

**АЛГОРИТМ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ
И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО
ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ
ДЕФОРМАЦИЙ В PTS MathCAD**

УЛАСЕВИЧ В. П., КАКОВКО В. И.

Брестский государственный технический университет
Брест, Беларусь

Постановка задачи. В современных условиях при проектировании различных конструктивных схем зданий и сооружений, а также при разработке конструктивных решений для их усиления, наметилась тенденция на использование стержневых систем сложной геометрической структуры, запроектированных из легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) или стальных тонкостенных холодноформованных профилей (СТХП), обладающих повышенной деформативностью. Их отличительная особенность – сложность учета деформаций стержней и узловых соединений под воздействиями, *необходимость обеспечить общую устойчивости формы равновесия*. Кроме того, поскольку стержневые системы из ЛСТК и их отдельные стержни обладают повышенной деформативностью, *оценка эффектов воздействий в их расчетных моделях* должна выполняться по деформированной схеме равновесия с учетом геометрической нелинейности, проявляющейся в процессе их деформирования под расчетными воздействиями. Важно, чтобы при выключении части стержней рассчитываемой системы из работы путем потери ими устойчивости, алгоритм и разработанная на его основе компьютерная программа могла уметь оценить устойчивость оставшейся части расчетной модели. И если оставшаяся часть рассчитываемой системы устойчива и может продолжать воспринимать *возмущающие воздействия*, уметь продолжить расчет уточненной расчетной модели, который будет учитывать, как *геометрическую*, так и проявленную стержневой системой *конструктивную нелинейность*. В основу статического расчета моделей воздействий стержневых систем повышенной деформативности положен метод

деформаций [1], [2], обладающий достоинствами, как классического метода перемещений, так и матричного метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. Но в отличие от метода перемещений, в котором жесткая связь, накладываемая на узел основной системы, запрещает его поворот, но допускает возможное горизонтальное перемещение, в методе деформаций накладываем на узлы основной системы связи, запрещающие не только поворот, но и горизонтальное их смещение. В результате – получаем стержневую систему, стержни которой могут быть загружены сплошной поперечной нагрузкой $q(x)$, и которые в общем случае могут быть упруго соединены с неподвижными опорами. В таком случае каждый такой стержень с $EA > 0$ и $EI > 0$, примыкающий к неподвижным узлам системы, работает как растянуто-изогнутый, испытывающий в общем случае продольные и угловые деформации. А с точки зрения МКЭ в предложенном методе деформаций [1] нет необходимости делить стержень на конечные элементы (КЭ) для достижения требуемой точности, так как каждый стержень системы представляет собой *конструктивный элемент, напряженно-деформированное состояние которого описано универсальной системой трех разрешающих уравнений*, обладающих аналитической точностью[1].

Очевидно, что с учетом сказанного, открывается возможность разработать *деформационный метод статического расчета* стержневых систем повышенной деформативности, который позволил бы комплексно учитывать деформированное состояние всех стержней рассчитываемой модели. Это позволит не только более точно учесть влияние *геометрической* нелинейности системы, но и установить: возможна ли потеря устойчивости отдельных стержней и системы в целом, а при потере устойчивости отдельных стержней *рассчитываемой системы* – оценить влияние проявившей себя *конструктивной нелинейности* на возможность *прогрессирующего обрушения*.

Таким образом, разработка метода расчета стержневых систем, учитывающего деформационную *модель эффектов воздействий* с оценкой устойчивости формы равновесия, актуальна как в теоретическом, так и в практическом плане, так именно такой подход к их расчету заложен в стандартах Еврокода 3, принятых в Республике Беларусь.

О матричном методе деформаций. Ниже кратко излагаются основные положения алгоритма матричного метода расчета стержневых систем сложной геометрической структуры, построенного на методе деформаций, изложенном в [1]. Его основная отличительная особенность от классического метода перемещений: возможность учета продольных деформаций стержней; возможность учета деформированной геометрии стержней в принятой *основной системе* под расчетными поперечными воздействиями; универсальность представления распределенной по длинам стержней функции поперечной нагрузки в параметрическом виде $g(x)$; матричная форма алгоритма расчета. *Основная система метода деформаций* образуется, в отличие от метода перемещений, путем наложения на все узлы рассматриваемой модели *жестких связей*, препятствующих как повороту, так и горизонтальному смещению концов ее стержней.

Для стержневой системы, порядка $k=m \cdot n$ (где m – число связей в узлах; n – число узлов) матричная система уравнений метода деформаций имеет вид

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{P_u\} + \{P_s\} + \{R\}, \quad (1)$$

где: $[K]$ – матрица внешней жесткости свободной системы;

$\{\Delta\}$ – вектор искомым перемещений узловых точек;

$\{P_u\}$ – вектор внешних нагрузок, действующих в узлах рамы в глобальной системе;

$\{P_s\}$ – вектор реакций начала и конца стержня, от воздействия распределенных по его длине поперечных нагрузок, температурных воздействий, предварительного натяжения с учетом условий закрепления стержней в узлах, приложенных с обратным знаком;

$\{R\}$ – вектор опорных реакций, на которые наложены опорные связи (если в узле нет связей, то соответствующие им величины равны нулю).

