УДК 624.073.2

СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НДС ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ С УЧЕТОМ ЕЕ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

СЕМЕНЮК С. Д., КУМАШОВ Р. В.
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В современных автомобильных дорогах все большее значение приобретают монолитные и сборные железобетонные покрытия, предназначенные для автомобильного движения большой интенсивности, скорости и грузоподъемности. Неравномерные деформации основания, возникающие при возведении и эксплуатации плит дорожного покрытия в сложных грунтовых условиях, следует считать одним из основных факторов, влияющих на их несущую способность, деформативность и долговечность. При эксплуатации дорог передача нагрузки на плиту дорожного покрытия от колес автомобиля всегда будет вне оси симметрии конструкции, а также не исключена вероятность образования выбоин, воронок и других дефектов под основанием плиты, поэтому в ней будут проявляться изгибающие и крутящие моменты, а также поперечная сила. В общем случае плиты работают на поперечный изгиб с кручением, в частности на поперечный изгиб. Поэтому требуется учитывать влияние каждого из этих воздействий на несущую способность железобетонных плитных конструкций при их проектировании, изготовлении и эксплуатации.

Алгоритм статического расчета плиты на упругом основании. Расчёт плит выполняется численно-аналитически способом Жемочкина [1] (общая постановка задачи и ее аналитическое решение), с использованием метода Ритца (определение прогибов плиты в основной системе) и применением математического пакета «MathCad».

Данный подход позволяет рассчитывать плиты на произвольном линейно-упругом деформируемом основании любой формы в плане и загруженные произвольной нормальной к срединной плоскости плиты внешней нагрузкой [2].

Исходными данными для расчета являются:

– размеры плиты, прочностные и деформативные характеристики бетона и арматуры, площадь армирования и расположение арматурных стержней;

– модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта основания.

Плиты разбиваются на прямоугольные участки Жемочкина (рисунок 1). В середине каждого участка ставится связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием, а в центре плиты вводится защемление. Принимается, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение реактивных давлений в пределах участка Жемочкина [3].

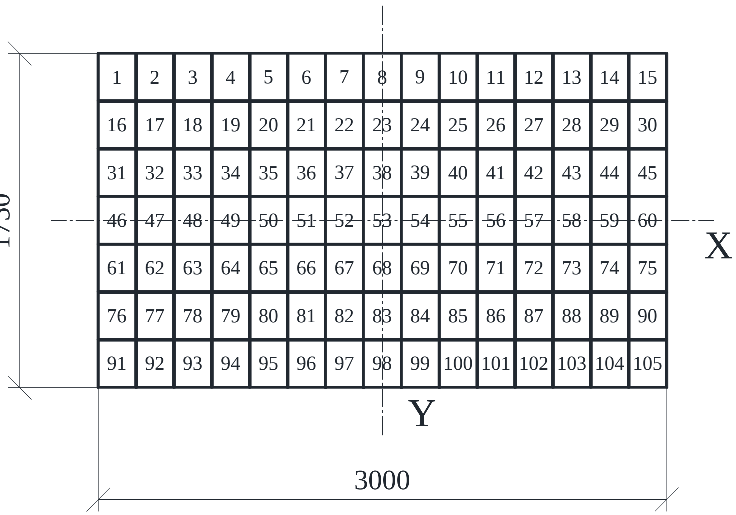

Рис. 1. Пример разбивки плиты на участки Жемочкина

В свою очередь каждый участок рассматривается как совокупность элементарных площадок, в пределах которых деформации считаются равномерно распределенными, а по высоте сечения элемента связанные гипотезой плоских сечений [4].

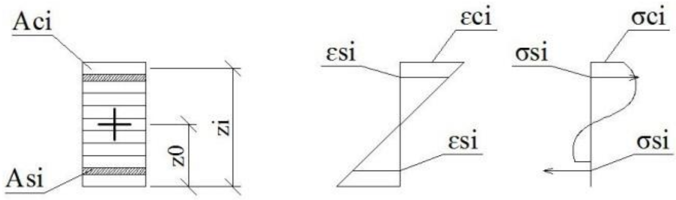

Рис. 2. Расчетное поперечное сечение плиты и распределение деформаций и напряжений

До появления трещин железобетонные конструкции могут рассчитываться как изотропные линейно-упругие либо нелинейно-упругие. После образования трещин жесткость плиты становится переменной величиной и зависит от координат рассматриваемой точки.

