УДК 624.04

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ: ТЕРМИНОЛОГИЯ, ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА

СИДОРОВИЧ Е. М.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Введение. Рассматривается применение современных нормативных документов и современных проектно вычислительных комплексов к расчету нелинейно деформируемых несущих конструкций зданий и сооружений произвольного назначения при произвольных нагрузках и воздействиях. Обсуждаются и уточняются применяемые термины и понятия. Обосновываются основные теоретические положения и допущения. Приводятся примеры практических расчетов.

Современные компьютерные средства расчета и проектирования непрерывно совершенствуются, приспосабливаясь как к новым операционным системам и графическим средам, так и к новейшим нормативным требованиям. Тем не менее, у пользователей при работе с действующими нормативными документами и новейшими программными комплексами возникает масса терминологических и теоретических вопросов. Так, например, в [1] определяются термины, относящиеся к расчету строительных конструкций с учетом упругих, неупругих или пластических свойств материалов; недеформированной или деформированной геометрической формы конструкций; линейных или нелинейных зависимостей. Даются соответствующие разъяснения.

Однако, например, термин **«нелинейный расчёт первого порядка (first order non-linear analysis)»** (один из многих, приведенных в [1]) сразу вызывает недоумение. Как нелинейная расчет может быть первого порядка? Математическая (степенная) функция первого порядка определяет прямую линию. То есть расчет – линейный.

Если объяснять данное недоразумение трудностями перевода (порой автоматизированного), то фразу «**first order non-linear anal-**

ysis» можно было бы перевести и так: «**нелинейный расчет первой очереди**». Но и этот вариант не вносит ясности. В действительности же эта фраза означает, что речь идёт о расчёте сооружения из нелинейно деформируемого материала, но по исходной, недеформированной геометрии (недеформированной расчётной схеме).

Явными погрешностями перевода (и редактирования) изобилует справочная информация многих проектно вычислительных комплексов и, в частности, такого мощного программного комплекса как «Autodesk Robot Structural Analysis Professional». Только квалифицированный специалист сможет догадаться, о чем идет речь, допустим, в информации, полученной по запросу «Нелинейный расчет», набранному, неважно где, в справочнике комплекса или в браузере интернета. Поисковик интернета дает ссылку (docs.autodesk.com) на указанный программный комплекс.

Там в подразделе «**Нелинейный статический расчет**» написано: «Нелинейный расчет состоит в дифференциальном приложении нагрузок. Это означает, что при расчете нагрузки не учитываются одновременно, но постепенно возрастают, и выполняются расчеты состояний равновесия».

Смысл такого текста уловить трудно. Хотя ниже содержится абзац, почти правильно поясняющий цель нелинейных расчетов: «Нелинейные методы расчета используются для проверки предельных состояний несущей способности и эксплуатационной пригодности, при обеспечении условий равновесия и совместности деформаций с учетом нелинейного поведения материалов. Расчет производится по теории первого или второго порядка».

И снова возникает вопрос, как связана теория первого или второго порядка с нелинейными свойствами материалов.

Далее в подразделе «**Параметры геометрической нелинейности**» читаем: «Параметры геометрической нелинейности позволяют учитывать настоящие эффекты высшего порядка и часто улучшают сходимость расчетного процесса для конструкции, включающей нелинейные элементы».

Там же при объяснении, что такое «**Расчет P-дельта**», говорится: «Этот тип расчета учитывает второстепенные эффекты, такие как изменяющаяся жесткость элемента, находящегося под влиянием напряженного состояния элемента. Также он учитывает создание моментов, обусловленное действием вертикальных сил в узлах, смещенных горизонтально».

В подразделе **«Расчет больших перемещений»** находим: «В расчете этого типа учитываются эффекты третьего порядка, например, дополнительная поперечная жесткость и напряжения, вызванные деформацией или вращением. Этот эффект учитывает увеличение дополнительных сил в деформированной конструкции (например, в балке с закрепленными опорами на двух концах, нагруженной вертикальной нагрузкой, продольные силы возрастают, а прогибы уменьшаются)».

Действительно, необходимо знать все тонкости линейных и нелинейных методов теории сооружений, чтобы осознать подобные разъяснения и применять их в практических расчетах.

К сожалению, казусы подобного рода можно встретить даже в учебной литературе. Например, в учебном пособии [2] излагается методика деформационного расчета висячих мостов путем их разделения на две подсистемы: кабель и балку жесткости, - с составлением системы соответствующих дифференциальных уравнений. При этом утверждается следующее:

«Однако для решения системы уравнений недостаточно применения только математических методов интегрирования дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что в двух уравнениях содержится три группы неизвестных: распор от временной нагрузки H_v, усилия в подвесках z и прогибы η. Поэтому задача интегрирования уравнений должна сочетаться с итерационным процессом поиска деформированного вида сооружения. Именно в этом и заключается различие в решении поставленной задачи разными авторами».