Очевидно, что точность метода перемещений определена методикой вычисления вектора опорных реакций $\{P_s\}$ на стадии определения напряженно-деформированного состояния стержней рамы в *основной системе*.

Оценка деформированного состояния каждого гибкого стержня стержневой системы в основной системе метода деформаций

(рис. 1) построена на аналитическом решении дифференциального уравнения [1]

$$\frac{dv^4}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI}, \quad (2)$$

где H , v – распор и функция прогибов от воздействия нагрузки $q(x)$;
 EI – изгибная жесткость стержня;
 M^a, M^b – изгибающие моменты в опорных связях основной системы.

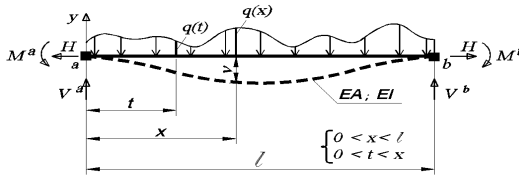


Рис. 1. Деформированное состояние прямолинейного стержня

Решение уравнения (2) в интегральных квадратурах при краевых условиях

$$v|_{x=0} = 0; \quad v|_{x=l} = 0; \quad v''|_{x=0} = \frac{M^a}{EI}; \quad v''|_{x=l} = \frac{M^b}{EI},$$

изложено в [1] относительно прогибов v и изгибающих моментов M_s , но содержащее в себе основные неизвестные – распор H и опорные моменты M^a, M^b

$$v = -\frac{1}{H} \left[R_b x - \int_0^x (x-t)q(t)dt + M^a - (M^a - M^b) \frac{x}{l} - M_s \right], \quad (3)$$

$$M_s = \frac{r_s}{a_1} sh(a_1 x) - \frac{1}{a_1} \int_0^x sh(a_1(x-t))q(t)dt + \frac{M^a}{sh(a_1 l)} sh(a_1(l-x)) + \frac{M^b}{sh(a_1 l)} sh(a_1 x), \quad (4)$$

где $a_1 = \sqrt{\frac{H}{EI}}$; $R_b = \frac{1}{l} \int_0^l (x-t)q(t)dt$; $r_s = \frac{1}{sh(a_1 l)} \int_0^l sh(a_1(l-t))q(t)dt$,

$$Q_s = \frac{dM_s}{dx}$$

Основное достоинство функции прогибов (3) и изгибающих моментов (4), а также ее производных, состоит в том, что они непрерывны и дифференцируемы. Это позволило в [1] на основании равенства полных линейных и угловых деформаций разработать систему трех разрешающих уравнений в *замкнутом виде* относительно входящих в них неизвестных – распора H и опорных моментов M^a, M^b в виде

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{H \cdot l}{EA} + \left(\frac{H}{EA} - \frac{1}{2} \right) \frac{D(H)}{H^2} + \left[H \cdot (c_n^a - c_n^b) + \left(\alpha \cdot l \cdot \Delta t - \frac{P_n \cdot l}{EA} \right) \right] \right] = 0; \\ & \left[\left(\frac{th(al) - al}{H \cdot l \cdot th(al)} - c_\varphi^a \right) \cdot M^a - \frac{sh(al) - al}{H \cdot l \cdot sh(al)} \cdot M^b = - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0; M^a=0; M^b=0} \right]; \\ & \left[\frac{sh(al) - al}{H \cdot l \cdot sh(al)} \cdot M^a - \left(\frac{th(al) - al}{H \cdot l \cdot th(al)} - c_\varphi^b \right) \cdot M^b = - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=l; M^a=0; M^b=0} \right], \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где
$$D(q, H) = \int_0^l \left(R_b - \int_0^x q(t) dt - \frac{1}{l} (M^a - M^b) - \frac{dM_s}{dx} \right)^2 dx; \quad (6)$$

$c_n^a, c_n^b, c_\varphi^a, c_\varphi^b$ – коэффициенты линейной и угловой податливости левой и правой опор стержня соответственно; l – длина стержня; α – коэффициент линейного расширения стали; Δt – расчетный перепад температуры.

При известных значениях M^a и M^b вертикальные реакции V^a и V^b равны

$$V^a = R_b - \frac{1}{l} (M^a - M^b); \quad V^b = \int_0^l q(t) dt - V^a. \quad (7)$$

После расчета всех стержней в основной системе рамы по уравнениям (5), есть возможность с учетом (7) сформировать вектор $\{P_s'\}$ в локальной системе координат. Тогда векторы $\{P_s\}$ в глобальной системе координат

$$\{P_s\} = [T_\alpha]^T \cdot \{P_s'\}, \quad (8)$$

а связь реакций узлов всей системы $\{r\}$ (2) с реакциями и перемещениями концов ее элементов $\{\delta'\}$ может быть определены по формуле

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\} = [T_\alpha]^T \cdot \{ [K'] \cdot \{\delta'\} \} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\delta\}, \quad (9)$$

Вектор перемещений в глобальной системе координат вычисляем так

$$\{\Delta\} = [K^*]^{-1} \cdot (\{P_u^*\} + \{P_s^*\}), \quad (10)$$

Действительные реакции $\{r'\}$ по концам каждого стержня рамы в местной системе координат рамы в свободной от связей системе рамы равны

$$\{r'\} = [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\Delta\} - \{P_s'\}. \quad (11)$$

Тогда перемещения и усилия вычисляем по (3) (4), (5) [1].

