10. $y=\ln(4+x^2)$. 11. $y=\sqrt[3]{8+x^2}$.

Ответы

1. $3+3\ln 2\cdot(x-\log_2 3)+\dfrac{3\ln^2 2\cdot(x-\log_2 3)^2}{2!}+\ldots+\dfrac{3\ln^n 2\cdot(x-\log_2 3)^n}{n!}+$

$+o\left((x-\log_2 3)^n\right),\ x\to\log_2 3$;

2. $\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{3(x-1)^2}{2\cdot 2!}+\dfrac{(x-1)^3}{3!}-\dfrac{(x-1)^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{(x-1)^5}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+$

$+(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}+o\left((x-1)^n\right),\ x\to 1$;

3. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\dfrac{(x-1)^2}{2!\mathrm{e}}+\dfrac{2(x-1)^3}{3!\mathrm{e}}+\dfrac{3(x-1)^4}{4!\mathrm{e}}+\ldots+\dfrac{(n-1)(x-1)^n}{n!\mathrm{e}}+o\left((x-1)^n\right),\ x\to 1$;

4. $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2x+\dfrac{\mathrm{e}^2x^2}{2!}-\dfrac{\mathrm{e}^2x^3}{3!}+\dfrac{\mathrm{e}^2x^4}{4!}+o\left(x^4\right),\ x\to 0$;

5. $x+\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^6\right),\ x\to 0$;

6. $(x+2)^4-8(x+2)^3+21(x+2)^2-19(x+2)+1$;

7. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3+\dfrac{11}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{51}{4}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+6$;

9. $\dfrac{5x}{2}-\dfrac{(5x)^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{(5x)^{2n+1}}{2^{2n+1}\cdot(2n+1)!}+\ldots$;

10. $2\ln 2+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^4}{4^2\cdot 2}+\dfrac{x^6}{4^3\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{4^n\cdot n}+\ldots$;

11. $2\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{2^2 2!}\cdot\dfrac{x^4}{8^2}+\dfrac{1\cdot 3}{2^3 3!}\cdot\dfrac{x^6}{8^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}\cdot\dfrac{x^{2n}}{8^n}+\ldots\right)$.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Монотонность, точки экстремума функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на конечном или бесконечном промежутке (a,b).

Определение 4.1. Функция $f(x)$, $x \in (a,b)$ называется *возрастающей* на промежутке (a,b), если для любых x_1, $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \tag{4.1}$$

(рис. 4.1, 4.2) и *убывающей*, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует:

$$f(x_1) > f(x_2) \tag{4.2}$$

(рис. 4.3, 4.4).