В приведенном фрагменте во главу решения сложной нелинейной задачи ставится итерационный процесс. Это действительно так. Но совершенно не принимается во внимание факт, что **два** уравнения с **тремя** неизвестными имеют **бесконечное множество** решений. Для поиска определенного решения (и сходимости итерационного процесса) недостает **третьего** уравнения (в упомянутом случае, **третьей** группы уравнений).

Подобные недоработки можно встретить во многих публикациях. Наиболее распространенным является мнение, что любая нелинейно деформируемая система «легко рассчитывается методом конечных элементов». Ниже будет показано, что это далеко не так.

Достаточные сведения о решении нелинейных задач теории сооружений и применении метода конечных элементов можно найти в известных публикациях [3, 4, 5] и многих других. Целью данной статьи является стремление внести ясность в применяемые термины, сформулировать основы теории и показать простейшие приемы практического применения компьютерных технологий к расчету сооружений по деформированному состоянию.

Терминология. Как известно из курсов строительной механики [4, 5], при применении компьютерных технологий (например, в форме метода конечных элементов) деформируемая система представляется в дискретном виде как ансамбль узлов, то есть абсолютно жестких материальных точек бесконечно малых размеров. Узлы объединяют (сваривают, замоноличивают) в единую систему деформируемые части сооружения (стержни, пластины, объемные тела) малых, но конечных размеров, называемые конечными элементами. На некоторые узлы могут быть наложены абсолютно недеформируемые связи, то есть опоры. Деформируемые конечные элементы взаимодействуют между собой только в узлах. К узлам прикладываются и внешние силы. Нагрузки, действующие на конечные элементы сооружения, также приводятся к узловым силам. Узлы характеризуются степенями свободы. Степень свободы узла – это количество возможных перемещений, которые можно сообщить узлу при деформировании системы.

Напряженно-деформированное состояние такой конечно-элементной расчетной модели характеризуется [4, 5] четырьмя группами параметров состояния, связанными тремя системами уравнений. К параметрам состояния деформируемой системы относятся узловые нагрузки, узловые перемещения, внутренние силы в конечных элементах и соответствующие внутренним силам деформации конечных элементов. Одна из групп параметров состояния должна быть задана. Обычно задаваемыми являются узловые нагрузки. Остальные три группы параметров состояния неизвестны и подлежат определению. Для определения неизвестных параметров состояния служат три системы уравнений: статических, геометрических и физических.

Статические уравнения, или уравнения равновесия связывают внутренние силы в конечных элементах и узловые нагрузки. Статические уравнения описывают равновесие узлов системы, строго говоря, в деформированном состоянии. Следовательно, уравнения равновесия должны учитывать перемещения узлов (гипотеза больших перемещений), и деформации конечных элементов (гипотеза больших деформаций). Таким образом, составленные относительно деформированной расчетной схемы уравнения равновесия являются нелинейными. Нелинейные статические уравнения и лежат в основе расчета сооружений по деформированной расчетной схеме, или по деформированному состоянию. Такой расчет называют еще деформационным расчетом. В некоторых источниках нелинейность статических уравнений называют статической нелинейностью. Однако этот термин не получил широкого распространения.

Для реальных строительных сооружений деформации конечных элементов малы по сравнению и габаритами конечных элементов. Если такими деформациями в уравнениях равновесия пренебречь, то речь пойдет о гипотезе малых деформаций. Если пренебречь и узловыми перемещениями по сравнению с габаритами всего сооружения, то речь должна идти о расчете по недеформированной расчетной схеме, или по недеформированному состоянию.

Геометрические уравнения, или уравнения совместности связывают узловые перемещения и деформации конечных элементов. При точной записи геометрические уравнения являются нелинейными. Нелинейность геометрических уравнений обусловлена и большими перемещениями, и большими деформациями. Систему, которой отвечают нелинейные уравнения совместности (геометрии), принято называть геометрически нелинейной. Если в геометрических уравнениях пренебречь нелинейными слагаемыми по сравнению с константами и линейными слагаемыми, то получаем геометрически линейную систему. При этом необходимо, чтобы и в уравнениях равновесия были выполнены соответствующие упрощения. В целом геометрически нелинейной принято называть деформируемую систему, у которой нелинейными являются обе группы уравнений: статические и геометрические, - либо одна из них.