Компьютерная программа CsdCAD расчета в MathCAD. Выбирается основная система расчетной модели путем наложения требуемого количества связей. Вводится информация о количестве узлов системы, количестве стержней системы, их жесткостях. Вводят координаты узлов, коэффициенты линейной и угловой податливости начала и конца каждого стержня, узловые и распределенные на стержнях поперечные нагрузки.

Далее начинается работа программы: исходные данные преобразуются к требуемому виду, определяются длины элементов и углы наклона каждого стержня по отношению к положительному направлению оси x , формируется вектор $\{FE_{geom}\}$, формируется и решается для каждого стержня с распределенной нагрузкой система нелинейных уравнений (5), позволяющая определить вектор опорных реакций $\{P_s'\}$. Формируется матрица преобразований координат и диагональная матрица $\{E\}$, необходимая для вычеркивания столбцов и строк из матрицы жесткости всей системы. Формируется вектор узловых нагрузок $\{P_u\}$, и вектор опорных реакций стержней $\{P_s\}$ по (8), которые в сумме дают вектор нагрузок $\{P\}$. Затем формируется матрица жесткости всей системы K_0 .

Алгоритм формирования матрицы жесткости всей системы представлен на рисунке 2. Сначала формируется матрица жесткостей $[K_0]$ без учета связей в узлах системы. Затем, путем умножения матрицы $[K_0]$ на диагональную матрицу $[E]$, формируется вектор $\{K_{so}\}$, содержащий окончательную матрицу внешней жесткостей $[T]$ и две вспомогательные матрицы $[S]$ и $[Q]$, необходимые для работы вычислительного ядра программы. Далее решается система уравнений для определения вектора перемещений узлов (10) и вычисления вектора реакций $\{r'\}$ (11) в стержнях системы.

```

K0 :=
for s ∈ 1..(cols(XY) · 3)
  for n ∈ 1..(cols(XY) · 3)
    Ts,n ← 0
  for q ∈ 1..cols(FE)
    EI ← RGDT1,q
    EA ← RGDT2,q
    l ← FEgeom1,q
    α ← FEgeom2,q
    Kel ← KE(EA, EI, α, l)1, FEтип1,q
    i ← FEl,q
    j ← FE2,q
    f(n) ← 3 · (n - 1)
    (a b c) ← [(f(i) + 1) (f(i) + 2) (f(i) + 3)]
    (x y z) ← [(f(j) + 1) (f(j) + 2) (f(j) + 3)]
    for k ∈ a, b, c, x, y, z
      for t ∈ a, b, c, x, y, z
        p ← (k - f(i)) if k = a ∨ k = b ∨ k = c
        p ← (k - f(j) + 3) if k = x ∨ k = y ∨ k = z otherwise
        m ← (t - f(i)) if t = a ∨ t = b ∨ t = c
        m ← (t - f(j) + 3) if t = x ∨ t = y ∨ t = z otherwise
        Tk,t ← Tk,t + Kelp,m
T

Ksol :=
q ← 1
s ← 1
for i ∈ 1..cols(E1)
  if E1,i = 1
    Qq,i ← i
    q ← q + 1
for i ∈ 1..rows(Q)
  Si,1 ← Pq(Qi,1)1
  for j ∈ 1..rows(Q)
    Ti,j ← Kq(Qi,1)(Qj,1)
(T
S
Q)

```

Рис. 2. Блок формирования глобальной матрицы жесткости в MathCAD

Расчет отладочных и контрольных примеров в компьютерной программе CsdCAD, разработанной в среде PTS MathCAD, представлен в [2].

Из блок-схемы алгоритма компьютерная программа, разработанная средствами программирования математической среды MathCAD видно, что она содержит три функционально увязанные между собой части: блок ввода исходной информации; вычислительное ядро программы; блок обработки результатов расчета. Наибольшую ценность представляет *вычислительное ядро*, в котором реализован алгоритм вычислительных и логических процедур, разработанных на основе теоретических исследований, изложенных в статье [1]. Достоверность программы обоснованно системой нелинейных разрешающих уравнений (5), которая позволила выполнять их расчет в *основной системе* по деформированной схеме с учетом геометрической нелинейности [2].

Оценка устойчивости стержневых систем. Разработанный метод деформаций [1] и реализованный в компьютерной программе [2], а также изложенная Е.М. Сидоровичем в работа [3] методика расчета стержневых систем на устойчивость *качественным методом*, позволили ставить задачу о разработке алгоритма расчета стержневых систем на устойчивость по деформированной схеме с учетом геометрической и конструктивной нелинейности.

