УДК 517.958

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Ступень И.Д.

Научный руководитель – Марцинкевич В.С., старший преподаватель

Рассмотрим применение метода конечных разностей для решения задачи Дирихле уравнения Лапласа в квадрате. Эта задача формулируется следующим образом: найти в квадрате $D = [0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1]$ непрерывную функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

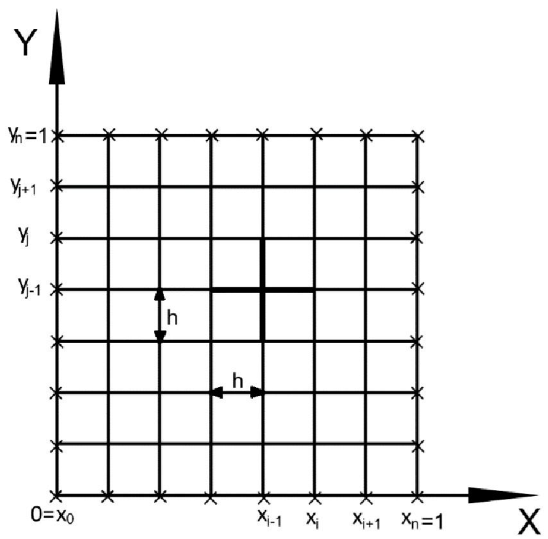
и принимающую на границе квадрата заданные функции f_1, f_2, f_3 и f_4 :

$$u(0,y) = f_1(y),\ 0 \leq y \leq 1,\ u(1,y) = f_2(y),\ 0 \leq y \leq 1,\ u(x,0) = f_3(x),\ 0 \leq x \leq 1,$$
$$u(x,1) = f_4(x),\ 0 \leq x \leq 1 \qquad (2)$$

Будем считать, что функция $u(x,y)$ непрерывна и на границе квадрата, то есть $f_1(0) = f_3(0)$, $f_1(1) = f_4(0)$, $f_2(0) = f_3(1)$, $f_2(1) = f_4(1)$.

Построение и реализация разностной схемы

Для решения этой задачи методом конечных разностей построим в области изменения независимых переменных сетку с постоянным шагом h по координатным осям Ox и Oy. Тогда координаты узлов сетки определяются



формулами:

Рис. 1. Сетка и шаблон для решения задачи Дирихле в квадрате (3)

$$x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,n, \quad y_j = jh,\ j = 0,1,\dots,n$$

Перейдём к аппроксимации уравнения (1) во внутренних узлах сетки конечно-разностными соотношениями. Для этого выберем изображенный на рис. 1 пятиточечный шаблон типа «крест» с точками (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j-1}), (x_{i+1}, y_j). Значения искомой функции $u(x,y)$ в узлах сетки обозначается символами $u_i^j = u(x_i, y_j)$.

Входящие в уравнение (1) частные производные аппроксимируются следующими конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h^2} \qquad (4)$$

Подставив аппроксимации (4) в уравнение (1) и перегруппировав члены, получится:

$$u_i^j = \frac{1}{4}\left(u_{i-1}^j + u_i^{j-1} + u_i^{j+1} + u_{i+1}^j\right), i = 1,2\dots,n-1; j = 1,2\dots,n-1 \qquad (5)$$

Другими словами, значение искомой функции в некотором узле равно среднему арифметическому значений этой функции в четырех соседних узлах. Граничные условия (2) переписываются в виде:

$$u_0^j = f_1(y_j), \quad j = 0,1,\dots,n, u_m^j = f_2(y_j), \quad j = 0,1,\dots,n, \quad u_i^0 = f_3(\colon$$
$$i = 0,1,\dots,n-1, u_i^0 = f_4(x_i), \quad i = 0,1,\dots,n-1, \qquad (6)$$

Построенная разностная схема имеет 2-й порядок погрешности аппроксимации по h и представляет собой систему $(n-1)^2$ алгебраических уравнений с $(n-1)^2$ неизвестными u_i^j во внутренних узлах сетки.

