УДК 621.311

Математическая модель синхронной машины в фазных координатах

Кунцевич А. И.
Научный руководитель – Золотой А.А., к.т.н., доцент

В основу математического анализа явлений в синхронной машине, положено допущение о линейной зависимости между потокосцеплениями контуров и протекающими в них токами. В синхронных машинах с четырьмя контурами a, b, c и r из которых три первых являются контурами фазных обмоток, а последний – продольным контуром ротора, потокосцепления контуров

$$\psi_a,\ \psi_b,\ \psi_c,\ \psi_r$$

будут связаны с токами в них

$$i_a,\ i_b,\ i_c,\ i_r$$

линейными выражениями вида:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_a &= L_a i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c + L_{ar} i_r;\\
\psi_b &= L_{ba} i_a + L_b i_b + L_{bc} i_c + L_{br} i_r;\\
\psi_c &= L_{ca} i_a + L_{cb} i_b + L_c i_c + L_{cr} i_r;\\
\psi_r &= L_{ra} i_a + L_{rb} i_b + L_{rc} i_c + L_r i_r.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Представим систему (1) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix}\psi_a\\ \psi_b\\ \psi_c\\ \psi_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} & L_{ar}\\ L_{ba} & L_b & L_{bc} & L_{br}\\ L_{ca} & L_{cb} & L_c & L_{cr}\\ L_{ra} & L_{rb} & L_{rc} & L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a\\ i_b\\ i_c\\ i_r\end{bmatrix}, \tag{2}$$

или сокращенно

$$[\psi] = [L]\cdot[i]. \tag{3}$$

В неявнополюсных синхронных машинах с цилиндрическим ротором и равномерно распределенными на его окружности пазами для обмотки возбуждения конфигурация ферромагнитных масс при вращении ротора остается неизменной. В таких машинах коэффициенты L самоиндукции и взаимной индукции фазных обмоток постоянны. В явнополюсных синхронных машинах при изменении положения ротора картина магнитного поля каждой фазы статора изменяется.

Разложим периодические коэффициенты самоиндукции фазных обмоток L в ряд Фурье до членов третьего порядка. Коэффициенты самоиндукции фазных обмоток явнополюсной синхронной машины после их разложения в ряд Фурье будут иметь следующий вид:

$$L_a = l_0 + l_2 \cos 2\gamma; \tag{4}$$

$$L_b = l_0 + l_2 \cos 2(\gamma - 2\pi/3); \tag{5}$$

$$L_c = l_0 + l_2 \cos 2(\gamma + 2\pi/3), \tag{6}$$

где γ – угол, составляемый продольной осью ротора с неподвижной магнитной осью фазы a статора.

Коэффициенты взаимной индукции фазных обмоток явнополюсной синхронной машины представляются в виде:

$$L_{ab} = L_{ba} = m_0 + m_2 \cos(2\gamma - 2\pi/3); \tag{7}$$

$$L_{ac} = L_{ca} = m_0 + m_2 \cos(2\gamma + 2\pi/3); \tag{8}$$

$$L_{bc} = L_{cb} = m_0 + m_2 \cos 2\gamma . \tag{9}$$

Вместо постоянных величин l_0, l_2, m_0, m_2 удобно использовать связанные с ними величины углов γ при продольном $\gamma = 0$ и поперечном $\gamma = \pi/2$ положениях ротора.

Тогда выражения для коэффициентов самоиндукции фазных обмоток явнополюсной синхронной машины преобразуются к виду:

$$L_a = l_d \cos^2 \gamma + l_q \sin^2 \gamma ; \tag{10}$$

$$L_b = l_d \cos^2(\gamma - 2\pi/3) + l_q \sin^2(\gamma - 2\pi/3); \tag{11}$$

$$L_c = l_d \cos^2(\gamma + 2\pi/3) + l_q \sin^2(\gamma + 2\pi/3), \tag{12}$$

где $l_d = l_0 + l_2$, $l_q = l_0 - l_2$.

Коэффициенты взаимной индукции фазных обмоток явнополюсной синхронной машины примут следующий вид:

$$L_{ab} = L_{ba} = -2(m_d \cos\gamma \cos(\gamma - 2\pi/3) + m_q \sin\gamma \sin(\gamma - 2\pi/3)); \tag{13}$$

$$L_{ac} = L_{ca} = -2(m_d \cos\gamma \cos(\gamma + 2\pi/3) + m_q \sin\gamma \sin(\gamma + 2\pi/3)); \tag{14}$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -2(m_d \cos^2 \gamma + m_q \sin^2 \gamma) + 3/2(m_d + m_q), \tag{15}$$

где $m_d = m_0 - m_2/2$; $m_d = m_0 + m_2/2$.

