DOI: 10.17223/9785751124335/14

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И МНОГОРЕЖИМНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Ю. С. Крук(1), Ю. Е. Дудовская(2)

Белорусский национальный технический университет(1),
Гомельский государственный университет
им.Франциска Скорины(2)

В настоящее время в теории сетей массового обслуживания проблема исследования надежности обслуживающих узлов становится все более актуальной. Ключевыми в этой проблеме являются два подхода: обслуживающий узел может полностью выходить из строя либо частично. Ю. В. Малинковский ввел в рассмотрение класс сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями обслуживания. Узлы в таких сетях могут функционировать в нескольких режимах, соответствующих различной степени работоспособности обслуживающего устройства. Однако не только обслуживающий узел может выходить из строя, поступающие в систему заявки также могут терять свои качественные характеристики. С точки зрения надежности поступающих заявок большой интерес представляют сети массового обслуживания с неактивными заявками. Заявки в таких сетях делятся на два класса: первые могут обслуживаться узлами, а вторые являются неактивными и не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот. Неактивные заявки можно интерпретировать как заявки, имеющие некоторый дефект, делающий их непригодными для обслуживания. В большинстве случаев исследователей интересуют характеристики стационарного функционирования таких сетей, в частности, вид стационарного распределения вероятностей состояний.

В [1, 2] рассматривается стационарное функционирование открытых сетей с неактивными заявками, исследуется стационарное распределение вероятностей состояний в предположении, что длительности обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение.

Классические сети массового обслуживания, такие как открытая сеть Джексона и замкнутая сеть Гордона–Ньюэлла, исследуются в [3, 4] в предположении, что длительности обслуживания заявок имеют показательное распределение, однако на практике это ограничение выполняется редко. Действительно, на практике закон распределения длительности обслуживания заявки чаще всего отличается от показательного. Поэтому существует актуальная проблема разработки аналитического аппарата для исследования сетей массового обслуживания с произвольными функциями распределения времени обслуживания.

Первый результат по инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения длительностей обслуживания принадлежит Б. А. Севастьянову, установившему этот результат для системы M/G/m/0 [5]. BCMP-теорема (Baskett, Chandy, Muntz, Palacios) – первый результат по инвариантности для сетей. Работы [6–8] посвящены исследованию инвариантности стационарного распределения сетей с неактивными заявками. Установлено, что стационарное распределение имеет мультипликативную форму и инвариантно относительно функционального вида распределения длительностей обслуживания.

В. А. Ивницкий в [9] вводит в рассмотрение сети, в которых обслуживание имеет не «временную», а так называемую «энергетическую» трактовку: каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить. Энергетическая интерпретация обобщает представление о процессе обслуживания и представляет большой интерес с практической точки зрения. В работах [10, 11] для сетей с неактивными заявками находится стационарное распределение, устанавливается инвариантность стационарного распределения по отношению к функциональной форме распределения количества работы, требующегося для обслуживания.

Замкнутые сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания рассматривались в [12, 13]: было найдено стационарное распределение вероятностей состояний и установлена инвариантность стационарного распределения по отношению к функциональной форме распределения длительностей обслуживания.

В настоящей работе исследуется замкнутая сеть массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями. Времена пребывания в режимах распределены по произвольному закону. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений длительностей пребывания в режимах при фиксированных первых моментах.

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из N узлов. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые требуют обслуживания, и неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. В узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i=\overline{1,N}$. Информационный сигнал, поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i, уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i, уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Информационные сигналы не требуют обслуживания.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \left(z_1(t), z_2(t), ..., z_N(t)\right)$, где $z_i(t) = \left(n_i(t), n_i'(t), n_i''(t)\right)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i-м узле в момент времени t, $n_i''(t)$ – режим функционирования i-го узла. Предполагается, что i-й узел может находиться в одном из $r_i + 1$ режимов работы $\left(n_i'' = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}\right)$. Пространство состояний случайного процесса $z(t)$ имеет вид