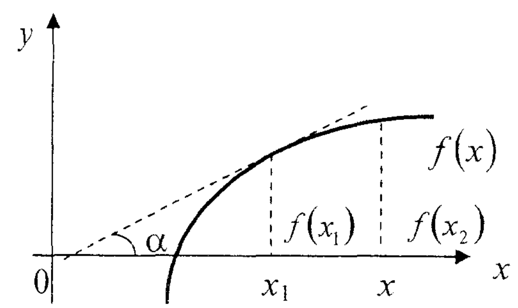

Рис. 4.1

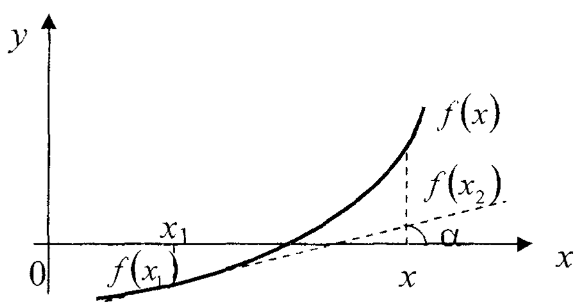

Рис. 4.2

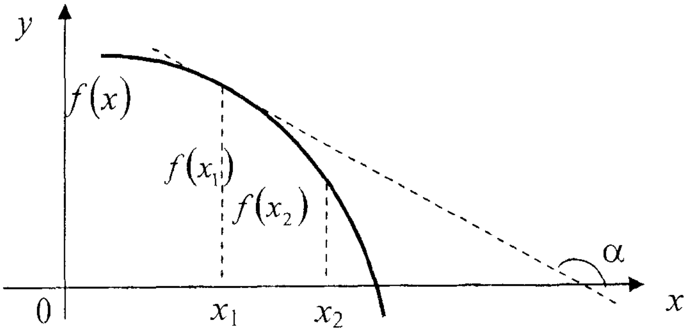

Рис. 4.3

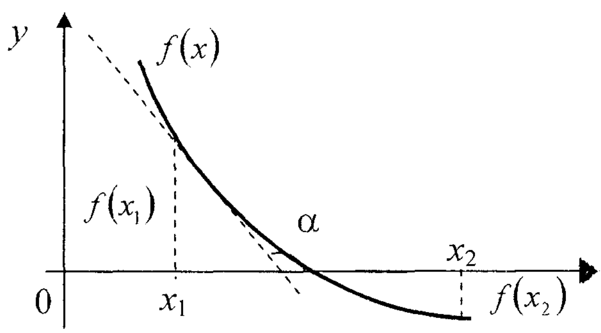

Рис. 4.4

Если в определении неравенства (4.1), (4.2) заменяются нестрогими неравенствами $f(x_1) \le f(x_2)$ и $f(x_1) \ge f(x_2)$, соответственно употребляются термины: неубывающая и невозрастающая функция. Возрастающая, убывающая, неубывающая, невозрастающая функции объединяются понятием монотонной функции.

Теорема 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке (a,b) и внутри его имеет конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ не убывала (не возрастала) на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы было

$$f'(x) \ge 0, \quad (f'(x) \le 0)$$

для всех $x \in (a,b)$.

Если же для любого $x \in (a,b)$

$$f'(x) > 0, \quad (f'(x) < 0),$$

то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Условия теоремы для возрастающей и убывающей функции достаточны, но не необходимы. Например, функция $y = x^3$ возрастает на $(-1,1)$, но $y'(0) = 0$.

Установленная связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически объясняется просто, так как производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции. Если касательная образует с осью Ox острый угол α ($\operatorname{tg}\alpha > 0$), то функция возрастает в данном промежутке (см. рис. 4.1, 4.2), если же угол α – тупой $(\operatorname{tg}\alpha < 0)$, то функция убывает (см. рис. 4.3, 4.4).

Особую роль в исследовании поведения функции на промежутке играют точки, разделяющие интервалы возрастания и убывания функции.

Определение 4.2. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует δ – окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, такая, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$

$$\left(\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)>0\right).$$

Значение $f(x_0)$ называют *локальным максимумом* (*минимумом*) функции и обозначают

$$\max_{x\in O_\delta(x_0)} f(x)=f(x_0) \quad \left(\min_{x\in O_\delta(x_0)} f(x)=f(x_0)\right).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы называют *экстремумами* функции.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями. Если функция $f(x)$ на (a,b) имеет несколько максимумов и минимумов, то может оказаться, что локальный максимум функции меньше ее локального минимума. Например, на рис. 4.5 точки x_1, x_3, x_5 есть точки локальных максимумов, а точки x_2, x_4 – точки локальных минимумов функции $f(x)$.

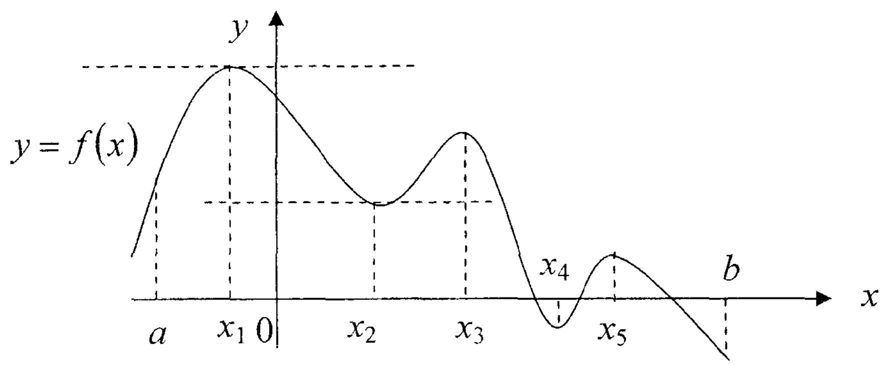

Рис. 4.5

Наибольшее или наименьшее значения функции $f(x)$ в области ее определения или на отрезке $[a,b]$ в отличие от локальных ее экстремумов называют соответственно *абсолютными* (или *глобальными*) *максимумом* и *минимумом* $f(x)$ и обозначают

$$\max_{x\in[a,b]} f(x), \quad \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Из теоремы Вейерштрасса следует, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшие значение.

Эти значения функция принимает в одной из точек экстремума в интервале (a,b) или в одной из граничных точек a,b.

Например, для функции $f(x)$ на рис. 4.5 на отрезке $[a,b]$ абсолютный максимум $f(x_1)$ достигается в точке x_1, абсолютный минимум равен $f(b)$.

Необходимое условие экстремума функции выражается теоремой Ферма.