Физические уравнения связывают внутренние силы в конечных элементах с деформациями конечных элементов и описывают физические (деформационные) свойства материала или материалов, из которых изготовлены конечные элементы. Деформационные свойства материала определяются экспериментально и выражаются первоначально в виде зависимости «напряжение – относительная деформация», а затем обобщаются на зависимости вида «обобщенное усилие – обобщенная деформация», или, наоборот, «обобщенная деформация – обобщенное усилие». По физическим свойствам материалы принято подразделять на упругие (линейно или нелинейно) и упругопластические (идеально упругопластические, жесткопластические, билинейные и т. д.). Если деформируемая система выполнена из материалов, подчиняющихся закону Гука (линейно упругих), то ее относят к физически линейным системам. Если материал системы нелинейно упругий или упругопластический, то систему называют физически нелинейной.

Разрешающие уравнения в перемещениях. Практическое решение трех систем совместных нелинейных уравнений выполняется следующим образом. С помощью геометрических уравнений деформации выражают через перемещения и подставляют в физические уравнения, представленные в форме «внутренние силы – деформации». Затем выраженные через перемещения внутренние силы подставляют в уравнения статики. В результате получают разрешающую систему нелинейных уравнений относительно неизвестных перемещений. Формально это уравнения равновесия.

В зависимости от примененных аналитических зависимостей, численных алгоритмов, дополнительных допущений и упрощений разрешающие нелинейные уравнения равновесия в перемещениях получаются либо алгебраическими до третьего и выше порядков, либо трансцендентными, порой в неявной форме.

Дальнейшая реализация автоматизированного расчета геометрически и физически нелинейных деформируемых систем зависит от выбранного численного метода решения систем нелинейных уравнений (простая итерация; метод Ньютона-Рафсона, полный или модифицированный; метод дифференцирования (продолжения) по параметру, непрерывный или дискретный, шаговый и т.п.), от методов вычисления матриц жесткости или векторов невязок. Наконец, от компетентности разработчиков алгоритмов и искусства программистов.

К сожалению, подробных разъяснений о примененных алгоритмах, введенных предположениях, допущениях, о методике проведения расчетов в известной автору справочной информации к современным программным комплексам найти не удается.

Особенности нелинейного деформирования стержневых систем. Предположим, что конечно-элементная модель некоторой деформируемой системы загружена заданной нагрузкой и находится в равновесии в соответствующем деформированном состоянии. Для общности предположим, что перемещения, вызванные приложенной нагрузкой, уже найдены или заданы заранее. Следовательно, геометрия деформированного состояния полностью определена. Такое состояние с полностью известными параметрами назовем исходным, или начальным. Уравнения равновесия, составленные относительно деформированного исходного состояния, представим в матричном виде:

$$\boldsymbol{A}\vec{S} + \vec{F} = 0\,, \tag{1}$$

где элементы матрицы коэффициентов $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\vec{X})$ зависят только от координат узлов $\vec{X}$, определяющих исходное состояние; $\vec{S}$ - это вектор внутренних сил (усилий), уравновешивающих узловую нагрузку $\vec{F}$ в исходном состоянии. Относительно усилий уравнения (1) линейные, т. е. первого порядка

Приложим к данной, уже деформированной системе некоторую дополнительную нагрузку $\Delta\vec{F}$. Тогда первоначальное состояние равновесия нарушится, и система перейдет из исходного деформированного состояния в новое деформированное состояние. Переход в новое состояние равновесия будет характеризоваться приращениями внутренних сил $\Delta\vec{S}$ и перемещениями узлов, т.е. приращениями координат $\Delta\vec{X}$, отсчитанными от исходного состояния равновесия.

В новом деформированном состоянии с измененной геометрией и измененными усилиями точные уравнения равновесия примут вид

$$\boldsymbol{A}(\vec{X} + \Delta\vec{X})(\vec{S} + \Delta\vec{S}) + \vec{F} + \Delta\vec{F} = 0\,. \tag{2}$$

Вычитая равенство (1) из (2), получим так называемые уравнения равновесия в приращениях:

$$\boldsymbol{A}(\vec{X})\Delta\vec{S} + A(\Delta X)\vec{S} + A(\Delta X)\Delta\vec{S} + \Delta\vec{F} = 0\,, \tag{3}$$

где четко выделены два линейных слагаемых и третье квадратичное. В первом линейном слагаемом постоянным сомножителем являются координаты исходного состояния, а переменным, неизвестным сомножителем – приращения внутренних сил. Во втором линейном слагаемом постоянным сомножителем выступают внутренние силы исходного состояния, а переменным, неизвестным сомножителем – приращения координат (перемещения). Третье, квадратичное слагаемое состоит из произведения неизвестных перемещений (приращений координат) и неизвестных приращений внутренних сил.