Полученная при расчете стержневой системы матрица закрепленной системы $[K^*]$, входящая в (10), является матрицей мгновенной жесткости $[K(H)]$ вследствие того, что дополнительные узловые нагрузки при расчете на устойчивость полагаются нулевыми, получается однородной, вида

$$[K(H)] \cdot \{\Delta\} = 0, \quad (12)$$

где $[K(H)]$ – матрица мгновенной жесткости, элементы которой – реакции r_{ik} во введенных связях на узлы основной системы, зависящие от продольных сил H в ее стержнях.

Особенность расчета на устойчивость в необходимости учета дополнительного изгибающего действия продольных сил H , за счет которого эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений получаются криволинейными. Реакции во введенных связях содержат поправочные множители в виде специальных функций от безразмерных параметров ν . Для сжатых стержней с $H \leq 0$ и

$$\nu = l \sqrt{\frac{|H|}{EI}}$$

как специальные поправочные коэффициенты к элементам матриц внутренней жесткости сжатых стержней от безразмерных параметров ν приведены в [3], стр. 229. Для растянутых стержней – см. [3], стр. 235.

В излагаемом здесь методе *деформаций* при расчете на устойчивость специальные функции к элементам матриц внутренней жесткости, приведенные в [3], пересчитаны на зависимость их от параметра $a_1 l$ (4), (5)

$$a_1 l = l \sqrt{\frac{|H|}{EI}}. \quad (13)$$

Тогда специальные функции как поправочные коэффициенты к элементам матрицы внутренней жесткости, зависящие от параметра a_1l (11) имеют вид

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{(a_1l)^2 \operatorname{tg}(a_1l)}{3(\operatorname{tg}(a_1l) - a_1l)}; \quad \phi_2 = \frac{a_1l(\operatorname{tg}(a_1l) - a_1l)}{8\operatorname{tg}(a_1l)\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a_1l}{2}\right) - \frac{a_1l}{2}\right)}; \\ \phi_3 &= \frac{a_1l(a_1l - \sin(a_1l))}{4\sin(a_1l)\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a_1l}{2}\right) - \frac{a_1l}{2}\right)}; \\ \phi_4 &= \frac{\left(\frac{a_1l}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\left(\frac{a_1l}{2}\right)}{3\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a_1l}{2}\right) - \frac{a_1l}{2}\right)}; \quad \eta_1 = \frac{(a_1l)^3}{3(\operatorname{tg}(a_1l) - a_1l)}; \\ \eta_2 &= \frac{\left(\frac{a_1l}{2}\right)^3}{3\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a_1l}{2}\right) - \frac{a_1l}{2}\right)}\end{aligned}\tag{14}$$

Тогда для прямолинейного стержня с заземленными концами (рис. 1) матрицы внутренней жесткости с учетом безразмерных функций (12) продольно-поперечного изгиба имеет вид

$$[K_s] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3}\eta_2 & -\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 & \vdots & 0 & -\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 & -\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 & \frac{4EJ}{l}\varphi_2 & \vdots & 0 & \frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 & \frac{2EJ}{l}\varphi_3 \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \vdots & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 & \frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 & \vdots & 0 & \frac{12EJ}{l^3}\eta_2 & \frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 & \frac{2EJ}{l}\varphi_3 & \vdots & 0 & \frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 & \frac{4EJ}{l}\varphi_2 \end{bmatrix}; \tag{15}$$

Для других вариантов крепления стержней к узлам матрицы внутренней жесткости с безразмерными коэффициентами (12), зависящими от пара-

матра a_{1l} , могут быть получены из (13) путем исключения по методу Гаусса-Жордана. Такое решение приведено Е.М. Сидоровичем в [3].

Для растянуто-изогнутых стержней в формулах (14) необходимо произвести следующие замены:

$$(a_{1l})^2 \rightarrow -(a_{1l})^2; \sin(a_{1l}) \rightarrow \sinh(a_{1l}); \operatorname{tg}(a_{1l}) \rightarrow \operatorname{th}(a_{1l}).$$

Очевидно, что коэффициенты матриц мгновенной жесткости стержневой системы при расчете на устойчивость зависят от безразмерных функций (12), связанных с параметром (a_{1l}) .

Критическому состоянию деформированного равновесия стержневой системы отвечает ненулевые перемещения $\{\Delta\}$ (10) ее узлов

$$\{\Delta\} \neq 0,$$

что возможно, если матрица мгновенной жесткости системы *вырождена* и ее определитель, как ее количественная характеристика, равен нулю

$$\operatorname{Det}[K(a_{1l})]=0. \quad (16)$$

Выражение (19) и есть нелинейное (трансцендентное) уравнение критического равновесия относительно параметра (a_{1l}) как основного неизвестного. При оценке устойчивости представляет интерес наименьший из корней (a_{1l}) матричного уравнения (19).

Для заключения об устойчивости рассчитываемой стержневой системы решение уравнения устойчивости (19) с целью поиска наименьшего параметра (a_{1l}) как основного неизвестного задача математически сложная и трудоемкая. В настоящее время для оценки устойчивости стержневых систем используется *качественный метод исследования* их расчетной модели, суть которого изложена в [3]:

Для оценки устойчивости стержневых систем *качественным методом* [5], нами разработана средствами программирования PTS MathCAD компьютерная программа DresCAD по алгоритму, построенному на расчете стержневых систем по методу деформаций [1] и реализованному в программе CsdCAD, суть которого изложенной в п. 2 настоящей статьи, а более подробно – в [3]:

а). Выполняется статический расчет стержневой модели при заданном уровне нагрузки и других воздействиях по методу деформаций [1], [2], [3].