Теорема 4.2. Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке локальный экстремум, то ее производная

$$f'(x)=0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремума параллельна оси Ox (см. рис. 4.5).

Точки, в которых $f'(x)=0$, называются *стационарными.*

Функция может достигать экстремума также и в точке, в которой конечная производная не существует. Например, функция $y=|x+3|$ не имеет производной в точке $x=-3$ $\left(y'(-3-0)=-1,\quad y'(-3+0)=-1\right)$, но достигает в ней минимума $y=0$ (рис. 4.6).

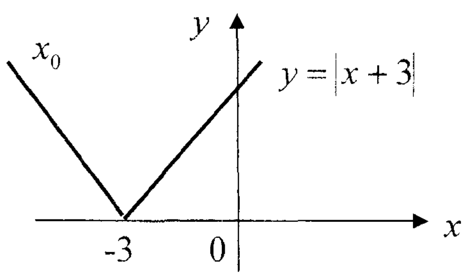

Рис. 4.6

Точки, в которых функция непрерывна, а ее производная равна нулю или обращается в бесконечность, или не существует, называются *критическими точками* или *точками возможного экстремума функции.* Критическая точка x_0 называется *угловой точкой функции* $f(x)$, если существуют $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$ (рис. 4.7) и точкой возврата функции, если ее левая $f'(x_0-0)$ и правая $f'(x_0+0)$

производные бесконечны (касательная к графику $f(x)$ в точке x_0 параллельна оси Oy) (рис. 4.8).

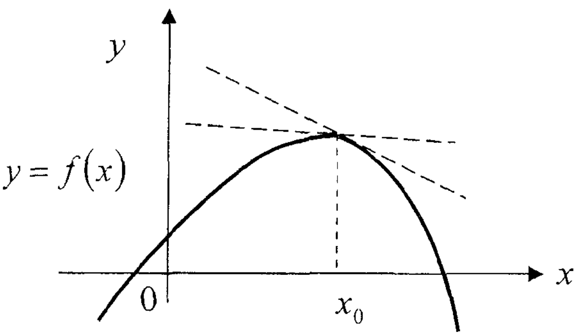

Рис. 4.7

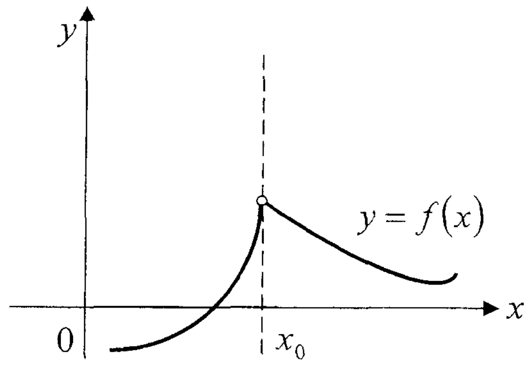

Рис. 4.8

Вместе с тем не всякая критическая точка функции является точкой ее экстремума. Например, для функции $y = x^3$ точка $x = 0$ – стационарная, но в этой точке нет экстремума. Для того, чтобы выяснить, является ли критическая точка функции точкой ее локального экстремума требуются дополнительные исследования. Эти исследования состоят в проверке достаточных условий для существования экстремума.

Теорема 4.3 (*первый достаточный признак существования экстремума функции*). Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с "+" на "–", то x_0 – точка локального максимума, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с "–" на "+", то x_0 – точка локального минимума, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального минимума.

Так, в примере 1 для функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, являются стационарными, так как $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Согласно теореме 4.3 точка $x_1 = 1$ есть точка максимума, а точка $x_2 = 3$ – точка минимума данной функции.

Теорема 4.4 (*второй достаточный признак существования экстремума*). Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в ее δ – окрестности $O_\delta(x_0)$, является точкой локального максимума функции, если $f''(x_0)<0$, и точкой локального минимума, если $f''(x_0)>0$.

Для функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ в примере 1 $f''(x)=6x-12=6(x-2)$, $f''(1)<0$, $f''(3)>0$. По теореме 4.4 стационарные точки $x_1=1$ и $x_2=3$ являются соответственно ее точками максимума и минимума.

Теорема 4.5 (*третий достаточный признак существования экстремума функции*). Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда, если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума, если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума, если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Чтобы найти абсолютные (глобальные) экстремумы, т. е. наименьшее $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и наибольшее ее значение $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ на отрезке $[a,b]$, следует вычислить ее значения в точках локального экстремума, принадлежащих отрезку, а также на концах отрезка, и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них. На концах отрезка в силу характера своего поведения функция может принимать значения большие или меньшие, чем значения в точках экстремума (см. рис. 4.5), поэтому концы отрезка включаются при отыскании абсолютных экстремумов.