Положим, что после образования трещин бетон плиты в отношении своих упругих свойств обладает тремя осями симметрии, т.е. является ортотропным материалом.

В соответствии с ТКП EN 1992-1-1 [5] определяем начальный модуль деформации бетона при напряжении $0{,}4f_{cm}$ из следующей зависимости:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\cdot\eta};$$
$$\frac{\sigma_{ct}}{f_{ctm}} = \frac{k_t\eta_t - \eta_t^{\,2}}{1 + (k_t-2)\cdot\eta_t}, \tag{1}$$

где $\eta = \dfrac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}$; $\eta_t = \dfrac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ct1}}$;

$\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{ct1}$ – относительная деформация при максимальном значении напряжения при сжатии и растяжении;

$k = 1{,}05E_{cm}\cdot\dfrac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$; $k_t = 1{,}05E_{cm}\cdot\dfrac{|\varepsilon_{ct1}|}{f_{ctm}}$.

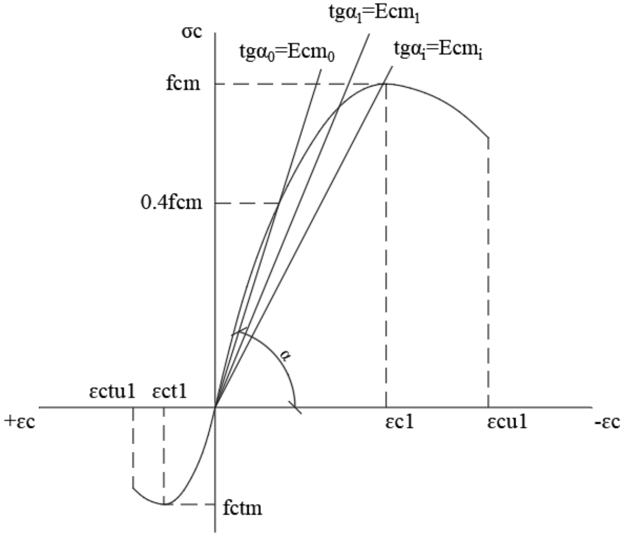

Рис. 3. График зависимости «напряжение-относительная деформация» для бетона

Жесткости плиты определим из следующих зависимостей:

$$
\begin{aligned}
&D11=\sum_{i=1}^{n} Ecm_i \cdot B_{1,1} \cdot h_i \cdot zcx_i^2+\sum_{j=1}^{2} Es_j \cdot \frac{Asx_j}{a} \cdot zsx_i^2;\\
&D12=\sum_{i=1}^{n} Ecm_i \cdot B_{1,2} \cdot h_i \cdot zcy_i^2+\sum_{j=1}^{2} Es_j \cdot \frac{Asy_j}{b} \cdot zsy_i^2;\\
&D21=\sum_{i=1}^{n} Ecm_i \cdot B_{2,1} \cdot h_i \cdot zcx_i^2+\sum_{j=1}^{2} Es_j \cdot \frac{Asx_j}{a} \cdot zsx_i^2;\\
&D22=\sum_{i=1}^{n} Ecm_i \cdot B_{2,2} \cdot h_i \cdot zcy_i^2+\sum_{j=1}^{2} Es_j \cdot \frac{Asy_j}{b} \cdot zsy_i^2;\\
&D33=\sum_{i=1}^{n} Ecm_i \cdot B_{3,3} \cdot h_i \cdot zcx_i^2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где zcx_i, zcy_i, zsx_i, zsy_i – положение нейтральной линии для бетона и арматуры в двух направлениях;

Asx_j, Asy_j – верхнее и нижнее армирование плиты в двух направлениях;

$$[B]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\nu^2-1} & \frac{\nu}{\nu^2-1} & 0 \\ \frac{\nu}{\nu^2-1} & -\frac{1}{\nu^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\cdot(1+\nu)} \end{bmatrix}$$ – технические постоянные упругости материала плиты

Прогибы нейтральной поверхности плиты будем искать в виде:

$$W(x,y)=\left[\left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]\times\left[C00+C01\cdot\frac{x}{b}+C10\cdot\frac{y}{a}+C11\cdot\frac{x\cdot y}{b\cdot a}\right], \quad (3)$$

где *C00, C01, C10, C11*– неопределённые коэффициенты;
a, b – некоторый линейный размер плиты.