б). По известным формулам Эйлера проверяется устойчивость всех стержней расчетной модели с учетом закреплений их в узлах основной системы метода деформаций (ОСМД). Критическая сила для каждого стержня определяется путём приравнивания нулю определителей матриц жёсткостей для каждого из них. Проверка всех стержней на устойчивость выполняется методом сравнения критических сил с продольными силами в стержнях, вычисленных по [1].

в). Если устойчивость всех стержней ОСМД обеспечена, то анализируется полученная в результате расчета матрица мгновенной жесткости стержневой системы с учетом вычисленных внутренних сил в ее стержнях *в деформированном состоянии*. Все главные диагональные элементы матрицы мгновенной жесткости *в деформированном состоянии должны* быть положительны. Если в процессе анализа будет выявлено наличие отрицательных или нулевых элементов, делается вывод о неустойчивости деформированной системы в исследуемом состоянии равновесия. В этом случае дальнейший расчет должен быть либо прекращен, либо продолжен во вновь сформированной расчетной модели, учитывающей конструктивную нелинейность.

г). Если все главные диагональные элементы матрицы мгновенной жесткости в деформированном состоянии положительны, то выполняется разложение матрицы мгновенной жесткости на множители одним из известных методов. В PTS MathCAD для разложения матриц на множители использованы встроенные функции.

д). Окончательное заключение об устойчивости стержневой системы должно быть сделано путем исследования элементов, расположенных на главной диагонали матрицы мгновенной жесткости при разложении ее на множители. Если все диагональные элементы положительны и среди них нет близких к нулю, то равновесие стержневой системы при заданном для нее воздействии *устойчиво*; если разложение матрицы мгновенной жесткости прервано, то равновесие является критическим. Если среди диагональных элементов есть хотя бы один отрицательный, то равновесие стержневой системы при данном уровне воздействия *неустойчиво*.

Устойчивость и расчет по деформированному состоянию. Предложенный в [4] д.т.н., проф.Е.М. Сидоровичем и развитый в [2] **качественный метод** оценки устойчивости стержневых систем, позволяет однозначно дать ответ на вопрос «Устойчива или не-

устойчива принятая для нее расчетная модель при заданном характере и величине воздействия?». И если расчетная модель стержневой системы в этом состоянии равновесия устойчива, то ее матрица мгновенной жесткости положительно определена. А это значит, что система может перейти из устойчивого *исходного состояния* в новое *возмущенное* (рассчитываемое) *деформированное* состояние приложением к ее стержням *дополнительных воздействий*. Тогда матричная система уравнений метода деформаций (1), учитывающая продольные деформации рассчитываемой стержневой системы и перемещения ее узлов $\{\Delta\}$ (10), имеет вид

$$[K(a_{iI}, \Delta)] \cdot \{\Delta\} = \{P_u\} + [T_\alpha]^T \cdot \{P'_s\} + \{R\}. \quad (17)$$

Сформированная положительно определенная матрица мгновенной жесткости $[K(a_{iI}, \{\Delta\})]$ системы уравнений (20) отрывает возможность выполнить *деформационный* расчет *возмущенного состояния* стержневой системы путем организации процедуры последовательных приближений, реализуемой программными средствами MathCAD. Для этого:

– Выполняем расчет возмущенного равновесного состояния стержневой системы *методом деформаций* [1] как первое приближение, что дает возможность. Анализ полученных результатов дает возможность получить вектор перемещений узлов $\{\Delta\}$ с учетом продольных деформаций (а в случае загрузки их поперечной нагрузкой) и поперечных деформаций, а также внутренние усилия в стержнях. Вектор перемещений узлов $\{\Delta_i\}$ дает возможность откорректировать матрицу мгновенной жесткости $[K(a_{iI}, \{\Delta_i\})]$.

– Выполняя последующие расчеты матричной системы (17) с анализом результатов расчета и корректировкой матрицы мгновенной жесткости $[K(a_{iI}, \{\Delta_i\})]$, необходимой для последующего $(i+1)$ статического расчета методом деформаций, получаем быстро сходящийся итерационный процесс вплоть до достижения заданной точности.

Полученное решение стержневой системы необходимо проверить на устойчивость выше изложенным *качественным методом*.