Примеры

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$.

Решение. $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$. Если $x<1$ и $x>3$, то $f'(x)>0$, следовательно, функция возрастает в промежутках $(-\infty,1)$, $(3,+\infty)$.

При $1<x<3$, где $f'(x)<0$, функция убывает.

2. Найти локальные экстремумы функции $f(x)=x^5+2x^3$.

Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема при всех $x \in R$. Найдем стационарные точки.

$f'(x)=5x^4+6x^2,\ 5x^4+6x^2=0,\ x=0$ – стационарная точка;

$f''(x)=20x^3+12x,\ f''(0)=0;$

$f'''(x)=60x^2+12,\ f'''(0)=12 \neq 0.$

Согласно теореме 4.5 стационарная точка $x=0$ не является точкой локального экстремума. Функция $f(x)=x^5+2x^3$ экстремумов не имеет.

3. Определить экстремум функции $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x$ в точке $x=0$.

Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема при всех $x \in R$.

$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2\sin x,\quad f'(0)=0$ – следовательно, точка $x=0$ – стационарная точка функции;

$f''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\cos x,\quad f''(0)=0;$

$f'''(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x,\quad f'''(0)=0;$

$f^{(4)}(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x,\quad f^{(4)}(0)=4.$

По теореме 4.5, так как $f^{(4)}(0)>0$, $x=0$ является точкой локального минимума. $f_{\min}=f(0)=4$.

4. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=4x-x^2$.

Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема при всех $x \in R$.

$f'(x)=4-2x;\quad 4-2x=0,\ x=2$ есть стационарная точка функции.

$f''(x)=-2<0$ при всех x, в том числе и при $x=2$, следовательно, $x=2$ является точкой локального максимума $f_{\max}=f(2)=4$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6;8]$.

Решение. Найдем критические точки на отрезке $[-6;8]$.

$f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$; $f'(x)=0$ при $x=0$, легко видеть, что $x=0$ есть точка локального максимума, $f'(x)=\infty$ при $x=10$ и $x=-10$, но эти точки не принадлежат отрезку.

Вычислим $f(0)=\sqrt{100-0^2}=10$;

$f(-6)=\sqrt{100-6^2}=8$, $f(8)=\sqrt{100-8^2}=6$.

$\min\limits_{x\in[-6;8]} f(x)=f(8)=6$ (на конце отрезка).

$\max\limits_{x\in[-6;8]} f(x)=f(0)=10$ (в точке локального максимума).

6. При каких значениях a функция $y=xe^x$ убывает на всем отрезке $[a-5;a+3]$.

Решение. $y=xe^x$, $y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)$. Так как $e^x>0$, то $y'<0$ при $x<-1$, следовательно функция убывает на промежутке $(-\infty;-1)$. Таким образом, правая граница отрезка должна быть $a+3<-1$, отсюда $a<-4$. На всем данном отрезке функция убывает при любом $a<-4$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы функции.

1. $y=x^3+x^2-5x+4$. 2. $y=x+\dfrac{4}{x}$. 3. $y=\dfrac{x^2}{x+2}$. 4. $y=\dfrac{x^3}{x-2}$.

5. $y=x-\sqrt{2x-1}$. 6. $y=e^{3-x}+x+2$. 7. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. 8. $y=x^5-5x^3$.

9. $y=2x^4-x^3$. 10. $y=2x^2+\dfrac{1}{x^4}$. 11. $y=x^2\ln x$. 12. $y=3-x+e^{x+2}$.

13. $y=x+\sqrt{1-x}$. 14. $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$. 15. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$. 16. $y=xe^{1/x}$. 17. $y=(x+2)e^{1-x}$.

18. $y=\sqrt{2x-x^2}$. 19. $y=x^3\,\mathrm{e}^{-x}$. 20. $y=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

21. $y=3x-x^3$; $[-3;0]$. 22. $y=x+\frac{9}{x}$; $\left[\frac{1}{2};4\right]$. 23. $y=x+\frac{4}{x-1}$; $[-2;0]$.

24. $y=\sin 2x-2x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. 25. $y=x\ln x-x$; $\left[\frac{1}{\mathrm{e}};\mathrm{e}\right]$.

26. При каких значениях m функция $y=3x^3-m^2x-5$ имеет одну точку экстремума на отрезке $[-5;3]$?

27. При каком значении a функция $y=a\ln x+x^2-x$ имеет экстремум в точке $x=1$?

28. Найти все значения t такие, что функция $y=2x^3-3x^2+7$ возрастает в интервале $(t-1;t+1)$.

29. Найти все значения t такие, что функция $y=-x^3+3x+5$ убывает в интервале $(t;t+0{,}5)$.