$$Z = \left\{ z = \left(n_i, n_i', n_i''\right) : n_i, n_i' \geq 0, \sum_{i=1}^{N} (n_i + n_i') = M, n_i'' = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т.е. если в i-ом узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в узел i сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n_i' + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n_i', которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Дисциплина обслуживания *FCFS*. Времена обслуживания заявок в узлах распределены по показательному закону с параметрами $\mu_i, i = \overline{1, N}$. В каждом узле находится единственный обслуживающий прибор. Время функционирования прибора в режиме n_i'' – произвольно распределенная случайная величина с функцией распределения $\Phi_i\left(n_i'', t\right)$, $\left(\Phi_i\left(n_i'', 0\right) = 0\right)$. По окончании времени пребывания в режиме n_i'' прибор переключается в режим $n_i'' - 1$ с вероятностью $\dfrac{\rho_i I_{n_i''>0}}{\sigma_i I_{n_i''<r_i} + \rho_i I_{n_i''>0}}$, а с вероятностью $\dfrac{\sigma_i I_{n_i''<r_i}}{\sigma_i I_{n_i''<r_i} + \rho_i I_{n_i''>0}}$ – в режим $n_i'' + 1$. Переключение режимов происходит со скоростью $\sigma_i + \rho_i$, $\sigma_i, \rho_i > 0, i = \overline{1, N}$. Переключение возможно только в соседние режимы. Повышение режима будем интерпретировать как ухудшение некоторых качественных характеристик обслуживания, а понижение соответственно, как улучшение. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью p_{ij} переходит в j-й узел $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1, i = \overline{1,N}\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{ii} = 0, i = \overline{1,N}$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой. Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации (p_{ij}) система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{ij}, \, i = \overline{1,N} \tag{1}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение [4].

Ранее был рассмотрен случай, когда времена функционирования в режимах имели показательное распределение [13]. В этом случае $z(t)$ является марковским процессом, для которого получено стационарное распределение вероятностей состояний в мультипликативной форме.

В рассматриваемой модели время функционирования в режиме n_i'' распределено по произвольному закону с функцией распределения $\Phi_i(n_i'', t)$ и математическим ожиданием $\eta_i < \infty$.

Пусть $\xi_{i,n_i''}(t)$ – время, оставшееся до переключения режима, при условии, что в момент времени t i-й прибор находился в режиме n_i'', $\xi(t) = \left(\xi_{1,n_1''}(t), ..., \xi_{N,n_N''}(t)\right)$. Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\varsigma(t) = (z(t), \xi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\xi(t)$.

Введем обозначения:

$$F(z,x) = F\left(z, x_{1,n_1''}, ..., x_{N,n_N''}\right) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} P\left\{z(t) = z, \, \xi_{1,n_1''}(t) < x_{1,n_1''}, ..., \xi_{N,n_N''}(t) < x_{N,n_N''}\right\},$$
$$z \in Z, \, x_{k,l} \in \mathrm{R} \; \forall k, l; \, n_i'' = \overline{0, r_i}.$$

Функции $F(z,x)$ называются стационарными функциями распределения вероятностей состояний процесса $\varsigma(t)$.

Теорема. *Случайный процесс z(t) эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z,x)$ определяются по формулам*

$$F(z,x) = \frac{1}{G(M,N)} p_1(n_1, n_1', n_1'') p_2(n_2, n_2', n_2'') ... p_N(n_N, n_N', n_N'') \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\eta_i} \int_0^{x_{i,s}} \left(1 - \Phi_i(n_i'', u)\right) du, z \in Z,$$

где

$$p_i(n_i, n_i', n_i'') = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i}\right)^{n_i'} \left(\frac{\sigma_i}{\rho}\right)^{n_i''}, \quad (2)$$

ε_i *– решение системы уравнений трафика* (1), *а* $G(M, N)$ *– нормирующая константа*.

Обозначим $\{p(z), z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из предыдущей теоремы с учетом равенства $p(z) = F(z, \infty)$ получаем следующее следствие.

Следствие. *Процесс* $z(t)$ *эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний* $\{p(z), z \in Z\}$ *не зависит от функционального вида распределений* $\Phi_i(s, x)$, $i = \overline{1, N}$ *и имеет мультипликативную форму:*

$$p(z) = \frac{1}{G(M, N)} p_1(n_1, n_1', n_1'') p_2(n_2, n_2', n_2'') \ldots p_N(n_N, n_N', n_N''),$$

где $p_i(n_i, n_i', n_i'')$ *определяются по формуле* (2).