Для определения коэффициентов используем метод Ритца. Составляем функционал полной энергии плиты с защемленной нормалью и действующей силой *P(u,t)*:

$$Э=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[D11\cdot\left(\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial x^2}\right)^2+D22\cdot\left(\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial y^2}\right)^2+(D12+D21)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial y^2}-2D33\cdot\frac{\partial^2W(x,y)}{\partial x\partial y}\right]dxdy-P\cdot W(u,t) \quad (4)$$

Ввиду линейности решаемой задачи этот функционал будет квадратичной функцией коэффициентов *C00, C01, C10, C11*. Из условия минимума функционала (4) составляется система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов *C00, C01, C10, C11* в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Э}{\partial C00}=0\\ \frac{\partial Э}{\partial C01}=0\\ \frac{\partial Э}{\partial C10}=0\\ \frac{\partial Э}{\partial C11}=0\end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

В результате решения данной системы получаем выражения для коэффициентов *C00, C01, C10, C11*

$$
\begin{aligned}
&C00=\frac{Pa^3bu^2+Pab^3t^2}{16D11a^4+16D22b^4+16D12a^2b^2+16D21a^2b^2};\\
&C01=\frac{3Pa^3u^3+3Pab^2ut^2}{144D11a^4+16D22b^4+48D12a^2b^2+48D21a^2b^2-32D33a^2b^2};\\
&C10=\frac{3Pa^3bu^2t+3Pb^3t^3}{16D11a^4+144D22b^4+48D12a^2b^2+48D21a^2b^2-32D33a^2b^2};\\
&C11=\frac{5Pa^2u^3t+5Pb^2ut^3}{80D11a^4+80D22b^4+80D12a^2b^2+80D21a^2b^2-224D33a^2b^2}.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

При определении перемещений точки *M (x,y)*, находящейся на поверхности упругого однородного изотропного полупространства от действия единичной силы, распределенной по площади участка Ω поверхности полупространства, необходимо вычислить интеграл

$$
W_m(x,y)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\frac{1}{\Omega}\iint_{\Omega}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}},\qquad (7)
$$

где Ω – площадь участка Жемочкина.

Перемещение точки *M (x,y)* поверхности упругого полупространства при загружении участка прямоугольной формы на этой поверхности равномерно распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1, интеграл (7) после вычислния имеет вид

$$
\begin{aligned}
W_M(x,y)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0\Delta_x}\Bigg[&\frac{y-d}{\Delta_y}ln\frac{x-b+\sqrt{(x-b)^2+(y-d)^2}}{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-d)^2}}+\\
&+\frac{y-c}{\Delta_y}ln\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-c)^2}}{x-b+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}+\qquad (8)\\
&+\frac{x-b}{\Delta_y}ln\frac{y-d+\sqrt{(x-b)^2+(y-d)^2}}{y-c+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}+\frac{x-a}{\Delta_y}ln\frac{y-c+\sqrt{(x-a)^2+(y-c)^2}}{y-d+\sqrt{(x-a)^2+(y-d)^2}}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\Delta_x=b-a,\quad \Delta_y=d-c,
$$

где a, b, c, d – координаты границ участка Жемочкина [4].

При определении коэффициентов канонических уравнений способа Жемочкина для расчета прямоугольной плиты на произвольном упругом основании можно написать

$$\delta_{ik} = \frac{(P=1)\left(1-\nu_0^2\right)}{\pi E_0 b}\left(F_{ik}^0 + F_{ik}^1\right) +$$
$$+\frac{(P=1)b^2}{D}\left[A_{22}\left(\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)+2B_{22}\frac{xy}{b^2}+\ldots\right], \tag{9}$$

где F_{ik}^0 – безразмерная функция для определения перемещений точки i на поверхности упругого основания от действия единичной силы, равномерно распределённой по прямоугольному участку k поверхности полупространства. Определяется выражением (8);

F_{ik}^1 – корректирует F_{ik}^0 применительно к рассматриваемой модели упругого основания.