30. При каких положительных значениях параметра a максимум функции $y=\ln x-ax$ равен 2?

Ответы

1. Возрастает при $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(1;+\infty)$, убывает при $x\in\left(-\frac{5}{3};1\right)$, $x=-\frac{5}{3}$ – точка максимума, $x=1$ – точка минимума.

2. Возрастает при $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, убывает при $x\in(-2;0)\cup(0;2)$, $y_{\max}=y(-2)=-4$, $y_{\min}=y(2)=4$.

3. Возрастает при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$, убывает при $x\in(-4;-2)\cup(-2;0)$, $y_{\max}=y(-4)=-8$, $y_{\min}=y(0)=0$.

4. Убывает при $x\in(-\infty;2)\cup(2;3)$, возрастает при $x\in(3;+\infty)$, $y_{\min}=y(3)=27$.

5. Убывает при $x \in \left(-\frac{1}{2};\, 0\right)$, возрастает при $x \in (0;+\infty)$, $y_{\min} = y(0) = -1$.

6. Убывает при $x \in (-\infty; 3)$, возрастает при $x \in (3;+\infty)$, $y_{\min} = y(3) = 6$.

7. Возрастает во всей области определения.

8. Возрастает при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$, убывает при $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. $x = -\sqrt{3}$ – точка максимума, $x = \sqrt{3}$ – точка минимума.

9. Убывает при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{8}\right)$, возрастает при $x \in \left(\frac{3}{8}; +\infty\right)$, $x = -\frac{3}{8}$ – точка максимума.

10. Убывает при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, возрастает при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, $y_{\min} = y(-1) = y(1) = 3$.

11. Убывает при $x \in (0; e^{-1/2})$, возрастает при $x \in (e^{-1/2}; \infty)$, $x = e^{-1/2}$ – точка минимума.

12. Убывает при $x \in (-\infty; -2)$, возрастает при $x \in (-2; +\infty)$, $y_{\min} = 6$.

13. Возрастает во всей области определения.

14. Убывает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, возрастает при $x \in (-1; 1)$, $y_{\min} = y(-1) = -2$, $y_{\max} = y(1) = 2$.

15. Возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, убывает при $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, $y_{\max} = y(-1) = -4$, $y_{\min} = y(1) = 4$

16. Возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, убывает при $x \in (0; 1)$, $y_{\min} = y(1) = e$.

17. Возрастает при $x \in (-\infty; -1)$, убывает при $x \in (-1; +\infty)$, $y_{\max} = y(-1) = e^2$.

18. Возрастает при $x \in (0; 1)$, убывает при $x \in (1; 2)$, $y_{\max} = y(1) = 1$.

19. Возрастает при $x \in (-\infty; 3)$, убывает при $x \in (3; +\infty)$, $y_{\max} = y(3) = 27e^{-3}$.

20. Убывает при $x \in (-\infty; -1)$, возрастает при $x \in (1; +\infty)$.

21. $y_{\max} = y(-3) = 18$, $y_{\min} = y(-1) = -2$.

22. $y_{\max} = y(0{,}5) = 18{,}5$, $y_{\min} = y(3) = 6$.

23. $y_{\max} = y(-1) = -3$, $y_{\min} = y(0) = -4$.

24. $y_{\max} = y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$, $y_{\min} = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

25. $y_{\max} = y(\mathrm{e}) = 0$, $y_{\min} = y(1) = -1$.

26. $m \in [-15;-9) \cup (9;15]$.

27. $a = -1$.

28. $t \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$.

29. $t \in (-\infty;-1{,}5] \cup [1;+\infty)$.

30. $a = \mathrm{e}^{-3}$.

4.3. Выпуклость и точки перегиба функции

Важной характеристикой функции, а тем самым и ее графика, является понятие выпуклости.

Определение 4.3. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке (a,b), называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) в этом промежутке, если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \tag{4.3}$$

$$\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Рассмотрим геометрический смысл понятия выпуклости (рис. 4.9, рис. 4.10).

