

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**Белорусский национальный технический университет**  
**Кафедра «Геотехника и строительная механика»**

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

**Электронный учебно-методический комплекс**  
**для студентов специальности 1-70 02 01 Промышленное и**  
**гражданское строительство**

**Минск БНТУ 2019**

Составители:

*А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович*

Рецензенты:

Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси,  
центр структурных и трибо-механических испытаний материалов,  
начальник центра доктор ф.-м. наук, профессор Кукареко В. А.;  
кафедра «теоретическая и прикладная механика» БГУ,  
заведующий кафедрой доктор ф.-м. наук, профессор Журавков М. А.

Электронный учебно-методический комплекс содержит данные, необходимые для изучения учебной дисциплины «Строительная механика». В теоретическом разделе учебно-методического комплекса изложены классические методы расчёта статически определимых и статически неопределимых стержневых систем. Приведено множество примеров практических задач. Указаны пути автоматизации вычислений. Перечислены средства диагностики результатов учебной деятельности студентов, даны методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов.

Регистрационный номер БНТУ-ЭУМК-СФ-48/

© Белорусский национальный  
технический университет, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b>  | <b>6</b>  |
| <b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ</b>   | <b>7</b>  |
| <b>Тема 1. Общие положения и понятия строительной механики</b>  | <b>8</b>  |
| 1.1. Задачи и методы строительной механики  | 8         |
| 1.2. Понятие о расчетной схеме сооружения и её элементах  | 9         |
| 1.3. Классификация сооружений   | 14        |
| 1.4. Степень свободы плоской стержневой системы   | 20        |
| 1.5. Принципы образования геометрически неизменяемых систем   | 27        |
| 1.6. Матрицы в задачах строительной механики  | 31        |
| <b>Тема 2. Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета при неподвижной нагрузке</b> | <b>33</b> |
| 2.1. Понятие о статически определимых системах. Их основные свойства  | 33        |
| 2.2. Метод сечений  | 34        |
| 2.3. Метод замены связей  | 38        |
| 2.4. Кинематический метод   | 42        |
| 2.5. Общие сведения о многопролетных статически определимых балках и составных рамах                        | 44        |
| <b>Тема 3. Определение усилий от подвижных нагрузок</b>   | <b>50</b> |
| 3.1. Понятие о подвижной нагрузке. Понятие о линиях влияния   | 50        |
| 3.2. Статический метод построения линий влияния усилий  | 52        |
| 3.2.1. Линии влияния опорных реакций в простых балках   | 52        |
| 3.2.2. Линии влияния усилий в сечениях между опорами балок  | 54        |
| 3.2.3. Линии влияния усилий в сечениях консольных балок   | 56        |
| 3.3. Кинематический метод построения линий влияния усилий   | 57        |
| 3.4. Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния   | 61        |
| 3.5. Линии влияния усилий при узловой передаче нагрузки   | 66        |
| 3.6. Построение линий влияния усилий в многопролетных балках  | 67        |
| 3.7. Определение наиболее невыгодного положения подвижных нагрузок по линиям влияния                        | 68        |
| 3.7.1. Действие сосредоточенной силы  | 68        |
| 3.7.2. Действие системы связанных сосредоточенных сил   | 69        |
| 3.8. Понятие о матрицах влияния усилий  | 71        |
| <b>Тема 4. Расчет трёхшарнирных арок и рам</b>  | <b>75</b> |
| 4.1. Общие сведения и принципы образования  | 75        |
| 4.2. Определение опорных реакций и усилий в трёхшарнирных арках   | 77        |
| 4.3. Расчёт трёхшарнирной арки с затяжкой   | 84        |
| 4.4. Линии влияния усилий в трёхшарнирных арках   | 86        |
| 4.5. Рациональная ось арки  | 88        |
| 4.6. Определение опорных реакций и усилий в трёхшарнирных рамах   | 89        |
| <b>Тема 5. Расчёт плоских статически определимых ферм</b>   | <b>94</b> |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 5.1.   | Понятие о фермах, их классификация, анализ структуры                                | 94         |
| 5.2.   | Степень свободы и степень изменяемости плоских ферм                                 | 96         |
| 5.3.   | Способы образования плоских ферм  | 97         |
| 5.4.   | Определение усилий в стержнях ферм от неподвижных нагрузок                          | 98         |
| 5.5.   | Построение линий влияния усилий в стержнях ферм                                     | 102        |
| <b>Тема 6. Расчет распорных ферм и комбинированных систем</b>                |   | <b>107</b> |
| 6.1.   | Расчет распорных ферм   | 107        |
| 6.2.   | Расчет комбинированных систем   | 110        |
| 6.3.   | Расчет шпренгельной балки   | 111        |
| 6.4.   | Расчет висячей системы  | 111        |
| <b>Тема 7. Общие теоремы строительной механики и определение перемещений</b> |   | <b>116</b> |
| 7.1.   | Общие сведения о перемещениях стержневых систем                                     | 116        |
| 7.2.   | Работа внешних статически приложенных сил   | 117        |
| 7.3.   | Работа внутренних сил плоской линейно-упругой системы                               | 119        |
| 7.4.   | Применение принципа возможных перемещений к упругим системам                        | 122        |
| 7.5.   | Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений                                 | 123        |
| 7.6.   | Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы                | 127        |
| 7.7.   | Способы вычисления интегралов Мора  | 129        |
| 7.8.   | Определение перемещений от тепловых воздействий                                     | 139        |
| 7.9.   | Определение перемещений, вызываемых перемещениями опор                              | 141        |
| 7.10.  | Матричная форма определения перемещений   | 142        |
| 7.11.  | Линии влияния перемещений   | 146        |
| 7.12.  | Матрица влияния перемещений   | 147        |
| <b>Тема 8. Метод сил и его применение к расчету плоских рам</b>              |   | <b>149</b> |
| 8.1.   | Статически неопределимые системы и их свойства                                      | 149        |
| 8.2.   | Степень статической неопределимости. Методы расчета статически неопределимых систем | 152        |
| 8.3.   | Основная система и основные неизвестные метода сил                                  | 154        |
| 8.4.   | Канонические уравнения метода сил   | 156        |
| 8.5.   | Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений                 | 158        |
| 8.6.   | Построение окончательных эпюр усилий  | 159        |
| 8.7.   | Алгоритм расчета. Проверки расчета  | 160        |
| 8.8.   | Понятие о рациональной основной системе и способы ее выбора                         | 167        |
| 8.9.   | Определение перемещений в статически неопределимых системах                         | 170        |
| 8.10.  | Расчет рам на действие температуры и смещение опор                                  | 173        |
| 8.11.  | Линии влияния усилий  | 178        |
| <b>Тема 9. Расчет неразрезных балок</b>                                      |   | <b>182</b> |
| 9.1.   | Общие сведения  | 182        |
| 9.2.   | Примеры расчета неразрезной балки   | 183        |
| 9.3.   | Построение линий влияния усилий   | 187        |
| 9.4.   | Огибающие эпюры усилий  | 188        |
| 9.5.   | Расчет неразрезных балок на упругих опорах  | 191        |



|   |            |
|---|------------|
| <b>Тема 10. Расчет статически неопределимых ферм</b>                                      | <b>192</b> |
| 10.1. Виды статически неопределимых ферм  | 192        |
| 10.2. Особенности расчета статически неопределимых ферм                                   | 193        |
| 10.3. Построение линий влияния усилий   | 195        |
| <b>Тема 11. Расчет статически неопределимых арок, висячих и комбинированных систем</b>    |            |
| 11.1. Виды статически неопределимых арок  | 196        |
| 11.2. Расчет двухшарнирной арки с затяжкой  | 198        |
| 11.3. Влияние податливости затяжки на усилие в затяжке                                    | 202        |
| 11.4. Особенности расчета бесшарнирной арки   | 203        |
| 11.5. Понятие о расчете статически неопределимых комбинированных и висячих систем         | 206        |
| <b>ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ</b>  | <b>209</b> |
| 1. Примерный перечень практических занятий  | 209        |
| 2. Примерный перечень расчетно-графических работ  | 210        |
| <b>РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ</b>   | <b>211</b> |
| 1. Средства диагностики учебной деятельности  | 211        |
| 2. Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов | 211        |
| 3. Методы (технологии) обучения   | 211        |
| <b>УЧЕБНО-ПРОГРАММЫЙ РАЗДЕЛ</b>   | <b>212</b> |
| 1. Учебная программа дисциплины   | 212        |
| 2. Учебно-методическая карта дисциплины   | 221        |
| <b>ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ</b>  | <b>223</b> |
| 1. Список основной литературы   | 223        |
| 2. Список дополнительной литературы   | 224        |
| 3. Компьютерные программы   |            |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебно-методический комплекс по строительной механике предназначен для студентов строительных специальностей высших учебных заведений. Он соответствует учебной программе, по которой ведется подготовка инженеров-строителей специальности «Промышленное и гражданское строительство». Содержание предлагаемого к изучению материала рассчитано на курс лекционных и практических занятий примерно 180 аудиторных часов, из них примерно 80 часов в первом семестре (часть 1) и 100 часов во втором семестре (часть 2).

Первая часть комплекса посвящена изложению традиционных методов расчета статически определимых и статически неопределимых стержневых систем. Обращается внимание на необходимость выполнения проверок на всех этапах выполнения расчетов с целью получения достоверных результатов, указываются пути автоматизации вычислений.

Курс лекций первой части комплекса сопровождается двумя видами графических материалов: рисунками и иллюстрациями. Каждый вид графических материалов имеет свою независимую нумерацию, содержащую номер темы и номер материала по порядку. На рисунках приводятся традиционные чертежи расчетных схем сооружений и их элементов. На иллюстрациях приводятся фотографии реальных сооружений, соответствующие рассматриваемой теме. Все приведенные в комплексе иллюстрации можно найти в интернете.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ



Национальная библиотека Беларуси

# ТЕМА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

## 1.1. Задачи и методы строительной механики

Строительная механика как наука занимается теорией создания инженерных сооружений и их расчетом на прочность, жесткость и устойчивость при разнообразных статических и динамических нагрузках и воздействиях. Расчет на прочность предусматривает определение внутренних сил во всех элементах сооружения. На основе найденных внутренних сил проверяется прочность и устойчивость каждого элемента сооружения, а также прочность и устойчивость всего сооружения в целом. Жесткость сооружения оценивается путем определения перемещений (линейных и угловых) его характерных точек, сечений, элементов и сопоставлением найденных значений перемещений с нормируемыми значениями.

В учебном плане подготовки инженеров-строителей строительная механика следует непосредственно за такой дисциплиной как сопротивление материалов. В сопротивлении материалов изучается работа под нагрузкой отдельных элементов: брусьев (стержней), пластин. В строительной механике – работа систем, составленных из стержней, пластин, массивов, соединительных и опорных устройств.

Основными задачами строительной механики являются:

- изучение законов образования сооружений,
- разработка методов определения внутренних сил в элементах и частях сооружений от разнообразных внешних воздействий и нагрузок,
- разработка методов определения перемещений и деформаций,
- исследование условий устойчивости сооружений,
- исследование взаимодействия сооружений с окружающей средой,
- исследование изменений в напряженно-деформированном состоянии сооружений при длительной их эксплуатации.

В практическом отношении наиболее полно разработана так называемая прямая задача строительной механики: определение напряженно-деформированного состояния сооружения при заданных нагрузках и других воздействиях. При этом предполагается, что заданы также расчетная схема сооружения, свойства материалов и размеры его элементов. Такую прямую задачу строительной механики иногда называют поверочным расчетом сооружения.

В расчетах инженерных сооружений используются гипотеза о сплошности материалов, гипотеза об их однородности и изотропности, гипотеза о прямой пропорциональности между напряжениями и деформациями. Деформации и перемещения элементов сооружения предполагаются малыми, что позволяет вести расчет большинства сооружений по недеформированной расчетной схеме.

Для решения своих задач строительная механика разрабатывает и применяет теоретические и экспериментальные методы. Теоретические методы использует достижения теоретической механики, высшей и вычислительной математики, информатики и программирования. Экспериментальные методы базируются на испытаниях образцов, моделей и натуральных сооружений.

Если на начальном этапе своего развития строительная механика базировалась в основном на графических методах решения своих задач, то с развитием вычислительной техники стали все более применяться аналитические решения. Более того, вместо многочисленных частных методов и приемов, позволявших избегать решения систем совместных уравнений, в строительной механике в настоящее время на первое место вышли общие универсальные методы, аналитические и численные, позволяющие рассчитывать сложнейшие сооружения как единые деформируемые системы. При этом решение систем совместных линейных алгебраических уравнений с сотнями тысяч неизвестных перестало быть камнем

преткновения. Компьютерные технологии позволили не только решать, но и составлять системы уравнений высоких порядков, и главное, обзирать полученные результаты, выводя их на экран монитора в привычном для инженера графическом виде.

Строительная механика является постоянно развивающейся прикладной наукой. Разрабатываются новые математические модели поведения реальных материалов при их деформировании. Уточняются условия нагружения сооружений и значения нагрузок. Учитываются тепловые и иные воздействия. Все более применяются нелинейные методы расчета сооружений в деформированном состоянии. Разрабатываются методы синтеза и оптимизации конструкций. Все теснее становится связь строительной механики с проектированием конструкций, с технологией их изготовления и возведения. Все это ведет к созданию более прочных, экономичных, надежных и долговечных зданий и сооружений.

## 1.2. Понятие о расчетной схеме сооружения и ее элементах

При расчете сооружений обычно имеют дело не с самим сооружением, а с его расчетной схемой.

Выбор расчетной схемы является весьма важным и ответственным процессом. Расчетная схема должна по возможности ближе отражать действительную работу сооружения и по возможности облегчать как сам процесс расчета, так и процесс анализа результатов расчета. Для этого необходимо иметь большой опыт в расчете сооружений, хорошо представлять работу рассчитываемого сооружения. Знать и уметь предсказать влияние на работу сооружения отдельных его элементов.

В зависимости от геометрических размеров различают следующие основные элементы сооружения: стержни, оболочки, пластинки, массивные тела, тонкостенные стержни. К элементам сооружения также можно отнести соединительные устройства (стыки, узлы) и опорные устройства (опоры).

Стержнем называют прямолинейный или криволинейный пространственный элемент, у которого один размер (длина) значительно превышает два других.

Пространственные элементы, один размер (толщина) которых значительно меньше двух других, называются оболочками, если они ограничены двумя криволинейными поверхностями, или пластинками, если ограничены двумя плоскостями.

На расчетных схемах сооружений стержни заменяются их осевыми линиями (прямыми, кривыми или ломаными), а пластинки и оболочки – их срединными поверхностями (плоскими или криволинейными).

Под массивными телами (массивами) подразумеваются элементы сооружения и окружающей среды, у которых все три размера одного порядка (иногда и неограниченные), например: фундаменты, плотины, подпорные стены, грунтовые и скальные массивы.

Тонкостенными называют стержни, у которых все основные размеры имеют разные порядки: толщина существенно меньше размеров поперечного сечения, а размеры поперечного сечения существенно меньше длины.

Отдельные элементы (стержни, пластины), из которых составляется сооружение, объединяются в единую систему посредством узловых соединений, или просто узлов. Узлы также идеализируют. Обычно их подразделяют на узлы идеально шарнирные без трения и узлы абсолютно жесткие.

Идеальный шарнирный узел (или просто шарнир) рассматривается как устройство, допускающее взаимный поворот соединяемых элементов относительно центра (оси) шарнира. На расчетных схемах шарнир обозначается небольшой окружностью.



Иллюстрация 1.1. Стержневой каркас производственного здания:  
колонны, стропильные фермы, подкрановые балки

При шарнирном соединении от элемента к элементу передается только сосредоточенная сила, разлагаемая обычно на составляющие. При шарнирном соединении двух стержней, лежащих на одной прямой (рисунок 1.1,а), внутренняя сила в шарнире разлагается на продольную  $N$  и поперечную  $Q$  составляющие. При шарнирном соединении стержней под углом (рисунок 1.1,б) сила взаимодействия может быть разложена на вертикальную  $V$  и горизонтальную  $H$  составляющие, или как-нибудь иначе. Изгибающие моменты в любом шарнирном соединении отсутствуют.

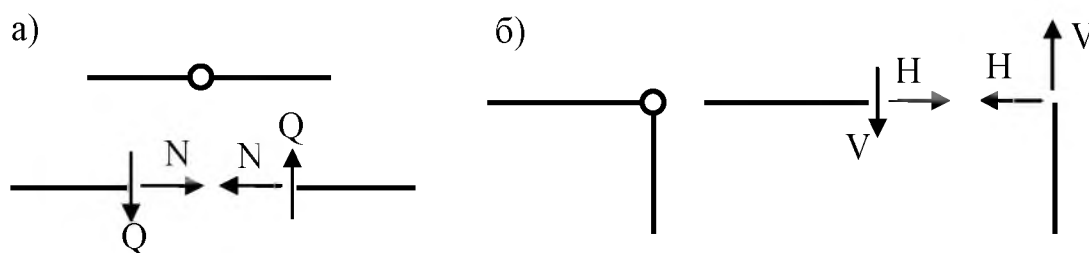


Рисунок 1.1

Абсолютно жесткое соединение элементов (жесткий узел) полностью устраняет их взаимное смещение. Специальных обозначений для жесткого узла обычно не вводят (рисунок 1.2,а). Иногда жесткий узел обозначают в виде небольшого квадрата (рисунок 1.2,б). В жестком узле действуют три внутренние силы, например, вертикальная составляющая  $V$ , горизонтальная составляющая  $H$  и изгибающий момент  $M$  (рисунок 1.2,в).

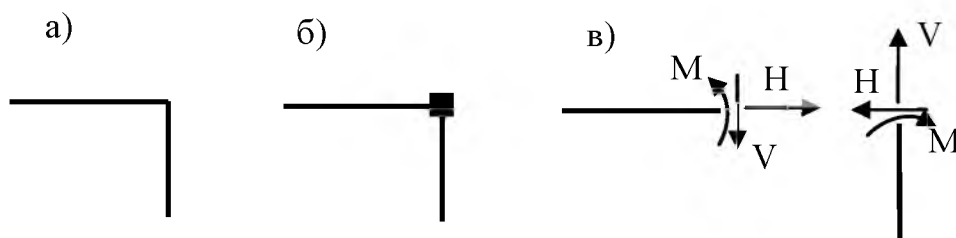


Рисунок 1.2

Иногда такое разделение узлов на идеально шарнирные и идеально жесткие не соответствует действительности. Тогда рассматривают узлы податливые, допускающие взаимное смещение соединяемых элементов допустим, поворот, пропорциональное действующим в узле внутренним силам. На расчетных схемах податливые узлы специально оговаривают, или изображают с дополнительными элементами: деформируемыми (рисунок 1.3,а), абсолютно жесткими (рисунок 1.3,б) и иными. Внутренние силы в податливых узлах зависят от взаимного смещения соединяемых элементов. Например, значение изгибающего момента (рисунок 1.3,в) в податливом узле (рисунок 1.3) зависит от взаимного угла поворота соединяемых стержней.

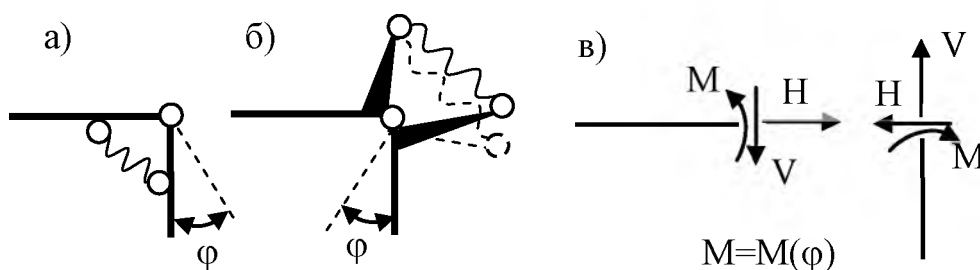


Рисунок 1.3

Сооружение прикрепляется к земле (к фундаменту) или к другому сооружению с помощью опор.

Различают следующие основные виды расчетных схем опор плоских стержневых систем: шарнирно подвижная опора, шарнирно неподвижная опора, защемляющая неподвижная опора и защемляющая подвижная опора.

Шарнирно подвижная опора ограничивает только одно линейное перемещение в заданном направлении. Конструктивно такую опору можно выполнить в виде цилиндрического ролика, свободно катающегося по опорной поверхности (рисунок 1.4,а). В такой опоре возникает единственная реактивная сила, линия действия которой проходит через точки касания ролика с опорными поверхностями фундамента и сооружения. Если перемещения реального сооружения достаточно малы, то ролик можно заменить качающимся стержнем (рисунок 1.4,б,в). На расчетных схемах шарнирно подвижная опора изображается в виде одного прямолинейного опорного стержня с шарнирами по концам (рисунок 1.4,в). В такой опоре направление реактивной силы совпадает с направлением опорного стержня и с направлением устраняемого перемещения.

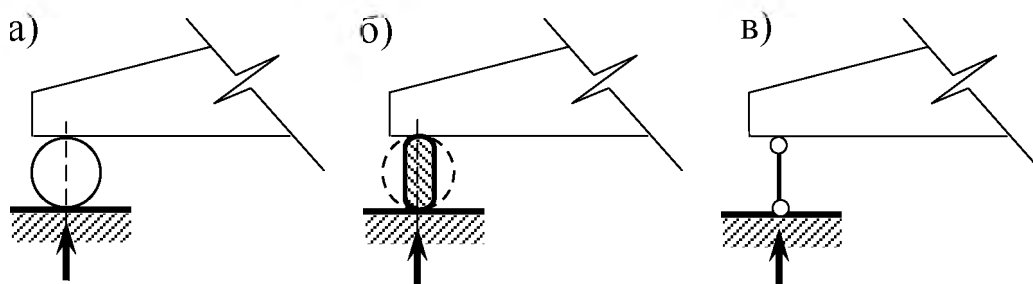


Рисунок 1.4



Если в сооружении возможны большие перемещения точки опирания, то расчетную схему шарнирно подвижной опоры изображают в виде подушки, шарнирно соединенной с сооружением и свободно скользящей по опорной поверхности (рисунок 1.5,а), или свободно перекатывающейся по ней на роликах (рисунок 1.5,б). Сооружение не может перемещаться по направлению, перпендикулярному к **опорной** поверхности. Со стороны шарнирно подвижной опоры на сооружение действует единственная реактивная сила, нормальная к опорной поверхности. Даже если реакцию шарнирно подвижной опоры в виде наклонного опорного стержня разложить на две составляющие (рисунок 1.5,в), то неизвестной будет только одна из них. Вторая явно выражается через первую.

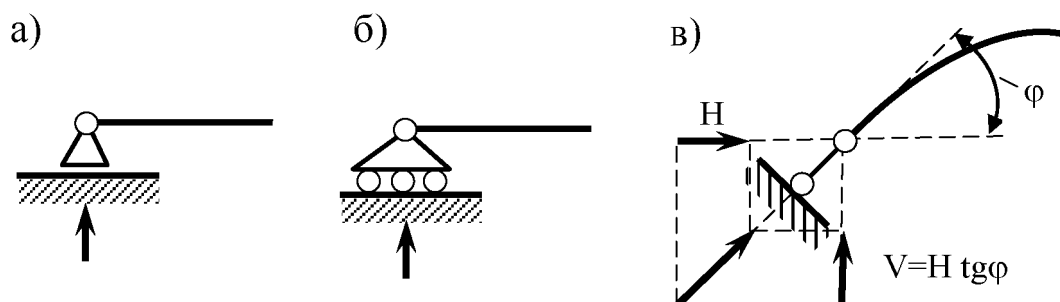


Рисунок 1.5

Шарнирно неподвижная опора (рисунок 1.6) полностью устраняет линейные смещения и допускает только свободный поворот относительно оси опорного шарнира. В шарнирно неподвижной опоре возникает реактивная сила, линия действия которой проходит через центр (ось) опорного шарнира. Так как направление линии действия этой реакции зависит от приложенной к сооружению нагрузки, то для определенности эту реакцию разлагают на две неизвестные составляющие, обычно, вертикальную и горизонтальную. Тогда можно считать, что шарнирно неподвижная опора (рисунок 1.6,а,б) эквивалентна двум опорным стержням, пересекающимся на оси опорного шарнира (рисунок 1.6,в,г).

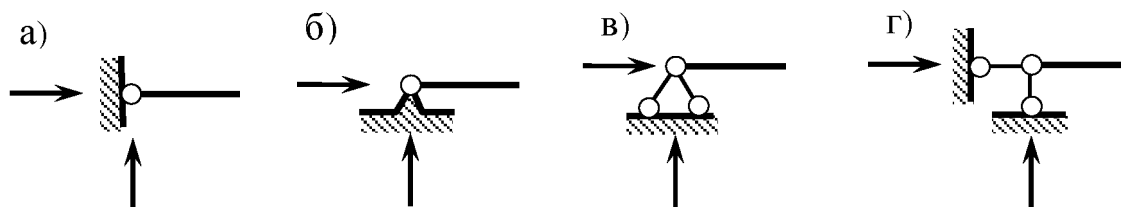


Рисунок 1.6

Защемляющая неподвижная опора, или полная (жесткая) заделка (рисунок 1.7,а), не допускает ни линейных, ни угловых перемещений. В неподвижной заделке возникают три реакции: две реактивные силы (две составляющие одной реактивной силы неизвестного направления) и реактивный момент. Полная заделка эквивалентна трем опорным стержням (рисунок 1.7,б).

Защемляющая подвижная опора оставляет свободу для одного линейного перемещения (рисунок 1.7,в,д). Естественно, составляющая реактивной силы в подвижной заделке по направлению свободного линейного перемещения отсутствует. Остаются реактивный момент и реактивная сила, перпендикулярная свободному линейному перемещению, т. е. две опорные реакции. Подвижная заделка эквивалентна двум опорным стержням (рисунок 1.7,г,е).



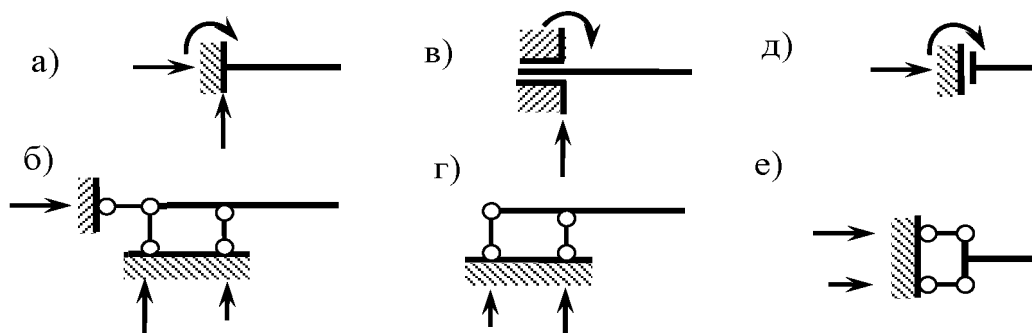


Рисунок 1.7

Плавающая заделка (рисунок 1.8), устраняет только угловое перемещение. В плавающей заделке возникает только один реактивный момент. Обозначить плавающую заделку можно условным устройством, показанным на рисунке 1.8,а, или просто квадратом (рисунок 1.8,б), оговорив его свойства.

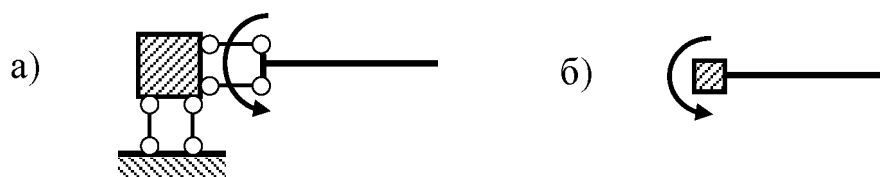


Рисунок 1.8

Современные методы строительной механики, современная вычислительная техника и современные проектно-вычислительные комплексы для расчета сооружений позволяют рассчитать практически любую расчетную схему.

При расчете одного и того же сооружения можно пользоваться несколькими расчетными схемами. Предварительный подбор сечений элементов сооружения можно выполнить на калькуляторе по упрощенной расчетной схеме. Окончательный расчет следует выполнять по более сложной и точной расчетной схеме на компьютерах с применением проектно-вычислительных комплексов.

Приведем пример выбора расчетной схемы для балочной фермы. При определенных условиях в качестве расчетной схемы для фермы можно принять шарнирно-стержневую систему с идеальными без трения узловыми соединениями (рисунок 1.9). Определение усилий в ее элементах легко выполняется на калькуляторе с привлечением одних только уравнений равновесия. Шарнирно-стержневая расчетная схема применяется в сварных фермах из прокатных профилей на узловых фасонках. Как показывает расчетная практика и эксперименты, такая расчетная схема является окончательной.

Если же ферма будет выполнена из гнутосварных прямоугольных профилей с бесфасоночными сварными узлами или в монолитном железобетоне, то потребуется ее расчет по более точной, рамной расчетной схеме с жесткими узловыми соединениями (рисунок 1.10).

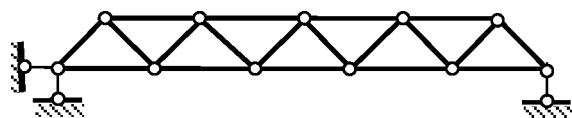


Рисунок 1.9

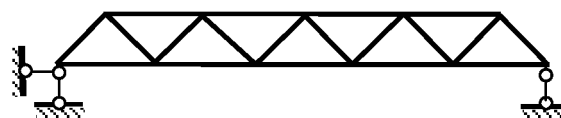


Рисунок 1.10

Рамная расчетная схема фермы уже многократно статически неопределима. Ее расчет возможен с учетом дополнительных уравнений деформаций и сводится к решению системы

совместных линейных алгебраических уравнений достаточно высокого порядка, что требует привлечения компьютеров.

### 1.3. Классификация сооружений

Классификация сооружений может выполняться, с точки зрения их расчета, по разным признакам.

#### **Сооружения плоские и пространственные**

Сооружение называется плоским, или плоскостным, если:

а) геометрические оси всех элементов, входящих в состав сооружения, лежат в одной плоскости;

б) во всех поперечных сечениях каждого элемента одна из главных осей инерции лежит в той же плоскости;

в) линии действия всех нагрузок, приложенных к сооружению, также лежат в той же плоскости.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то сооружение является пространственным.



Иллюстрация 1.2. Висячая оболочка отрицательной гауссовой кривизны на арочном опорном кеонтуре

Все реальные сооружения являются пространственными. Но в целях упрощения расчета их расчленяют на ряд плоских систем. Такое расчленение не всегда возможно. Поэтому некоторые сооружения приходится рассматривать как пространственные. Данный комплекс посвящен расчету преимущественно плоских систем.

#### **Сооружения стержневые, тонкостенные пространственные и массивные (твердотельные)**

Стержневыми называют сооружения, состоящие из прямолинейных или криволинейных стержней.

Традиционно строительная механика занимается исследованием преимущественно стержневых систем.

Сооружения, составленные из оболочек и пластинок (плит), называются тонкостенными и являются, как правило, пространственными.

Под массивными сооружениями подразумевают сооружения, состоящие из массивных тел, например: фундаменты, плотины, подпорные стены, а также и сами грунтовые и скальные массивы. Массивы могут рассматриваться как в трехмерном пространстве, так и в двухмерном.

**Сооружения с шарнирными или жесткими узловыми соединениями элементов**

Стержневая система, в которой присутствуют только шарнирные соединения, причем каждый стержень имеет только по два шарнира и только по концам, называется шарнирно-стержневой системой, или фермой (рисунок 1.9).

Стержневая система, в которой элементы соединены, в основном, абсолютно жестко, называется рамой (рисунок 1.10, рисунок 1.11).

В одном и том же сооружении могут применяться как шарнирные, так и жесткие соединения элементов. Иногда такой способ соединения называют комбинированным. Примером может служить шпренгельная балка (рисунок 1.12).

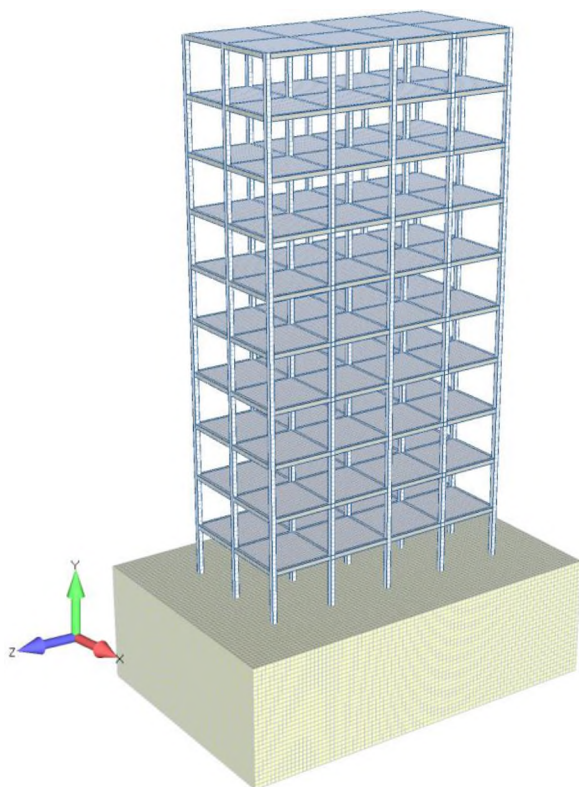


Иллюстрация 1.3. Пластино-стержневая система с жесткими узлами, работающая совместно с грунтовым массивом

Одновременное применение жестких и шарнирных соединений имеет место и в расчетных схемах многих других типов сооружений, например: в трехшарнирной раме (рисунок 1.13), в двухпролетной двухъярусной раме с центральной качающейся стойкой и шарнирно опертым верхним ригелем (рисунок 1.14).