Система канонически уравнений способа Жемочкина имеет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_{ik}R_k + \varphi_{0x}y_i + \varphi_{0y}x_i + u_0 + \Delta_{ip} = 0\right); \\ -\sum\limits_{k=1}^{n} R_k y_k + M_{px} = 0; \\ -\sum\limits_{k=1}^{n} R_k x_k + M_{py} = 0; \\ -\sum\limits_{k=1}^{n} R_k + Q = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где u_0, φ_{0x}, φ_{0y} – линейное и угловые перемещения введённого защемления на плите;

Q, M_{px}, M_{py} – равнодействующая внешних сил, действующих на плиту, и ее моменты относительно координатных осей;

R_k – реактивные усилия.

После решения системы канонических уравнений (10) по найденным значениям реактивных усилий находятся реактивное давление под плитой и распределение осадок S_k.

Кривизна нейтральной поверхности плиты в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а также относительное кручение поверхности будут равны

$$\frac{1}{r_x}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \frac{1}{r_y}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\quad \frac{1}{r_{xy}}=\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{11}$$

С учетом конечных разностей можно записать

$$\frac{1}{r_x}=-\frac{S_{i+1,j}-2S_{i,j}+S_{i-1,j}}{\Delta x^2};\ \frac{1}{r_y}=-\frac{S_{i,j+1}-2S_{i,j}+S_{i,j-1}}{\Delta y^2};$$

$$\frac{1}{r_{xy}}=\left(S_{i+1,j+1}-S_{i+1,j-1}-S_{i-1,j+1}+S_{i-1,j-1}\right)\cdot\frac{1}{4\Delta x\Delta y}; \tag{12}$$

$$i=2..m-1;\quad j=2..n-1.$$

Относительные деформации слоя, отстоящего от нейтральной поверхности на расстоянии z_i будут равны

$$\varepsilon_{xi}=\frac{\left(z_0-z_i\right)}{r_x};\quad \varepsilon_{yi}=\frac{\left(z_0-z_i\right)}{r_y};\quad \varepsilon_{xyi}=\frac{\left(z_0-z_i\right)}{r_{xy}}. \tag{13}$$

Далее по диаграммам деформирования с учетом найденных относительных деформаций находим секущие модули деформации и, с учетом закона Гука, напряжения в элементарном слое.

$$\sigma_{xi}=\frac{E_i}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xi}+\nu\varepsilon_{yi}\right);\quad \sigma_{yi}=\frac{E_i}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yi}+\nu\varepsilon_{xi}\right);$$

$$\tau_{xyi}=2G\varepsilon_{xyi}=\frac{E_i}{1-\nu}\varepsilon_{xyi}. \tag{14}$$

Если напряжения растяжения в бетоне элементарной площадки превышают предельные значения, это свидетельствует об образовании трещины в этой площадке. В дальнейших расчетах осевая жесткость этой элементарной площадки принимается равной нулю.

Найденные секущие модули деформаций вводятся в расчет в новом расчетном цикле. Критерием окончания процесса последовательных приближений является сравнение осадок плиты на смежных этапах.

Экспериментальные исследования. С целью подтверждения методики статического расчета и определения реального распределения осадок упругого основания под плитой были проведены полевые испытания дорожной плиты 2ПП30.18-30.

До проведения испытания на площадке были выполнены инженерно-геологические изыскания: статическое зондирование и штамповые испытания. По результатам штамповых испытаний модуль деформации верхнего слоя грунта составил $E = 22{,}1$ МПа. Результаты статического зондирования грунтов приведены на рисунке 3. По результатам статического зондирования для каждого грунта в соответствии с таблицей 6.7 [6] определен модуль деформации грунта (Таблица 1).