Таким образом, уравнение равновесия относительно перемещений и приращений усилий, то есть относительно двух групп неизвестных является как минимум квадратичным. Можно сказать, оно имеет второй порядок. Однако, общий порядок матричного уравнения (3) относительно только неизвестных перемещений зависит от порядка алгебраических выражений, которыми определяются приращения усилий через перемещения посредством геометрических и физических уравнений. Как уже отечалось, эти выражения могут быть и трансцендентными.

Если в нелинейных уравнениях (3) приращения нагрузки, координат и усилий достаточно малы, то их произведениями можно пренебречь как величинами второго порядка малости. Тогда уравнения равновесия в приращениях упрощаются (линеаризуются) и приобретают вид:

$$\boldsymbol{A}(\vec{X})\Delta\vec{S} + A(\Delta X)\vec{S} + \Delta\vec{F} = 0. \qquad (4)$$

Линеаризованные уравнения (4) имеют слагаемые первого порядка. Искомые с помощью этого уравнения перемещения и приращения усилий зависят не только от геометрии исходного состояния (вектор $\vec{X}$), но и от его напряженного состояния (от начальных усилий $\vec{S}$ в исходном состоянии). Если начальные усилия в исходном состоянии отсутствуют ($\vec{S} = 0$), то линеаризованные уравнения (4) преобразуются в классические линейные уравнения, применяемые при расчетах по недеформированному состоянию.

$$\boldsymbol{A}(\vec{X})\Delta\vec{S} + \Delta\vec{F} = 0. \qquad (5)$$

Уравнения (5) тоже имеют первый порядок и полностью эквивалентны уравнениям (1).

К тому же результату приводит и гипотеза о расчете по недеформированному состоянию. Если предположить, что приращения координат пренебрежимо малы по сравнению с габаритами сооружения ($\Delta\vec{X} = 0$), то уравнения (3) и (4) преобразуются к виду (5).

Таким образом, информационной является следующая классификация линейных и нелинейных расчетов (или сооружений).

Нелинейные расчеты (сооружения) подразделяются на:

− геометрически и физически нелинейные;
− геометрически нелинейные, но физически линейные;
− геометрически линейные, но физически нелинейные.

Расчеты сооружений по деформированному состоянию:

− геометрически нелинейными,
− геометрически линейными (линеаризованными).

Термин линейный расчет может означать:

− классический расчет по недеформированному состоянию,
− линеаризованный расчет по деформированному состоянию с учетом начальных усилий.

Учет начальных усилий, или учет предшествующего напряженно-деформированного состояния может быть реализован в нелинейной форме, либо в линеаризованной форме. Приведенная классификация является далеко не полной, но информационной.

Практическое применение нелинейной теории. Изложенные выше принципы расчета нелинейно деформируемых стержневых систем были реализованы в виде программных продуктов и применены для расчета многих реальных сооружений от железобетонных предварительно напряженных балок до пространственных вантовых систем.

Методологически и теоретически обоснованные подходы, алгоритмы компьютерные программы позволяют точно решать линейные и нелинейные задачи прочности, устойчивости и колебаний сооружений разнообразного назначения. В частности, нелинейная (и линеаризованная) теория позволяют рассчитывать и системы геометрически (кинематически) изменяемые: гибкие нити, шарнирно-стержневые цепи, сети разной формы и назначения. Геометрически изменяемые системы с помощью некоторых известных расчет-но-проектировочных комплексов рассчитать не удается. Или комплекс не предназначен для решения таких задач, или отсутствует необходимая информация.

Выводы.

1. Примененные в нормативных документах и некоторых проектно вычислительных комплексах понятия типа «теория первого (второго) порядка» не являются информационными, требуют уточнения.
2. Понятие «нелинейный расчет» также требует уточнения: нелинейный геометрически, нелинейный физически и т. п.
3. Расчет по деформированному состоянию может быть нелинейным, либо линейным (линеаризованным).
4. Линеаризованный расчет по деформированному состоянию допускает решение задач устойчивости и задач теории малых колебаний.
5. При формировании у студентов умений и навыков работы с проектно вычислительными комплексами необходимо уделять внимание их общематематической и общетехнической подготовке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ТКП 1990-2011* (02250). Еврокод. Основы проектирования строительных конструкций. – Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, Минск 2015.
2. Бахтин, С.А Висячие и вантовые мосты. Проектирование, расчет, особенности конструирования: Учеб. пособие / С.А. Бахтин, И.Г. Овчинников, Р.Р. Инамов. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. – 124 с.
3. Сидорович, Е.М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных стержневых систем / Е.М. Сидорович. – Минск: БНТУ, 1999. – 200 с.
4. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
5. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 656 с.