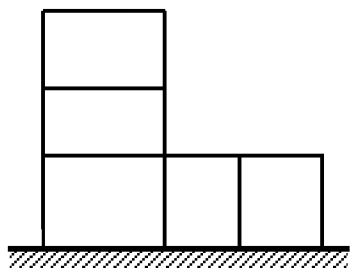


Рисунок 1.11

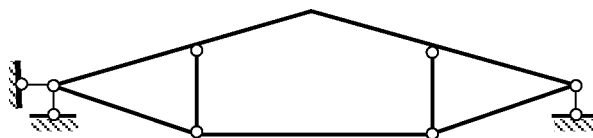


Рисунок 1.12

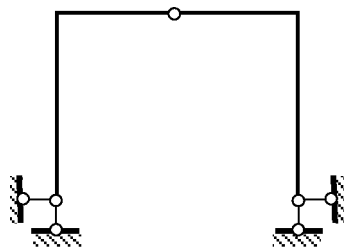


Рисунок 1.13

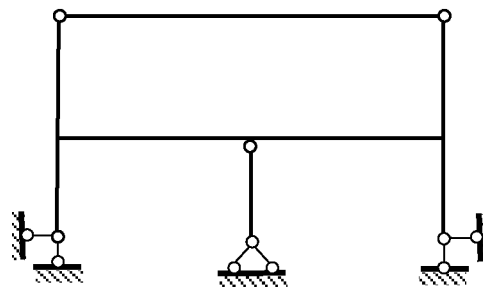


Рисунок 1.14

**Системы геометрически изменяемые и геометрически неизменяемые, мгновенно изменяемые и мгновенно жесткие**

Если система элементов, узлов и опор, образующих расчетную схему сооружения, допускает изменение его формы (геометрии) за счет взаимного смещения элементов без их деформации, то такая система называется геометрически изменяемой (рисунок 1.15). Если изменение формы (геометрии) системы возможно только за счет деформаций (или разрушения) ее элементов, то такая система является геометрически неизменяемой (рисунок 1.16).

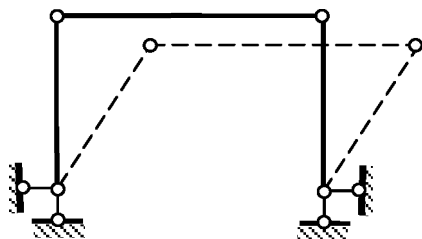


Рисунок 1.15

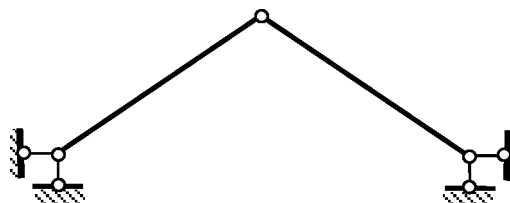


Рисунок 1.16

Классификация сооружений по кинематическому признаку имеет большое значение, так как в качестве сооружений могут применяться, как правило, системы геометрически неизменяемые. Исключением являются некоторые висячие системы изменяемого типа, выполненные из гибких элементов, тросов.

При произвольном изменении размеров элементов или изменении взаимного расположения узлов системы можно получить такую ее особую (вырожденную) форму, кинематические свойства которой будут отличаться от свойств смежных форм. Например, двухстержневая геометрически неизменяемая система (рисунок 1.16), при изменении длин ее элементов может принять особую форму, в которой оба стержня будут лежать на одной прямой (рисунок 1.17). В этой особом случае промежуточный шарнир получит свободу вертикального перемещения. Однако вертикальное перемещение промежуточного шарнира может быть только бесконечно малым, так как стержни предполагаются абсолютно недеформируемыми. Все смежные формы, в которых стержни не лежат на одной прямой, будут геометрически неизменяемыми. Особые формы, в которых система допускает бесконечно малые перемещения, называют мгновенно изменяемыми. При выводе системы из мгновенно изменяемой конфигурации она становится геометрически неизменяемой.

Системы, конфигурации которых являются мгновенно изменяемыми (рисунок 1.17) или близки к таковым (рисунок 1.18), в качестве сооружений, как правило, не применяют, так как они обладают повышенной деформативностью.

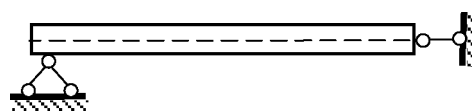
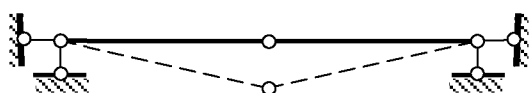


Рисунок 1.17

Рисунок 1.18

С другой стороны, в геометрически изменяемой системе, например, представленной на рисунке 1.19, можно подобрать длины ее элементов так, чтобы, допустим, все ее узлы расположились на одной прямой (рисунок 1.20). Это будет особая форма геометрически изменяемой системы, которую называют мгновенно жесткой. В смежных формах рассматриваемая геометрически изменяемая система допускает большие кинематические перемещения без деформаций ее элементов (рисунок 1.19). Та же система в особой форме (рисунок 1.20) при условии абсолютной нерастяжимости стержней допускает только бесконечно малые перемещения.

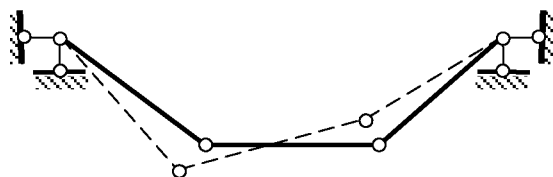


Рисунок 1.19

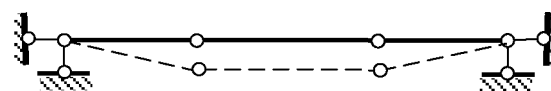


Рисунок 1.20

Таким образом, как геометрически неизменяемые, так и геометрически изменяемые системы могут иметь особые, вырожденные формы.

В реальных условиях, когда элементы сооружений выполняются из деформируемых материалов, вырожденные формы характеризуются конечными перемещениями узлов, значения которых на порядок выше, чем удлинения элементов. Следовательно, мгновенно изменяемые системы характеризуются повышенной деформативностью по сравнению с геометрически неизменяемыми системами, а мгновенно жесткие системы – повышенной жесткостью по сравнению с геометрически изменяемыми системами.

Мгновенно жесткие системы широко применяются в предварительно напряженных вантовых и вантово-стержневых системах (иллюстрация 1.4 и 1.5).

### Системы безраспорные и системы распорные

Безраспорными называют такие сооружения, у которых вертикальная (одного направления) нагрузка вызывает только вертикальные (того же направления) опорные реакции. Все остальные сооружения можно отнести к распорным системам. Наличие составляющей опорных реакций, нормальной к линии действия нагрузки, является отличительной характеристикой распорных систем.

Классическим примером безраспорных систем являются балки: простая балка (рисунок 1.21), криволинейная балка (рисунок 1.22) и другие системы балочного типа (рисунок 1.9, 1.10, 1.12). Двухшарнирная арка (рисунок 1.23) и Трехшарнирная рама (рисунок 1.24), как и многие другие, представляют собой распорные системы.

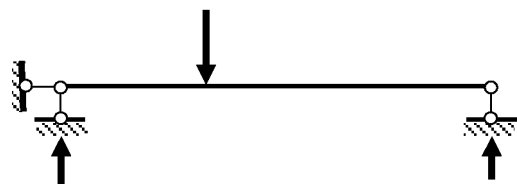


Рисунок 1.21

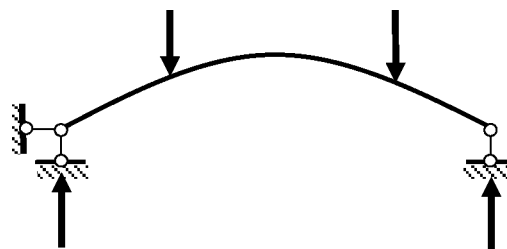


Рисунок 1.22



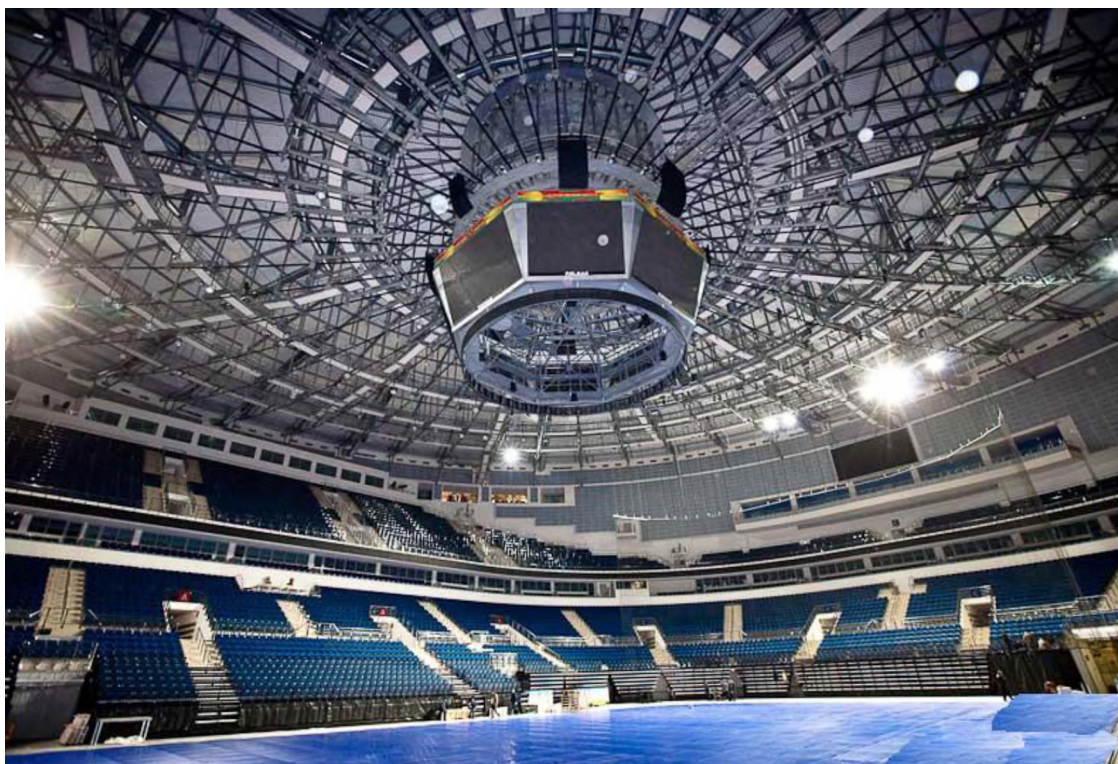


Иллюстрация 1.4. Минск-Арена. Вид на покрытие снизу

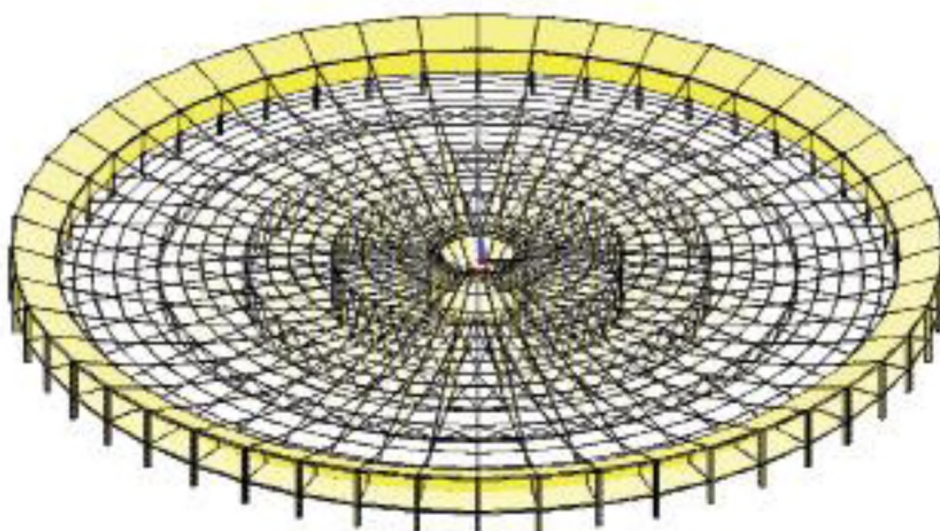


Иллюстрация 1.5. Минск-Арена. Расчетная схема радиальных вантовых ферм и опорных колец

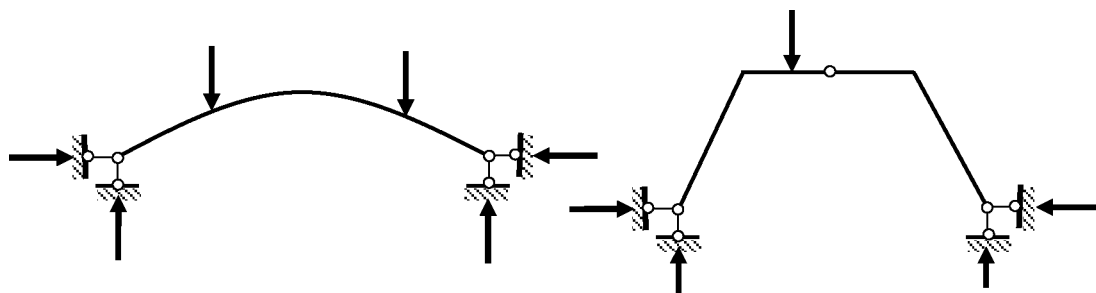


Рисунок 1.23

Рисунок 1.24

### Системы статически определимые и статически неопределимые

В статически определимой системе все внутренние силы можно найти, используя только уравнения равновесия (уравнения статики).



Иллюстрация 1.8. Распорная система в виде статически неопределимых арок с надарочным строением



Иллюстрация 1.9. Безраспорная многопролетная статически неопределимая балка переменного сечения

Если для определения опорных реакций или хотя бы части внутренних сил необходимо привлекать уравнения деформаций, то такую систему называют статически неопределимой.

Статически неопределимая система имеет избыточное количество узловых и других соединений, чем это необходимо для ее геометрической неизменяемости. Статически неопределимая система допускает предварительное напряжение (начальные усилия, т. е. усилия без нагрузки за счет тепловых воздействий, смещения опор, неточности сборки и т. п.). В статически определимой системе начальные усилия без нагрузки невозможны.

### **Линейно деформируемые системы и системы нелинейно деформируемые**

Если взаимосвязь между нагрузкой, приложенной к сооружению, и вызванными ею внутренними силами и перемещениями подчиняется закону прямой пропорциональности, то такое сооружение называют линейно деформируемым, или просто линейным. В линейно деформируемой системе деформации и перемещения малы. Их влиянием на распределение внутренних сил пренебрегают. Геометрия деформированного сооружения полагается совпадающей с геометрией исходного недеформированного сооружения. Уравнения равновесия составляют относительно исходной, недеформированной расчетной схемы. Напряженно-деформированное состояние линейной системы описывается линейными дифференциальными или линейными алгебраическими уравнениями.

Если же вызванные внешними воздействиями деформации и перемещения в сооружении значительны, то взаимосвязь между нагрузками и вызванными ею внутренними силами и перемещениями становится нелинейной. Такое сооружение называют нелинейно деформируемым, или нелинейным. Нелинейность, обусловленную изменением геометрии расчетной схемы сооружения, называют геометрической нелинейностью. С учетом геометрической нелинейности обычно ведут расчет большепролетных и высотных сооружений. Геометрически нелинейными являются все геометрически изменяемые, мгновенно изменяемые и мгновенно жесткие системы (висячие покрытия и висячие мосты, тросовые и вантовые сети и системы).

Нелинейность, связанную с отклонением закона деформирования материала сооружения от закона прямой пропорциональности, закона Гука, называют физической нелинейностью.

### **1.4. Степень свободы плоской стержневой системы**

Степенью свободы какого-либо тела или системы тел называют количество независимых геометрических параметров, определяющих положение тела или системы тел при их перемещении на плоскости или в пространстве.

Положение на плоскости подвижной (свободной) материальной точки бесконечно малых размеров (шарнирного узла) характеризуется двумя ее координатами относительно произвольной неподвижной системы отсчета, расположенной в той же плоскости (рисунок 1.25). Следовательно, точка (шарнирный узел) обладает на плоскости двумя степенями свободы.

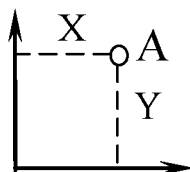


Рисунок 1.25

Отдельное тело (стержень) или заведомо геометрически неизменяемую систему тел (стержневая система) либо ее часть, которые могут перемещаться на плоскости как единой целое, не изменяя своей геометрической формы, называют диском.



Положение подвижного (свободного) плоского тела (диска) на плоскости характеризуется тремя независимыми параметрами, например: абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  какой-либо точки  $A$  и углом наклона  $\varphi$  какой-нибудь прямой  $AB$ , принадлежащей диску (рисунок 1.26). Таким образом, диск при движении на плоскости обладает тремя степенями свободы. Жесткий узел на плоскости, даже достаточно малых размеров, в отличие от шарнирного узла должен рассматриваться как диск. Следовательно, жесткий узел на плоскости имеет три степени свободы.

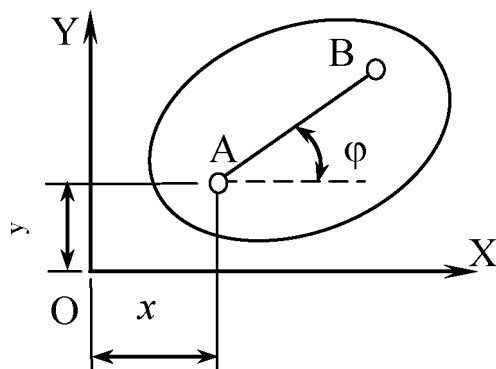


Рисунок 1.26

В пространстве свободное твердое тело рассматривается как пространственный блок и обладает шестью степенями свободы: тремя координатами любой его точки и тремя углами поворота любой его линии по отношению к осям неподвижной системы пространственных координат.

В данном разделе ограничимся рассмотрением только плоских систем.

### Классификация связей плоских систем

Всякое устройство, уменьшающее степень свободы тела или системы тел на единицу, будем называть простой связью. Если устройство уничтожает несколько степеней свободы, то его будем рассматривать как сложную (кратную) связь, эквивалентную нескольким простым.

Каждая связь имеет как кинематическую, так и статическую характеристику.

Кинематическая характеристика определяет, каким видам движения одного диска относительно другого препятствует связь, сколько степеней свободы она устраняет. Статическая характеристика определяет количество и виды реакций, возникающих в соответствующей связи.

Таким образом, всякое сооружение можно рассматривать как систему дисков, соединенных связями, как между собой, так и с опорной поверхностью (землей). Землю (опорную поверхность) также можно рассматривать как диск. Чаще всего с землей связывают неподвижную систему координат и по отношению к земле определяют степень свободы исследуемой системы.

В кинематическом анализе диски и связи полагаются недеформируемыми, абсолютно жесткими.

Рассмотрим расчетные схемы связей, используемых в строительной механике.

Шарнирно подвижная опора эквивалентна одной простой связи, т. е. связи первого вида. Диск, присоединенный к земле (опорной поверхности) шарнирно подвижной опорой, теряет одну степень свободы. Система из диска и опорного стержня имеет две степени свободы (рисунок 1.27).

Одиночный стержень, соединяющий два диска и шарнирно к ним прикрепленный, также можно рассматривать как простую связь. Система из двух дисков, шарнирно соединенных одним стержнем, теряет одну степень свободы (рисунок 1.28). Суммарная степень свободы такой системы равна пяти, в противовес шести степеням свободы для двух несвязанных дисков.

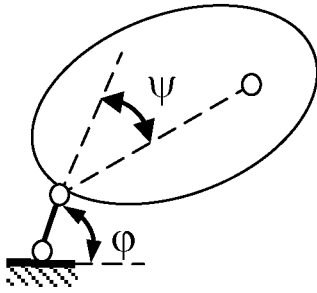


Рисунок 1.27

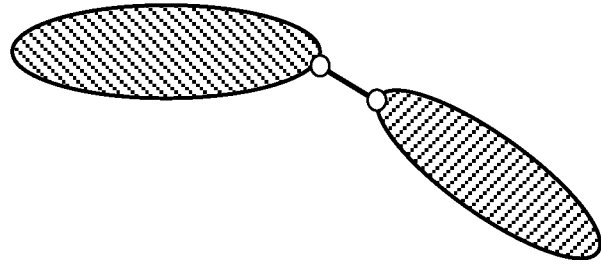


Рисунок 1.28

Одиночный шарнир (на расчетных схемах изображается кружком) эквивалентен двум простым связям. Соединяя два диска, шарнир уменьшает их суммарную степень свободы, равную шести, до четырех, так как положение двух связанных шарниром дисков характеризуется двумя координатами  $x$  и  $y$  точки  $A$  и двумя углами  $\varphi$  и  $\psi$ , фиксирующими положение линий  $AB$  и  $BC$  (рисунок 1.29,а). Землю (опорную поверхность) можно рассматривать как неподвижный диск. Плоский подвижный диск, прикрепленный к земле (к неподвижной опорной поверхности) шарниром, теряет две степени свободы, и его положение характеризуется только одним углом поворота относительно оси шарнира (рисунок 1.29,б). Такое устройство можно рассматривать как шарнирно неподвижную опору, эквивалентную двум простым связям (рисунок 1.29,в). Шарнирно неподвижная опора устраняет две степени свободы.

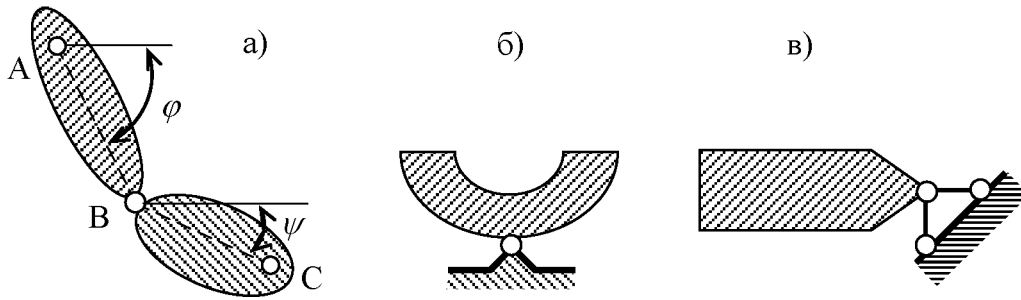


Рисунок 1.29

Система из трех дисков, соединенных двумя шарнирами (рисунок 1.30,а), имеет пять степеней свободы. Два шарнира устранили четыре степени свободы. В данной системе промежуточный диск можно рассматривать и как простую связь (сравните с системой на рисунке 1.28).

В кинематическом анализе, напомним, любой стержень может быть рассмотрен как диск, и любой диск может быть заменен стержнем.

Часто два шарнира, соединяющие три диска, сближаются и сливаются, как бы в один шарнир на общей оси (рисунок 1.30,б). Получается сложный, кратный шарнир, эквивалентный, в данном случае, двум простым шарнирам, или четырем простым связям.

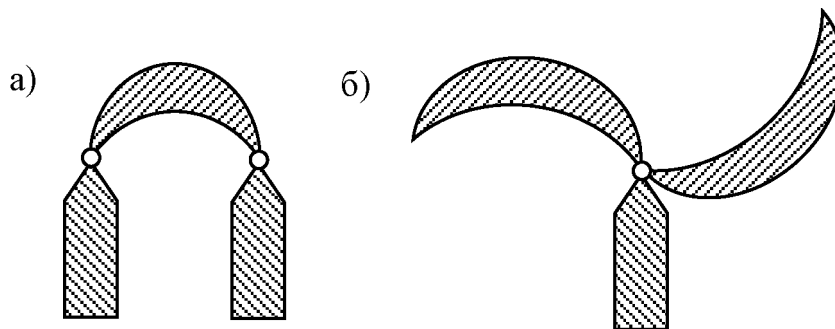


Рисунок 1.30

В общем случае, кратность такого сложного шарнира на единицу меньше количества соединяемых на одной оси дисков (стержней), Другими словами справедливо соотношение:

$$Ш = Д - 1,$$

где  $Ш$  – кратность сложного шарнира,  $Д$  – количество дисков, соединяемых сложным шарниром на одной оси.

Примеры простых шарнирных соединений представлены на рисунке 1.31,а. На рисунке 1.31,б показаны кратные шарнирные соединения.

Если два диска (стержня) монолитно (или с помощью сварки) объединяются в один диск, то такой стык называется жестким соединением, или жестким узлом.

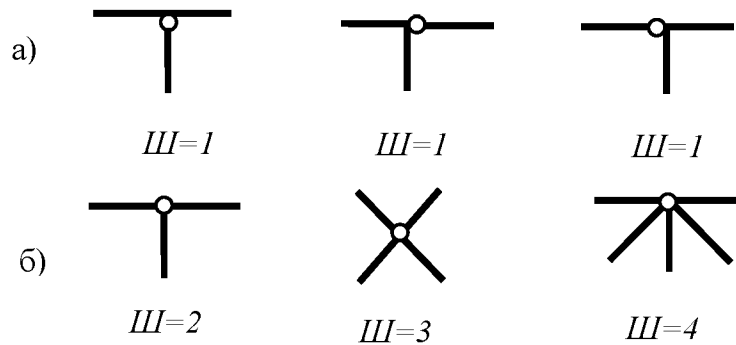


Рисунок 1.31

Жесткие узлы также могут быть простыми (рисунок 1.32,а) и кратными (рисунок 1.32,б). Кратность жестких узлов определяется по формуле:

$$Ж = Д - 1,$$

где  $Ж$  – количество (кратность) простых жестких узлов,  $Д$  – количество дисков, монолитно соединяемых в одном узле. Простой жесткий стык устраняет три степени свободы. Он эквивалентен трем простым связям.

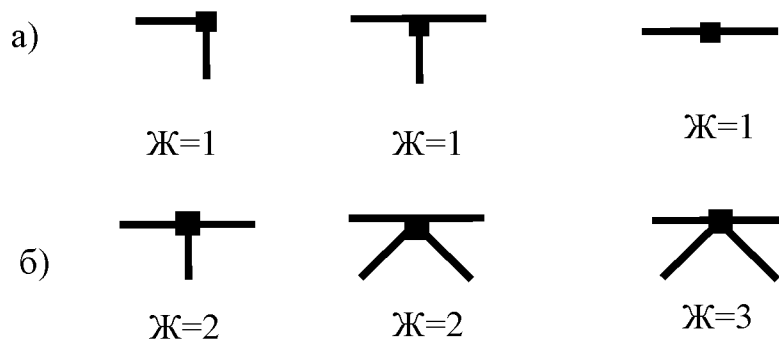


Рисунок 1.32

Жесткая заземляющая опора, устраняющая способность диска (стержня) перемещаться относительно опорной поверхности, как и жесткий узел, также эквивалентна трем простым связям (рисунок 1.7,а,б).

Жесткие узлы позволяют в случае необходимости разбивать один стержень (диск) на произвольное количество составляющих стержней (дисков) (рисунок 1.33).



Рисунок 1.33

Если система дисков, соединенных связями, может изменять приданную ей геометрическую форму или перемещаться относительно опорной поверхности, то она представляет собой механизм, т. е. является геометрически изменяемой, и в качестве сооружения, за редким исключением, выступать не может.

Цель кинематического анализа как раз и состоит в том, чтобы выяснить:

- способны ли стержневые и иные системы воспринимать передаваемую на них нагрузку без существенного изменения приданной им геометрической формы;
- каково должно быть при этом соотношение между числом дисков и числом наложенных связей;
- какова трудоемкость расчета по определению реакций, внутренних сил и перемещений в элементах сооружения.

#### **Формулы для вычисления степени свободы (степени изменяемости) плоских систем**

На основании введенных выше понятий легко определить степень свободы  $W$  любой плоской системы, составленной из  $D$  дисков, соединенных между собой и опорной поверхностью  $J$  простыми жесткими узлами,  $Ш$  простыми шарнирами и  $C_o$  простыми опорными связями.

Если бы система состояла только из свободных, несвязанных дисков, то ее степень свободы равнялась бы  $3D$ . Каждый введенный простой жесткий стык устраняет три степени свободы, каждый простой шарнир – две, а каждая простая опорная связь – одну степень свободы. Следовательно, общая степень свободы системы равна разности:

$$W = 3D - 3J - 2Ш - C_o. \quad (1.1)$$

Для правильного применения полученной формулы следует помнить, что под  $J$ ,  $Ш$  и  $C_o$  понимается общее количество соответственно простых (однократных) жестких стыков, простых (однократных) шарниров и простых опорных связей. При этом необходимо следить, чтобы каждый диск и каждая связь (каждое устройство) были учтены только один раз. Другими словами, если, например, шарнирное соединение одного из дисков с землей было учтено как простой шарнир, то это опорное устройство уже нельзя включать в количество простых связей как шарнирно неподвижную опору, эквивалентную двум опорным связям.

Степень свободы плоской системы, отделенной от опор (не имеющей опорных связей), т. е. в монтажном или транспортном состоянии, состоит из степени свободы ее как жесткого целого, равной трем (на плоскости) и степени изменяемости  $V$  ее элементов относительно друг друга (внутренней изменяемости). Таким образом, можем записать

$$W = 3 + V,$$

откуда

$$V = W - 3.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение  $W$  при условии, что в системе отсутствуют опорные стержни, получим окончательную формулу для вычисления степени изменяемости стержневой системы, отсоединенной от опор

$$V = 3D - 3J - 2Ш - 3. \quad (1.2)$$

Если степень свободы (или степень изменяемости) системы положительна (больше нуля)

$$W > 0 \text{ (или } V > 0),$$

то система геометрически изменяема. В ее структуре для обеспечения геометрической неизменяемости недостает  $W$  (или  $V$ ) связей.

Например, висячая система (рисунок 1.34) составлена из четырех стержней, соединенных тремя шарнирами, и оперта на две шарнирно неподвижные опоры. Ее степень свободы равна

$$W = 3Д - 2Ш - C_o = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

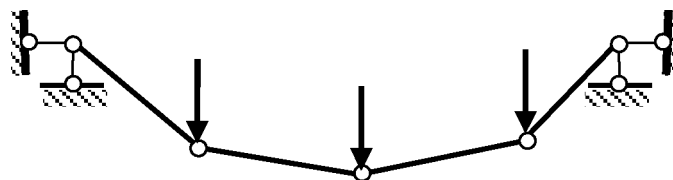


Рисунок 1.34

Следовательно, она геометрически изменяема. В ее структуре недостает двух связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Если степень свободы (или степень изменяемости) системы отрицательна (меньше нуля)  $W < 0$  (или  $V < 0$ ), то система содержит избыточное количество связей с точки зрения геометрической неизменяемости.

Двухпролетная двухъярусная рама (рисунок 1.35,а) состоит из восьми стержней-дисков. Стержни соединены двумя простыми шарнирами, тремя двукратными жесткими узлами (шестью однократными, простыми) и оперты на три жестких защемляющих опоры. Ее степень свободы равна

$$W = 3Д - 3Ж - 2Ш - C_o = 3 \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 2 - 9 = -7.$$

С точки зрения геометрической неизменяемости, данная рама содержит семь лишних связей.

Эту же раму можно рассмотреть и как составленную только из двух дисков, соединенных двумя шарнирами (рисунок 1.35,б). На один из дисков наложены три жестких заделки (9 простых опорных стержней). В результате получим тот же результат:

$$W = 3Д - 3Ж - 2Ш - C_o = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 9 = -7$$

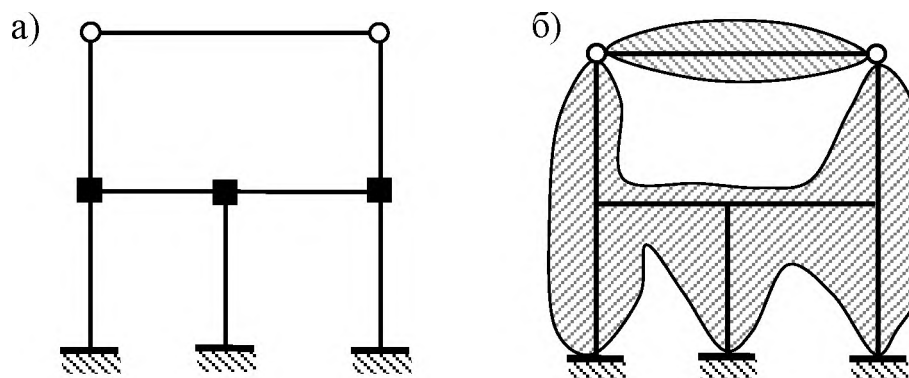


Рисунок 1.35

Количество лишних связей при правильной их расстановке, равно отрицательной степени свободы системы, определяет степень статической неопределимости системы.

Следовательно, количество лишних связей, или степень статической неопределимости системы можно вычислить по формуле

$$L = -W = 3Ж + 2Ш + C_o - 3Д, \quad (1.3)$$

где  $L$  – количество лишних связей.

Если степень свободы системы равна нулю

$$W = 0,$$

то система имеет необходимое для геометрической неизменяемости и неподвижности количество связей и может быть статически определимой. Такая система представлена на рисунке 1.36. Она состоит из 9 стержней-дисков, жестких узлов не имеет, стержни-диски соединены 12 простыми шарнирами (кратность шарнирных соединений указана на рисунке), три опорных стержня связывают ее с опорной поверхностью. Ее степень свободы равна

$$W = 3Д - 3Ж - 2Ш - C_o = 3 \cdot 9 - 0 - 2 \cdot 12 - 3 = 0.$$

Тот же результат можно получить и по-иному, считая, что система составлена из 11 стержней-дисков. Предполагается, что обе полубалки образованы каждая из двух стержней, спаянных жестко в четвертях пролета. Следовательно, появились два дополнительных жестких узла. Количество шарниров и опорных стержней не изменилось. Возможны и другие варианты подсчета степени свободы данной системы.