И если стержневая система устойчива, то вычисленный вектор $\{\Delta\}$ дает возможность строить эпюры перемещений v , изгибающих моментов M_s и сдвигающих сил Q_s с использованием аналитических

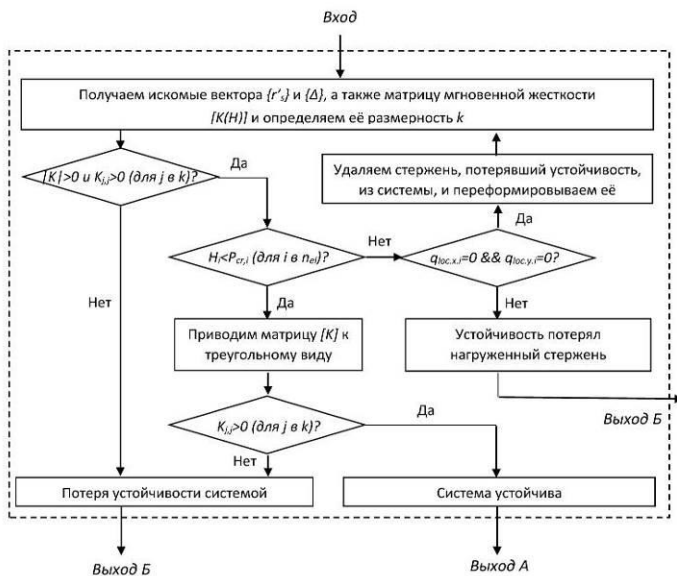


Рис. 5. Блок-схема проверки устойчивости стержневой системы

По разработанной программе проанализированы расчетные модели стержневых систем, представленные на рисунке 6 [4], рис. 7 [5], а также на рис. 8 и 9. Анализ результатов расчета изложен в таблицах 1, 2, 3, 4.

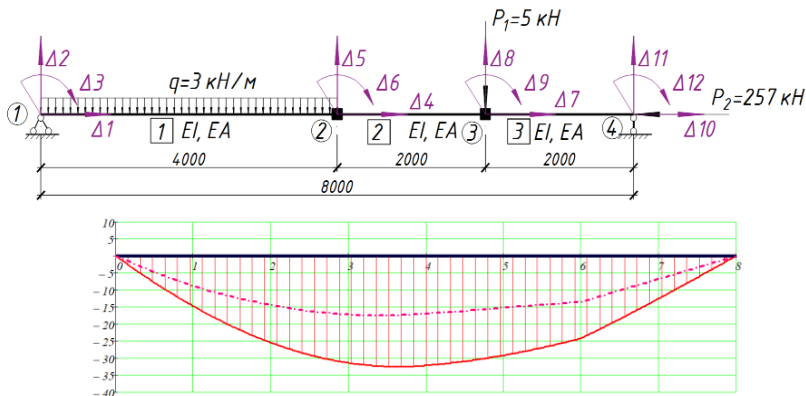


Рис. 6. Эпюра изгибающих моментов в сжато-изогнутом стержне [4] ($EI = 3638.04 \text{ кНм}^2$, $EA = 921900 \text{ кН}$) (штрихпунктирная линия – линейный расчёт)

Таблица 1.

Оценка результатов расчета по различным методам сжато-изогнутого стержня [4]

Анализ расчётов	M_{z_2} , кНМ	M_{ϕ_2} , кНМ	M_{ϕ_3} , кНМ	Δ_{ϕ_2} , см	Δ_{ϕ_3} , см
Деформационный расчет (КП DresCAD)	25.459	32.171	24.192	5.903	4.16
Точное решение (6)	25.506	32.253	24.240	5.935	4.179
Линейный расчет (КП DresCAD)	14.500	17.000	13.500	3.207	2.254
Различие деформационного расчета с точным расчётом (6), %	0.186%	0.254%	0.2%	0.537%	0.451%
Различие деформационного расчета с линейным расчетом (КП DresCAD), %	43.045%	47.157%	44.195%	45.673%	45.819%

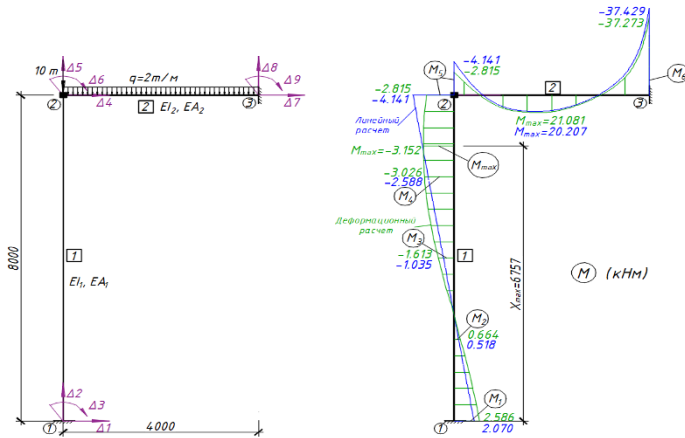


Рис. 7. Расчетная схема и эпюры изгибающих моментов для стержня 1 (EI1= 915.6 кНм2, EA1= 1680000 кН, EI2= 2373 кНм2, EA2= 21000000 кН)

Таблица 2.