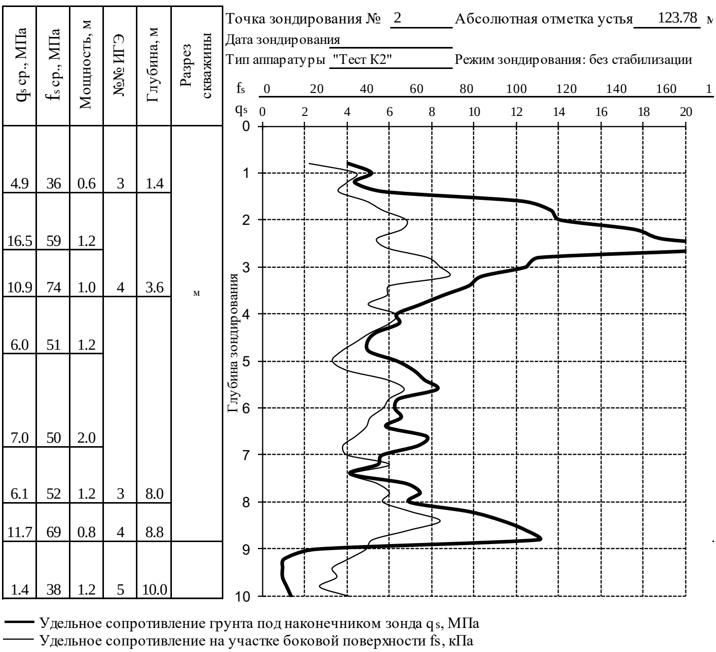

Рис. 3 – Результаты статического зондирования на площадке проведения испытаний

Таблица 1

Характеристики грунтов

Номер слоя	Тип грунта	Мощность слоя, м	q_s МПа	E_0 МПа	ν
1	Песок мелкий	0,8	0,5	4,0	0,3
2		0,6	4,9	19,8	
3		1,2	16,5	44,4	
4		1,0	10,9	32,7	
5		1,2	6,0	22,0	
6		2,0	7,0	24,0	
7		1,2	6,1	22,2	
8		0,8	11,7	35,0	

Испытание плиты производились для следующих схем:

а – одно колесо на плите. Последовательно в 4 точках (в центре плиты, на краях плиты и в углу плиты, см. рисунок 4а) производится испытание одним домкратом на нагрузку 100 кН;

б – два колеса на плите. Производится испытание одновременно двумя домкратами в середине плиты (рис. 4б) на нагрузку 100 кН каждый, следующее испытание – на краю плиты (рис. 4в) на нагрузку 100 кН каждый.

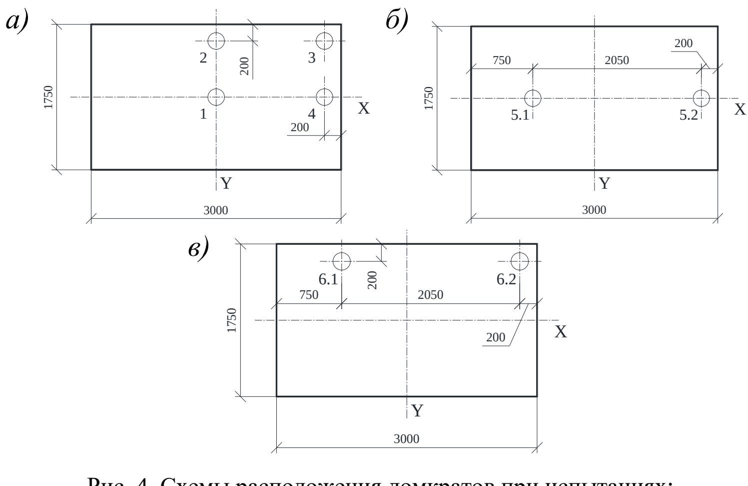

Рис. 4. Схемы расположения домкратов при испытаниях:
а – загружение 1-4; *б* – загружение 5; *в* – загружение 6

Измерение перемещений производилось 9 прогибомерами с точностью 0.01 мм. Точки их закрепления приведены на рис. 5.

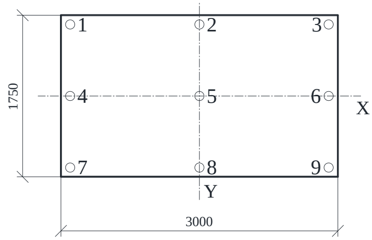

Рис. 5. Схема расположения прогибомеров 6 ПАО с ценой деления 0.01

Испытание производилось в каждой из 6 точек последовательным приложением нагрузки ступенями до максимальной величины, равной 100 кН. В процессе испытания замерялись только вертикальные перемещения.