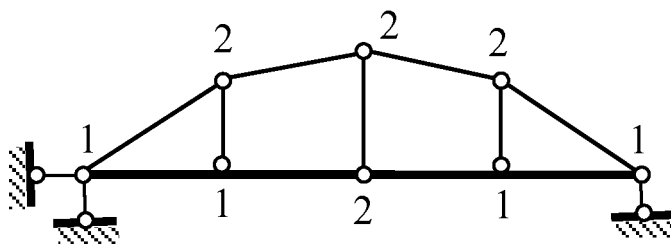


Рисунок 1.36

Если степень изменяемости системы равна нулю

$$V = 0,$$

то система имеет необходимое для внутренней геометрической неизменяемости количество связей и может быть внутренне статически определимой. Например, степень изменяемости односкатной фермы без опор (рисунок 1.37) равна нулю:

$$V = 3Д - 3Ж - 2Ш - 3 = 3 \cdot 13 - 0 - 2 \cdot 18 - 3 = 0.$$

Система содержит необходимое количество связей, чтобы быть внутренне геометрически неизменяемой и статически определимой. Но внешне, по отношению к земле, система подвижна, в ней недостает, как минимум, трех опорных связей для придания ей неподвижности. Большее количество наложенных опорных связей превратит ее во внешне статически неопределимую систему.

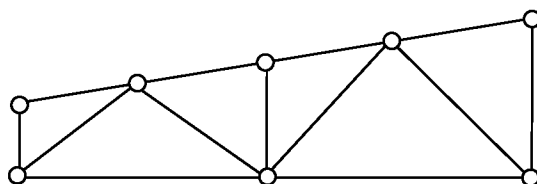


Рисунок 1.37

Подсчет степени свободы или степени изменяемости для ферм и других шарнирно-стержневых систем может быть выполнен и по более удобной формуле.

В шарнирно-стержневой системе (ферме) шарнирные узлы можно рассматривать как материальные точки, имеющие на плоскости две степени свободы. Стержни фермы, как и опорные стержни, можно рассматривать как простые связи.

Если бы узлы фермы не были связаны стержнями, то система из  $U$  свободных узлов имела бы  $2U$  степеней свободы. Стержни фермы, соединяющие узлы, и опорные стержни как простые связи устраняет по одной степени свободы. Следовательно, степень свободы фермы, как и любой другой шарнирно-стержневой системы, может быть вычислена по формуле

$$W = 2U - C - C_o, \quad (1.4)$$

где  $U$  – количество узлов фермы как материальных точек,

$C$  – количество стержней фермы,

$C_o$  – количество опорных стержней.

Соответственно степень изменяемости фермы, отсоединенной от опор, будет равна

$$V = 2U - C - 3. \quad (1.5)$$

Так для фермы без опор (рисунок 1.37) имеем

$$V = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Таким образом, применение полученных выше формул для подсчета степени свободы или степени изменяемости плоских стержневых систем дает необходимые аналитические критерии геометрической неизменяемости или изменяемости, статической определенности или неопределенности.

К сожалению, эти аналитические критерии являются только необходимыми, но не достаточными.

### 1.5. Принципы образования геометрически неизменяемых систем

Полученные выше формулы для вычисления степени свободы (степени изменяемости) стержневых систем дают только формальную оценку кинематических свойств исследуемых систем, что не всегда соответствует действительности. Для окончательного заключения о геометрической неизменяемости и статической определенности стержневой системы необходим анализ ее структуры, анализ принципов, по которым она составлена. Только системы правильной структуры будут действительно геометрически неизменяемыми.

Например, система частично статически неопределимая, а частично геометрически изменяемая (рисунок 1.38) относится к системам неправильной структуры, хотя ее суммарная степень свободы равна нулю. Система, изображенная на рисунке 1.39, также имеет нулевую степень свободы, а на самом деле является мгновенно изменяемой, так как

обладает бесконечно малой подвижностью. Структура ее также неправильная. Мгновенно жесткая система (рисунок 1.40) формально имеет одну степень свободы, но на самом деле степеней свободы у нее две. К тому же она может иметь начальные усилия (например, от охлаждения ее элементов), как статически неопределимая система.

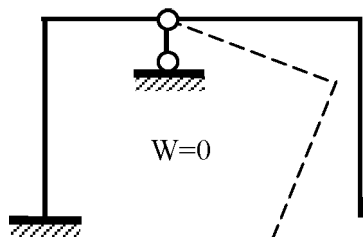


Рисунок 1.38

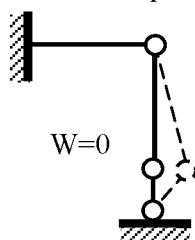


Рисунок 1.39

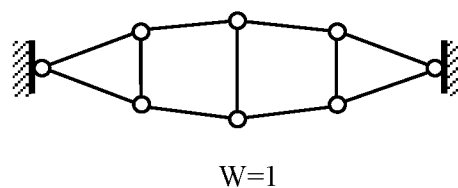


Рисунок 1.40

Для систем неправильной структуры понятия степени свободы или степени изменяемости, вычисляемые по выведенным выше формулам, становятся неопределенными, не имеющими смысла.

Рассмотрим основные способы образования заведомо геометрически неизменяемых стержневых систем.

1. Способ диады. Степень свободы системы (диска) не изменится, если к системе присоединить (отсоединить) шарнирный узел с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой (рисунок 1.41). В качестве таких стержней могут выступать диски и любые другие подсистемы, заведомо статически определимые и геометрически неизменяемые (рисунок 1.42).

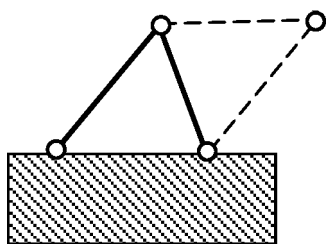


Рисунок 1.41

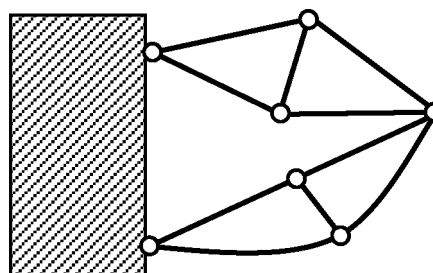


Рисунок 1.42

2. Способ треугольников. Три диска 1, 2 и 3, соединенные тремя шарнирами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащими на одной прямой (рисунок 1.43), образуют новую внутренне геометрически неизменяемую систему (диск). Общее количество лишних связей, если они есть в исходных дисках, не изменяется. Общая степень свободы трех дисков уменьшается на шесть единиц.

3. Способ шарнира и простой связи, эквивалентный способу треугольников. Два диска 1 и 2, соединенные общим шарниром  $C$  и одним стержнем  $AB$ , при условии, что прямая  $AB$  (или ее продолжение) не проходит через шарнир  $C$ , образуют новый единый диск (рисунок 1.44). При этом общее количество лишних связей в исходных дисках не изменяется, а их общая степень свободы снижается на три единицы.

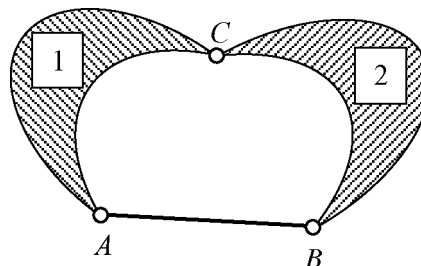
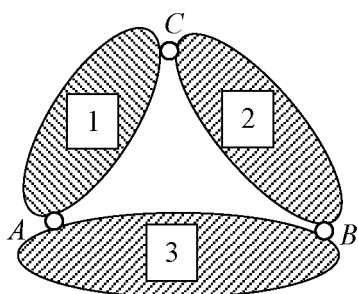




Рисунок 1.43

Рисунок 1.44

4. Способ трех связей. Два диска, соединенные тремя стержнями (рисунок 1.45), лежащими на прямых, не пересекающихся в одной точке и не параллельных все три сразу между собой, образуют единую систему (новый диск). В новой системе суммарное количество избыточных связей, если они были в исходных дисках, не изменяется, а суммарная степень свободы снижается на три единицы.

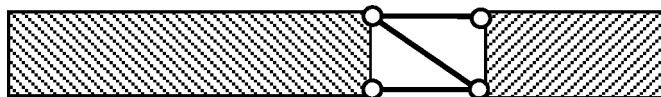


Рисунок 1.45

Рассмотренные способы образования единой системы из нескольких составных частей, вообще говоря, применимы к любым системам как с избыточными связями (статически неопределимым диском), так и к системам с недостающими связями (механизмам).

Чтобы образованная по рассмотренным законам единая система была геометрически неизменяемой и статически определимой, необходимо и достаточно, чтобы и ее составные части, каждая в отдельности, были геометрически неизменяемыми и статически определимыми. При этом каждый диск можно рассматривать как стержень и каждый стержень можно рассматривать как диск. Тогда рассмотренные способы образования заведомо геометрически неизменяемых и статически определимых систем можно свести к двум основным способам.

1. *Способ треугольников*: три диска (стержня), соединенные тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют заведомо геометрически неизменяемую (внутренне) и статически определимую систему (новый диск) (рисунок 1.43, 1.44).

2. *Способ трех связей*: два диска, шарнирно соединенные тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (три параллельных стержня можно считать пересекающимися в бесконечности), образуют новый диск (рисунок 1.45).

Разумеется, рассмотренные способы образования, сборки (или демонтажа, разборки) заведомо геометрически неизменяемых и статически определимых систем могут применяться не только по отдельности, но и в произвольной их комбинации, порой одна замещая другую.

Так, трехшарнирную арку с затяжкой (рисунок 1.46) можно рассматривать как образованную:

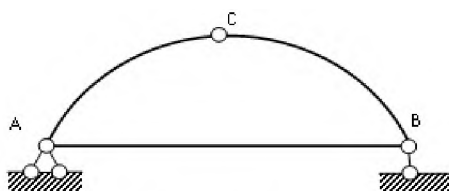


Рисунок 1.46

- По способу диад. С помощью двух опорных стержней к земле неподвижно присоединяется опорный шарнир  $A$ . Затем с помощью третьего опорного стержня и балки  $AB$  опорный шарнир  $B$ . Наконец, посредством двух полуарок делается неподвижным шарнир  $C$ .

- По способу треугольников. Опорные стержни опоры  $A$  вместе с землей образуют первый треугольник и первый единый диск. Полученный диск, балка  $AB$  и опорный стержень опоры  $B$  образуют новый единый диск. И наконец, диск  $AB$  и полуарки  $AC$  и  $BC$  образуют итоговый диск-треугольник  $ABC$ .

• Комбинация способа трех связей и способа диад (или треугольников). Балка  $AB$  соединяется с землей тремя простыми связями (опорными стержнями). К полученной системе присоединяется способом диады шарнирный узел  $C$  (или образуется треугольник  $ABC$ ).

Кинематический анализ уже созданной системы можно проводить и в обратном порядке, т. е. методом демонтажа. Если в результате отбрасывания узлов и стержней (дисков), присоединенных по рассмотренным выше правилам, останется заведомо геометрически неизменяемая и статически определимая подсистема, или только одна опорная поверхность, то и исходная система геометрически неизменяемая и статически определимая.

С помощью анализа структуры (анализа очередности образования) системы легко установить, в какой части системы имеются лишние связи, а в какой части связей недостает. Таким образом, выявляются системы неправильной структуры и системы с вырожденными конфигурациями.

Любую систему в вырожденной конфигурации, мгновенно изменяемую или мгновенно жесткую, можно считать одновременно и статически неопределимой и геометрически изменяемой. В структуре таких систем недостает связей по одним направлениям и одновременно есть лишние связи по другим направлениям.

Именно наличие лишних связей придает вырожденной системе свойства статически неопределимой системы, а именно: возможность иметь начальные усилия при отсутствии нагрузки. А это свойство приводит к статическому критерию мгновенной изменяемости или мгновенной жесткости.

1. Если в системе с нулевой степенью свободы ( $W = 0$ ), т.е. в системе формально геометрически неизменяемой и статически определимой, могут быть начальные усилия (усилия предварительного напряжения), то такая система мгновенно изменяема или частично статически неопределима, а частично геометрически изменяема. В последнем случае необходимо провести кинематический анализ системы по фрагментам.

2. Если в системе с положительной степенью свободы ( $W > 0$ ), т.е. в системе формально геометрически изменяемой, могут быть начальные усилия (усилия предварительного напряжения), то такая система мгновенно жесткая или в ее составе есть статически неопределимые фрагменты.

Связи в таких системах, с точки зрения геометрической неизменяемости, расставлены неправильно.

Например, в мгновенно изменяемой системе (рисунок 1.47) узел  $C$  закреплен от горизонтального смещения стержнем  $AC$ . Стержень  $BC$  также устраняет горизонтальное смещение узла  $C$  и является лишним. В то же время в системе нет никакой связи, которая бы устранила смещение узла  $C$  по вертикали. Однако такое смещение может быть только бесконечно малым: как только узел  $C$  сместится с линии  $AB$ , стержни диады  $AC$ - $BC$  уже не будут лежать на одной прямой, и дальнейшее смещение узла  $C$  станет невозможным без деформации стержней  $AC$  и  $BC$ . Со статической точки зрения, в этой системе возможны начальные усилия без нагрузки, допустим, за счет охлаждения или раздвижки опор.

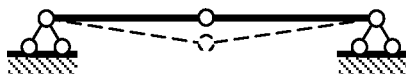


Рисунок 1.47

В вантовой ферме (рисунок 1.40) явно недостает двух диагональных стержней в средних панелях, чтобы она была образована по способу треугольников (есть две степени свободы). В то же время у нее есть четыре опорные связи, одна из которых (горизонтальная) является лишней (суммарная степень свободы  $W=1$ ). Но именно из-за наличия этой лишней связи в данной геометрически изменяемой системе возможны только бесконечно малые перемещения. Со статической точки зрения, данная система при  $W>0$  допускает и предварительное натяжение. Значит, данная система мгновенно жесткая.

Диск, подсоединенный к опорной поверхности тремя опорными стержнями формально должен иметь нулевую степень свободы. Но если три опорных стержня сходятся в одном опорном шарнире (рисунок 148), система остается геометрически изменяемой (свобода поворота относительно оси опорного шарнира), в то время как шарнирная неподвижная опора имеет лишней (для плоского случая) опорный стержень.

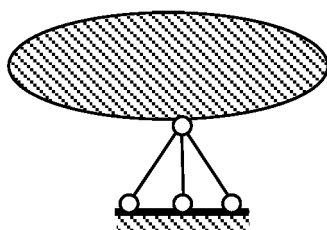


Рисунок 1.48

Шарнирно-стержневой диск  $DFB$  (рисунок 1.49), образованный по способу треугольников, соединен с неподвижными точками  $A$  и  $C$  Г-образными стержнями  $AD$  и  $CF$  и оперт на вертикальный опорный стержень шарнирно подвижной опоры  $B$ , т. е. соединен с опорной поверхностью тремя стержнями-дисками ( $W = 0$ ). Но линии, на которых лежат концы этих трех стержней, пересекаются в одной точке  $O$ , центре мгновенного вращения. В системе возможны и начальные усилия за счет поддомкрачивания центральной опоры. Следовательно, данная система мгновенно изменяемая.

Примеры некоторых других систем неправильной структуры приведены на рисунке 1.50 (система геометрически изменяема, хотя  $W = -2$ ) и на рисунке 1.51 (система со статически неопределимым фрагментом мгновенно изменяема при  $W = -3$ ).

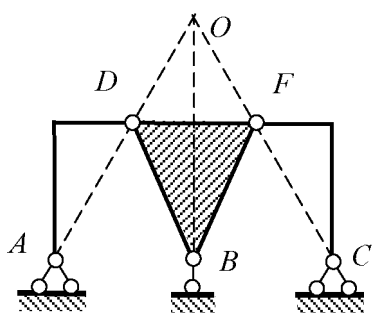


Рисунок 1.49

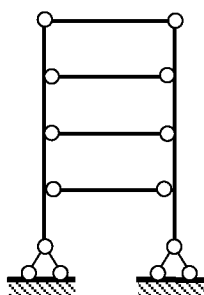


Рисунок 1.50

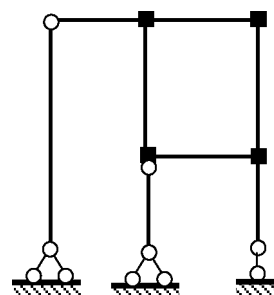


Рисунок 1.51

## 1.6. Матрицы в задачах строительной механики

При проведении расчетов, ориентированных на компьютерные технологии, в строительной механике применяют дискретные расчетные схемы и методы матричного исчисления. Действующие на сооружение нагрузки представляют в виде вектора нагрузок (матрицы-столбца), компонентами которого являются значения заданных нагрузок, занумерованных в определенном порядке. Результатами расчета будут служить не эпюры усилий или эпюры перемещений, а векторы усилий и векторы перемещений, в которых в заданном порядке будут перечислены значения конкретных усилий в конкретных сечениях и значения перемещений конкретных точек сооружения в заданных конкретных направлениях.

Так нагрузки, приложенные к простой балке (рисунок 1.52), можно представить вектором  $\vec{F}_1$  третьего порядка

$$\vec{F}_1 = [q_1 \quad F_2 \quad M_3]^T,$$

а нагрузки, приложенные к балочной ферме (рисунок 1.56), вектором  $\vec{F}_2$  пятого порядка

$$\vec{F}_2 = [F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_5]^T.$$

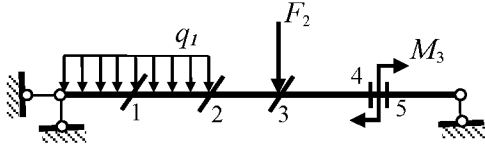


Рисунок 1.52

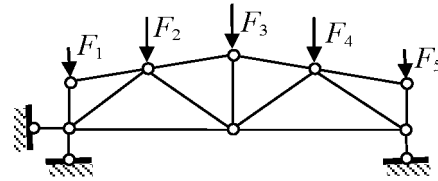


Рисунок 1.53

Чтобы найти изгибающие моменты в пяти характерных сечениях балки (рисунок 1.52) и внутренние силы в тринадцати стержнях фермы (рисунок 1.53) от заданных нагрузок достаточно построить соответственно матрицу влияния изгибающих моментов  $L_M$  для балки и матрицу влияния продольных сил  $L_N$  для фермы, стержни которой предварительно необходимо пронумеровать. Затем воспользоваться матричными формулами

$$\vec{M} = L_M \vec{F}_1; \quad \vec{N} = L_N \vec{F}_2,$$

где

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_5 \end{bmatrix}; \quad L_M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} \end{bmatrix};$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_{13} \end{bmatrix}; \quad L_N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{11} & \dots & n_{15} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{13,1} & n_{13,2} & \dots & n_{13,5} \end{bmatrix}.$$

Элемент  $m_{ik}$  матрицы влияния изгибающих моментов представляет собой изгибающий момент в характерном сечении номер  $i$  балки, вызванный единичным значением нагрузки номер  $k$ . Элемент  $n_{ik}$  матрицы влияния продольных сил представляет собой усилие в стержне номер  $i$  фермы от единичного значения внешней силы  $F_k = 1$ .

С помощью соответствующим образом построенной матрицы влияния перемещений  $D$  можно найти вектор  $\vec{\Delta}$  перемещений заданных точек по заданным направлениям от внешних сил, заданных вектором  $\vec{F}$ ,

$$\vec{\Delta} = D\vec{F},$$

где

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nk} \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_k \end{bmatrix}.$$

Символ  $\Delta_{nF}$  обозначает перемещение точки (сечения) номер  $n$  по направлению приложенной в этой точке силы  $F_n=1$ , вызванное заданной нагрузкой. Элемент  $\delta_{nk}$  матрицы влияния перемещений  $D$  равен перемещению точки (сечения) номер  $n$  по направлению силы  $F_n=1$ , вызванному силой  $F_k=1$ , и называется единичным перемещением.

Таким образом, применение матриц влияния основано на принципе независимости действия сил, принципе суперпозиции. Согласно этому принципу, суммарный эффект действия нескольких сил равен сумме эффектов действия каждой силы в отдельности. На первом этапе расчет сводится к вычислению внутренних сил и перемещений от единичных внешних сил и построению матриц влияния. На втором этапе по матричным формулам с помощью компьютера вычисляются усилия и перемещения от любой комбинации нагрузок.

Матрицу влияния перемещений  $D$  еще называют матрицей податливости. Матрица податливости позволяет выразить перемещения через внешние силы. Квадратную матрицу податливости можно обратить и получить новую матрицу  $R$ , называемую матрицей жесткости:

$$R = D^{-1}.$$

Матрица жесткости позволяет выразить внешние силы через перемещения точек, к которым эти силы приложены

$$\vec{F} = R\vec{\Delta}.$$

Не вникая более в детали, отметим, что матрицы податливости и матрицы жесткости широко используются при расчете статически неопределимых систем, а также в динамике и устойчивости сооружений. На основе матричного исчисления созданы современные проектно-вычислительные комплексы для расчета сооружений с помощью компьютеров.

## ТЕМА 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ. МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА ПРИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ

### 2.1. Понятие о статически определимых системах. Их основные свойства

Одной из основных задач строительной механики является определение внутренних сил в элементах сооружения. Методы их определения зависят от тех предпосылок, которые принимаются в расчете. От этих же предпосылок зависит и деление систем на статически определимые и статически неопределимые. При одних предпосылках одна и та же расчетная схема сооружения рассматривается как статически определимая, а при других – как статически неопределимая.

При строгой постановке задачи расчета, внутренние силы необходимо определять по деформированному состоянию сооружения. В этом случае, как правило, все системы относятся к статически неопределимым.

В линейно деформируемой системе деформации и перемещения малы. Их влиянием на распределение внутренних сил пренебрегают. Расчет ведут по так называемой недеформированной расчетной схеме. Геометрия деформированного сооружения полагается совпадающей с геометрией исходного недеформированного сооружения.

**Статически определимые системы** – это такие системы, у которых все внутренние силы могут быть определены **только из уравнений равновесия**.

Перечислим основные свойства статически определимых систем.

1. Статически определимая система не имеет лишних связей, т.е.  $W = 0$ . При удалении хотя бы одной связи статически определимая система обращается в геометрически изменяемую систему.

2. Усилия в статически определимых системах не зависят от упругих свойств материала и размеров сечений элементов.

3. Изменение температуры, осадка опор, незначительные отклонения в длинах элементов не вызывают в статически определимой системе дополнительных усилий.

4. Заданной нагрузке в статически определимой системе соответствует одна единственно возможная картина распределения усилий.

5. Самоуравновешенная нагрузка, приложенная к локальной части системы, вызывает усилия в элементах только этой части. В остальных элементах системы усилия будут равны нулю (рис. 2.1).

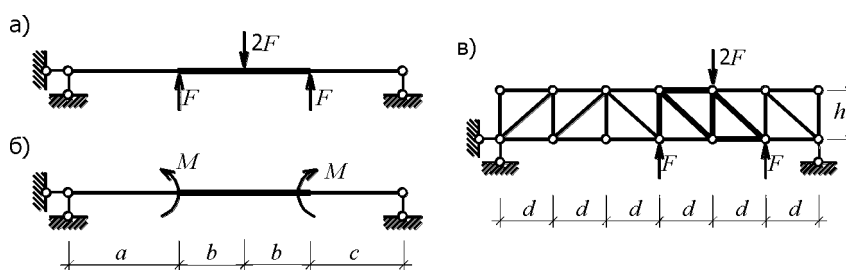


Рис. 2.1

## 2.2. Метод сечений

Изгибающий момент ( $M$ ), продольная ( $N$ ) и поперечная ( $Q$ ) силы, являющиеся внутренними силами в сечении элемента плоской системы, как известно, интегрально выражаются через нормальные ( $\sigma$ ) и касательные ( $\tau$ ) напряжения (рис. 2.2):

Знак изгибающего момента  $M$  зависит от знака кривизны изогнутого стержня и выбранного направления осей внешней неподвижной системы координат (рис. 2.3). Если ось  $y$  направить в обратную сторону, то знак кривизны, а следовательно, и момента изменится на обратный.

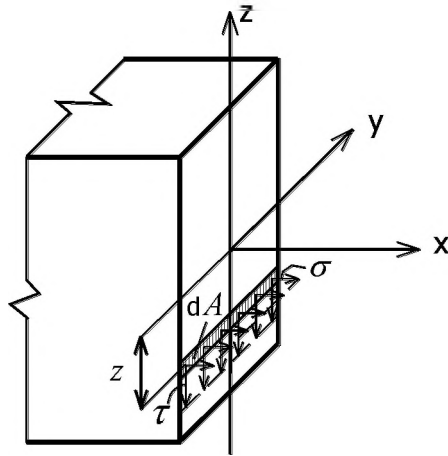


Рис. 2.2

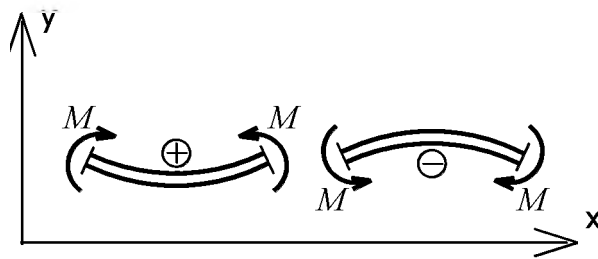


Рис. 2.3

При построении эпюр изгибающих моментов положительная ордината момента откладывается в сторону выпуклости изогнутой оси, т.е. эпюра моментов строится на растянутых волокнах элемента.

Поперечную силу  $Q$  считают положительной, если она стремится вращать отсеченную часть стержня по ходу часовой стрелки (рис. 2.4,а). Отделяемые сечением части стержня на рис. 2.4 раздвинуты.

Продольную силу  $N$  считают положительной, если она вызывает растяжение отсеченной части стержня (рис. 2.4,б).

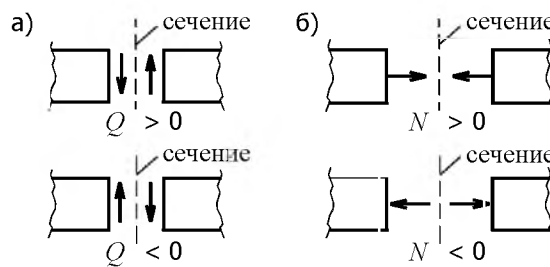


Рис. 2.4

Для определения усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  применяются уравнения равновесия, которые записываются в трех формах:

1. Сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любой точки  $C_1$ , лежащей в плоскости действия сил, должны быть равны нулю:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_{C_1} = 0.$$

2. Суммы моментов всех сил относительно каких-нибудь двух центров  $C_1$  и  $C_2$  и сумма их проекций на любую ось  $X$ , не перпендикулярную к прямой  $C_1 C_2$ , должны быть равны нулю:

$$\sum X = 0, \sum M_{C_1} = 0, \sum M_{C_2} = 0.$$

3. Суммы моментов всех сил относительно любых трех центров  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , не лежащих на одной прямой, должны быть равны нулю:

$$\sum M_{C_1} = 0, \sum M_{C_2} = 0, \sum M_{C_3} = 0.$$

Способы использования этих уравнений для определения внутренних сил зависят от структуры заданной системы.

При использовании способа простых сечений вначале исследуемая система разделяется по сечению, в котором определяются усилия, на две независимые части, а затем действие одной части на другую заменяется искомыми внутренними силами. Для определения их составляются (в любой, из перечисленных ранее, форм) и решаются уравнения равновесия, при этом опорные реакции рассматриваемой системы вычисляются заранее по правилам, известным из курса сопротивления материалов. Например, определяя усилия в сечении  $k$  рамы (рис. 2.5, а), можно рассмотреть равновесие правой отсеченной части рамы (рис. 2.5, б) и составить уравнения вида:

$$\sum X^{(права)} = F_3 - N_k = 0;$$

$$\sum Y^{(права)} = V_B - F_2 + Q_k = 0;$$

$$\sum M_k = V_B b - F_2 b_1 + F_3 h_2 - M_k = 0.$$

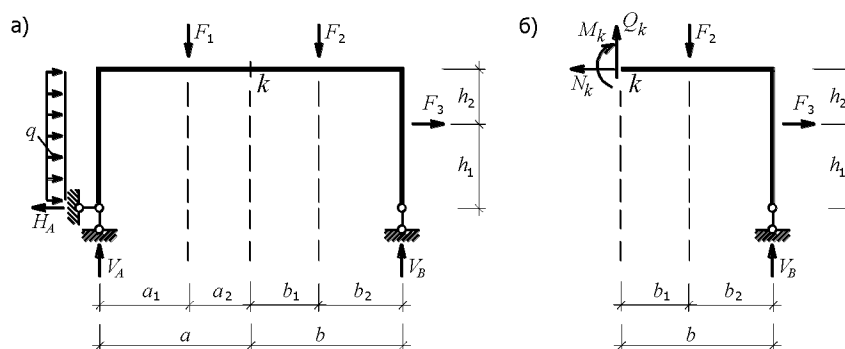


Рис. 2.5

Решив их, определим усилия  $N_k$ ,  $Q_k$  и  $M_k$ . Положительный знак найденного усилия показывает, что заданное направление усилия является действительным.

При выборе формы записи уравнений равновесия необходимо стремиться к тому, чтобы поставленная задача решалась наиболее просто: каждое уравнение, по возможности, должно содержать только одно неизвестное усилие.



Используя способы образования геометрически неизменяемых систем (см. гл. 1), соединение левой и правой частей рамы в сечении  $k$  (рис. 2.5, а) можно представить при помощи простых связей. При определенном расположении связей в сечении усилие в какой-то одной связи (реакция связи) будет равно соответствующей внутренней силе, т.е.  $N_k$ ,  $Q_k$  или  $M_k$ .

На рис. 2.6, а,...в показаны возможные варианты расположения связей в сечении  $k$  и обозначены усилия в тех из них, с помощью которых находятся внутренние силы.

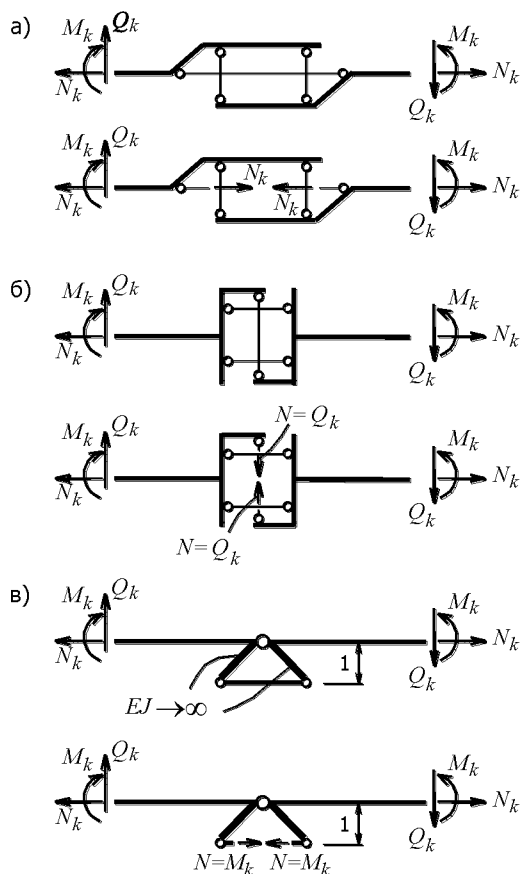


Рис. 2.6

Замену жесткой связи (спайки), соединяющей две части конструкции, простыми связями можно рассматривать как стержневую аппроксимацию одномерного элемента в сечении  $k$ . Она используется при определении усилий статическим и кинематическим методами, при построении линий влияния усилий и в других задачах.

Разновидностью статического метода определения усилий является и способ членения исследуемой системы на множество отдельных фрагментов. Составляя для каждого из них уравнения равновесия с учетом, естественно, внутренних сил (они являются неизвестными) в сечениях, разделяющих фрагменты, получим для статически определимой системы полную систему уравнений, решение которой дает значения неизвестных.

Разобьем, например, раму (рис. 2.7, а) на три фрагмента, показанные на рис. 2.7, б. Общее число неизвестных равно девяти: четыре опорные реакции, три неизвестные в сечении  $D$  и две в сечении  $C$ . Для каждого из трех фрагментов (дисков) можно составить три независимых уравнения в любой из ранее перечисленных форм. Решение совместной системы линейных уравнений 9-го порядка позволит найти все неизвестные.

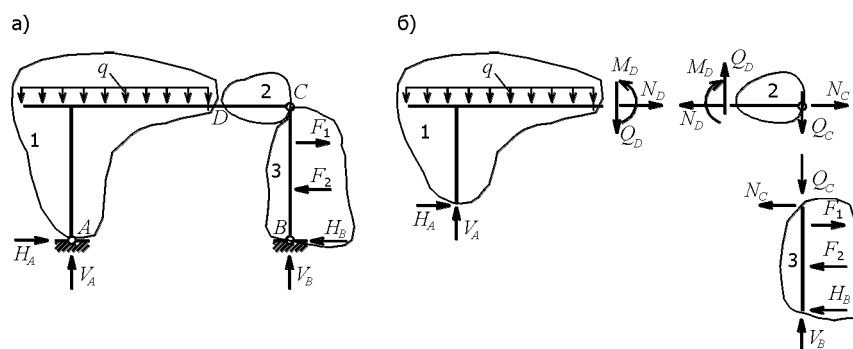


Рисунок 2.7

Дальнейшее расширение этого способа вычисления усилий связано с членением заданной системы на отдельные элементы и узлы. Об этом читайте в учебнике (раздел 15).