Анализ результатов расчета рамы [5] по программе DresCAD

Анализ расчётов		M_{z_1} , кНМ	M_{z_2} , кНМ	M_{z_3} , кНМ	M_{ϕ_1} , кНМ	M_{ϕ_2} , кНМ	M_{ϕ_3} , кНМ
Г. К. Клейн и др. [7]	Линейный	2.150				-4.320	-37.900
	Деформац.	2.800				-2.900	-38.600
Программа DresCAD	Линейный	2.070	0.518	-1.035	-2.588	-4.141	-37.429
	Деформац.	2.586	0.664	-1.613	-3.026	-2.815	-37.273
Различие DresCAD с решением по Г.К.Клейну и др. [7]	Линейный	3.865%				4.323%	1.258%
	Деформац.	8.293%				3.009%	3.560%

Примеры, представленные на рис. 8 и 9 демонстрируют возможность программы DresCAD использовать предварительное напряжение для регулирования величин внутренних усилий. В примере 9 показана возможность продолжения расчета при потере устойчивости стойками системы.

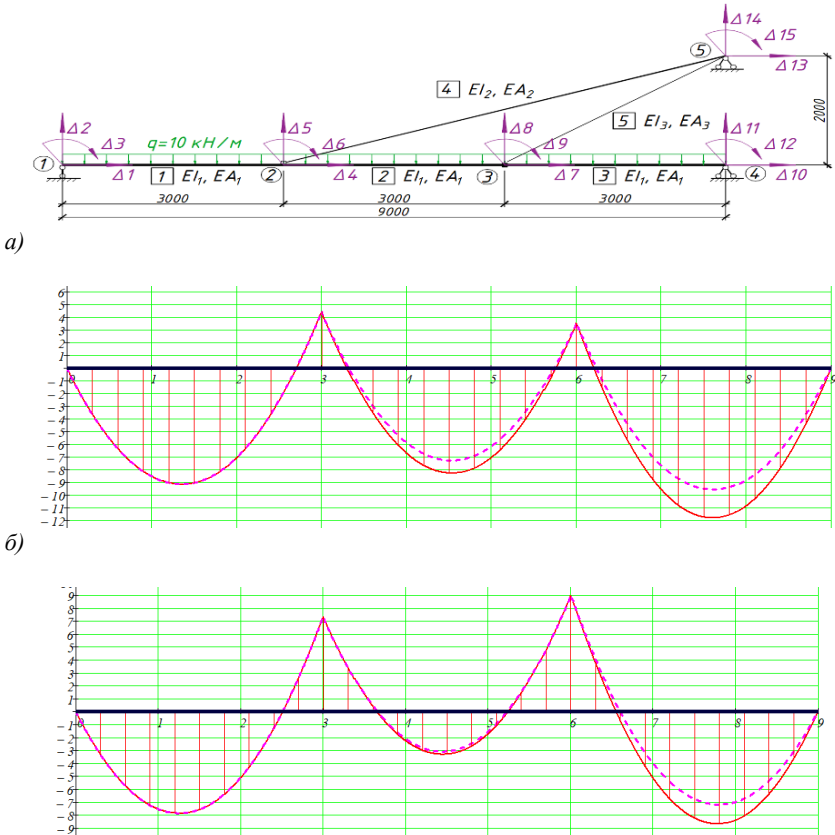


Рис. 8. Расчетная схема комбинированной балочно-вантовой системы $EI_1=674.61 \text{ кНм}^2$, $EA_1=453.2 \text{ МН}$; $EI_2=0.522 \text{ кНм}^2$, $EA_2=37.11 \text{ МН}$; $EI_3=0.087 \text{ кНм}^2$, $EA_3=6.185 \text{ МН}$. Эпюры изгибающих моментов в балке: *а* – без преднапряжения; *б* – с предварительным напряжением в ванте 4 $P_n = 90 \text{ кН}$ и в ванте 5 $P_n = 55 \text{ кН}$.

Анализ результатов расчета вантово-балочной системы (рис. 8)

Анализ расчётов	Момент в пролёте 1, кНм	M_{r2} , кНм	Момент в пролёте 2, кНм	M_{r3} , кНм	Момент в пролёте 3, кНм
Без преднапряжения					
Деформационный расчёт в ПК DresCAD	9.145	-4.428	8.27	-3.531	11.797
Линейный расчёт в ПК DresCAD	9.139	-4.428	7.27	-3.531	9.546
Различие деформационного с линейным расчётом, %	0.065%	0.00%	13.74%	0.00%	23.59%
С преднапряжением					
Деформационный расчёт в ПК DresCAD	7.881	-7.334	3.326	-8.987	8.695
Линейный расчёт в ПК DresCAD	7.876	7.334	3.103	-8.987	7.197
Различие деформационного с линейным расчётом, %	0.06%	0.00%	7.17%	0.00%	20.81%