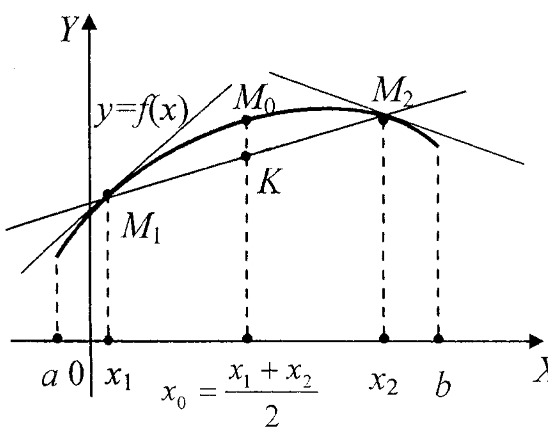

Рис. 4.9

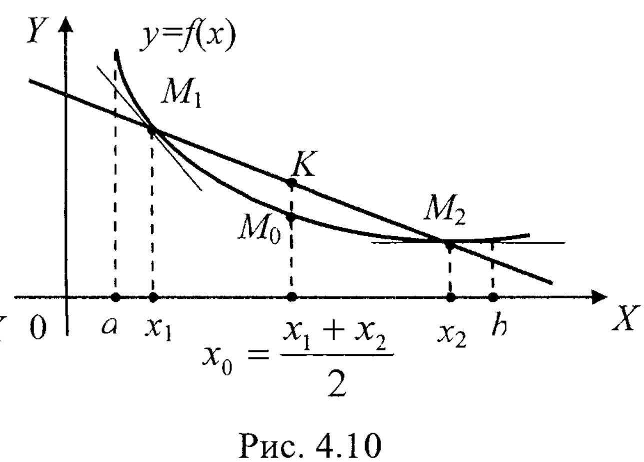

Рис. 4.10

Пусть M_1, M_2, M_0 – точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами соответственно x_1, x_2, $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Тогда $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ есть ордината точки K – середины отрезка M_1M_2, а $f(x_0)$ есть ордината точки M_0 графика функции с абсциссой, равной абсциссе точки K. Условие (4.3) выпуклости функции вверх (вниз) означает, что для всех точек M_1 и M_2 графика функции $y = f(x)$ середина K хорды M_1M_2 лежит ниже (см. рис. 4.9), либо выше (см. рис. 4.10) соответствующей точки M_0 графика или совпадает с точкой M_0.

Приведем еще одно определение выпуклости графика функции.

Определение 4.4. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым вверх (или выпуклым) на (a,b), если дуга кривой $y = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$ расположена ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции (см. рис. 4.9).

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым вниз (или вогнутым) на (a,b), если дуга кривой $y = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$ расположена выше любой касательной, проведенной к графику этой функции (рис. 4.10).

Далее будем называть графики выпуклыми или вогнутыми соответственно.

Достаточным признаком выпуклости (вогнутости) функции (графика функции) является следующая теорема.

Теорема 4.6. Если функция $y = f(x)$ на (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ для любых $x \in (a,b)$, то график функции на (a,b) выпуклый. Если $f(x)$ на (a,b) дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a,b)$, то график этой функции на (a,b) вогнутый.

Определение 4.5. Точка $M(x^*, f(x^*))$ называется *точкой перегиба* графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, если в этой точке направление выпуклости меняется на противоположное.

При этом точка x^* называется точкой перегиба функции $f(x)$.

В точке перегиба кривая $y = f(x)$ переходит с одной стороны касательной в этой точке (если такая касательная существует) на другую сторону, т. е. кривая и касательная взаимно пересекаются (рис. 4.11).

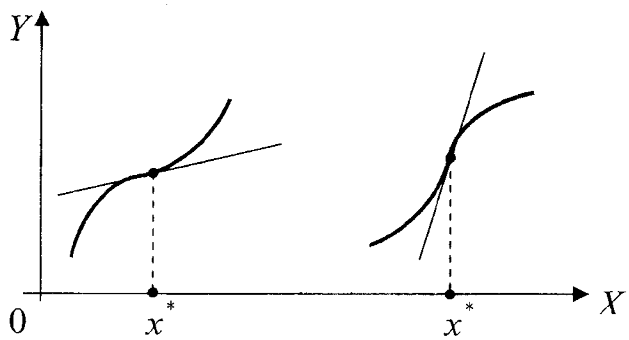

Рис. 4.11

Теорема 4.7 (*необходимое условие существования точки перегиба*). Если x^* является точкой перегиба функции $f(x)$, и функция имеет в точке x^* непрерывную вторую производную $f''(x^*)$, то $f''(x) = 0$.

Теорема 4.8 (*достаточное условие существования точки перегиба*). Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x^* и в этой точке $f''(x)$ обращается в нуль или не существует, а при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M(x^*, f(x^*))$ является точкой перегиба графика $f(x)$.

Примеры

1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$, $f''(x) = 0$ при $x = 2$, $f''(x) < 0$ при $x < 2$, $f''(x) > 0$ при $x > 2$.

График функции является выпуклым в интервале $(-\infty; 2)$ и вогнутым в интервале $(2;+\infty)$. Так как при переходе через точку $x = 2$ $f''(x)$ меняет знак и $f''(2) = 0$, то $x = 2$ – абсцисса точки перегиба, а точка $M(2;3)$ есть точка перегиба.