### 2.3. Метод замены связей

Рассмотрим применение этого метода к расчету фермы, показанной на рис. 2.8, а. Ферма является статически определимой. Ее структура может быть представленной в виде трех дисков (треугольники 3–5–6, 4–6–7 и стержень 1–2), попарно соединенных двумя связями. Поскольку точки пересечения стержней 1–3 и 2–5, 2–4 и 1–7 и узел 6 (полюсы взаимного вращения дисков) не лежат на одной прямой, то ферма не является мгновенно изменяемой.

Ферму невозможно рассчитать способом вырезания узлов без решения системы уравнений равновесия всех узлов. Невозможно также применить и способ простых сечений, так как не найдется сечение, разделяющие систему на две части, при котором бы число неизвестных усилий было не более трех.

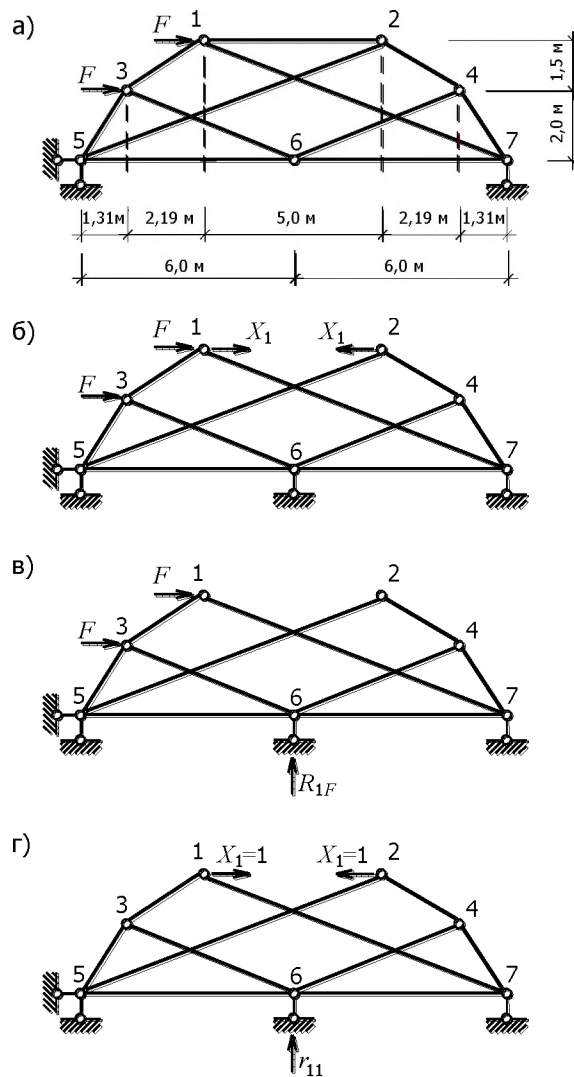


Рис. 2.8

Суть метода замены связей состоит в том, что одна из связей заданной системы удаляется, а ее действие заменяется неизвестной силой  $X$ . Чтобы система оставалась геометрически неизменяемой в нее вводится другая связь. При удачном расположении этой связи новая система (ее называют заменяющей) получается более простой для расчета. Статическая эквивалентность заданной и заменяющей систем будет наблюдаться тогда, когда  $X$  станет равным истинному усилию в выбранном стержне. В этом случае во введенной дополнительной связи реакция окажется равной нулю. Равенство нулю усилия в дополнительной связи является условием для записи уравнения, из которого определяется усилие  $X$ .

Обратимся к примеру. В заданной ферме (рис. 2.8, а) выбросим стержень 1–2, а его действие на узлы 1 и 2 заменим силами  $X_1$ . Дополнительную связь (опорную) введем в шестой узел. Полученная такими преобразованиями заменяющая система приведена на рис. 2.8, б. Усилия в ее стержнях легко определяются по способу вырезания узлов.

Выполняя ее расчет, воспользуемся принципом независимости действия сил. Найдем вначале усилия в стержнях при нагружении системы заданной внешней нагрузкой (рис. 2.8, в). Будем их обозначать  $N_{i-k,F}$ . Усилие в дополнительной опорной связи –  $R_{1F}$  (индекс 1 означает номер дополнительной связи, индекс  $F$  – указывает на причину, вызвавшую усилие). Для принятых на рис. 2.11,а размеров получим  $R_{1F} = 0,4023F$ .

Рассчитаем заменяющую систему на действие  $X_1 = 1$  (рис. 2.8,г). Усилия в стержнях будем обозначать  $N_{i-k,1}$ . Усилие в дополнительной связи –  $r_{11}$  (первый индекс, как и ранее, – номер дополнительной связи; второй – указывает на причину, вызвавшую усилие). В рассматриваемом случае  $r_{11} = 0,1380$ .

Так как реакция дополнительной опоры равна нулю, то можно записать уравнение

$$r_{11}X_1 + R_{1F} = 0, \quad (2.1)$$

из которого найдем  $X_1 = -\frac{R_{1F}}{r_{11}} = -2,915F$ .

Если бы оказалось, что  $r_{11} = 0$ , то это было бы признаком того, что заданная ферма является мгновенно изменяемой.

Последующий расчет фермы можно выполнить способом вырезания узлов, или, если известны все  $N_{i-k,F}$ ,  $N_{i-k,1}$ , усилия в стержнях заданной фермы можно вычислить по формуле

$$N_{i-k} = N_{i-k,F} + N_{i-k,1}X_1.$$

Рассмотрим еще один пример. Многопролетная балка (рис. 2.9, а) легко рассчитывается по способу простых сечений. Однако, чтобы лучше понять суть метода замены связей, покажем ее расчет и этим методом.

Удалим в заданной балке опорные связи в точках  $B$  и  $D$ . Действие их на балку заменим силами  $X_1$  и  $X_2$ . Введем дополнительные связи в точках  $A$  и  $C$ , т.е. закроем шарниры. Полученная этими преобразованиями заменяющая система показана на рис. 2., б или, в более привычной форме изображения, на рис. 2.9, в.

Построим эпюры изгибающих моментов в заменяющей балке от нагружения ее заданной нагрузкой (рис. 2.9, г), единичной силой  $X_1$  (рис. 2.9, д) и единичной силой  $X_2$  (рис. 2.9, е). Значения моментов в дополнительных связях от этих нагрузок показаны на рисунках.

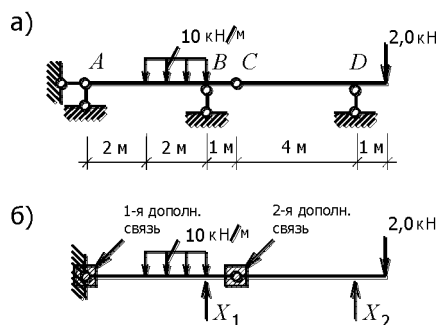
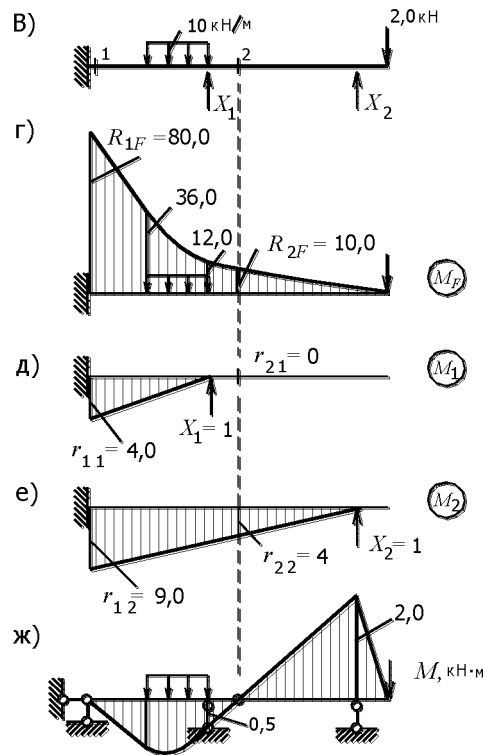


Рис. 2.9



Продолжение рис. 2.9

Из условий статической эквивалентности заданной и заменяющей балок следует, что усилия (моменты) в первой и второй дополнительных связях должны быть равны нулю. Определяя их по принципу независимости действия сил, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}X_1 + r_{12}X_2 + R_{1F} &= 0; \\ r_{21}X_1 + r_{22}X_2 + R_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Запишем уравнения в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} 4X_1 + 9X_2 - 80 &= 0; \\ 4X_2 - 10 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая их, найдем  $X_1 = 2,5$  кН,  $X_2 = 2,5$  кН.

Эпюру моментов для заданной балки построим по выражению

$$M = M_F + M_1X_1 + M_2X_2.$$

Она показана на рис. 2.9, ж.

Понятно, что в общем случае, число удаляемых и дополнительных связей может быть большим.

Запишем систему уравнений (2.2) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad L\vec{X} + \vec{R}_F = 0. \quad (2.3)$$

Решение системы (2.3), записываемое в виде

$$\vec{X} = -L^{-1}\vec{R}_F, \quad (2.4)$$

возможно лишь в том случае, когда определитель матрицы  $L$  не равен нулю:

$$\text{Det } L \neq 0.$$

Значит, равенство нулю определителя,

$$\text{Det } L = 0,$$

служит признаком мгновенной изменяемости заданной системы.

## 2.4. Кинематический метод

Кинематический метод основан на использовании принципа возможных перемещений, который позволяет получить необходимые условия равновесия системы.

Возможными перемещениями системы называют любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых ее связями. Возможные перемещения, в отличие от действительных, не зависят от заданных внешних воздействий. Они определяются только типом самой системы и видом наложенных на систему связей, это чисто геометрические понятия.

Будем считать, что при переходе системы из действительного состояния в новое, вызванное возможными перемещениями, внешние и внутренние силы не меняются.

Работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях носит название возможной работы. С учетом введенных замечаний эта работа определяется как работа неизменных сил на возможных перемещениях.

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия деформируемой системы. Формулируется он так: **если система находится в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил, то при всяком возможном бесконечно малом перемещении точек этой системы сумма работ ее внешних и внутренних сил равна нулю.** Представим формальную запись этого принципа в виде:

$$W^{(возм)} + A_{внутр}^{(возм)} = 0, \quad (2.5)$$

где  $W^{(возм)}$  – возможная работа внешних сил,

$A_{внутр}^{(возм)}$  – возможная работа внутренних сил.

Вводя понятие степени свободы стержневой системы (п. 1.4) мы предполагали, что ее стержни являются абсолютно твердыми, недеформируемыми. Учитывая это, а также определение понятия о возможных перемещениях, надо отметить, что в исходном состоянии статически определимой системы ( $W = 0$ ) нельзя задавать возможные перемещения. Как же тогда применять принцип возможных перемещений к расчету таких систем?

Для использования этого принципа в задачах расчета статически определимых систем применяется основная аксиома механики несвободных материальных тел – принцип освобождаемости. Удалим какую-либо связь (опорную, или из числа тех, которые показаны на рис. 2.6) и приложим к системе, кроме заданных внешних сил, усилие  $S$ , которое могло бы возникнуть в удаленной связи. Такая система будет представлять собою механизм с одной степенью свободы ( $W = 1$ ) и, значит, допускает возможное новое положение, определяемое одним параметром. Ее равновесное состояние возможно только в том случае, если неизвестное усилие  $S$  в удаленной связи будет равно истинному значению.

Полученному механизму зададим возможное перемещение. Работа внутренних сил по всей длине недеформируемых элементов равна нулю. Рассматривая усилие в удаленной связи как внешнюю силу, уравнение возможных работ всех сил запишем в виде:

$$W^{(возм)} = S_i \delta_i + \sum F_k \Delta_k = 0, \quad (2.6)$$

где  $S_i$  – искомое усилие в связи  $i$ ,  $\delta_i$  – перемещение по его направлению;

$F_k$  –  $k$ -я обобщенная сила,  $\Delta_k$  – перемещение по направлению силы  $F_k$ .

Если направления силы и соответствующего ей перемещения совпадают, то работа положительна.

Так как расчет ведется по недеформированной схеме, то в системе с одной степенью свободы все перемещения  $\delta_i$  и  $\Delta_k$  выражаются через один параметр. Сократив каждое слагаемое уравнения (2.5) на этот параметр решим его относительно  $S_i$ .

Например, определяя реакцию  $V_B$  в опоре  $B$  двухпролетной статически определимой балки (рис. 2.10, а), удалим опорную связь в точке  $B$  и приложим в этой точке неизвестную силу  $V_B$ . Положение механизма с одной степенью свободы определяется одним параметром. В качестве этого параметра примем угол поворота балки  $AB$  (рис. 2.10, б). Так как  $\varphi$ , по определению, является бесконечно малым углом, то  $\Delta_1 = 2l\varphi$ ,  $\Delta_B = 4l\varphi$ ,  $\Delta_2 = 5l\varphi$ ,  $\Delta_3 = 5l\varphi$ .

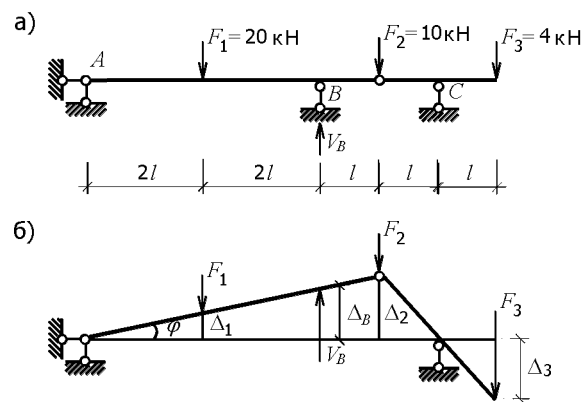


Рис. 2.10

Уравнение работ (2.5) запишется в виде:

$$W^{(возм)} = V_B 4l\varphi - F_1 2l\varphi - F_2 5l\varphi + F_3 5l\varphi = 0.$$

Решение его дает  $V_B = 17,5$  кН.

При определении усилия в стержне 1–2 шпренгельной балки (рис. 2.11, а) последовательность действий остается такой же, как и в предыдущем примере. После удаления в заданной балке стержня 1–2 получим механизм. Возможные перемещения механизму зададим следующим образом. Удерживая точку  $C$  неподвижной, переместим опору  $B$  по вертикали до поворота стержня  $CB$  на бесконечно малый угол  $\varphi$  (рис. 2.11, б). Рассматривая известную опорную реакцию  $V_B$  как внешнюю силу, составим уравнение возможных работ

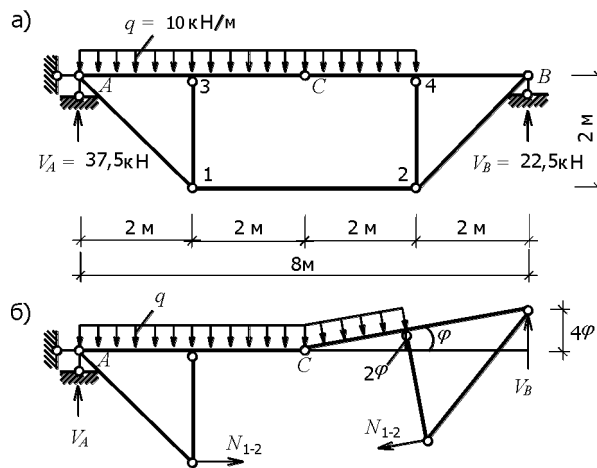


Рис. 2.11

Из уравнения возможных работ

$$-N_{1-2}2\varphi + V_B 4\varphi - q \frac{1}{2} 2 2\varphi = 0$$

найдем  $N_{1-2} = 35$  кН.

## 2.5. Общие сведения о многопролетных статически определимых балках и составных рамах

Многопролетные **статически определимые** балки представляют собой совокупность простых балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами.

Прежде чем начинать расчет многопролетной балки, необходимо убедиться в ее геометрической неизменяемости.

Кинематический анализ многопролетных балок выполняется по правилам, изложенным в теме 1. После проверки степени свободы по формуле (1.1) следует проанализировать схему взаимодействия простых балок в составе многопролетной (употребляется термин: выполнить анализ структуры системы). Для этого мысленно рассекаем многопролетную балку (рисунок 2.12, а) по шарнирам и анализируем каждую простую балку на подвижность. Балка АВ оказалась закрепленной тремя правильно расположенными связями, она является неподвижной. Ее называют главной или основной. Затем рассматривается состоянием примыкающей к ней справа балки CD, которая имеет собственную опорную связь вертикального направления в точке D. Шарнир, соединяющий балки в точке С, заменяем двумя связями и изображаем (рисунок 2.12, б) положение балки CD выше главной (силы тяжести передаются с верхней балки на нижнюю). Балку CD называют вспомогательной или второстепенной. Аналогично рассуждая, покажем положение верхней вспомогательной балки EF. Расчетная схема, показанная на рисунке 2.12, б, называется этажной.



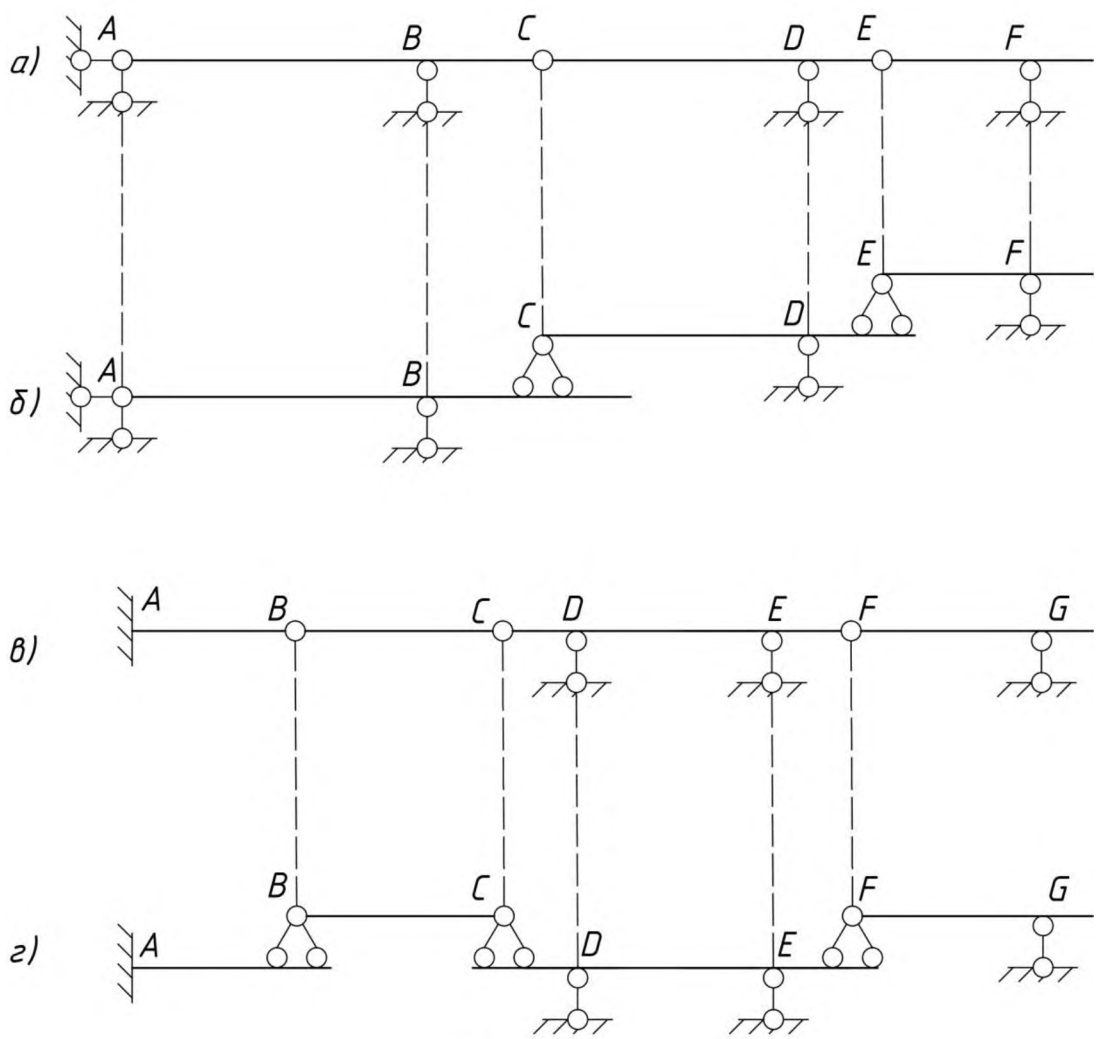


Рисунок 2.12

Этажные схемы для многопролетных балок могут быть разнообразными. В качестве примера на рисунке 2.12, г показана этажная схема для многопролетной балки на рисунке 2.12, в. На ней имеются две главные балки AB и DE, балки BC и FG — вспомогательные.

С помощью этажных схем устанавливается последовательность расчета многопролетной балки: вначале рассчитываются самые верхние вспомогательные балки, затем, с учетом сил взаимодействия (на нижние балки передается давление от верхних), нижерасположенные.

Пример. Выполним кинематический анализ и покажем последовательность построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в трехпролетной статически определимой балке (рисунок 2.13, а). Положение расчетных сечений на балке показано.

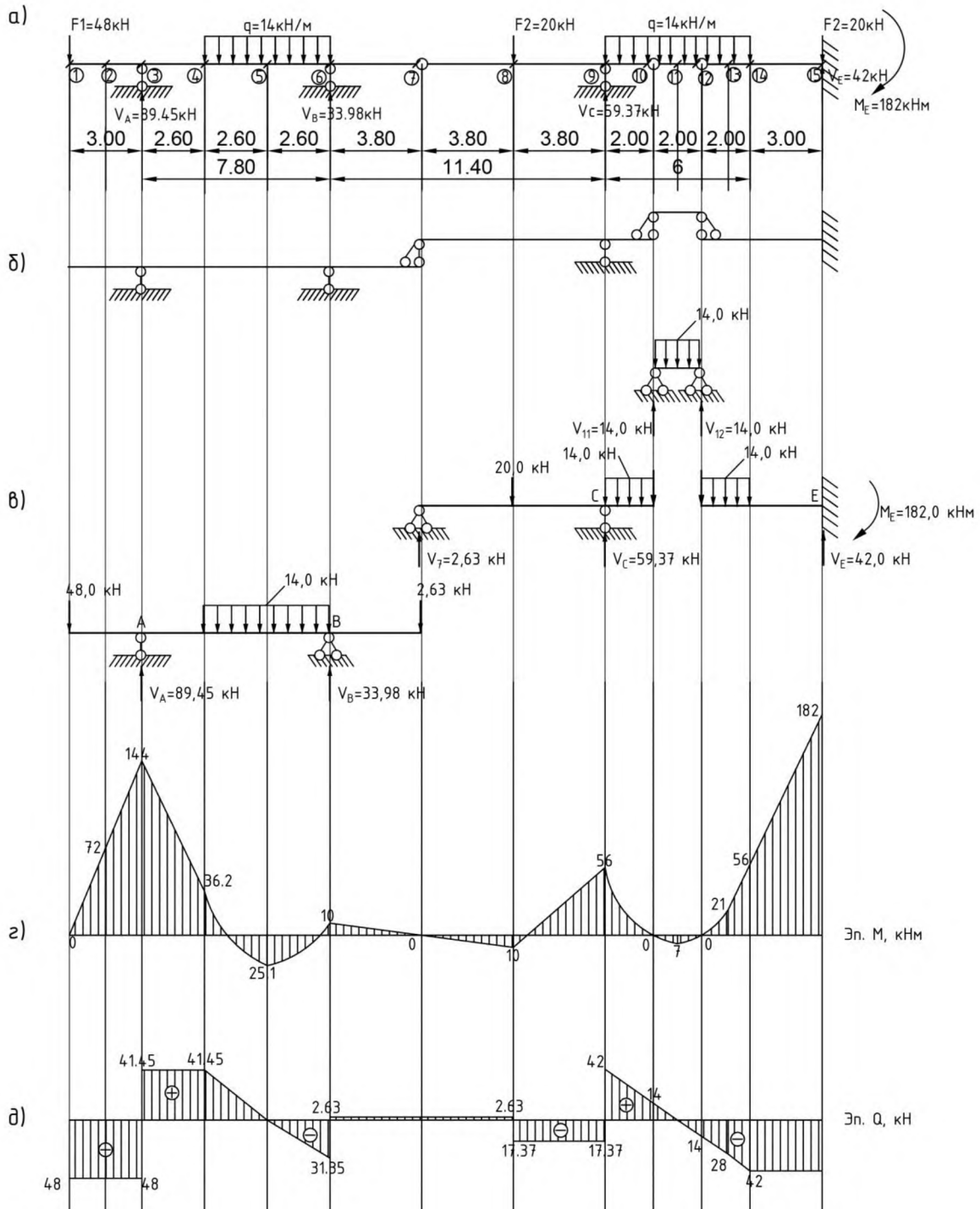


Рисунок 2.13

Степень свободы балки:  $W = 3D - 2Ш - C_{ОП} = 3 \times 4 - 2 \times 3 - 6 = 0$ .

Выполнив разбиение балки по сечениям 7, 10 и 12, замечаем, что в составе рассматриваемой балки имеются две главные: двухопорная балка АВ (ее длина от сечения 1 до сечения 7 равна 14.6 метра) и консольная балка длиной 5 метров от сечения 12 до защемления в точке Е. Консольная балка является неподвижной, на правом конце балки имеются три связи. Неподвижность балки АВ по горизонтали объясняется ее привязкой (с помощью недеформируемых балок на участке 7-12) к защемлению. Учитывая, что балка (ее можно назвать вставкой) на участке 10-12 не имеет собственной опоры, этажную схему формируем в соответствии с рисунком 2.13, б.

Определив опорные реакции и необходимые усилия в самой верхней (на этажной схеме) балке, следует, учитывая силы взаимодействия, передать давления на нижерасположенные балки и продолжить их расчет. Иллюстрацией к последовательности расчета отдельных балок является рисунок 2.13, в.

Эпюры усилий для отдельных балок, будучи расположенными на горизонтали в соответствии с положением балок на заданной схеме, образуют эпюры усилий для многопролетной балки (рисунок 2.13, г, д).

Пример. Для статически определимой составной рамы (рисунок 2.14, а) требуется выполнить кинематический анализ и построить эпюры усилий.

Выполним кинематический анализ рамы.

Степень свободы:  $W = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \times 3 - 2 \times 2 - 5 = 0$ .

Проверим правильность структуры рамы и найдем главную и вспомогательную части составной рамы. Рассекаем расчетную схему (рисунок 2.14, а) по шарнирам, соединяющим диски, и анализируем на подвижность каждой ее части. Выполнив сечение по шарниру К, замечаем, что каждая часть рамы (и левая и правая) является геометрически изменяемой схемой. Если же выполнить сечение по шарниру F, то левая часть рамы окажется геометрически неизменяемой, неподвижной: она является трехшарнирной рамой с правильно расположенными опорными связями. Ее называют главной или основной. Примыкающая к ней справа рама (ее называют вспомогательной или второстепенной) так же оказывается неподвижной, так как имеет собственную опорную связь в точке С, а в точке F с помощью шарнира соединяется с неподвижной рамой.

Далее соблюдается последовательность расчета, характерная для многопролетных статически определимых балок.

Определение опорных реакций для вспомогательной рамы:

$$\begin{aligned} \sum M_F = H_C \times 7.6 - 18 \times 7.6 \times 3.8 = 0; \quad H_C = 68.4 \text{ kH}. \\ \sum Y = V_F - 100 = 0; \quad V_F = 100 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Определение опорных реакций для основной рамы:

$$\begin{aligned} \sum M_K^{прав} = H_B \times 5.04 + V_B \times 3.1 - 68.4 \times 1.24 - 100 \times 6.3 = 0; \\ \sum M_A = V_B \times 6.2 - H_B \times 3.8 - 46 \times 3.1 \times 1.55 - 100 \times 9.4 + 68.4 \times 7.6 = 0; \\ H_B = 56.80 \text{ kH}; \quad V_B = 138.23 \text{ kH}. \\ \sum M_K^{лев} = H_A \times 8.84 - V_A \times 3.1 - 46 \times 3.1 \times 1.55 = 0; \\ \sum M_B = H_A \times 3.8 - V_A \times 6.2 + 46 \times 3.1 \times 4.65 - 100 \times 3.2 + 68.4 \times 3.8 = 0; \\ H_A = 11.60 \text{ kH}; \quad V_A = 104.37 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Проверка правильности определения опорных реакций для основной рамы:

$$\begin{aligned} \sum X = H_A + H_B - 68.4 = 11.60 + 56.80 - 68.4 = 0; \\ \sum Y = V_A + V_B - 46 \times 3.1 - 100 = 104.37 + 138.23 - 46 \times 3.1 - 100 = 0. \end{aligned}$$

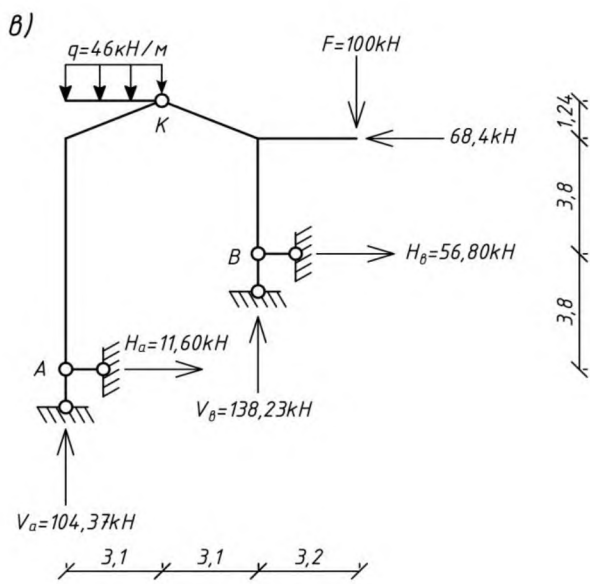
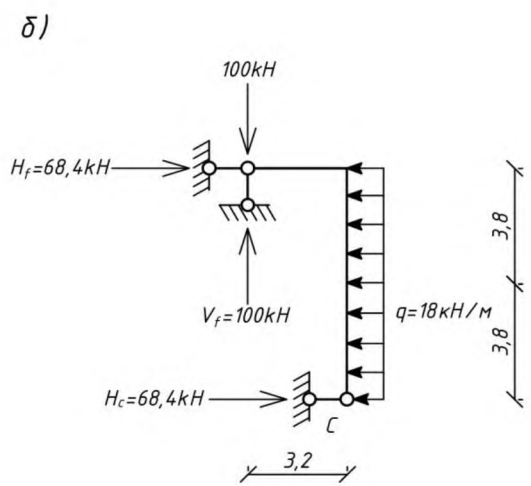
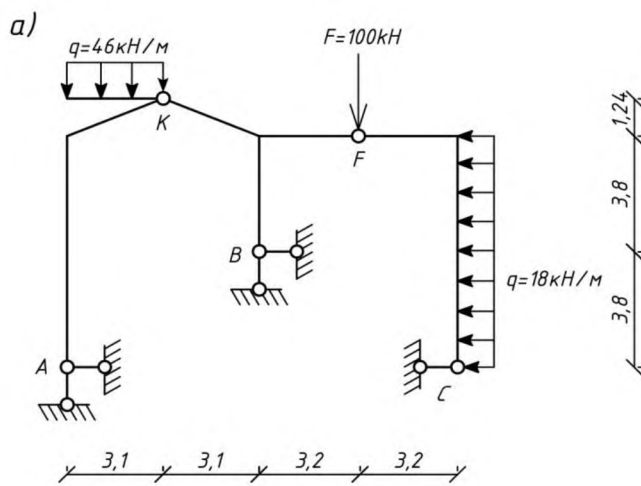


Рисунок 2.14

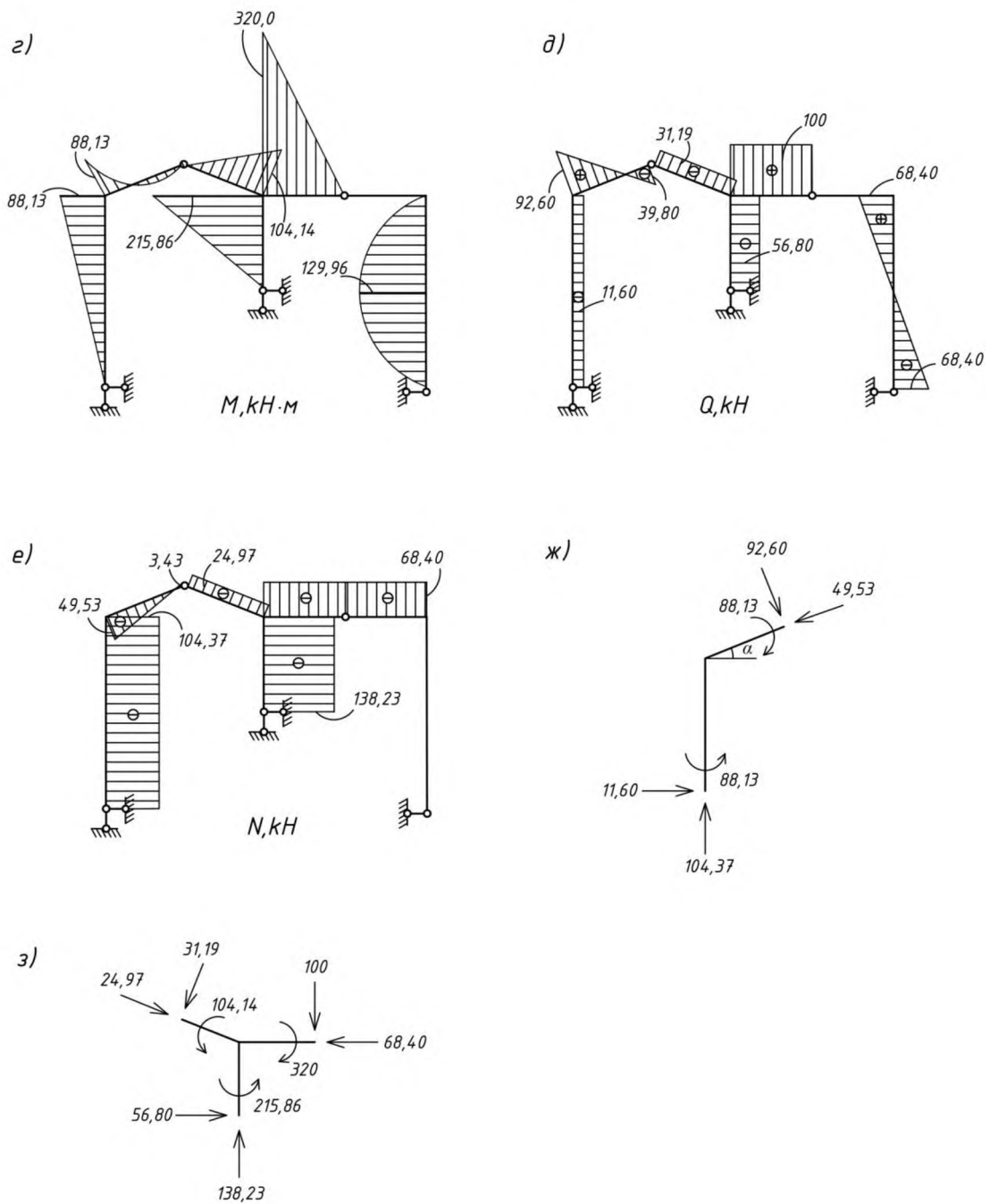


Рисунок 2.15

На рисунке 2.15 показаны эпюры изгибающих моментов ( $M$ ), поперечных ( $Q$ ) и продольных ( $N$ ) сил.