Численное исследование эксперимента. После проведения испытаний по методике, изложенной выше, выполнены численные исследования. Расчет производился на максимальную нагрузку в каждом загружении при двух вариантах характеристик грунта основания:

1 – модуль деформации грунта основания определен по результатм статическог зондирования. При этом в расчет принимались три верхних слоя грунта. Эквивалентный модуль деформации определялся в соответствии с ТКП 45-5.01-67-2007 [7] по формуле

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{E_i}}; \tag{15}$$

где A_i – площадь эпюры вертикальных напряжений от единичного давления под подошвой фундамента в пределах i-го слоя грунта;

E_i – модуль деформации i-го слоя грунта;

n – число слоев.

Эквивалентный модуль деформации грунта основания для первых трех слоев составил $E = 4,65$ МПа;

2 – модуль деформации грунта основания принят по результатам штамповых испытаний и составил $E = 22{,}1$ МПа.

Результаты экспериментальных и численных исследований приведены на рис. 6 (осадки даны по осям плиты).

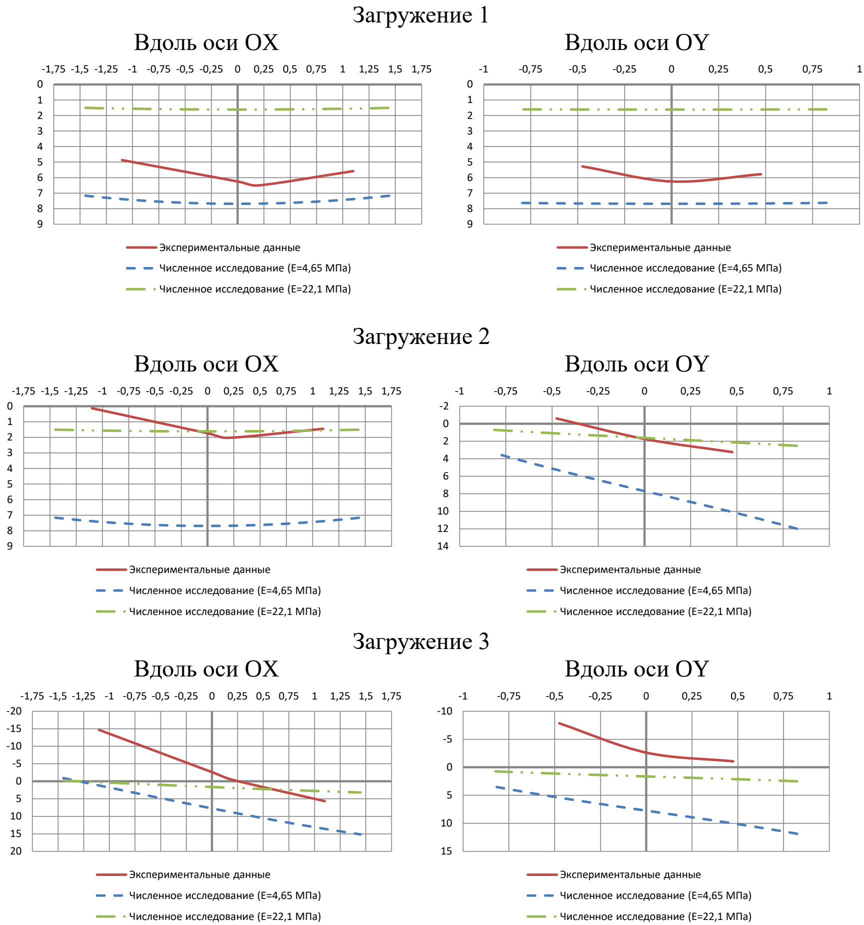

Рис. 6 – Распределение осадок плиты (начало)