4.4. Задачи для самостоятельного решения

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривых.

1. $y = x^3 \ln x$. 2. $y = -x^3 + 3x^2$. 3. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. 4. $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

5. $y = xe^x$. 6. $y = x^2 - \sqrt{x}$. 7. $y = x^2 + \dfrac{4}{x^4}$. 8. $y = x^7 + 7x + 1$. 9. $y = x^4 + 6x^2$.

10. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Ответы

1. Выпукла на $\left(0; e^{-5/6}\right)$, вогнута на $\left(e^{-5/6};+\infty\right)$; $\left(e^{-5/6};-\dfrac{5}{6}e^{-1/2}\right)$ – точка перегиба.

2. Вогнута на $(-\infty;1)$, выпукла на $(1;+\infty)$; $(1;2)$ – точка перегиба.

3. Выпукла на $(-\infty;1)$, вогнута на $(1;+\infty)$; $(1;-1)$ – точка перегиба.

4. Вогнута на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$, выпукла на $(-1;1)$; $(-1;0)$ и $(1;0)$ – точки перегиба.

5. Выпукла на $(-\infty;-2)$, вогнута на $(-2;+\infty)$; $(-2;-2e^{-2})$ – точка перегиба.

6. Вогнута на всей области определения.

7. Вогнута на всей области определения.

8. Выпукла на $(-\infty;0)$, вогнута на $(0;+\infty)$; $(0;1)$ – точка перегиба.

9. Вогнута на всей области определения.

10. Выпукла на всей области определения.

4.5. Исследование функций и построение графиков

Геометрические и физические задачи

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят ее график.

Исследование функции можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, определить точки разрыва, вертикальные асимптоты, если они существуют, нули, точки пересечения графика функции с осью OY, периодичность, симметрию (четность, нечетность).

2. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.

3. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

4. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутка области определения. Найти наклонные асимптоты графика функции, если они существуют.

5. По результатам исследований построить график функции.

Порядок исследования целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции. Например, если функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при неотрицательных значениях аргумента из области ее определения и принять во внимание, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

При исследовании поведения функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такую прямую называют *асимптотой графика*. Различают вертикальные $x = x_0$ (в точках x_0 разрыва второго рода) и наклонные асимптоты. Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная.

Наклонная асимптота определяется уравнением $y = kx + b$, при $k = 0$ имеем горизонтальную асимптоту. Здесь $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

При вычислении пределов часто приходится раскрывать неопределенности, что можно сделать с помощью производных.

Теорема 4.9 (*правило Лопиталя–Бернулли*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, точки x_0, причем $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ для любых x из этой окрестности, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (или равны $\pm\infty$) и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

то существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Другие виды неопределенностей могут быть приведены к указанным в теореме. Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия, предусмотренные теоремой, уже не выполняются.

В математике, физике и других науках встречаются задачи на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых величин.

Общая схема решения таких задач состоит в следующем. Устанавливается зависимость рассматриваемой величины y от некоторой величины x. Из условия задачи определяется промежуток возможного изменения аргумента x. Построенная функция $y = f(x)$ исследуется на экстремум.

Примеры

1. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Решение. Функция определена при всех x, кроме $x=\pm\sqrt{3}$. В этих точках функция имеет разрыв второго рода. Следовательно, прямые $x=\pm\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами.

При $x=0$, $y=0$. Других точек пересечения с осями и координат нет. Функция непериодическая, нечетная, $f(-x)=-f(x)$. Ее график симметричен относительно начала координат, благодаря этому достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

$$y' = \left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)' = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2},$$

$$y'=0,\ x^2(9-x^2)=0,\ x=0,\ x=3.$$

$$y'' = \left(\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}\right)' = \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

$$y''=0 \text{ при } x=0.$$

Составим таблицу (для $x \geq 0$), в которой сведем результаты исследования функции с помощью производных.

x	0	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	0	$+$	$+$	0	$-$
y''	0 точка перегиба	$+$	$-$	$-$	$-$
y	0	возр.$\uparrow$ вогнут.$\cup$	возр.$\uparrow$ выпукл.$\cap$	$y_{\max}=-\frac{9}{2}$	убыв.$\downarrow$ выпукл.$\cap$.

Наклонная асимптота $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-2x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}-(-1)x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{-2x}=0.$$

При вычислении пределов применили правило Лопиталя. Получаем $y=-x$. Вследствие симметрии графика относительно начала координат получим, что $m(0,0)$ есть точка перегиба. График функции показан на рис. 4.12.