Проверка равновесия жестких узлов.

На **рисунке 2.15, ж** показаны усилия в стержнях в сечениях, примыкающих к узлу.

Составим уравнения равновесия всех сил (в данном случае только внутренних), действующих на узел.

$$\sum X = 0; 11.60 - 49.53 \times \cos \alpha + 92.60 \times \sin \alpha = 0; \cos \alpha = 0.9285; \sin \alpha = 0.3719;$$

$$\sum Y = 0; 104.37 - 49.53 \times \sin \alpha - 92.60 \times \cos \alpha = 0;$$

$$\sum M_{\text{центр узла}} = 0; 88.13 - 88.13 = 0.$$

Запишем уравнения равновесия сил, показанных на **рисунке 2.15, з**.

$$\sum X = 0; 56.80 - 68.40 - 31.19 \times \sin \alpha + 24.97 \times \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; 138.23 - 100 - 31.19 \times \cos \alpha - 24.97 \times \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_{\text{центр узла}} = 0; 104.14 + 215.86 - 320 = 0.$$

Чтобы проверить равновесие рамы в целом необходимо найти опорные реакции и составить необходимые уравнения равновесия. Практические действия сводятся к следующему: стержни рамы отсекаются от опорных закреплений; в сечениях стержней показываются усилия, численные значения которых берутся из построенных эпюр; записываются уравнения равновесия в любой из ранее перечисленных форм.

В рассматриваемом примере, после отсечения рамы от опорных закреплений (рисунок не демонстрируется), ограничимся двумя уравнениями:

$$\sum X = 0; -18 \times 7.6 + 11.60 + 68.40 + 56.80 = 0;$$

$$\sum Y = 0; -4.6 \times 3.1 - 100 + 104.37 + 138.23 = 0.$$

### ТЕМА 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ОТ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК

#### 3.1. Понятие о подвижной нагрузке.

##### Понятие о линиях влияния

В данной теме рассматриваются методы расчетов балочных систем на действие подвижных нагрузок.

Подвижными называют нагрузки, которые могут передвигаться по сооружению, не меняя направления действия. Подвижная нагрузка — это нагрузка от автомобильного и железнодорожного транспорта, нагрузка от мостовых кранов и др. Существует большое разнообразие таких нагрузок. Давление от таких нагрузок на балку (или другую конструкцию) может передаваться в виде сосредоточенных сил или может быть распределенным на какой-то площади (или длине, в случае плоских систем).

Разработать общую теорию расчета на все виды подвижных нагрузок — задача сложная. Силу тяжести, соответствующую подвижной нагрузке, также следует рассматривать как подвижную. Простейшей подвижной нагрузкой является единичная сосредоточенная сила  $F = 1$ . На основе знаний о влиянии этой силы на какой-либо фактор можно, используя принцип независимости действия сил, получить решение для любого числа сосредоточенных сил и распределенных по любому закону нагрузок.

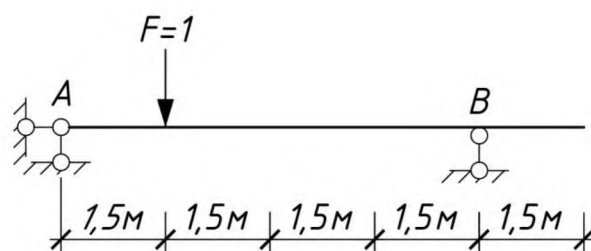


Рисунок 3.1

При передвижении силы  $F = 1$  по балке (рисунок 3.1) наблюдается перемещение всех ее точек. Если, например, сила будет расположена в точке  $x=1.5$  м, то перемещения характерных точек балки (их координаты записаны в левом столбце таблицы 3.1) будут равны значениям, указанным в таблице для  $x=1.5$  м. По этим значениям можно построить эпюру вертикальных перемещений точек балки. Она показана на рисунке 3.2. Эпюры перемещений балки при других положениях силы можно построить по соответствующим значениям перемещений характерных точек, используя данные таблицы 3.1.

Таблица 3.1

| Координата точки балки | Положение силы $F = 1$ на балке |           |           |           |
|------------------------|---------------------------------|-----------|-----------|-----------|
|                        | $x=1.5$ м                       | $x=3.0$ м | $x=4.5$ м | $x=7.5$ м |
| $x=0.0$ м              | 0                               | 0         | 0         | 0         |
| $x=1.5$ м              | -2.53                           | -3.09     | -1.97     | 2.11      |
| $x=3.0$ м              | -3.09                           | -4.50     | -3.09     | 3.38      |
| $x=4.5$ м              | -1.97                           | -3.09     | -2.53     | 2.95      |
| $x=6.0$ м              | 0                               | 0         | 0         | 0         |
| $x=7.5$ м              | 2.11                            | 3.38      | 2.95      | -5.63     |

Замечание: 1. Для всех перемещений применить общий множитель  $1/EI$

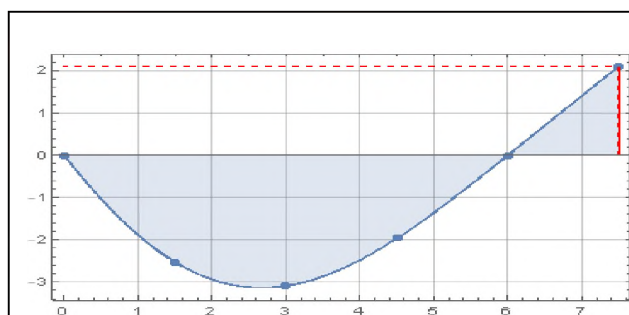


Рисунок 3.2. Эпюра вертикальных перемещений точек балки от  $F=1$ , приложенной в точке  $x=1.5$  м.

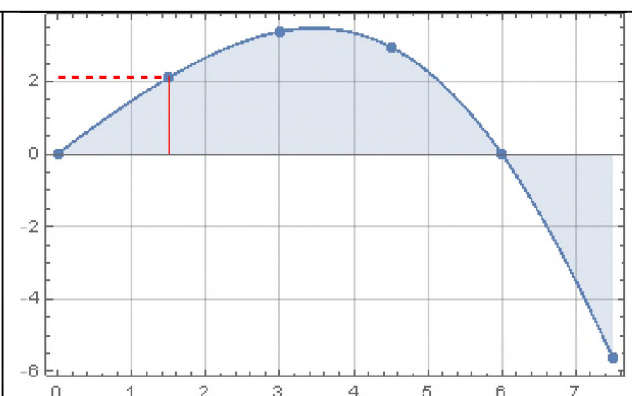


Рисунок 3.3. Линия влияния вертикального перемещения точки балки с координатой  $x=7.5$  м.

Используя значения перемещений в последней строке таблицы, построим график перемещений точки на конце балки ( $x=7.5$  м) при всех возможных положениях силы  $F=1$  (рисунок 3.3). Такой график называют линией влияния перемещения точки с координатой  $x=7.5$  м. Выполняя аналогичные рассуждения, можно построить линии влияния усилий ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ), напряжений в каких-то сечениях балки и др.

**Определение.** Линия влияния (инфлюэнта) — график зависимости какой-либо величины (усилия, перемещения и т. п.) в заданном сечении элемента конструкции от точки приложения подвижной единичной силы постоянного направления.

Отметим различия в понятиях «линия влияния усилия» и «эпюра усилий».

*Эпюра усилий* — это график усилий во всех сечениях конструкции от приложенной к ней неподвижной нагрузки. *Линия влияния* усилия показывает усилие только в одном, фиксированном сечении конструкции от подвижной единичной силы.

### 3.2. Статический метод построения линий влияния усилий

Изложенный ранее способ построения линии влияния требует большого числа расчетов балки. Более практичным является способ, при котором исследуемая величина (в предыдущем примере — перемещение) записывается в виде функции от положения единичной силы. Эту зависимость можно получить из уравнений равновесия твердого тела (уравнений статики). Соответствующий способ построения линий влияния называют статическим.

#### 3.2.1. Линии влияния опорных реакций в простой балке

Покажем построение линий влияния усилий в однопролетной балке (рисунок 3.4, а). Примем начало координатных осей в точке А. Ось Х направим вдоль оси балки, ось Y — вверх. Положение силы  $F=1$  определяется координатой  $x$ . По оси Y будем откладывать значение исследуемого фактора.

Записав уравнение моментов всех сил относительно точки В, получим выражение, устанавливающее зависимость опорной реакции от положения силы:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; V_A l - F(l - x) = 0; \\ V_A = \frac{F(l - x)}{l} \end{aligned} \quad (3.1)$$



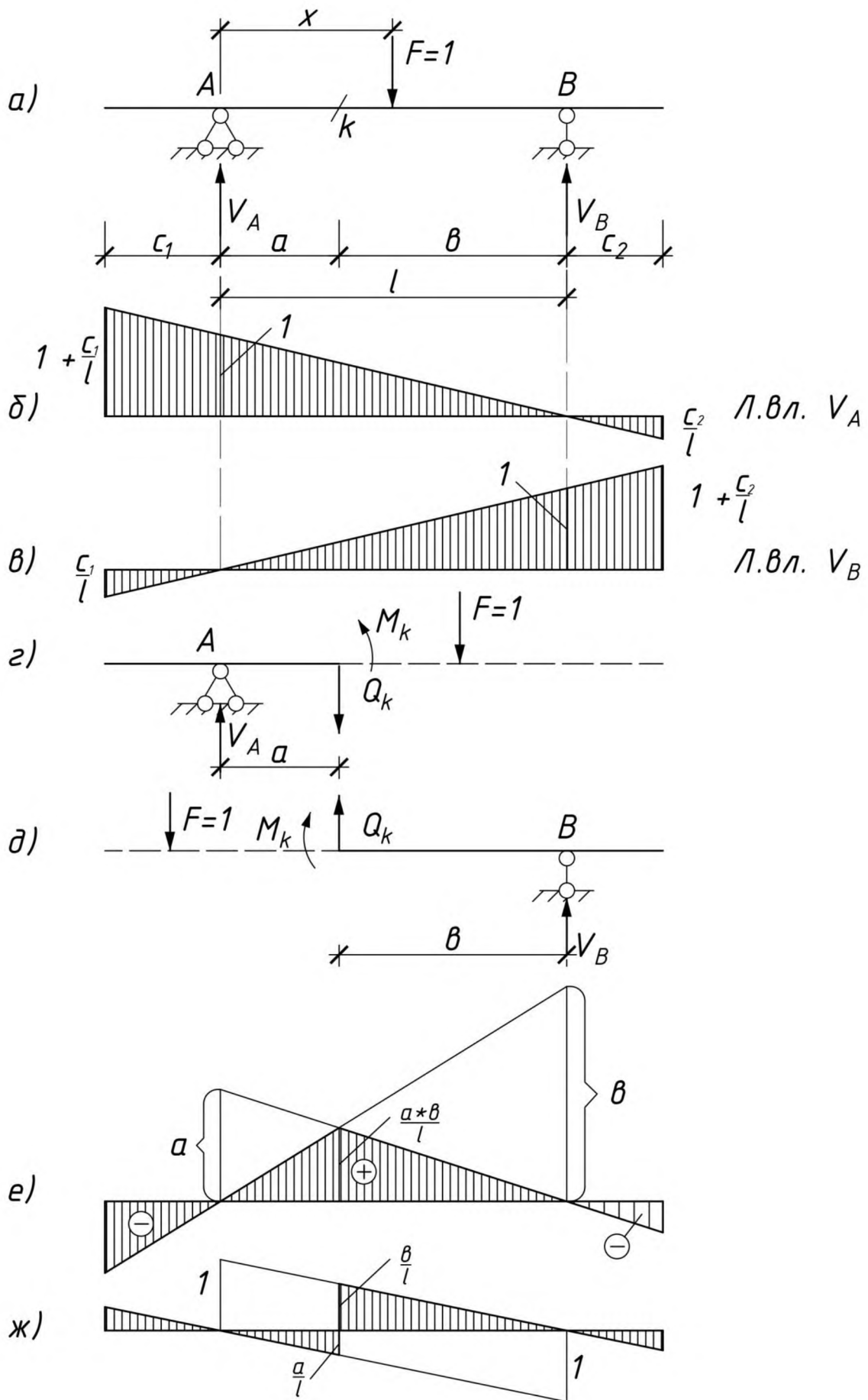


Рисунок 3.4

Изобразив эту зависимость графически, получим линию влияния опорной реакции  $V_A$  (рисунок 3.4, б).

Выражение (1.1) суть уравнение прямой линии. Для построения прямой на плоскости достаточно знать положение двух точек, через которые она проходит. Найдем их, принимая  $F=1$ .

При  $x = 0$  (сила расположена над опорой А) из формулы (3.1) следует  $V_A = 1$ ;

при  $x = l$  (сила расположена над опорой В) получим  $V_A = 0$ .

Прямая линия, проведенная через эти две точки, представляет искомую линию влияния опорной реакции  $V_A$  (рисунок 3.4, б).

В этом примере и во всех последующих положительные ординаты линии влияния откладываются вверх (в направлении оси  $Y$ ).

Определимся с размерностью ординат линии влияния опорной реакции. Если в выражении (1.1) принять  $F=1$ , то правая часть уравнения запишется так:

$$\frac{(l-x)}{l} \quad (3.2)$$

Переход от записи правой части уравнения (3.1) к записи правой части в виде (3.2) означает деление левой и правой частей уравнения (3.1) на  $F$ . В таком случае уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{V_A}{F} = \frac{l-x}{l} \quad (3.3)$$

Запись слева от знака равенства указывает на размерность ординат линии влияния опорной реакции как производную от размерностей силовых факторов. Размерность опорной реакции  $V_A$  и силы  $F$  — кН. Следовательно, ординаты линии влияния опорной реакции не имеют размерности, безразмерные.

Анализируя приведенные рассуждения относительно размерности ординат, получаем:

$$[\text{размерность ординат линий влияния усилия}] = \frac{[\text{размерность искомой величины}]}{[\text{размерность силы}]}$$

Единичная ордината в точке А — масштаб построения графика (отрезок любой длины принимается равным единице).

Записав уравнение моментов всех сил относительно точки А, получим выражение для определения опорной реакции  $V_B$ .

$$\sum M_A = 0; V_B l - Fx = 0; \quad V_B = \frac{Fx}{l} \quad (3.4)$$

Для построения прямой найдем положение двух точек, через которые она проходит. Принимая  $F=1$ , получим:

При  $x = 0$  (сила расположена над опорой А) из формулы (3.1) следует  $V_B = 0$ ;

при  $x = l$  (сила расположена над опорой В) получим  $V_B = 1$ .

Линия влияния опорной реакции  $V_B$  показана на рисунке 3.4, в

### 3.2.2. Линии влияния усилий в сечениях между опорами балки

Расчетная схема балки показана на рисунке 3.4, а. Сечение  $k$  на балке зафиксировано. При передвижении по балке силы  $F=1$  усилия в сечении  $k$  будут меняться. Аналитические зависимости усилий в этом сечении зависят от положения силы, справа от сечения  $k$  она

располагается или слева. Поэтому определяя усилие в сечении, необходимо знать, где располагается сила. Уравнения равновесия получаются более простыми, если при составлении их рассматривать ту часть балки, на которой нет силы.

Построим сначала линию влияния **изгибающего момента** в сечении  $k$ .

1. Сила  $F=1$  располагается справа от сечения  $k$  ( $a \leq x \leq l+c_2$ ).

Из уравнений равновесия левой части балки (рисунок 3.4, г) следует:

$$\sum M_k^{лев} = 0; V_A a - M_k = 0; M_k = V_A a; V_A = \frac{l-x}{l}; M_k = \frac{l-x}{l} a.$$

Линия влияния  $M_k$  на правой части балки имеет вид прямой. Зададим для  $x$  значения из интервала ( $a \leq x \leq l$ ):

$$x = a, M_k = \frac{l-a}{l} a = \frac{ab}{l};$$

$$x = l, M_k = 0.$$

Построенная по этим точкам прямая продляется на консоль, длина которой равна  $c_2$ . (рисунок 3.4, е). Штриховка (вертикальная) выполняется **на участке ( $a \leq x \leq l+c_2$ )**.

2. Сила  $F=1$  располагается левее сечения  $k$  ( $-c_1 \leq x \leq a$ ).

Из уравнений равновесия правой части балки (рисунок 3.4, д) следует:

$$\sum M_k^{прав} = 0; V_B b - M_k = 0; M_k = V_B b; V_B = \frac{x}{l}; M_k = \frac{x}{l} b.$$

Построим прямую линию.

$$x = 0, M_k = 0;$$

$$x = a, M_k = \frac{ab}{l};$$

Построенная по этим точкам прямая продляется на консоль, длина которой равна  $c_1$ . (рисунок 3.4, е). Штриховка (вертикальная) выполняется **на участке ( $-c_1 \leq x \leq a$ )**.

$$[\text{размерность ординат л. вл. изгибающего момента}] = \frac{[\text{кНм}]}{[\text{кН}]} = \text{м}.$$

*Замечание 1.* Формулу  $M_k = V_A a$  можно читать так: л. вл.  $M_k = (\text{л. вл. } V_A) a$ .

2. Анализ формы л. вл.  $M_k$  показывает, что на вертикалях, проходящих через опорные точки, наклонные прямые отсекают отрезки равные расстояниям от опор до сечения  $k$ .

3. Вершина линии влияния располагается под сечением  $k$ .

Построим линию влияния **поперечной силы** в сечении  $k$ .

1. Сила  $F=1$  располагается справа от сечения  $k$  ( $a \leq x \leq l$ ).

Из уравнений равновесия левой части балки (рисунок 3.4, г) следует:

$$\sum Y^{лев} = 0; V_A - Q_k = 0; Q_k = V_A; Q_k = \frac{l-x}{l}.$$

Линию влияния  $Q_k$  на участке положения силы можно строить, используя л. вл.  $V_A$ , или по положению точек, через которые проходит прямая.

2. Сила  $F=1$  располагается левее сечения  $k$  ( $0 \leq x \leq a$ ).

Из уравнений равновесия правой части балки (рисунок 3.4, д) следует:

$$\sum Y^{прав} = 0; V_B + Q_k = 0; Q_k = -V_B; Q_k = -\frac{x}{l}.$$

Линия влияния  $Q_k$  показана на рисунке 3.4, ж.

[размерность *ординат* л. вл. поперечной силы] =  $\frac{[\text{кН}]}{[\text{кН}]}$  — ординаты безразмерные.

### 3.2.3. Линии влияния усилий в сечениях консольной балки

Расчетная схема балки показана на рисунке 3.5, а.

Построим линии влияния **изгибающего момента и поперечной силы** в сечении  $k$ .  
Начало координат разместим в сечении  $k$ .

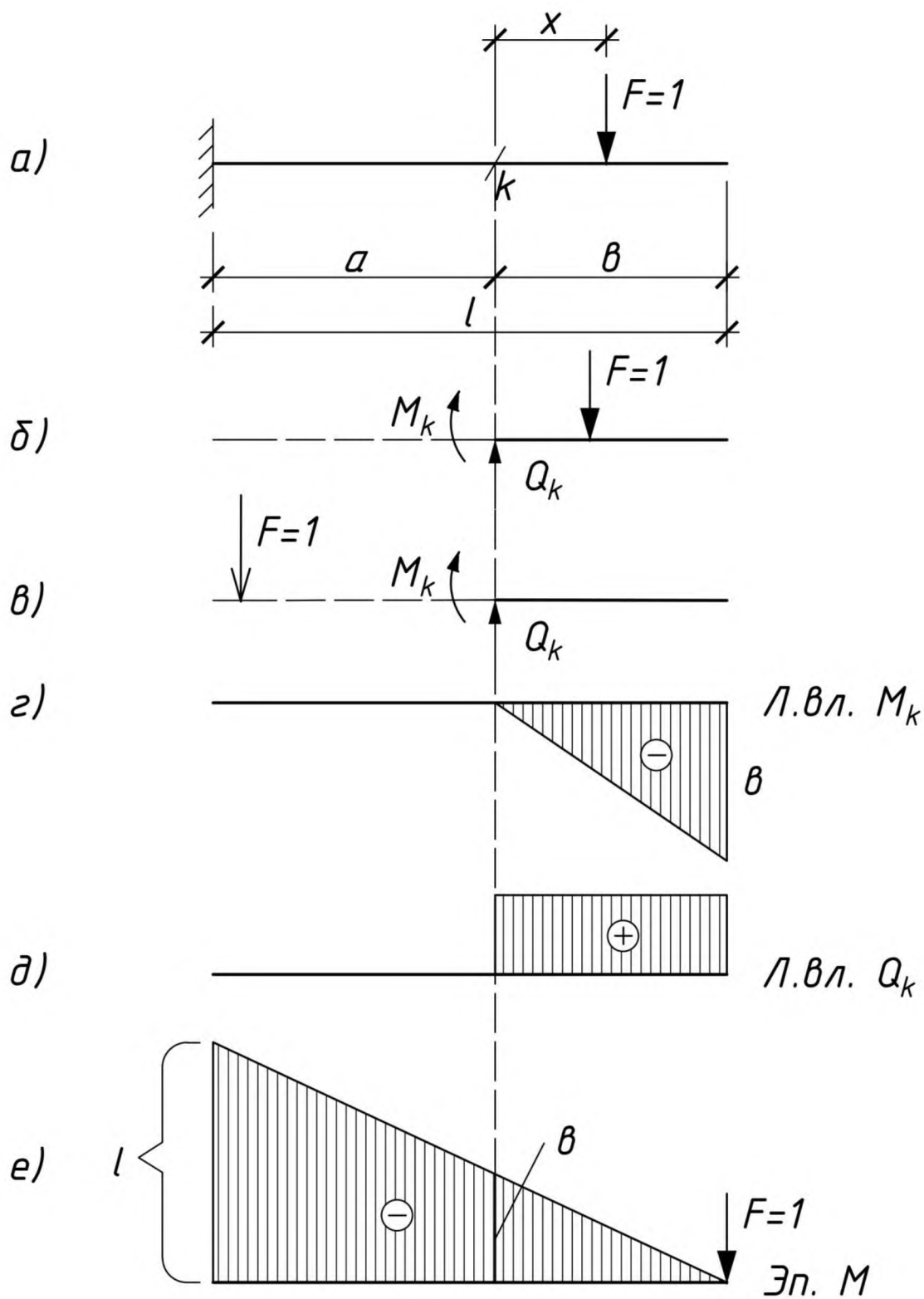


Рисунок 3.5

1. Сила  $F=1$  располагается **справа** от сечения  $k$  ( $0 \leq x \leq b$ ).

Из уравнений равновесия **правой** части балки (рисунок 3.4, г) следует:

$$\sum M_k^{npas} = 0; \quad M_k + Fx = 0; \quad M_k = -Fx; \quad M_k = -x.$$

$$\sum Y^{npas} = 0; \quad Q_k - F = 0; \quad Q_k = F; \quad Q_k = 1.$$

При  $x = 0$  (сила расположена в сечении  $k$ )  $M_k = 0$ ,  $Q_k = 1$ ;  
 при  $x = b$  (сила расположена на конце консоли)  $M_k = -l$ ,  $Q_k = 1$ .

2. Сила  $F=1$  располагается левее сечения  $k$  ( $-a \leq x \leq 0$ ).

**Правая** часть балки (рисунок 3.5, в) не нагружена, поэтому  $M_k = 0$ ,  $Q_k = 0$ .

Линии влияния усилий показаны на рисунках 3.5, г, д.

Еще раз обратим внимание на взаимосвязь понятий «линия влияния усилия» и «эпюра усилий». На рисунке 3.5, е показана эпюра изгибающих моментов от силы  $F=1$ , приложенной на конце консоли. Ордината на эпюре в сечении  $k$  равна ординате линии влияния  $M_k$  на конце консоли (рисунок 3.5, е).

### 3.3. Кинематический метод построения линий влияния усилий

Кинематический метод построения линий влияния основан на использовании **принципа возможных перемещений** (раздел 2.4), в соответствии с которым для системы, находящейся в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил, сумма работ ее внешних и внутренних сил на любых возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю.

Рассмотрим расчетную схему простой балки (рисунок 3.6, а).

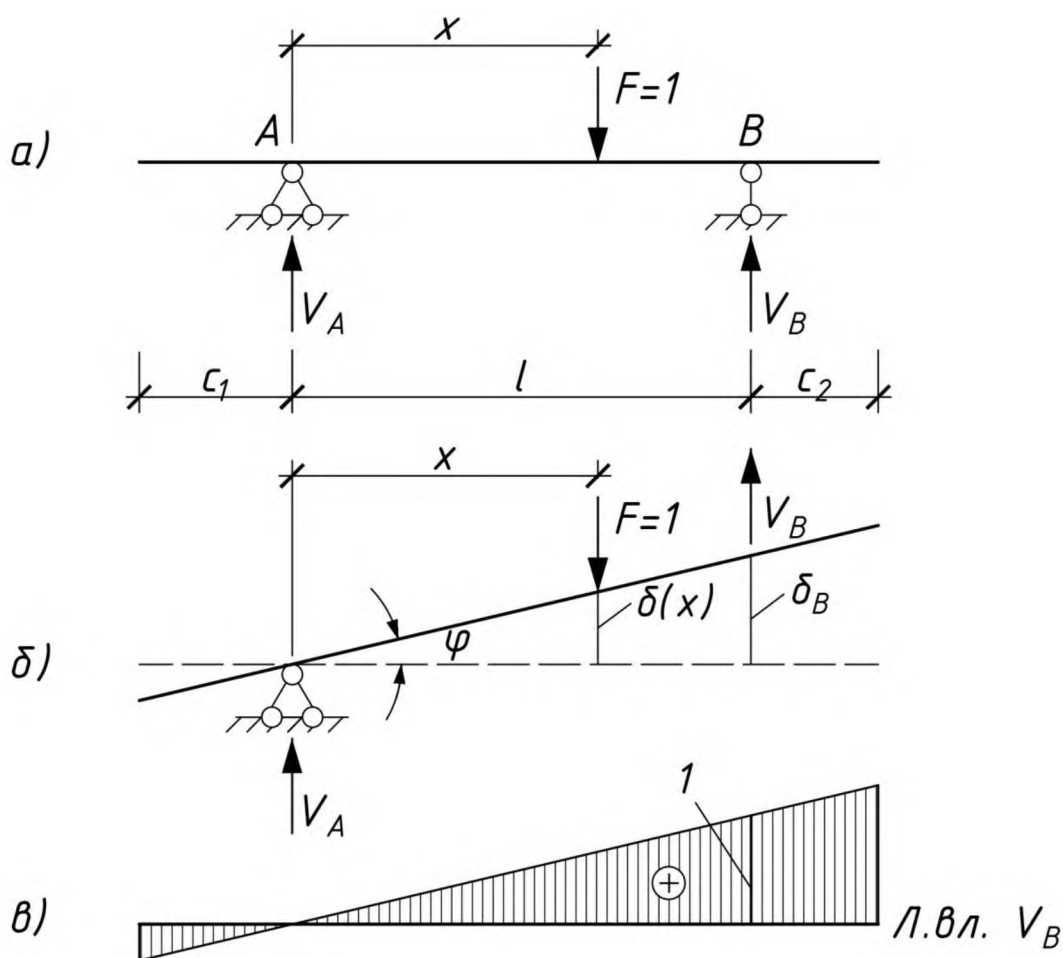


Рисунок 3.6

Построим **линию влияния опорной реакции**  $V_B$ .

Отбросим правую опору, заменив ее действие реакцией  $V_B$  (рисунок 3.6, б). Полученная система превратилась в механизм. За возможные перемещения примем перемещения, вызванные поворотом балки вокруг точки А, на угол  $\varphi$  (рисунок 3.6, б). Запишем сумму работ сил, действующих на систему, на рассматриваемых бесконечно малых перемещениях:

$$-F\delta(x) + V_B\delta_B = 0.$$

Из уравнения получим:

$$V_B = \frac{F\delta(x)}{\delta_B}. \quad (3.5)$$

При изменении положения силы  $F=1$  будет изменяться и соответствующее ей перемещение  $\delta(x)$ . В таком случае все возможные значения  $\delta(x)$  по длине балки показывают эпюру вертикальных перемещений точек балки. Знаменатель в формуле (3.5) — константа.  $\delta_B$  — масштабный коэффициент. Приняв  $\delta_B$  равным единице, получим:

$$V_B = \delta(x). \quad (3.6)$$

Следовательно, очертание **линии влияния**  $V_B$  **совпадает с эпюрой вертикальных перемещений** точек балки (рисунок 3.6, в).

Из соотношений ординат на рисунок 3.6, б получаем  $\frac{\delta(x)}{\delta_B} = \frac{x}{l}$ , что при  $F=1$  соответствует выражению (3.4), полученному статическим методом.

Построим **линию влияния изгибающего момента** в сечении  $k$ .

Расчетная схема балки показана на рисунке 3.7, а. Отбросим в сечении  $k$  связь, через которую передается момент (введем шарнир), заменив ее действие моментом  $M_K$  (рисунок 3.7, б). На рисунке показаны силы взаимодействия левой и правой частей балки. Полученному механизму зададим возможные перемещения по направлению действия моментов  $M_K$ , приняв угол взаимного поворота торцевых сечений равным единице. Ординаты между начальным положением балки и новым (ломаным) образуют **эпюру перемещений** балки (рисунок 3.7, б).

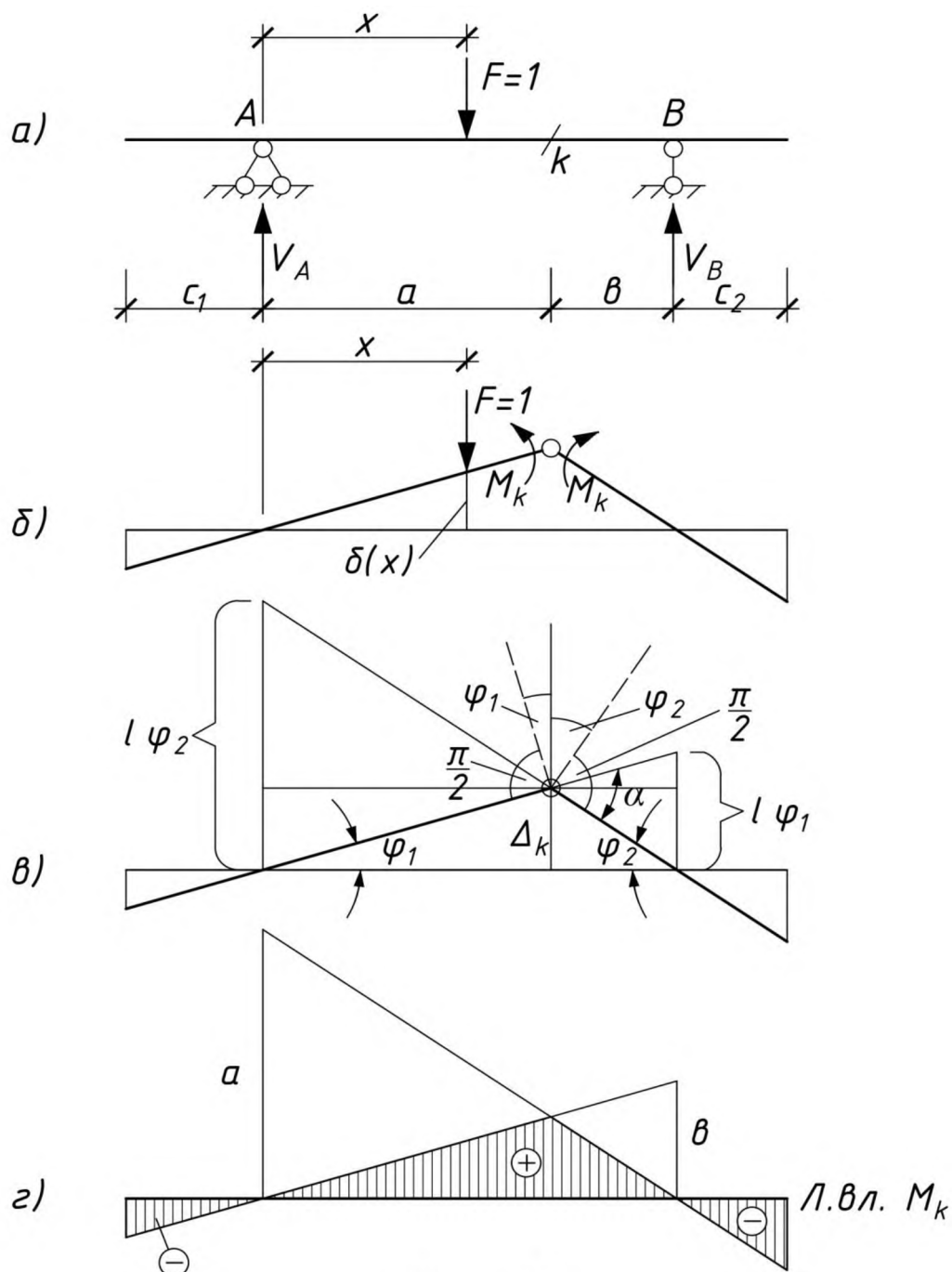


Рисунок 3.7

Возможная работа внешних и внутренних сил на принятых перемещениях балки равна нулю:

$$-F\delta(x) + M_K 1 = 0.$$

При  $F=1$  получим  $M_K = \delta(x)$ , что соответствует ранее приведенному заключению: **линии влияния  $M_K$**  (рисунок 3.7, г) **совпадает с эпюрой вертикальных перемещений** точек балки.