Особенностью системы уравнений (5) является сильная разрешенность ее матрицы, поскольку каждое уравнение системы содержит не более пяти отличных от нуля коэффициентов. Поэтому для ее решения обычно используются итерационные методы, например метод Якоби. Алгоритм этого метода состоит в построении последовательности итераций для внутренних узлов вида:

$$u_i^j(k+1) = \frac{1}{4}\left(u_{i-1}^j(k) + u_i^{j-1}(k) + u_i^{j+1}(k) + u_{i+1}^j(k)\right), \qquad (7)$$

где k – номер итерации.

При этом счет ведется по строчкам (или по столбцам). В качестве нулевого приближения значений u_i^j во внутренних узлах можно брать среднее арифметическое значений функции во всех граничных узлах сетки. При $k \to \infty$ последовательность $u_i^j(k)$ сходится к точному решению системы (5). Заканчивают итерационный процесс в том случае, когда во всех внутренних узлах выполняется условие:

$$\left|u_i^j(k) - u_i^j(k+1)\right| < \varepsilon, \qquad (8)$$

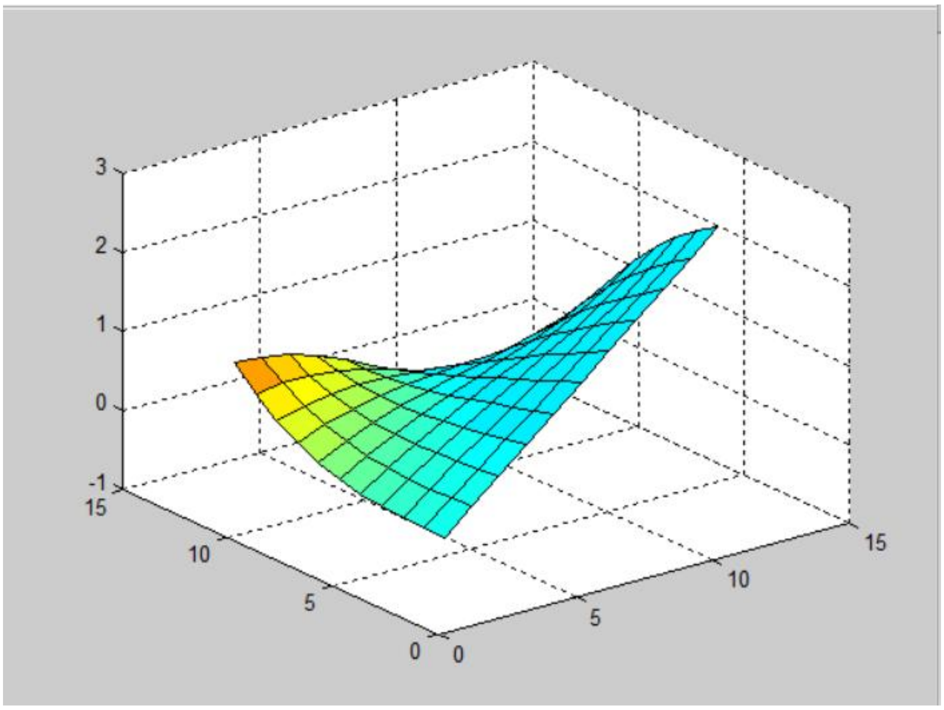
$i = 1,2,\dots,n-1,\ j = 1,2,\dots,n-1,$ где ε – некоторое малое наперед заданное число.

Мне была поставлена задача найти в квадрате D = [0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1] непрерывную функцию u = u(x,y), удовлетворяющую двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (9)$$

и принимающую на границе квадранта заданные функции:

$$u(0,y) = 3y,\ u(1,y) = \cos\frac{2\pi y}{3},\ u(x,0) = x^3,\ u(x,1) = -2x^2 - 1{,}5x + 3. \qquad (10)$$



По алгоритму рассмотренному ранее получаем график:

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для университетов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Изд. 4, испр. – М.: Изд-во «Наука», 1972. – 735с.