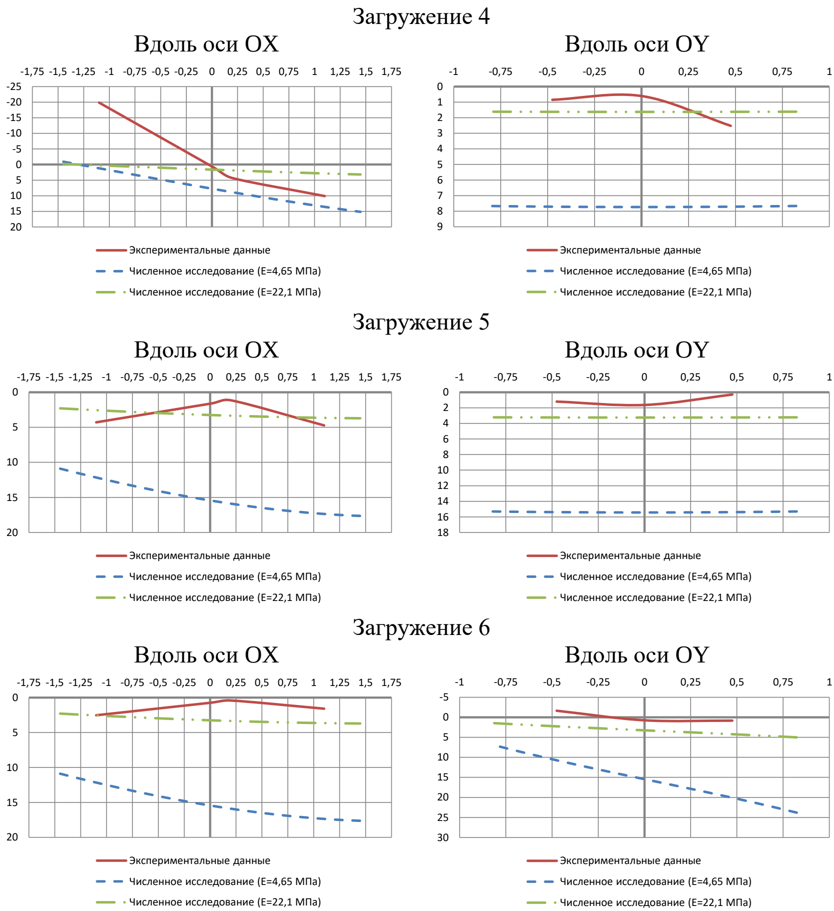

Рис. 6. Распределение осадок плиты (окончание)

Заключение. Численные и экспериментальные исследования показывают, что в условиях эксплуатации плиты покрытия автодорог всегда будут подвержены сложному деформированию, так как нагрузки от колес автомобиля прикладываются вне оси симметрии плиты и дорожное основание под плиты неоднородно как по длине плиты, так и по ширине.

По результатам сравнения экспериментальных и численных исследований можно отметить, что при модуле деформации грунта, принятом по результатам статического зондирования, распределение осадок более соответствует экспериментальным данным. Однако, значения осадок при этом довольно сильно завышены. При модуле деформации, принятом по результатам штамповых испытаний, значения осадок наиболее близко к результатам эксперимента, но, распределение осадок под плитой не соответствует данным эксперимента. В дальнейшем, при оценке точности принятой методики статического расчета следует принимать результаты численного исследования, выполненного по данным статического зондирования, т.к. при определении усилий в сечениях плиты наибольшее значение имеет распределение осадок, а не их величина.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенюк С.Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании: монография/ С.Д. Семенюк. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2003. – 269 с.

2. Жемочкин Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Синицын. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.

3. Босаков С.В. Статические расчеты плит на упругом основании/ С.В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.

4. Пособие П1-98 к СНиП 2.03.01-84* Усиление железобетонных конструкций – Минск; Минстройархитектуры, 1998. – 189 с.

5. ТКП EN 1992-1-1-2009 (02250). Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий. – Минск, 2015. – 165 с.

6. ТКП 45-5.01-15-2005 (02250). Прочностные и деформационные характеристики грунтов по данным статического зондирования и пенетрационного каротажа. Правила определения. – Минск, 2006. – 21 с.

7. ТКП 45-5.01-67-2007 (02250). Фундаменты плитные. Правила проектирования. – Минск, 2018. – 94 с.

8. ТКП 45-3.03-244-2011 (02250). Автомобильные дороги. Дорожные одежды жесткого типа. Строительные нормы проектирования. – Минск, 2012. – 60с.

9. Гобунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Гобунов-Посадов, Т.А. Маликова // Изд. 2-е, перераб. и доп. – М., Стройиздат, 1973. – 627 с.