Используя обозначения, приведенные на рисунке 3.7, в, покажем, что она в точности совпадает с линией влияния  $M_K$ , построенной ранее статическим методом (рисунок 3.4, е).

Возможные перемещения, по сути, являются бесконечно малыми. Поэтому при анализе соотношений на рисунке 3.7, в можно использовать упрощения вида:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \approx \varphi_1; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 \approx \varphi_2.$$



Из данных на рисунке 3.7, в, при условии  $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 = 1$ , получаем:

$$l\varphi_1 = b\varphi_2 + b\varphi_1; \quad l\varphi_1 = b; \quad \varphi_1 = \frac{b}{l}; \quad \Delta_k = a\varphi_1 = \frac{ab}{l}.$$

$$l\varphi_2 = a\varphi_1 + a\varphi_2; \quad l\varphi_2 = a; \quad \varphi_2 = \frac{a}{l}; \quad \Delta_k = b\varphi_2 = \frac{ab}{l}.$$

Ордината линии влияния в сечении  $k$  равна ординате, полученной статическим методом (рисунок 3.4, е).

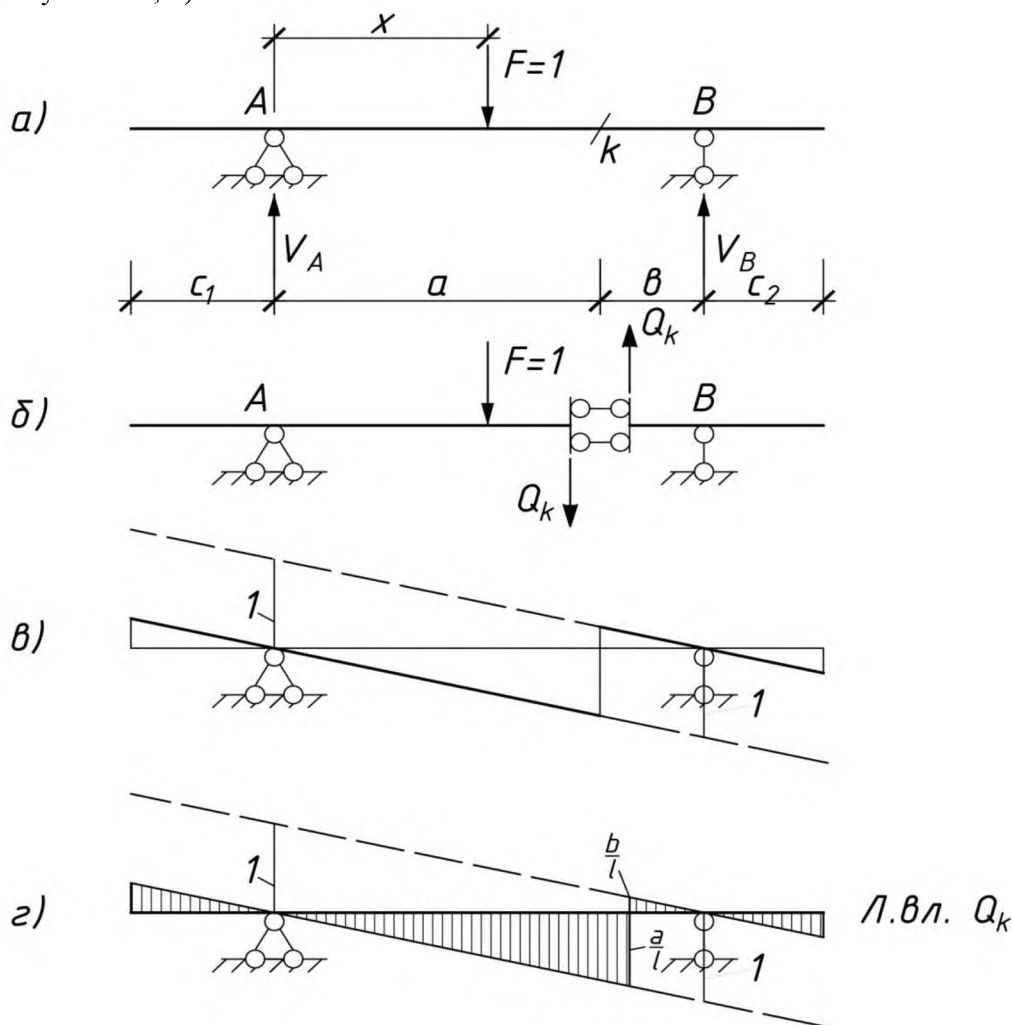


Рисунок 3.8

Построим **линию влияния поперечной силы** в сечении  $k$  (рисунок 3.8, а).

Удалим в этом сечении связь, в которой может возникнуть поперечная сила.

Соединение левой и правой частей балки после этого осуществляется посредством двух горизонтально расположенных связей, через которые могут передаваться продольные силы и изгибающие моменты. На вновь образованной расчетной схеме покажем в сечении положительные направления поперечных сил для обеих частей балки (рисунок 3.8, б). Задав взаимное смещение концов балки по направлениям поперечных сил равным единице, получим **эпюру перемещений** балки (рисунок 3.8, в), очертание которой полностью соответствует линии влияния поперечной силы (рисунок 3.8, г).

### 3.4. Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния

По определению, каждая из ординат л. вл.  $S$  представляет собой значение усилия  $S$  при положении силы  $F=1$  на балке над этой ординатой. Если над ординатой будет

расположена не единичная сила, а сила, значение которой равно  $F$ , то усилие от ее действия будет в  $F$  раз больше, т. е. усилие  $S$  будет равно произведению силы  $F$  на ординату линии влияния усилия под этой силой:  $S = Fy$ .

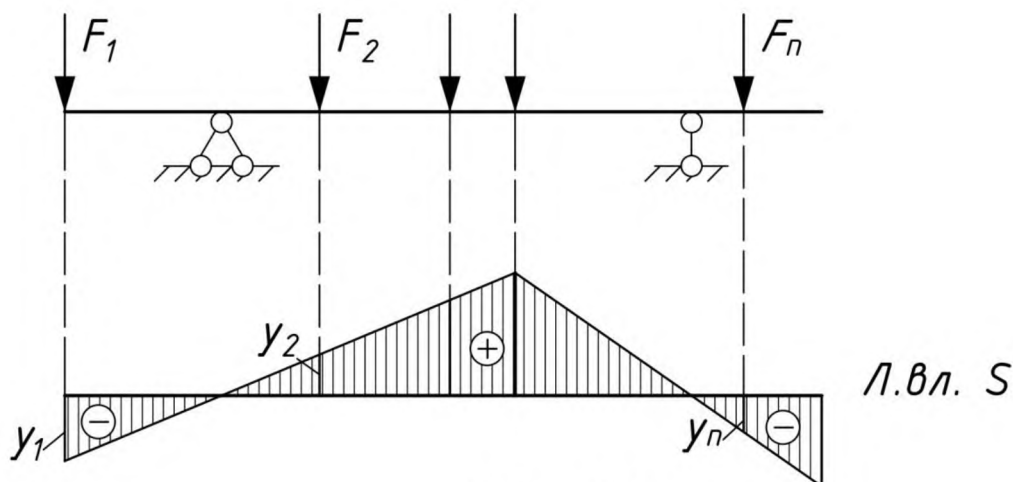


Рисунок 3.9

Если на балку, будет действовать  $n$  **сосредоточенных** вертикальных **сил** (рисунок 3.9), то на основании принципа суперпозиции усилие  $S$  следует вычислять по формуле:

$$S = F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_iy_i \quad (3.7)$$

В этом выражении значение силы, направленной вниз, принимается со знаком «плюс», направленной вверх — «минус».

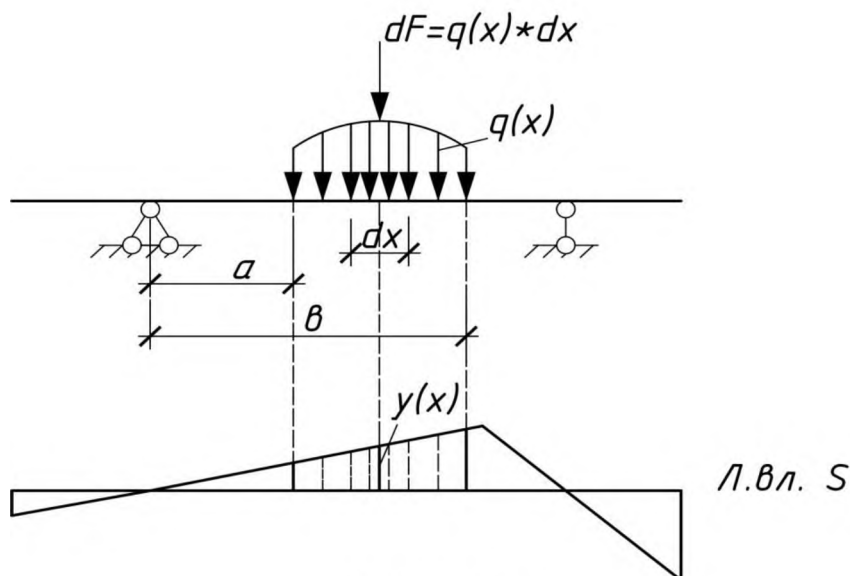


Рисунок 3.10

Рассмотрим нагружение балки **распределенной** по произвольному закону **нагрузкой**  $q(x)$ , (рисунок 3.10, а). Выделим на этой балке участок бесконечно малой длины  $dx$ . Сосредоточенная сила, заменяющая на этом участке распределенную нагрузку, равна  $dF = q(x)dx$ . (рисунок 3.10, а). Элементарное усилие  $dS$  от действия силы  $dF$  равно:

$$dS = dFy = q(x)y(x)dx.$$

Проинтегрировав это выражение по длине участка нагружения, найдем:

$$S = \int_a^b q(x)y(x)dx \quad (3.8)$$

Если на балку действует **равномерно распределенная нагрузка**  $q(x) = q$  (рисунок 3.10, б), то

$$S = \int_a^b qy(x)dx = q \int_a^b y(x)dx = q\omega. \quad (3.9)$$

Здесь  $\omega$  — площадь линии влияния  $S$  на участке действия равномерно распределенной нагрузки. На рисунке 3.10, б площадь  $\omega$  выделена штриховкой. Следует иметь в виду, что ординаты линий влияния, расположенные выше оси балки, положительные, ниже — отрицательные. Площадь ниже оси отрицательная.

Рассмотрим действие на балку **сосредоточенного момента**  $M$  (рисунок 3.11).

Заменим

момент парой сил  $F$  с плечом  $\Delta x$ :  $F = \frac{M}{\Delta x}$ . По формуле (3.7) найдем:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -\frac{M}{\Delta x} y + \frac{M}{\Delta x} (y + \Delta y) \right] = M \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{y + \Delta y}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta x} \right] = M \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = M \frac{dy}{dx}. \quad (3.10)$$

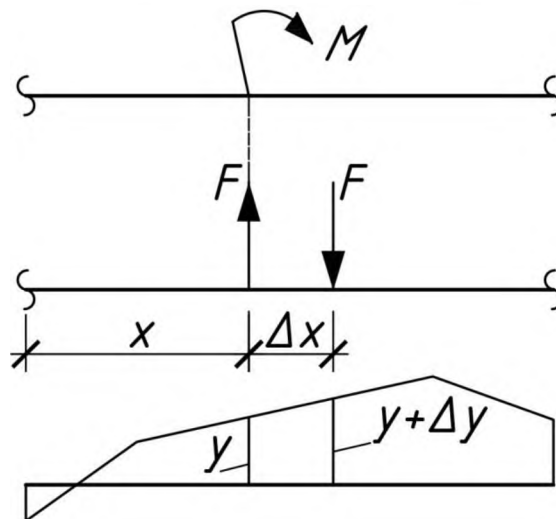


Рисунок 3.11

Момент, направленный по ходу часовой стрелки, считается положительным. Значение производной от функции, описывающей очертание линии влияния, вычисляется в точке приложения сосредоточенного момента.

На прямолинейном участке линии влияния вычисление усилия  $S$  окажется более простым действием, если сосредоточенный момент заменить парой сил на любой длине этого участка.

При одновременном действии на балку всех рассмотренных силовых факторов (сосредоточенных сил, распределенной нагрузки, сосредоточенного момента) усилие  $S$ , на основании принципа суперпозиции, вычисляется посредством суммирования результатов от каждого фактора в отдельности.

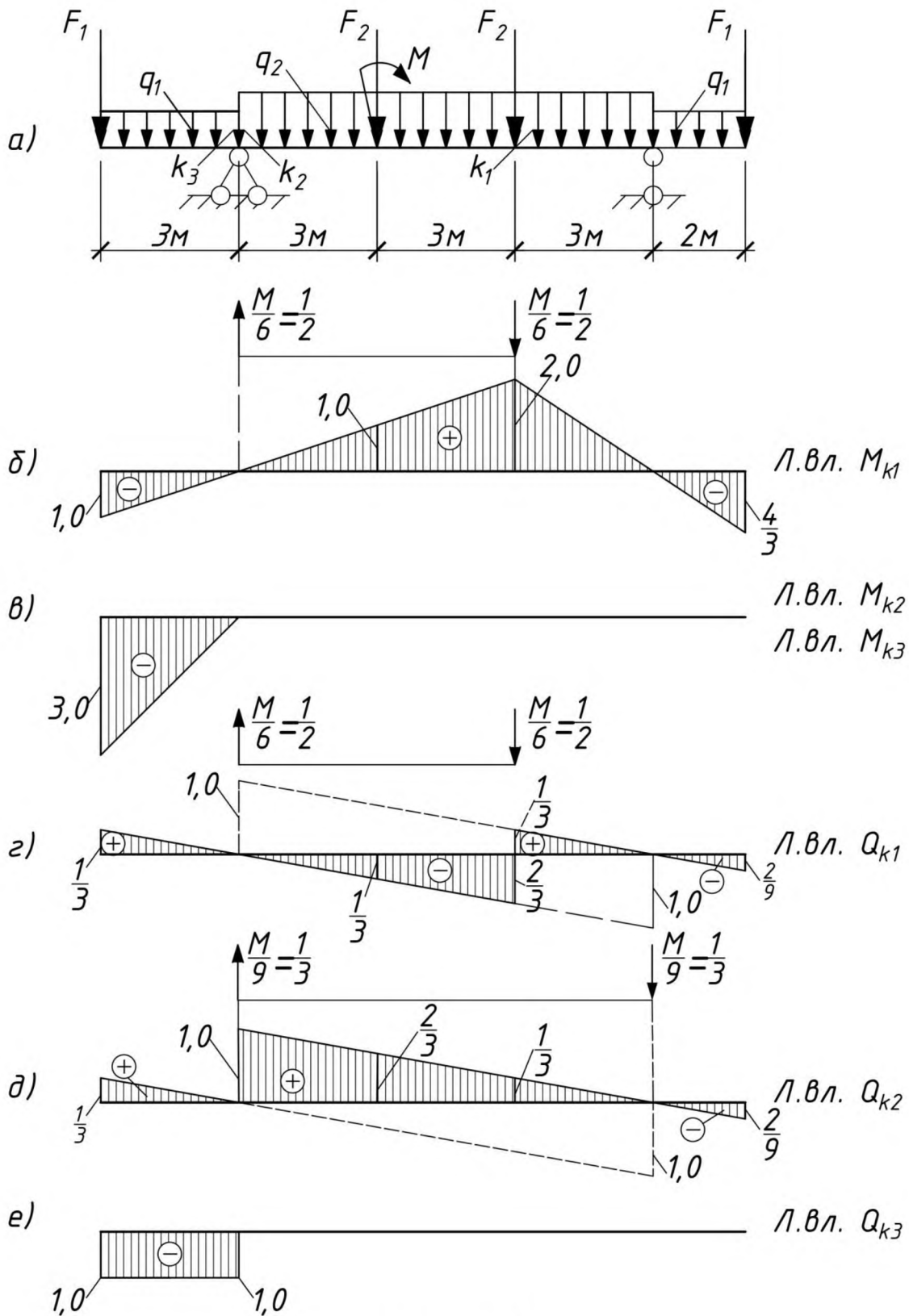


Рисунок 3.12

Пример 3.1. С помощью линий влияния определить изгибающие моменты и поперечную силу в сечениях  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  балки (рисунок 3.12,а) при следующих данных:  $F_1 = 4\text{кН}$ ;  $F_2 = 10\text{кН}$ ;  $q_1 = 2\text{кН/м}$ ;  $q_2 = 5\text{кН/м}$ ;  $M = 3\text{кНм}$ . Сечение  $k_2$  расположено бесконечно близко к опоре А справа, сечение  $k_3$  — бесконечно близко к опоре А слева.

Линии влияния усилий показаны на рисунках 3.12, б...3.12, е.

Находим усилия:

$$M_{k_1} = 4 \times (-1) + 4 \times (-4/3) + 10 \times 1 + 10 \times 2 + 2 \times (-1/2 \times 1 \times 3) + 2 \times (-1/2 \times 2 \times 4/3) + 5 \times 1/2 \times 2 \times 9 - 1/2 \times 0 + 1/2 \times 2 = 61 \text{ кНм};$$

$$M_{k_2} = M_{k_3} = 4 \times (-3) + 2 \times (-1/2 \times 3 \times 3) = -21 \text{ кНм};$$

$$Q_{k_1}^{лев} = 4 \times 1/3 + 4 \times (-2/9) + 10 \times (-1/3) + 10 \times 1/3 + 2 \times (1/2 \times 1/3 \times 3) + 2 \times (-1/2 \times 2/9 \times 2) + 5 \times (-1/2 \times 2/3 \times 6 + 1/2 \times 1/3 \times 3) - 1/2 \times 0 + 1/2 \times (-2/3) = -6.833 \text{ кН};$$

$$Q_{k_1}^{прав} = 4 \times 1/3 + 4 \times (-2/9) + 10 \times (-1/3) + 10 \times (-2/3) + 2 \times (1/2 \times 1/3 \times 3) + 2 \times (-1/2 \times 2/9 \times 2) + 5 \times (-1/2 \times 2/3 \times 6 + 1/2 \times 1/3 \times 3) - 1/2 \times 0 + 1/2 \times (-2/3) = -16.833 \text{ кН};$$

$$Q_{k_2} = 4 \times 1/3 + 4 \times (-2/9) + 10 \times 2/3 + 10 \times 1/3 + 2 \times (1/2 \times 1/3 \times 3) + 2 \times (-1/2 \times 2/9 \times 2) + 5 \times (1/2 \times 1 \times 9) - 1/3 \times 1 + 1/3 \times 0 = 33.167 \text{ кН};$$

$$Q_{k_3} = -4 \times 1 + 2 \times (-1 \times 3) = -10 \text{ кН}.$$

**Замечание.** По аналогии с определением усилий по известным линиям влияния можно определять и другие факторы, если для них построены соответствующие линии влияния.

Обратимся к рисунку 3.3, на котором изображена линия влияния вертикального перемещения точки балки с координатой  $x = 7.5 \text{ м}$ .

По приведенным в таблице 3.1 перемещениям для характерных точек найдем аппроксимирующий полином, описывающий очертание линии влияния, и первую производную от него:

$$p(x) = [1.59222x - 0.130259x^2 + 0.0190617x^3 - 0.0115391x^4 + 0.000768176x^5] \frac{1}{EI}.$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = [1.59222 - 0.260519x + 0.0571852x^2 - 0.0461564x^3 + 0.00384088x^4] \frac{1}{EI}.$$

Рассмотрим нагружение балки равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенным моментом в точке  $x = 7.5 \text{ м}$  (рисунок 3.13).

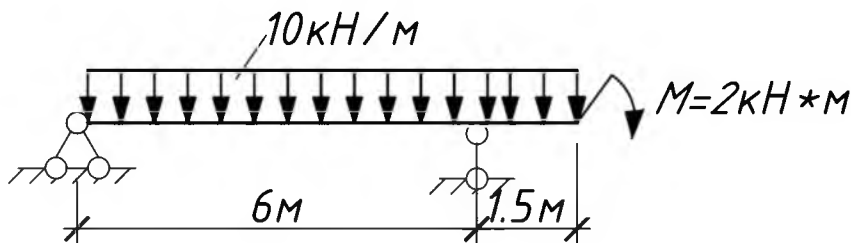


Рисунок 3.13

Найдем перемещение, зная очертание линии влияния и первую производную:

$$Z_{x=7.5}^{верт} = q\omega + M \frac{dy}{dx} = q \int_0^{7.5} p(x) dx + M \frac{dp(x)}{dx}.$$

$$\int_0^{7.5} p(x) dx = 9.5625 \frac{1}{EI}; \quad \frac{dp(x)}{dx} \Big|_{x=7.5} = -4.46444 \frac{1}{EI}.$$

$$Z_{x=7.5}^{\text{всп}} = 10 \times \frac{9.5625}{EI} - 2 \times \frac{4.46444}{EI} = \frac{86.6961}{EI}.$$

### 3.5. Линии влияния усилий при узловой передаче нагрузки

Рассмотрим расчетную схему конструкции, показанной на рисунке 3.14, а. Основной несущий элемент этой конструкции — балка АВ, ее называют главной балкой. Поперечные балки опираются на главную, на расчетной схеме они представлены в виде опорных стержней для расположенных в верхнем уровне коротких продольных балочек. Короткие балочки, по сути, являются настилом, в простейшем случае, из досок. Нагрузка (на расчетной схеме показана сила  $F=1$ ), приложенная к верхним коротким балочкам, передается на главную балку в определенных точках, которые называют узлами. Отсюда следует и название: узловая передача нагрузки.

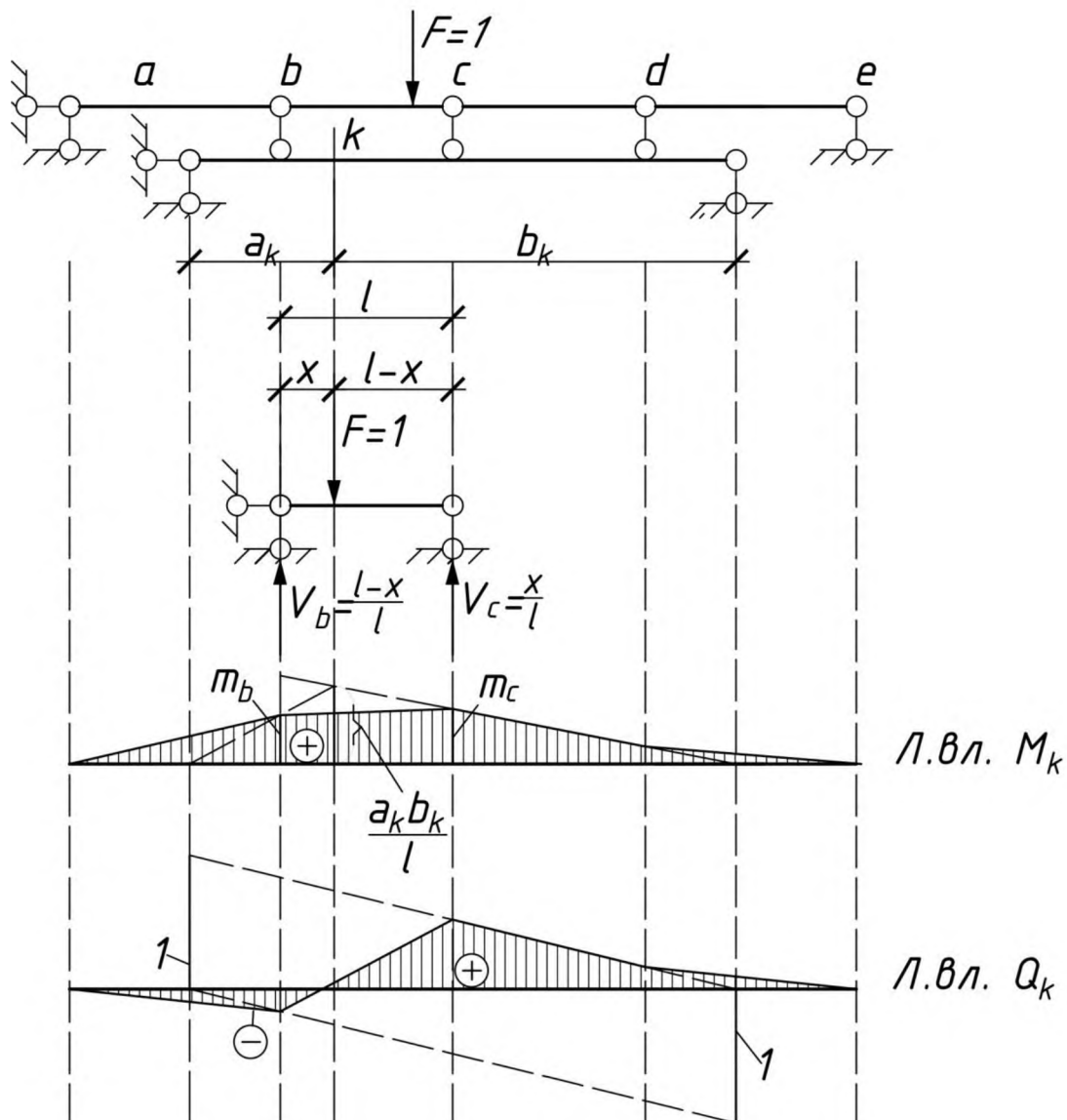


Рисунок 3.14

Узловая передача нагрузки в сооружениях применяется часто. Это имеет место в арках с надарочным строением, при передаче нагрузки на узлы ферм через ребристые плиты покрытия (и перекрытия) и в других случаях.

Покажем особенности построения линий влияния при узловой передаче нагрузки. Построим вначале линию влияния изгибающего момента в сечении  $k_1$  в предположении, что надстройка над главной балкой отсутствует и сила передвигается непосредственно по главной балке (рисунке 3.14, в).

От силы  $F=1$ , расположенной на балочке  $bc$  (рисунке 3.14, б), возникают реакции  $V_A = \frac{l-x}{l}$  и  $V_B = \frac{x}{l}$ . Рассматривая их как силы взаимодействия между балочкой  $bc$  и балкой АВ, получаем нагружение балки АВ. По формуле 3.7 найдем момент в сечении  $k_1$ :

$$M_{k_1} = \frac{l-x}{l} m_B + \frac{x}{l} m_C.$$

Получено уравнение прямой, проходящей через точки:

$$x=0 \quad M_{k_1} = m_B; \quad x=l \quad M_{k_1} = m_C.$$

Следовательно, при положении силы  $F=1$  на балочке  $bc$  на построенной ранее линии влияния  $M_{k_1}$  следует показать прямую (ее называют передаточной), проходящую через вершины ее ординат при  $x=0$  и  $x=l$ . Аналогичный результат получим при движении силы по другим балочкам верхнего строения: на участке каждой балочки линия влияния усилия будет прямолинейной.

Итак, чтобы построить линию влияния усилия  $S$  при узловой передаче нагрузки необходимо:

- построить линию влияния усилия  $S$  при условии движения подвижной единичной силы непосредственно по главной балке;
- спроектировать узлы на построенную линию влияния и выделить на ней ординаты;
- вершины ординат соединить прямыми линиями.

На рисунках 3.14, в, г показаны линии влияния  $M_{k_1}$  и  $Q_{k_1}$ .

### 3.6. Построение линий влияния усилий в многопролетных балках

При известной этажной схеме многопролетной балки построение линии влияния усилия  $S$  начинается с той балки, к которой относится исследуемый фактор. Построение выполняется статическим или кинематическим методом. Получив линию влияния на этой балке, следует продолжить построение на смежной вышерасположенной балке, то есть следует рассмотреть положение силы  $F=1$  на ней. Ордината линии влияния в шарнире, соединяющем нижнюю и верхнюю балки одинаковая. Вторая ордината на верхней балке, нулевая, расположена над опорой этой балки, так как при положении силы над опорой усилие  $S=0$ . Имея две известные ординаты, показываем положение прямой на всей длине балки. Процесс построения повторяется для всех вышерасположенных балок.

На рисунке 3.15 показаны линии влияния усилий в многопролетной балке.

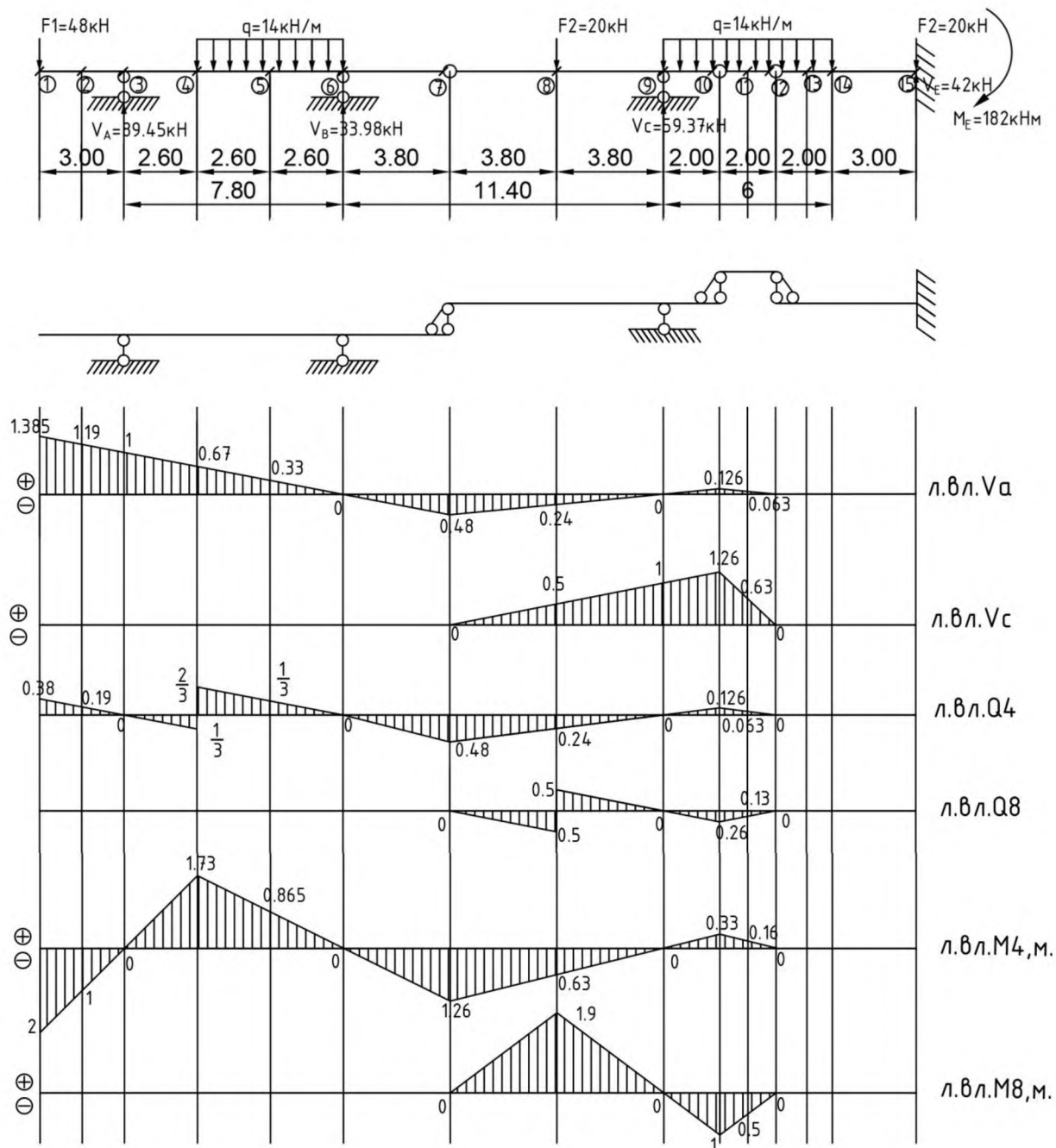


Рисунок 3.15

### 3.7. Определение наиболее невыгодного положения подвижных нагрузок по линиям влияния

Наиболее невыгодным положением подвижной нагрузки на сооружении называют такое положение, при котором рассматриваемое усилие достигает наибольшего (экстремального) значения.

#### 3.7.1. Действие сосредоточенной силы



Рассмотрим случай, когда на балке находится **одна единственная сосредоточенная сила  $F$**  (рисунок 3.16). Линия влияния усилия  $S$  построена. При любом положении силы на балке усилие  $S$  будет вычисляться по формуле (3.7):  $S = F y$ . Усилие будет максимальным, если сила  $F = const$  расположится над максимальной ординатой линии влияния:  $S_{max} = F y_{max}$ . Понятно, что  $S_{min} = F y_{min}$ .