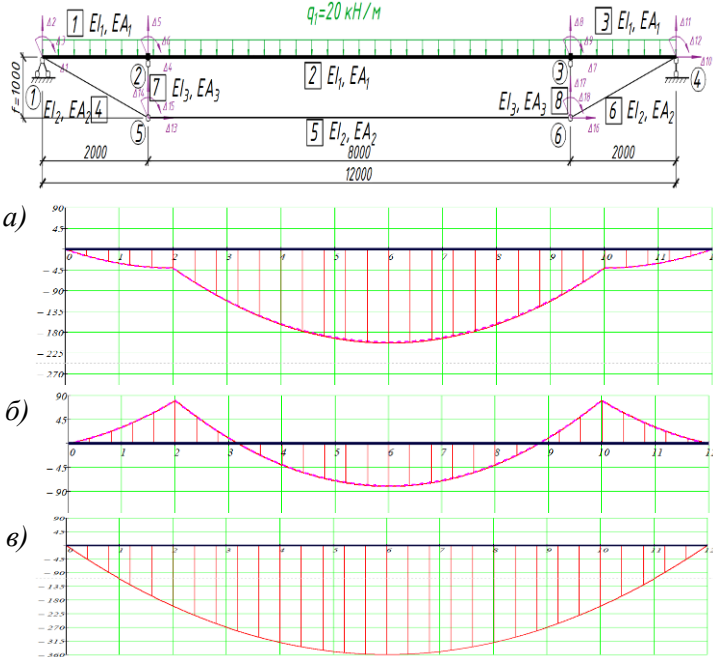


Рис. 9. Расчетная схема шпренгельной системы и эпюры изгибающих моментов:

$EI1 = 81837.62 \text{ кНм}^2$, $EA1 = 2060 \text{ МН}$; $EI2 = 4.6 \text{ кНм}^2$,
 $EA2 = 152.053 \text{ МН}$; $EI3 = 95.1 \text{ кНм}^2$, $EA3 = 252.371 \text{ МН}$;

а – без преднапряжения; *б* – с предварительным напряжением $P_n = 303 \text{ кН}$;

в – при потере стойками устойчивости от предварительного напряжения $P_n = 2000 \text{ кН}$ и $f = 1.5 \text{ м}$

**Анализ результатов расчета шпренгельной системы
по программе DresCAD (рис. 9)**

Анализ расчётов	M_{r2} , кНм	Момент в пролёте, кНм	M_{r3} , кНм
Без преднапряжения			
Деформационный расчёт в ПК DresCAD	41.202	203.948	41.202
Линейный расчёт в ПК DresCAD	41.202	201.194	41.202
Различие деформационного расчета с линейным расчетом, %	0.00%	1.37%	0.00%
С преднапряжением $P_n = 303$кН			
Деформационный расчёт в ПК DresCAD	-80.702	80.774	-80.702
Линейный расчёт в ПК DresCAD	-80.702	79.295	-80.702
Различие деформационного расчета с линейным расчетом, %	0.00%	1.87%	0.00%
При потере стойками устойчивости от <u>преднапряжения</u> $P_n = 2000$кН и $f=1.5$м			
Деформационный расчёт в ПК DresCAD	200.000	360.002	200.000

Заключение. В статье изложен алгоритм расчета стержневых систем на устойчивость по деформированному состоянию с учетом геометрической и конструктивной нелинейности и разработанная на его основе компьютерная программа DresCAD. Результаты расчетов контрольных примеров и выполненный сравнительный их анализ подтверждают высокую точность алгоритма и уникальные вычислительные возможности программы DresCAD. Возможность расчета шпренгельной системы (рисунок 8) при потере устойчивости сжатými стойками 7 и 8 от предварительного напряжения шпренгеля силой $P_n=2000$ кН, как простой однопролетной балки. В этом случае программа DresCAD демонстрирует возможность расчета стержневой системы *с учетом конструктивной нелинейности*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уласевич, В.П. Статический расчет гибких стержневых систем сложной геометрической структуры методом деформаций / В.П. Уласевич // Вестник БрГТУ. – 2018. – № 1(109): Строительство и архитектура. – С. 73–77.
2. Уласевич, В.П. Устойчивость и деформационный расчет стержневых систем матричным методом деформаций / В.П. Уласевич // Вестник БрГТУ. – 2019. – № 1 (114) : Строительство и архитектура. – С. 68–72.

3. Сидорович, Е.М. Динамика и устойчивость сооружений. Численные методы решения задач: учебное пособие / Е.М. Сидорович. – Мн.: БНТУ, 2006. – 246 с.

4. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н. И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Стройиздат, 1969. – 424 с.

5. Клейн, Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем) / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.

УДК 691.328.43

АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДИК РАСЧЕТА ШИРИНЫ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИН ИЗГИБАЕМЫХ БЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СО СТЕКЛОПЛАСТИКОВОЙ АРМАТУРОЙ

ХОТЬКО А. А., АКБАР С. М.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В последние годы наблюдается активизация деятельности производителей и поставщиков стеклопластиковой арматуры, направленной на внедрение такой арматуры в производство несущих конструкций, в том числе стеклопластбетонных изгибаемых элементов. В нормативной базе Республики Беларусь отсутствуют действующие технические нормативные правовые акты (далее - ТНПА), позволяющие применять композитную арматуру в изгибаемых стеклопластбетонных несущих конструкциях. С учетом специфических особенностей стеклопластиковой арматуры, внедрение ее в производство несущих конструкций не возможно без соответствующих научных обоснований, основанных на имеющихся теоретических предпосылках и выполненных экспериментальных исследованиях.

Еще четыре десятка лет назад известным ученым Фроловым Н. П. было логически обоснована нецелесообразность армиро-