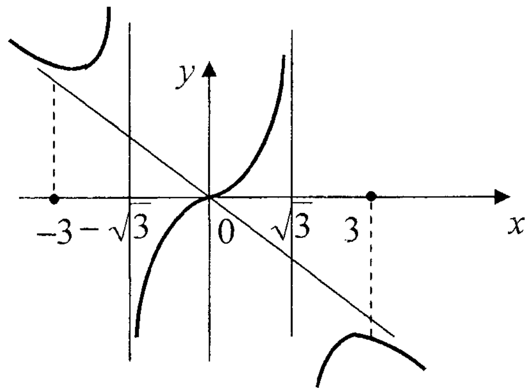

Рис. 4.12

2. Вырыть яму объемом 32 м^3, имеющую квадратное дно, так, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Определить размеры ямы.

Решение. Пусть сторона дна равна x, тогда площадь дна равна x^2, высоту ямы определим по заданному объему $\frac{32}{x^2}$, площадь одной стенки $x\cdot\frac{32}{x^2}=\frac{32}{x}$.

Сумма площадей дна и четырех стен $S(x)=x^2+4\cdot\frac{32}{x}$. Найдем наименее возможную площадь при заданном объеме. $S'=2x-\frac{4\cdot 32}{x^2}$, $S'=0$ при $x=4$. $S''=2+\frac{2\cdot 4\cdot 32}{x^3}$, $S''(4)>0$, т. е. при $x=4$ функция $S(x)$ имеет минимум.

Ответ: сторона дна $x=4$ м, высота ямы равна $\frac{32}{4^2}=2$ м.

3. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб. и переменной, возрастающей пропорционально кубу, скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

Решение. Плавание будет наиболее экономичным, если затраты на 1 км пути будут наименьшими. По условию за сутки расходы составят $a+kv^3$, k –

коэффициент пропорциональности, при этом за сутки пути судно пройдет 24 v км. Тогда расходы на 1 км пути составят

$$P(v)=\frac{a+kv^3}{24v},$$

$v>0$ по смыслу задачи.

$$P'(v)=\frac{2kv^3-a}{24v^2}.$$

Критическое значение v получим при $P'=0\Rightarrow v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. При переходе через это значение v $P'(v)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, функция $P(v)$ при $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ имеет минимум.

Ответ: наиболее экономичная скорость плавания судна равна $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

Следует заметить, что еще много других, не рассмотренных здесь задач, решаются с применением дифференциального исчисления.

4.6. Задачи для самостоятельного решения

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$. 2. $y=\frac{1}{x^2-4}$. 3. $y=\frac{x^3-1}{x^2}$. 4. $y=|x-1|+\ln x$. 5. $y=\frac{x}{(x+1)^2}$.

6. $y=\sqrt{x^2+2x+2}$. 7. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$. 8. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$. 9. $y=\mathrm{e}^{-x^2}$.

10. $y=\ln(x^2+1)$. 11. $y=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$. 12. $y=\frac{\ln x}{x}$. 13. $y=\sqrt{x^2-2x}$.

14. $y=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$. 15. $y=x+\frac{1}{x}$.

16. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника, вписанного в данный круг, чтобы его периметр был наибольшим?

17. Число 180 разбить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

18. По двум взаимно перпендикулярным шоссе в направлении их пересечения одновременно начинают двигаться два автомобиля соответственно со скоростями 80 км/ч и 60 км/ч. В начальный момент времени каждый автомобиль находится на расстоянии 100 км от перекрестка. Через какое время после начала движения расстояние между ними будет наименьшим? Какое это расстояние?

19. Нужно построить прямоугольную площадку возле стены так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертой примыкала к стене. Имеется сетка длиной 40 м. При каких размерах площадка будет иметь наибольшую площадь?

20. Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме $v = 27\pi$ на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла.

Найти асимптоты кривых.

21. $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$. 22. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x$. 23. $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$. 24. $y = -x \operatorname{arctg} x$.

25. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$.

Найти пределы, применяя правило Лопиталя.

26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)}$. 27. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. 28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. 29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x - x)}}$.

Ответы

16. 60°. 17. 40; 80; 60. 18. 1 ч 24 мин; 20 км. 19. 10 м; 20 м. 20. $R = H = 3$;

21. $x = 0$; $y = 2x$. 22. $x = 0$; $y = -3x$. 23. $y = x - 6$. 24. $y = \dfrac{1}{2}\pi x + 1$, $y = -\dfrac{1}{2}\pi x + 1$.

25. $x = 2$; $y = 1$. 26. 1. 27. $\dfrac{1}{\pi}$. 28. $-\dfrac{1}{2}$. 29. e^4. 30. e^2.

Оглавление