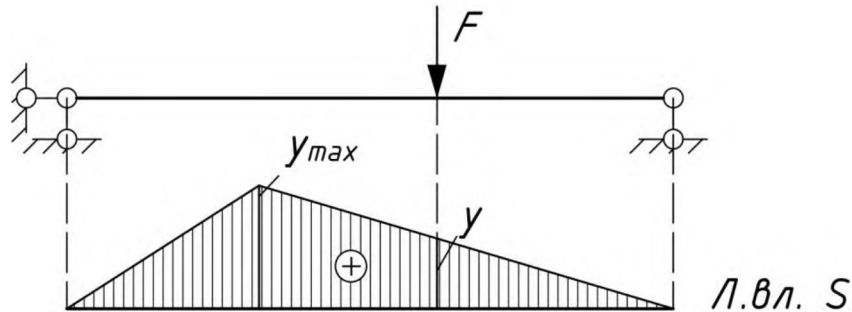


Рисунок 3.16

### 3.7.2. Действие системы связанных сосредоточенных сил

Показанная на рисунке 3.17,а система сил моделирует давление колес поезда или другого транспорта. Расстояние между силами при движении поезда не меняется. Все силы расположены на некотором участке треугольной линии влияния (рисунок 3.17, б). Сила  $F_i$  расположена слева, на очень малом расстоянии от вершины линии влияния.

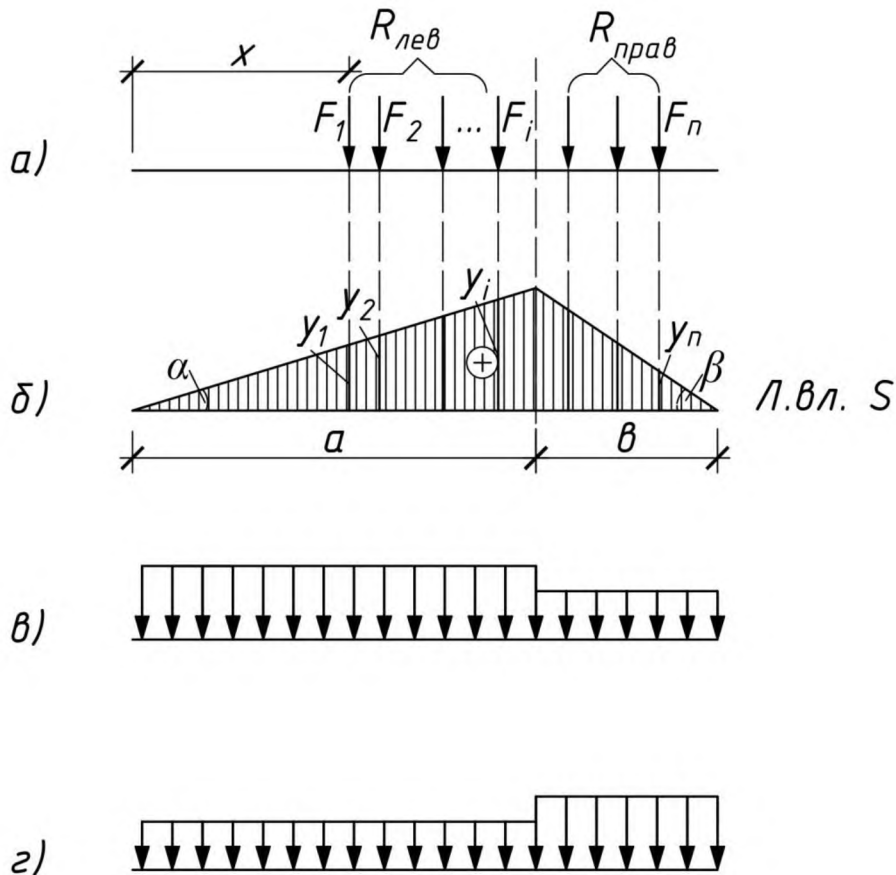


Рисунок 3.17

Усилие  $S$  от показанной нагрузки вычисляется по формуле (3.7):

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_i y_i + \dots + F_n y_n.$$

При движении поезда все ординаты  $y = y(x)$  переменны. Следовательно, переменны и усилия  $S = S(x)$ . Ищем экстремум функции  $S(x)$ .

Первая производная от  $S$  имеет вид:

$$\frac{dS}{dx} = F_1 \frac{dy_1}{dx} + F_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + F_i \frac{dy_i}{dx} + \dots + F_n \frac{dy_n}{dx} = (R_{лев} + F_i) \operatorname{tg} \alpha - R_{прав} \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = \dots = \frac{dy_i}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\frac{dy_n}{dx} = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta$ .

$R_{лев}$  — равнодействующая сил, расположенных левее силы  $F_i$  (на линии влияния длиной  $a$ ),

$R_{прав}$  — равнодействующая сил, расположенных правее вершины линии влияния.

Функция  $S(x)$  не является гладкой, при переходе силы  $F_i$  на участок правой ветви линии влияния первая производная  $\frac{dy_i}{dx}$  меняет знак с «плюс» на «минус» скачком. Поэтому нельзя использовать равенство  $\frac{dS}{dx} = 0$  для вычисления экстремального значения  $S$ .

Замечание о перемене знака первой производной  $\frac{dy_i}{dx}$  означает, что экстремальное значение  $S$  будет наблюдаться тогда, когда одна из сосредоточенных сил будет расположена над вершиной линии влияния. Предположим, что это случится, когда над вершиной линии влияния будет располагаться сила  $F_i$ . Тогда эту силу называют критической и обозначают ее так:  $F_{кр} = F_i$ .

Условие для определения критической силы записывается в виде двух неравенств:

$$\begin{aligned} (R_{лев} + F_{кр}) \operatorname{tg} \alpha &\geq R_{прав} \operatorname{tg} \beta; \\ R_{лев} \operatorname{tg} \alpha &\leq (R_{прав} + F_{кр}) \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если оба неравенства выполняются одновременно, то  $F_i$  является критической силой, а соответствующее положение нагрузки называют невыгодным (расчетным). Если неравенства не выполняются одновременно, то надо предположить, что критической будет другая сила и проверить выполнение критерия (3.11).

Неравенствам (3.11) можно дать графическую интерпретацию. Учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b}$ , неравенства показывают соотношения эквивалентных равномерно распределенных нагрузок на левом и правом участках линии влияния (рисунок 3.17, г).

Действие **двух связанных сил** (рисунок 3.18) можно рассматривать как частный случай рассмотренного варианта нагрузок. Во всех рассмотренных в примере загрузениях принято движение нагрузки справа налево.

Для первого загрузения (рисунок 3.18, б)  $S_{\max}^{(1)} = F_1 y_1 + F_2 y_2$ ; для второго (рисунок 3.18, в)  $S_{\max}^{(2)} = F_1 y_3 + F_2 y_1$ .

Из найденных значений усилий выбираем большее  $S_{\max} = \max\{S_{\max}^{(1)}, S_{\max}^{(2)}\}$  и получаем сведения о том, какое положение нагрузки является невыгодным, и какая сила является критической.

Для третьего нагружения (рисунок 3.18, г)  $S_{\min}^{(3)} = F_1 y_4 + F_2 y_5$ ; для четвертого, если возможно положение силы  $F_2$  за пределами балки, (рисунок 3.18, д)  $S_{\min}^{(4)} = F_1 y_5$ .

Далее из найденных значений усилий выбираем меньшее  $S_{\min} = \min\{S_{\min}^{(3)}, S_{\min}^{(4)}\}$ . Положение нагрузки, при котором усилие будет минимальным, является невыгодным

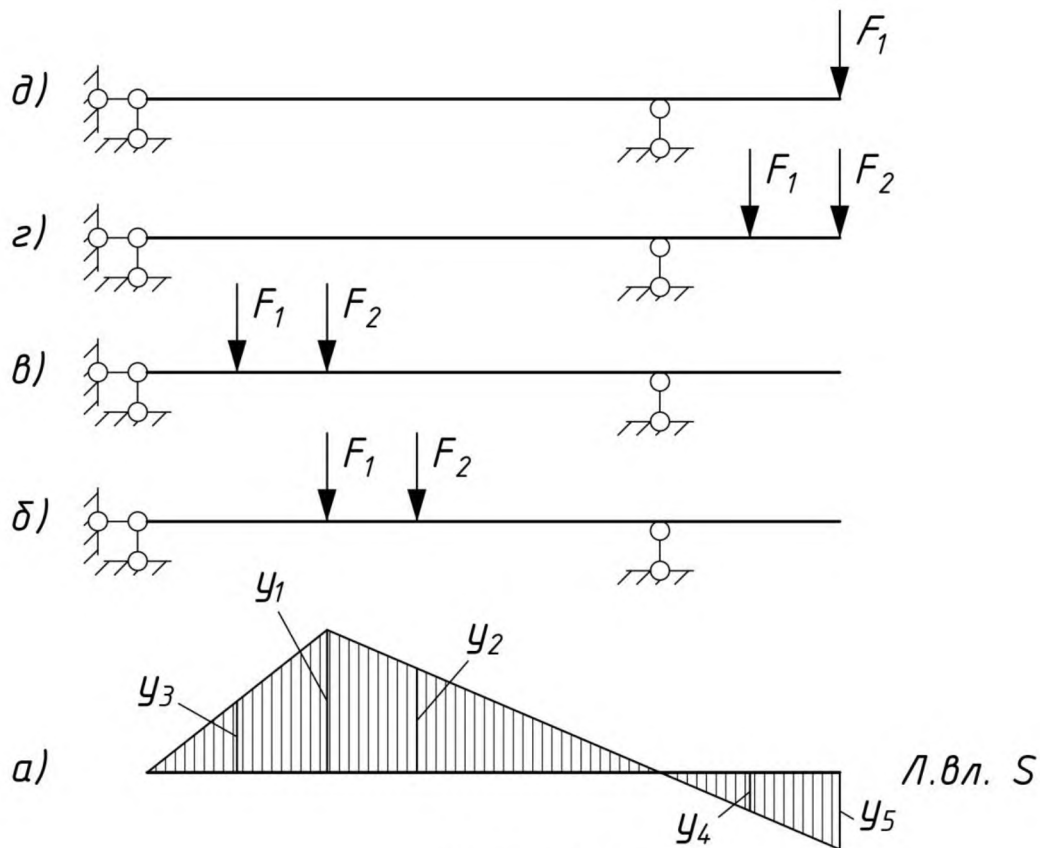


Рисунок 3.18

### 3.8. Понятие о матрицах влияния усилий

Определим усилия  $S$  в расчетных сечениях балки (рисунок 3.19) от приложенных к ней сосредоточенных сил  $F_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ). В сечениях балки от вертикальной нагрузки могут возникать изгибающие моменты и поперечные силы. Для линейно деформируемой системы усилие в сечении  $k$ , ( $k = \overline{1, m}$ ) определяется по выражению:

$$S_k = s_{k1}F_1 + s_{k2}F_2 + \dots + s_{kn}F_n, \quad (3.12)$$

где  $s_{ki}$  — усилие в сечении  $k$  от силы  $F_i = 1$ .

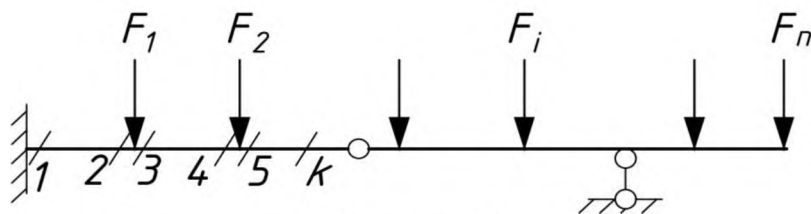


Рисунок 3.19

Представим выражение (3.12) в развернутой форме для  $k = \overline{1, m}$ .

$$S_1 = s_{11}F_1 + s_{12}F_2 + \dots + s_{1n}F_n;$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= s_{21}F_1 + s_{22}F_2 + \dots + s_{2n}F_n; \\
&\dots \\
S_m &= s_{m1}F_1 + s_{m2}F_2 + \dots + s_{mn}F_n;
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

В матричной форме записи система уравнений (3.13) имеет следующий вид:

$$\vec{S} = L_S \vec{F}. \tag{3.14}$$

Здесь  $\vec{S}$  — вектор усилий;  $\vec{F}$  — вектор нагрузки;  $L_S$  — матрица влияния усилий  $S$ :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_m \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix}; \quad L_S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Матрица влияния  $L_S$  — линейный оператор, переводящий вектор нагрузки в вектор усилий.

Если определяются изгибающие моменты, то матрица  $L_S$  обозначается  $L_M$  и называется матрицей влияния изгибающих моментов. В этом случае уравнения (3.14) записываются в виде:

$$\vec{M} = L_M \vec{F} \tag{3.16}$$

где  $\vec{M}$  — вектор изгибающих моментов в расчетных сечениях, а матрица  $L_M$  записывается так:

$$L_M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

В общем случае эта матрица прямоугольная, ее порядок —  $(m \times n)$ . В случае, когда сосредоточенные силы приложены в расчетных сечениях, матрица  $L_M$  получается квадратной порядка  $(n \times n)$ .

Так как  $m_{ki}$  — изгибающий момент в сечении  $k$  от силы  $F_i = 1$ , то, выполняя анализ матрицы  $L_M$ , замечаем, что в каждой ее строке записываются значения ординат соответствующих линий влияния изгибающих моментов. Например, **во второй строке** матрицы  $L_M$  записываются значения **ординат линии влияния  $M_2$** .

**Во втором столбце** матрицы  $L_M$  записываются значения **ординат** в расчетных сечениях **из эпюры моментов  $M_2$** , построенной от безразмерной силы  $\bar{F}_2 = 1$ .

Следовательно, матрицу влияния можно сформировать двумя способами: 1) по столбцам — с помощью единичных эпюр усилий; 2) по строкам — с помощью линий влияния усилий.

При вычислении поперечных и продольных сил уравнения имеют вид:

$$\vec{Q} = L_Q \vec{F} \tag{3.18}$$

$$\vec{N} = L_N \vec{F} \tag{3.19}$$

В уравнениях (3.18) и (3.19)  $L_Q$  и  $L_N$  — матрицы влияния, соответственно, поперечных и продольных сил.

Заметим, при формировании матрицы влияния поперечных сил  $L_Q$  расчетные сечения необходимо принимать слева и справа от каждой сосредоточенной силы.

В общем случае балка или другая конструкция может быть нагружена не только сосредоточенными силами, но и распределенными нагрузками или сосредоточенными моментами. Можно построить матрицу влияния, учитывающую и эти виды нагружений. Однако вычислительный процесс в этом случае усложнится, потеряется универсальность вычислительного алгоритма. Поэтому рекомендуется проводить преобразование таких нагрузок посредством приведения их к эквивалентным сосредоточенным силам по общим правилам механики. При использовании для этой цели способа узловой передачи нагрузки положение узлов назначается в зависимости от особенностей заданной нагрузки. Шаг расположения узлов может быть равномерным или неравномерным. При малой длине шага увеличивается точность расчета, но возрастает размерность задачи. Кроме узлов в пролетах балок, следует предусматривать положение их над шарнирами и опорами.

Пример 3.2. Для балки, показанной на рисунке 3.20, а, составим матрицу влияния изгибающих моментов, вычислим изгибающие моменты в расчетных сечениях, построим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и эквивалентной сосредоточенной, сравним их.

Положения расчетных сечений показаны на схеме балки. При формальном подходе к расчету положение расчетных сечений следует назначать не только в пролетах балки, но и там, где заведомо известно, что изгибающие моменты будут равны нулю (в рассматриваемом примере — сечения 1, 5, 9). Нагрузка, преобразованная к сосредоточенным силам, изображена на рисунке 3.20, б. Матрица влияния моментов будет иметь порядок (9x9):

$$L_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 2/3 & 0 & -1/2 & -1/3 & -1/6 & 0 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & 0 & -1 & -2/3 & -1/3 & 0 & 4/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1 & -1/2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пояснения к формированию матрицы: значения **ординат эпюры**  $M_9$  (рисунок 3.20, г) записаны в девятом **столбце** матрицы, значения **ординат линии влияния**  $M_2$  (рисунок 3.20, д) записаны во второй **строке**.

Выполнив преобразование нагрузки, получим вектор сосредоточенных сил в виде:

$$\vec{F} = [F_1; F_2; F_3; F_4; F_5; F_6; F_7; F_8; F_9]^T = [0; 45; 45; 17.5; 15; 35; 35; 17.5; 10]^T \text{ кН.}$$

Имея предварительные сведения о том, что в сечениях 1, 5 и 9 изгибающие моменты равны нулю, можно соответствующие строки матрицы  $L_M$  вычеркнуть. Так как сосредоточенные силы над опорами не влияют на очертание эпюры моментов, то можно в матрице удалить столбцы 1, 4 и 8. В результате получим матрицу  $L_M$  размером (6x6):

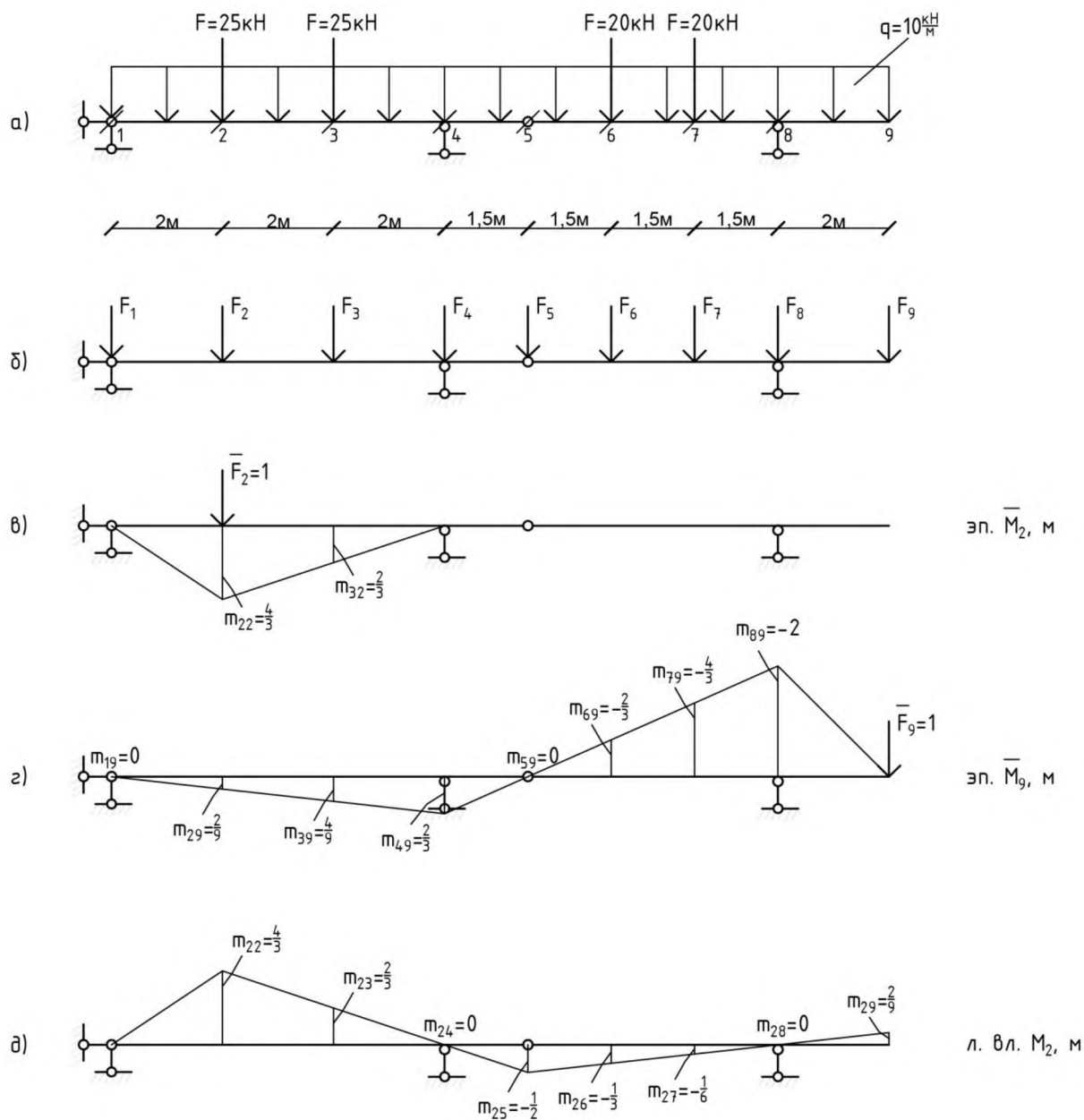


Рисунок 3.20

$$L_M = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 & -1/2 & -1/3 & -1/6 & 2/9 \\ 2/3 & 4/3 & -1 & -2/3 & -1/3 & 4/9 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Соответствующий вектор нагрузки имеет вид:

$$\vec{F} = [F_2; F_3; F_5; F_6; F_7; F_9]^T = [45, 45, 15, 35, 35, 10]^T \text{ кН.}$$

Вектор изгибающих моментов в расчетных сечениях вычисляется по формуле (3.16):

$$\vec{M} = [M_2; M_3; M_4; M_6; M_7; M_8]^T = [67.22; 44.44; -68.33; 45.83; 39.17; 20.00]^T \text{ кНм.}$$

На рисунках 3.21, а, б показаны эпюры изгибающих моментов в балке с заданной нагрузкой и в балке с преобразованной нагрузкой. Значения ординат в расчетных сечениях одинаковы.

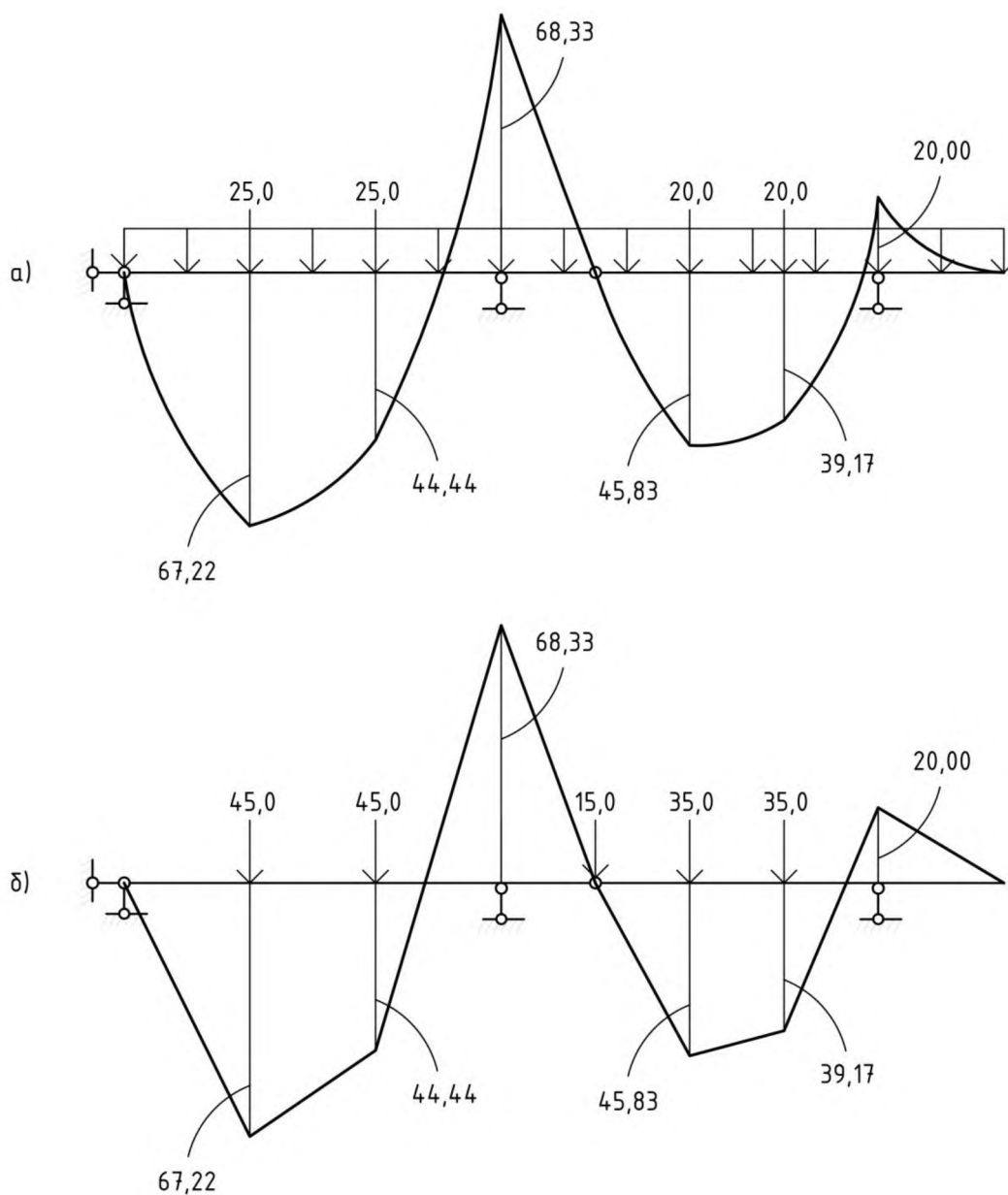


Рисунок 3.21

## Тема 4. Расчет трехшарнирных арок и рам

### 4.1. Общие сведения и принципы образования

Трехшарнирной называется система, состоящая из двух дисков, соединенных между собой шарниром и опирающихся на землю с помощью шарнирно неподвижных опор (рисунок 4.1).

Трехшарнирные системы, у которых диски представлены ломаными стержнями, называются трехшарнирными рамами (рисунок 4.2).

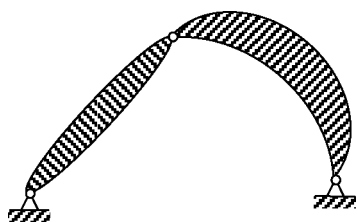


Рисунок 4.1

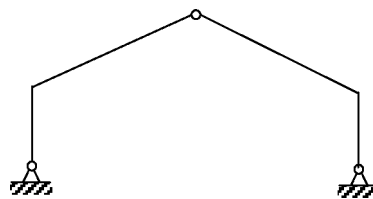


Рисунок 4.2

Трехшарнирные системы, у которых диски представлены криволинейными стержнями, называют трехшарнирными арками (рисунок 4.3). По своему очертанию арки подразделяются на арки круговые, параболические, синусоидальные, стрельчатые и т. п.

Трехшарнирные системы образованы по способу треугольников. Следовательно, они геометрически неизменяемы и статически определимы. Все трехшарнирные системы относятся к классу распорных систем (рисунок 1.24, иллюстрация 4.1).



Иллюстрация 4.1. Строительство ангара из деревянных трехшарнирных арок

Для устранения действия распора на нижележащие конструкции опорные шарниры трехшарнирных систем соединяют горизонтальными стержнями – затяжками. В таких случаях одна из опор должна быть шарнирно подвижной. В результате получим, например, трехшарнирную арку с затяжкой (рисунок 4.4). С целью рационального использования подарочного пространства применяют арки с повышенной или ломаной затяжкой (рисунок 4.5).



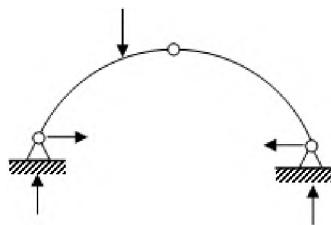


Рисунок 4.3

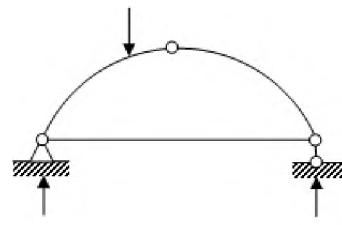


Рисунок 4.4

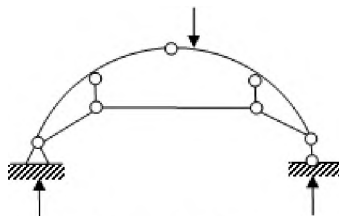


Рисунок 4.5

## 4.2. Определение опорных реакций и усилий в трехшарнирных арках

Рассмотрим симметричную трехшарнирную арку с опорами в одном уровне, нагруженную вертикальной силой (рисунок 4.6,а).

Составим уравнение равновесия в виде суммы проекций всех внешних сил на горизонтальную ось:

$$\Sigma X = H_A - H_B = 0.$$

Из этого уравнения равновесия следует, что

$$H_A = H_B = H.$$

То есть горизонтальные реакции трехшарнирной арки при вертикальной нагрузке противоположны по направлению, одинаковы по значению и равны пока неизвестной величине  $H$ . Эту величину  $H$  и сами горизонтальные реакции называют **распором** трехшарнирной арки.

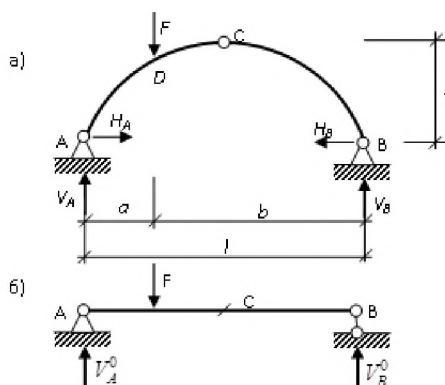


Рисунок 4.6

Три опорные реакции арки:  $V_A$ ,  $H_A$  и  $H_B$ , - пересекаются в опорной точке  $A$ . Следовательно из суммы моментов всех внешних сил относительно этой точки  $A$  можно определить вертикальную опорную реакцию  $V_B$ .

$$\Sigma M_A = Fa - V_B l = 0, \text{ откуда } V_B = \frac{Fa}{l} = V_B^0.$$

Полученное выражение для определения опорной реакции  $V_B$  арки (рисунок 4.6,а) полностью эквивалентно выражению, которое можно получить для определения опорной реакции  $V_B^0$  простой однопролетной шарнирно опертой балки (рисунок 4.6,б). Такую балку называют эквивалентной. Эквивалентная балка имеет такой же пролет и такую же вертикальную нагрузку, как и арка.

Соответственно из суммы моментов всех внешних сил относительно опорной точки  $B$  находим вертикальную реакцию  $V_A$  опоры  $A$ :

$$\Sigma M_B = V_A l - F(l-a) = 0, \text{ откуда } V_A = \frac{F(l-a)}{l} = V_A^0.$$

Следовательно, вертикальные опорные реакции трехшарнирной арки при вертикальной нагрузке равны вертикальным опорным реакциям эквивалентной балки. Поэтому вертикальные реакции арки часто называют балочными опорными реакциями. И это справедливо при произвольной вертикальной нагрузке.

Для определения опорных реакций арки уже использованы три независимых уравнения равновесия. Уравнение равновесия в виде суммы проекций всех внешних сил на вертикальную ось обычно применяется для проверки правильности вычисления вертикальных опорных реакций.

$$\Sigma Y = V_A + V_B - F = 0.$$

Осталось найти значение  $H$  распора арки. Для определения распора арки воспользуемся отличительным свойством арки по сравнению с эквивалентной балкой. В промежуточном шарнире  $C$  арки (рисунок 4.6,а) отсутствует изгибающий момент. В эквивалентной балке в соответствующем поперечном сечении нет шарнира, и изгибающий момент в этом сечении (рисунок 4.6,б), в общем случае, не равен нулю.

Следовательно, определяя изгибающий момент в шарнире  $C$  арки как сумму моментов относительно этого сечения всех внешних сил, допустим, расположенных слева от него, приравняем полученное выражение нулю.

$$M_C = \Sigma M_C^{\text{лев}} = V_A \frac{l}{2} - F\left(\frac{l}{2} - a\right) - Hf = 0.$$

Учитывая, что

$$V_A \frac{l}{2} - F\left(\frac{l}{2} - a\right) = M_C^0,$$

где  $M_C^0$  - изгибающий момент в сечении  $C$  эквивалентной балки, окончательно найдем

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

Таким образом, распор арки прямо пропорционален балочному изгибающему моменту в сечении  $C$  эквивалентной балки и обратно пропорционален высоте арки в промежуточном шарнире.

Для проверки вычисленного значения распора обычно выполняют вычисление балочного изгибающего момента в сечении  $C$  через сумму моментов внешних сил, приложенных к балке справа от этого сечения. Для нашего примера получим

$$M_C^0 = -\sum M_C^{npa6} = V_B \frac{l}{2}.$$

После вычисления опорных реакций определение внутренних сил в сечениях трехшарнирных арок обычно проводят методом сечений, как в любых других стержневых системах.

Рассмотрим особенности применения метода сечений к трехшарнирной арке с опорами в одном уровне (рисунок 4.6,а). Для этого рассечем арку некоторым сечением  $x-x$  и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 4.7). Действие отброшенной правой части заменим тремя внутренними силами: изгибающим моментом  $M_x$ , поперечной силой  $Q_x$  и продольной силой  $N_x$ .

Изгибающий момент  $M_x$  в сечении  $x-x$  арки вычислим как сумму моментов только внешних сил, действующих на левую часть арки, относительно центра тяжести сечения  $x-x$  арки:

$$M_x = \sum M_x^{лев} = V_A x - F(x - a_{ГЦ}) - H y$$

Учитывая, что

$$V_A x - F(x - a) = M_x^0,$$

где  $M_x^0$  - изгибающий момент в сечении  $x$  эквивалентной балки (рисунок 4.6,б), окончательно получим

$$M_x = M_x^0 - H y.$$

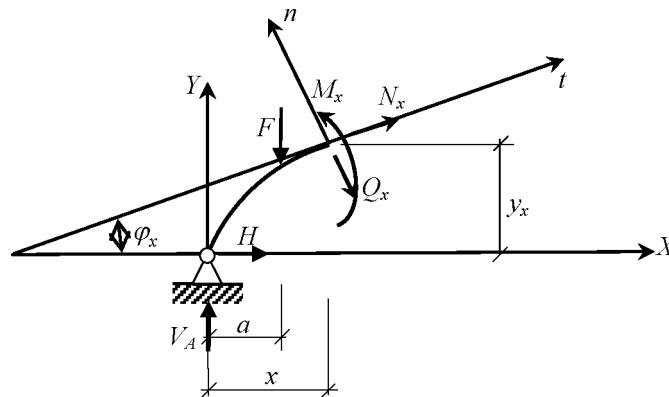


Рисунок 4.7

Из полученного выражения видно, что изгибающие моменты в арке меньше, чем изгибающие моменты в эквивалентной балке. Можно сказать, что изгибающие моменты в арке  $M_x$  получены путем алгебраического суммирования изгибающих моментов  $M_x^0$  в эквивалентной балке и изгибающих моментов в арке, вызванных действием только распора  $H$  как двух взаимно уравновешенных сил, приложенных к криволинейному стержню. Эпюра изгибающих моментов от распора повторяет очертание оси арки, при этом распор служит коэффициентом пропорциональности.