Литература

1. Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. Distributions in Stochastic Network Models. – Nova Publishers, Inc(US), 2008. – 75 p.

2. Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. Queueing Models with Different Schemes of Customers Transformations // 19th International Conference «Mathematical Methods for Increasing Efficiency of Information Telecommunication Networks». – Minsk: BSU, 2007. – P. 128–133.

3. Jackson J. R. Network of Waiting Lines // Oper. Research. – 1957. – Vol. 4. – P. 518–521.

4. Gordon W. J., Newell G. F. Closed Queueing Networks with Exponential Servers // Oper. Research. – 1967. – Vol. 15. P. 252–267.

5. Sevastyanov B. A. An Ergodic Theorem for Markov Processes and its Application to Telephone Systems with Refusals // Theo. Probab. Appl. – 1957. – Vol. 2. – P. 104–112.

6. Boyarovich Yu. S. The Stationary Distribution Invariance of States in a Closed Queueing Network with Temporarily Non-active Customers // Autom. Remote Controll. – 2012. – Vol. 73. – P. 1616–1623.

7. Bojarovich J., Malinkovsky Yu. V. Stationary Distribution Invariance of an Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers. // Tomsk State University. J. Control and Computer Sci. – 2012. – Vol. 20. – P. 62–70.

8. Bojarovich J., Malinkovsky Yu. V. Stationary Distribution Invariance of an Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers. In: Dudin, A. et al. (eds.) BWWQT 2013 // CCISS. – LNCS, Springer, Heidelberg, 2013. – Vol. 356. – P. 26–32.

9. Ivnitsky V. A. Theory of Queueing Networks. – Moscow: Fizmatlit, 2004. – 772 p.

10. Bojarovich J., Dudovskaya Yu. Stationary Distribution Insensitivity of a Closed Queueing Network with Non-active Customers // Dudin, A. et al. (eds.) ITMM 2014, CCIS. – LNCS, Springer, Heidelberg, 2014. – Vol. 487. – P. 50–58.

11. Kruk Yu. S., Dudovskaya Yu. Insensitivity of the Stationary Distribution of State Probabilities in an Open Network with Non-active Customers // Autom. Remote Control. – 2015. – Vol. 76. – P. 2168–2178.

12. Kruk J., Dudovskaya Yu. Stationary Distribution Insensitivity of a Closed Multiregime Queueing Network with Non-active Customers // Dudin, A. et al. (eds.) ITMM 2015, CCIS. – LNCS, Springer, Heidelberg, 2015. – Vol. 564. – P. 373–383.
13. Boyarovich J. S., Dudovskaya Yu. Stationary Distribution of a Closed Queueing Network with Non-active Customers and Multimode Service Strategies // Proc. of the National Academy of Sci. of Belarus. Physic and Mathematics series. – 2015. – Vol. 1. – P. 54–57.

DOI: 10.17223/9785751124335/15

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА С ВХОДЯЩИМ ММРР-ПОТОКОМ

Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Введение

Системы и сети массового обслуживания (СМО) играют большую роль при моделировании современных информационно-вычислительных и телекоммуникационных систем [2, 3, 5, 7].

Отдельно можно выделить задачи проектирования информационных систем, где информация передается порциями в виде сообщений случайного объема [1, 2, 10]. В этом случае говорят о системах массового обслуживания с требованиями случайного объема. Несмотря на большой перечень прикладных задач, которые могут быть решены с использованием таких моделей, на сегодняшний день точные аналитические результаты по исследованию объема находящихся требований в системе существуют только для случая пуассоновского входящего потока. Если на вход системы поступает марковский модулированный (ММРР) или рекуррентнтый поток требований, как правило, применяют асимптотические методы исследования [5, 8].

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (ММРР-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}=\|q_{ij}\|$ и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$ [8]. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v > 0$, $G(y) = P\{v < y\}$ – функция распределения случайного процесса v. Объемы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t; $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.