Так как условие синусоидальности на холостом ходу выполняется с большой точностью, можно записать выражения для коэффициентов взаимной индукции контура возбуждения с контурами фаз:

$$L_{ar} = L_{ra} = m_1 \cos\gamma ; \tag{16}$$

$$L_{br} = L_{rb} = m_1 \cos(\gamma - 2\pi/3); \tag{17}$$

$$L_{cr} = L_{rc} = m_1 \cos(\gamma + 2\pi/3). \tag{18}$$

Коэффициент самоиндукции контура возбуждения является постоянной величиной, так как распределение ферромагнитных масс в окрестности контура возбуждения синхронных машин не зависит от положения ротора и выполняется равенство:

$$L_r = l_r = T_{d0} r_r , \tag{19}$$

где T_{d0} – постоянная времени ротора; r_r – активное сопротивление ротора.

Для неявнополюсных синхронных машин выполняются следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} l_d &= l_q; \\ m_d &= m_q. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Коэффициенты самоиндукции фазных обмоток для неявнополюсных синхронных машин рассчитываются по формулам:

$$L_a = l_d \cos^2 \gamma + l_q \sin^2 \gamma = l_d ; \tag{21}$$

$$L_b = l_d \cos^2(\gamma - 2\pi/3) + l_q \sin^2(\gamma - 2\pi/3) = l_d ; \tag{22}$$

$$L_c = l_d \cos^2(\gamma + 2\pi/3) + l_q \sin^2(\gamma + 2\pi/3) = l_d . \tag{23}$$

Коэффициенты взаимной индукции фазных обмоток для неявнополюсных синхронных машин можно вычислить по выражениям:

$$L_{ab} = L_{ba} = -2(m_d \cos\gamma \cos(\gamma - 2\pi/3) + m_q \sin\gamma \sin(\gamma - 2\pi/3)) = m_d ; \tag{24}$$

$$L_{ac} = L_{ca} = -2(m_d \cos\gamma \cos(\gamma + 2\pi/3) + m_q \sin\gamma \sin(\gamma + 2\pi/3)) = m_d ; \tag{25}$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -2(m_d \cos^2 \gamma + m_q \sin^2 \gamma) + 3/2(m_d + m_q) = m_d . \tag{26}$$

Учитывая (21) – (26) элементы матрицы $[L]$ можно определить по формулам:

$$[L]=\begin{bmatrix} l_d & m_d & m_d & m_1\cos\gamma \\ m_d & l_d & m_d & m_1\cos(\gamma-2\pi/3) \\ m_d & m_d & l_d & m_1\cos(\gamma+2\pi/3) \\ m_1\cos\gamma & m_1\cos(\gamma-2\pi/3) & m_1\cos(\gamma+2\pi/3) & l_r \end{bmatrix}. \qquad (27)$$

Запишем уравнения второго закона Кирхгофа для контуров синхронной машины:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_a}{dt}+ri_a+u_a=0; \\ &\frac{d\psi_b}{dt}+ri_b+u_b=0; \\ &\frac{d\psi_c}{dt}+ri_c+u_c=0; \\ &\frac{d\psi_r}{dt}+r_ri_r-e_r=0. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Уравнения второго закона Кирхгофа можно представить матричной форме:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\psi_a\\ \psi_b\\ \psi_c\\ \psi_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0\\ 0 & r & 0 & 0\\ 0 & 0 & r & 0\\ 0 & 0 & 0 & r_r\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_a\\ i_b\\ i_c\\ i_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_a\\ u_b\\ u_c\\ -u_r\end{bmatrix}=0 \qquad (29)$$

или в компактной форме:

$$[\mathrm{y}]'+[\mathrm{r}]\times[\mathrm{i}]+[\mathrm{u}]=0. \qquad (30)$$

Преобразуем систему уравнений (30) к форме Коши:

$$([L]\cdot[i])'+[r]\cdot[i]+[u]=0;$$

$$[L]'\cdot[i]+[L]\cdot[i]'+[r]\cdot[i]+[u]=0;$$

$$[i]'=-[L]^{-1}\Big([L]'\cdot[i]+[r]\cdot[i]+[u]\Big).$$

Выполненные данным способом расчеты установившегося и короткого переходного режимов синхронной машины показали, что из-за нелинейных периодических функций переменной γ матрица $[L]$ плохо обусловлена. Необходимость обращения плохо обусловленной матрицы $[L]$ на каждом шаге интегрирования значительно усложняет решение, требуя применения специальных алгоритмов, что увеличивает время решения задачи. Поэтому, использование фазных координат для моделирования синхронной машины в практических расчётах оказалось менее удобным, чем применение вращающихся координат *d*, *q*, *0*.

Литература

1. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. – Л.: Наука, 1985. – 502 с.