Балочные изгибающие моменты при вертикально вниз направленной нагрузке всегда положительны. Изгибающие моменты от распора, направленного внутрь пролета, всегда отрицательны. Поэтому распор оказывает разгружающее влияние на арку.

Поперечную силу в сечении  $x$ - $x$  арки найдем из суммы проекций всех сил, приложенных к левой части арки (рисунок 4.7), на нормаль к оси арки в рассматриваемом сечении. Разрешая полученное уравнение относительно  $Q_x$ , получим

$$\begin{aligned} Q_x &= V_A \cos \varphi_x - F \cos \varphi_{x,x} - H \sin \varphi_x = \\ &= (V_A - F) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x, \end{aligned}$$

или

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x.$$

Таким образом, поперечная сила в сечениях арки выражается через проекцию балочной поперечной силы  $Q_x^0$  в соответствующем сечении эквивалентной балки и проекцию распора  $H$  на нормаль к арке в рассматриваемом сечении.

Аналогично из суммы проекций всех сил на ось, касательную к оси арки в сечении  $x$ - $x$ , найдем продольную силу в этом сечении арки.

$$\begin{aligned} N_x &= -V_A \sin \varphi_x + F \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x = \\ &= -(V_A - F) \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x, \end{aligned}$$

или

$$N_x = -Q_x^0 \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x.$$

Продольная сила в поперечном сечении арки также выражается через проекцию балочной поперечной силы  $Q_x^0$  в соответствующем сечении эквивалентной балки и проекцию распора  $H$  на касательную к оси арки в этом сечении.

По сравнению с простой балкой в трехшарнирной арке поперечные силы, как и изгибающие моменты, значительно меньше. Но в отличие от балки в сечениях арки возникают продольные сжимающие силы, которых в простой горизонтальной балке при вертикальных нагрузках нет.

Итоговые эпюры внутренних сил в арке по всей ее длине криволинейны. Построить криволинейные эпюры можно, как и любые графики, вычислив значения соответствующих усилий в ряде заранее назначенных (характерных) сечений арки (чем больше сечений, тем точнее график).

Проиллюстрируем определение реакций и внутренних на примере круговой трехшарнирной арки пролетом  $l = 36$  м со стрелой подъема  $f = 8$  м (рисунок 4.8). Арка загружена сосредоточенной силой  $F = 24$  кН и равномерно распределенной нагрузкой  $q = 2$  кН/м.

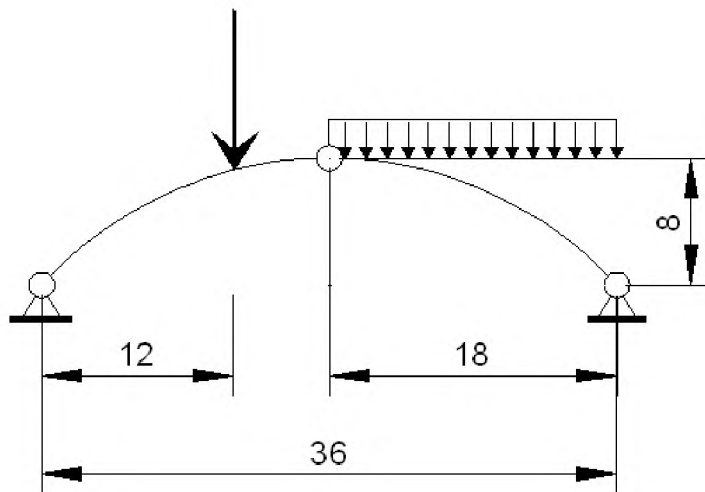


Рисунок 4.8

Уравнение оси арки, т. е. уравнение дуги окружности, проходящей через три точки А, С и В, описывается выражением

$$y(x) = f - R + \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}$$

Радиус окружности  $R$  и тригонометрические функции угла наклона касательной к оси арки вычисляются по формулам:

$$R = \frac{4f^2 + l^2}{8f}, \quad \sin \varphi(x) = \frac{l - 2x}{2R}, \quad \cos \varphi(x) = \frac{R - f + y}{R}$$

Вычисляем вертикальные опорные реакции арки:

$$V_A = V_A^0 = \frac{24 \times 24 + 2 \times 18 \times 9}{36} = 25 \text{ кН},$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{24 \times 12 + 2 \times 18 \times 27}{36} = 35 \text{ кН}.$$

Выполняем проверку:

$$\sum Y = 25 + 35 - 24 - 2 \times 18 = 60 - 60 = 0.$$

Вычисляем и проверяем балочный изгибающий момент в сечении С:

$$M_C^0 = \sum M_C^{\text{лев}} = 25 \times 18 - 24 \times 6 = 306 \text{ кН},$$

$$M_C^0 = -\sum M_C^{\text{прав}} = 35 \times 18 - 2 \times 18 \times 9 = 306 \text{ кН}.$$

Вычисляем распор арки:

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{306}{8} = 38.25 \text{ кН}$$

Назначаем характерные сечения арки. Во-первых, это опорные точки и промежуточный шарнир. Во-вторых, это точка приложения сосредоточенной силы, начало и конец участка приложения распределенной нагрузки. В-третьих, это дополнительные промежуточные сечения, необходимые для построения криволинейных участков эпюр с достаточной точностью. В данном примере таких характерных точек, как минимум, насчитывается семь. Они располагаются по длине пролета арки с шагом 6м. Для построения эпюр поперечных и продольных сил в точке приложения сосредоточенной силы необходимо рассмотреть два бесконечно близких сечения: одно слева от точки приложения силы, второе справа от точки приложения силы. В этой точке на указанных эпюрах будет скачок, а на эпюре моментов - перелом. При построении эпюр внутренних сил необходимо следить за соответствием их между собой и нагрузкой, т. е. за выполнением дифференциальных зависимостей между изгибающими моментами, поперечными силами и нагрузкой.

Для определения геометрических характеристик арки вычисляем значение радиуса оси арки

$$R = \frac{4 \times 8^2 + 36^2}{8 \times 8} = 24.25 \text{ м.}$$

Все дальнейшие вычисления сводим в нижеследующие таблицы. Вычисления в таблицах можно выполнять на калькуляторе, эпюры строить вручную, с помощью лекал. А можно применять компьютеры: универсальные математические пакеты и языки программирования, табличные и графические редакторы и другие современные программные средства, автоматизирующие процесс вычислений и построения графических объектов, в том числе, и «OnLine»

Таблица 4.1

Вычисление изгибающих моментов в трехшарнирной арке

| №сеч     | $x$ | $Y$   | $M_x^0$ | $-H_y$  | $M_x$  |
|----------|-----|-------|---------|---------|--------|
| <i>A</i> | 0   | 0     | 0       | 0       | 0      |
| <i>1</i> | 6   | 4.823 | 150     | -184.47 | -34.47 |
| <i>2</i> | 12  | 7.246 | 300     | -277.16 | 22.84  |
| <i>C</i> | 18  | 8.000 | 306     | -306.00 | 0      |
| <i>3</i> | 24  | 7.426 | 276     | -277.16 | -1.16  |
| <i>4</i> | 30  | 4.823 | 174     | -184.47 | -10.47 |
| <i>B</i> | 36  |       | 0       | 0       | 0      |

Так для построения приведенных ниже эпюр внутренних сил в арке применялись современные программные средства, автоматизирующие процесс выполнения вычислений и построения графиков: табличный редактор «EXEL» и язык программирования «Fortran». Сами эпюры: эпюра изгибающих моментов (рисунок 4.9), эпюра поперечных сил (рисунок 4.10) и эпюра продольных сил (рисунок 4.11), - построены на горизонтальной проекции оси арки с применением графических редакторов «Paint» и «Array Viewer online». Разумеется, количество характерных сечений по длине пролета пришлось значительно увеличить.

Как следует из таблицы 4.1, изгибающие моменты в трехшарнирной круговой арке при заданной нагрузке на порядок меньше, чем изгибающие моменты в эквивалентной балке. В опорных шарнирах и в промежуточном шарнире изгибающие моменты в арке равны нулю. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре изгибающих моментов в арке наблюдается перелом типа «клюв». На эпюрах поперечных и продольных сил скачки (разрывы первого рода): на эпюре  $Q$  скачок значением  $F \cos \varphi_2$ , а на эпюре  $N$  скачок значением  $F \sin \varphi_2$ . В точках, где эпюра  $Q$  проходит через нуль, на эпюре  $M$  экстремумы. В точке, где начинается участок распределенной нагрузки, на эпюре поперечных сил перелом.

На участках, где эюра  $Q$  восходящая, эюра  $M$  выпукла вверх. На участках, где эюра  $Q$  нисходящая, эюра  $M$  выпукла вниз. Такие выводы следуют из известных из сопротивления материалов дифференциальных зависимостей, согласно которым поперечная сила в сечениях арки есть первая производная по длине дуги арки от функции изгибающих моментов. А нагрузка – первая производная от функции поперечной силы.

Таблица 4.2

Параметры арки, необходимые для вычисления поперечных и продольных сил в арке

| № сеч      | $x$ | $\sin \varphi_x$ | $\cos \varphi_x$ | $Q_x^0$ |
|------------|-----|------------------|------------------|---------|
| $A$        | 0   | 0.7423           | 0.6701           | 25      |
| 1          | 6   | 0.4948           | 0.8690           | 25      |
| $2_{лев}$  | 12  | 0.2474           | 0.9689           | 25      |
| $2_{прав}$ | 12  | 0.2474           | 0.9689           | 1       |
| $C$        | 18  | 0                | 1                | 1       |
| 4          | 24  | -0.2474          | 0.9689           | -11     |
| 5          | 30  | -0.4948          | 0.8690           | -23     |
| $B$        | 36  | -0.7423          | 0.6701           | -35     |

Таблица 4.3

Вычисление поперечных и продольных сил в арке

| № сеч     | $Q_x^0 \cos \varphi_x$ | $-H \sin \varphi_x$ | $Q_x$   | $-Q_x^0 \sin \varphi_x$ | $-H \cos \varphi_x$ | $N_x$  |
|-----------|------------------------|---------------------|---------|-------------------------|---------------------|--------|
| $A$       | 16.753                 | -28.39              | -11.639 | -18.557                 | -25.63              | -44.19 |
| 1         | 21.72                  | -18.928             | 2.797   | -12.371                 | -33.24              | -45.61 |
| $2_{лев}$ | 24.22                  | -9.464              | 14.756  | -6.185                  | -37.06              | -43.25 |
| $2_{пра}$ | 0.9689                 | -9.464              | -8.495  | -0.2474                 | -37.06              | -37.31 |
| $C$       | 1.0000                 | 0.000               | 1.0000  | 0.0000                  | -38.25              | -38.25 |
| 4         | -10.658                | 9.464               | -1.194  | -2.722                  | -37.06              | -39.78 |
| 5         | -19.987                | 18.928              | -1.059  | -11.381                 | -33.24              | -44.62 |
| $B$       | -23.45                 | 28.39               | 4.94    | -25.98                  | -25.63              | -51.61 |

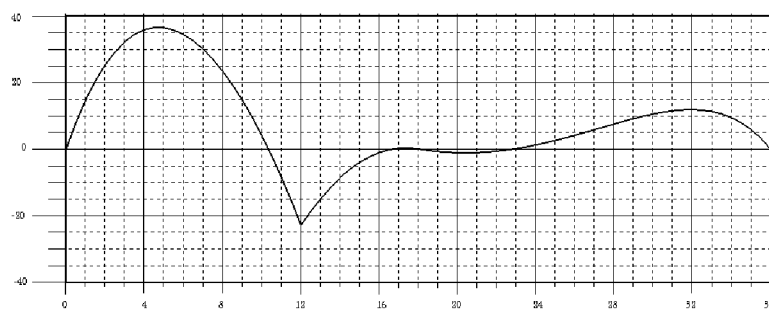


Рисунок 4.9. Эюра  $M$

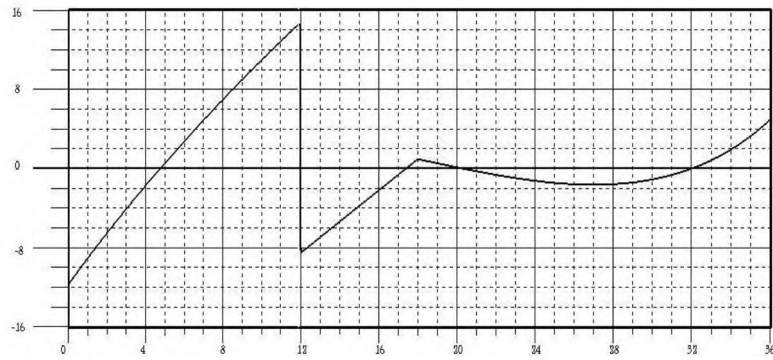


Рисунок 4.10. Эюра  $Q$

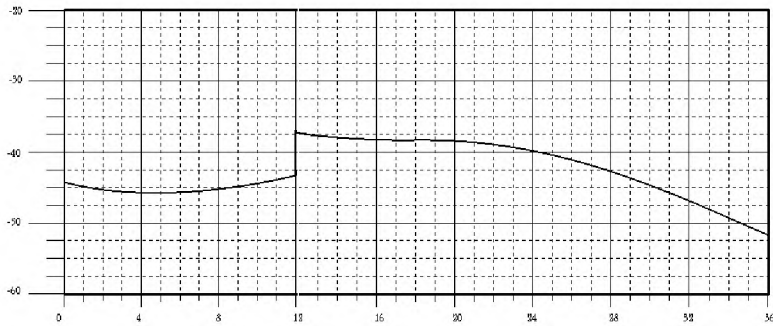


Рисунок 4.10. Эюра  $N$

### 4.3. Расчет трехшарнирной арки с затяжкой.

Трехшарнирная арка с затяжкой (рисунок 4.11) является внешне безраспорной системой. Вертикальная нагрузка вызывает в такой арке только вертикальные опорные реакции. Внутренне трехшарнирная арка с затяжкой – система распорная. Распор – это внутренняя сила в затяжке.

Определение вертикальных опорных реакций производится как в простой балке. Для определения усилия в затяжке проведем сечение I–I через ключевой шарнир  $C$  арки (рисунок 4.11). Рассмотрим равновесие левой части арки и составим сумму моментов сил относительно ключевого шарнира  $C$ :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - F \left( \frac{l}{2} - a \right) - H_{\text{зат}} f = 0.$$

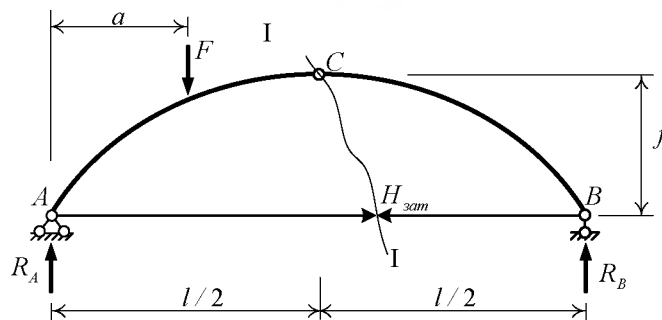


Рисунок 4.11

Два первых слагаемых в полученном уравнении представляют собой балочный изгибающий момент в сечении  $C$  эквивалентной балки

$$R_A \frac{l}{2} - F \left( \frac{l}{2} - a \right) = M_C^0,$$



поэтому для определения усилия в затяжке получаем выражение:

$$H_{зат} = \frac{M_C^0}{f}.$$

Выведенные выше формулы для вычисления внутренних сил в арках без затяжек будут справедливы и для арки с затяжкой, если вместо  $H$  подставить  $H_{зат}$ .

#### 4.4. Линии влияния усилий в трехшарнирных арках

Рассмотрим арку, нагруженную единичной вертикальной силой, положение которой определяется абсциссой  $x_F$  (рисунок 4.12,а). Для определения вертикальных опорных реакций составим уравнения равновесия в виде сумм моментов всех сил, действующих на арку, относительно левой и правой опор:

$$\sum M_A = 0; \quad 1x_F - R_B l = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -1(l - x_F) + R_A l = 0.$$

Из этих уравнений найдем функции изменения вертикальных опорных реакций в зависимости от положения единичной силы

$$R_B = \frac{x_F}{l}; \quad R_A = \frac{l - x_F}{l}.$$

Полученные зависимости изменения значений опорных реакций полностью совпадают с соответствующими зависимостями для опорных реакций простой двухопорной балки. Следовательно, в арке линии влияния вертикальных опорных реакций (рисунок 4.12,в,г) совпадают с линиями влияния опорных реакций в соответствующей эквивалентной балке (рисунок 4.12,б).

Распор арки при действии вертикальных нагрузок определяется выражением:

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

Значит

$$\text{л. в. } H = (\text{л. в. } M_C^0) / f.$$

Таким образом, линия влияния распора в арке выражается через линию влияния изгибающего момента в сечении  $C$  эквивалентной балки (рисунок 4.12,б,д), все ординаты которой разделены на значение стрелы подъема арки  $f$  (рисунок 4.12,е).

Линии влияния внутренних сил в сечениях арок будем строить с применением полученных ранее зависимостей, выражающих усилия в арках через соответствующие усилия в эквивалентной балке и распор арки.

Так изгибающий момент в сечении  $K$  арки (рисунок 4.12,а) определяется выражением

$$M_K = M_K^0 - Hy_K.$$

Учитывая, что ордината  $y_K$  для сечения  $K$  арки является константой, для линии влияния  $M_K$  получим

$$\text{л. в. } M_K = (\text{л. в. } M_K^0) - (\text{л. в. } H)y_K.$$

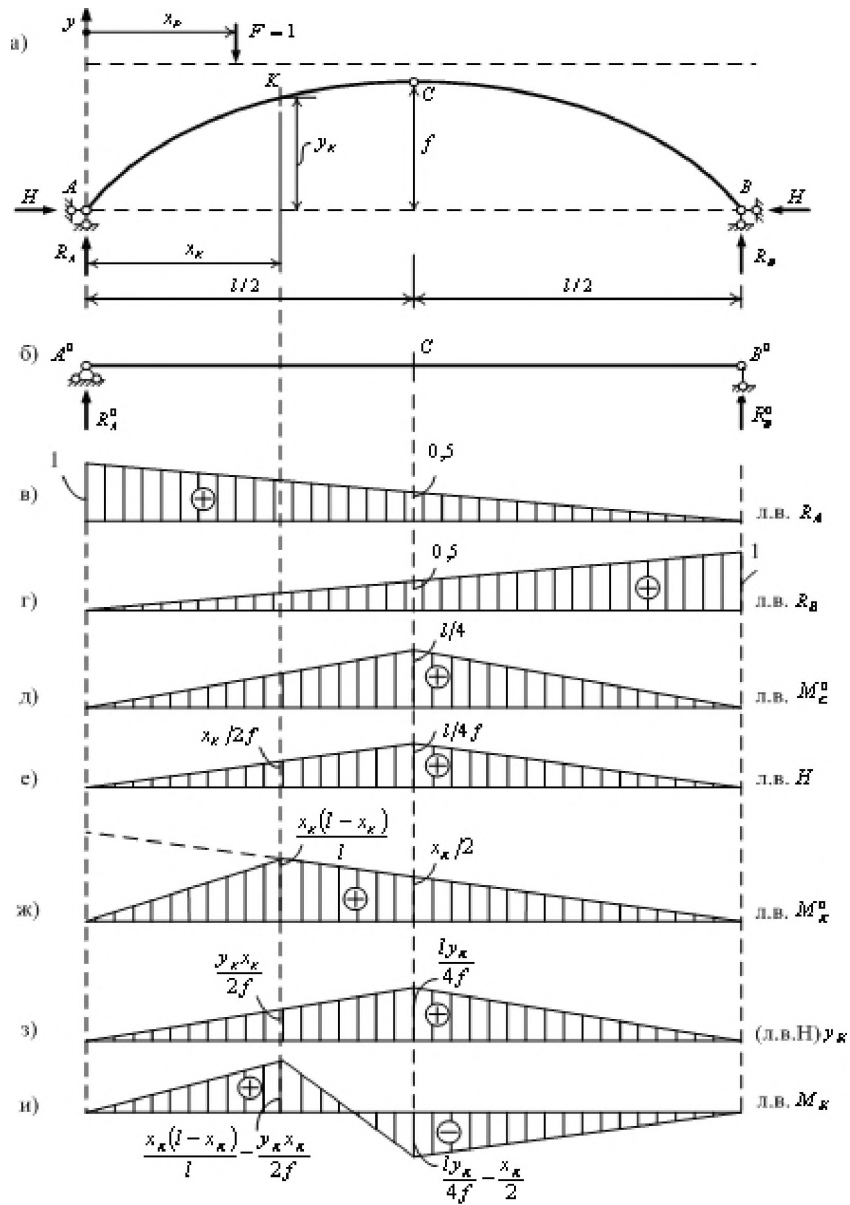


Рисунок 4.12

В соответствии с этим выражением отдельно строим линию влияния изгибающего момента в сечении  $K$  соответствующей двухопорной балки (рисунок 4.12,ж) и линию влияния распора  $H$ , увеличенную в  $y_K$  раз (рисунок 4.12,з). Вычитая из ординат первой линии влияния ординаты второй, получим линию влияния изгибающего момента в сечении  $K$  арки (рисунок 4.12,и).

Поперечная сила в сечении  $K$  арки определяется зависимостью

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K,$$

Следовательно, линия влияния поперечной силы в этом сечении арки может быть представлена так:

$$\text{л. в. } Q_K = (\text{л. в. } Q_K^0) \cos \varphi_K - (\text{л. в. } H) \sin \varphi_K.$$

Строим линию влияния распора  $H$  (рисунок 4.13,б), и линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  эквивалентной балки (рисунок 4.13,в). Затем строим промежуточные линии

влияния, умножая все ординаты л. в.  $Q_K^0$  на  $\cos \varphi_K$  (рисунок 4.13,г), а ординаты л. в.  $H$  на  $\sin \varphi_K$  (рисунок 4.13,д). Вычитая из ординат первой линии влияния ординаты второй, получим искомую линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  арки (рисунок 4.13,е).

Продольная сила в сечении  $K$  арки определяется зависимостью

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K .$$

Соответственно для построения линии влияния этого усилия используется выражение

$$\text{л. в. } N_K = -(\text{л. в. } Q_K^0) \sin \varphi_K - (\text{л. в. } H) \cos \varphi_K .$$

Построив промежуточные линии влияния (л. в.  $Q_K^0$ )  $\sin \varphi_K$  (рисунок 4.13,ж) и (л. в.  $H$ )  $\cos \varphi_K$  (рисунок 4.13,з), сложим их. Изменив знак результата на обратный, получим искомую линию влияния продольной силы в сечении  $K$  арки (рисунок 4.13,и).

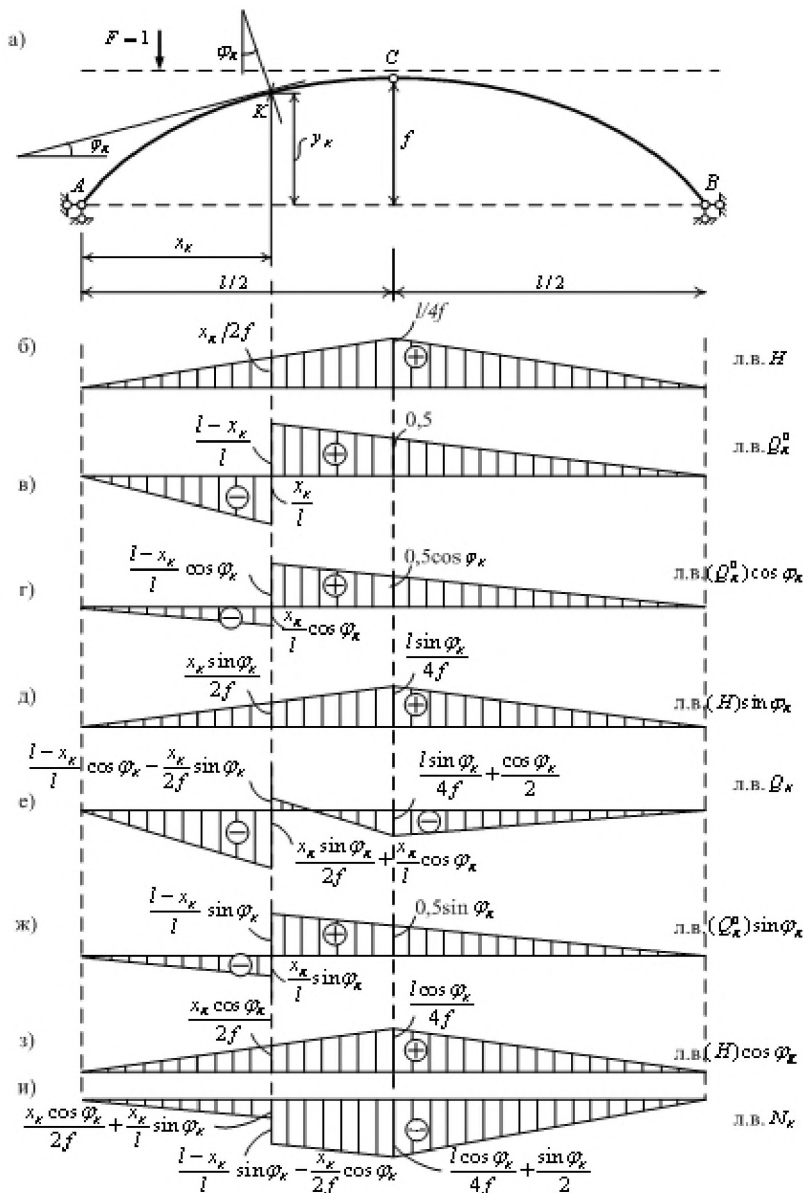


Рисунок 4.13

#### 4.5. Рациональная ось арки

Рациональной называют такую ось арки, при которой изгибающие моменты в сечениях арки равны нулю или близки к нулю.

Условие равенства нулю изгибающих моментов во всех сечениях арки

$$M_x = M_x^0 - Hy(x) = 0$$

дает возможность найти уравнение рациональной оси арки:

$$y(x) = \frac{M_x^0}{H}.$$

Откуда следует, что ординаты рациональной оси арки при действии вертикальных нагрузок пропорциональны изгибающим моментам в эквивалентной балке, имеющей тот же пролет и ту же нагрузку, что и арка. Величина, обратная расперу  $H$ , является при этом коэффициентом пропорциональности.

Определим рациональную ось трехшарнирной арки при действии на арку вертикальной равномерно распределенной нагрузки (рисунок 4.14,а).

Опорные реакции в арке в этом случае равны:

$$R_A = R_B = R = \frac{ql}{2}; \quad H = \frac{ql^2}{8f}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении  $x$  эквивалентной балки определим как сумму моментов внешних сил, приложенных к балке слева от сечения  $x$ :

$$M_x^0 = \sum M_x^{\text{лев}} = \frac{ql}{2}x - (qx)\frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l-x).$$

Поделив полученное выражение на распер, получим уравнение рациональной оси трехшарнирной арки при равномерной по пролету нагрузке:

$$y(x) = \frac{M_x^0}{H} = \frac{qx(l-x)}{2} \frac{8f}{ql^2}.$$

Или окончательно

$$y(x) = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение квадратной параболы. Параболическая арка при равномерно распределенной по пролету нагрузке является безмоментной. В её сечениях возникают только продольные силы.

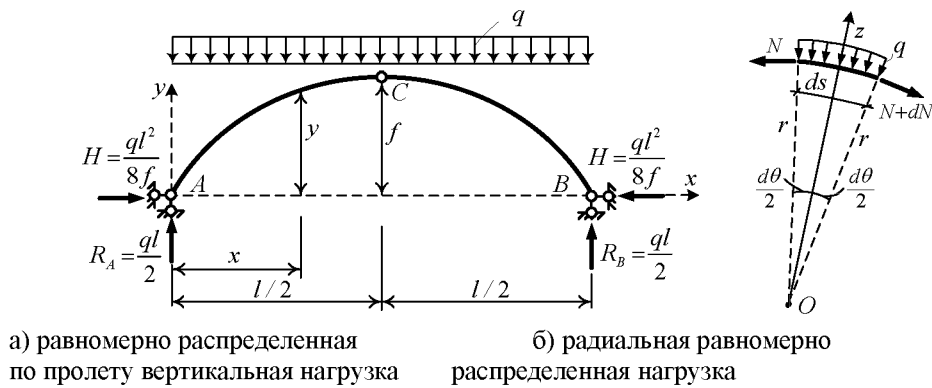


Рисунок 4.14

В ключе (в середине пролета) арки продольная сила равна

$$N_C = -H = -\frac{ql^2}{8f}$$

В пятах (опорных сечениях) продольные силы равны

$$N_A = N_B = \sqrt{R^2 + H^2} = -\frac{ql}{2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}}$$

Если арка очерчена по дуге окружности, то из условий равновесия бесконечно малого элемента арки длиной  $ds$  можно доказать, что круговая ось арки будет рациональной при нагружении арки равномерно распределенной радиальной нагрузкой (рисунок 4.14,б). При равномерной радиальной нагрузке в круговой арке изгибающие моменты отсутствуют, а продольные силы будут постоянны по длине арки и равны

$$N = -qr$$

Предлагаем читателю выполнить соответствующие доказательства самостоятельно.

#### 4.6. Определение опорных реакций и усилий в трехшарнирных рамах

Рассмотрим процесс определения опорных реакций в трехшарнирной раме с опорами в разном уровне (рисунок 4.15).

Рама загружена горизонтальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 4$  кН/м и вертикальной сосредоточенной силой  $F = 12$  кН. На рисунке 4.15 показаны предполагаемые направления опорных реакций.

Составим сумму моментов всех внешних сил относительно опоры В:

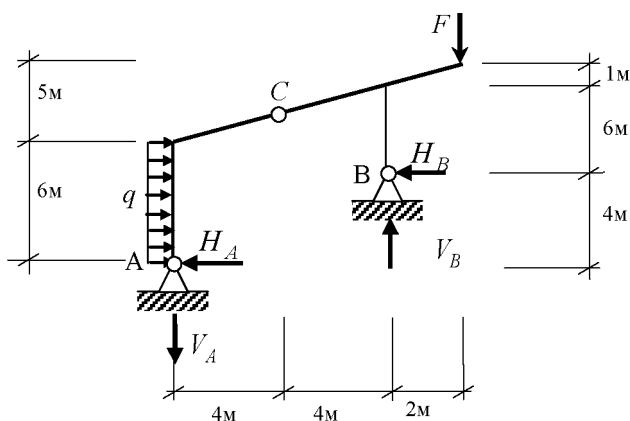
$$\sum M_B = -4 \cdot 6 \cdot 1 + 12 \cdot 2 - V_A \cdot 8 + H_A \cdot 4 = 0.$$

Так как в уравнении содержатся две неизвестных величины  $V_A$  и  $H_A$ , составим второе уравнение в виде суммы моментов только левых сил относительно шарнира С:

$$\sum M_C^{лев} = -4 \cdot 6 \cdot 5 - V_A 4 + H_A 8 = 0,$$

В полученное уравнение вошли те же две неизвестные величины  $V_A$  и  $H_A$ . Решая систему двух совместных уравнений, найдем значения опорных реакций правой опоры А:

$$V_A = 10 \text{ кН}; \quad H_A = 20 \text{ кН}.$$



1

Рисунок 4.15

Соответственно, реакции опоры В найдем из суммы моментов всех внешних сил относительно опоры А и суммы моментов только правых сил относительно промежуточного шарнира С:

$$\sum M_A = 4 \cdot 6 \cdot 3 + 12 \cdot 10 - V_B 8 - H_B 4 = 0,$$

$$\sum M_C^{права} = 12 \cdot 6 - V_B 4 + H_B 4 = 0.$$

Решая полученную систему двух уравнений, найдем

$$V_B = 22 \text{ кН}; \quad H_B = 4 \text{ кН}.$$

Вычисленные значения всех опорных реакций положительны. Следовательно, их направления, указанные на рисунке 4.15, действительны.

Выполним проверку полученных результатов. Составим сумму проекций всех сил на оси  $X$  и  $Y$ , а также сумму моментов всех внешних сил относительно, допустим, точки  $D$  в середине левой стойки (момент от распределенной нагрузки и момент от реакции  $V_A$  в этой точке равны нулю, что уменьшает объем вычислений):

$$\sum X = 4 \cdot 6 - 20 - 4 = 24 - 24 = 0,$$

$$\sum Y = -10 + 22 - 12 = -22 + 22 = 0,$$

$$\sum M_D = 20 \cdot 3 + 12 \cdot 10 - 22 \cdot 8 - 4 \cdot 1 = 180 - 180 = 0.$$

Все три проверочных уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Подводя итоги, можно рекомендовать следующие правила вычисления опорных реакций в произвольных трехшарнирных арках и других трехшарнирных системах при произвольных внешних нагрузках.

Обычно для вычисления четырех опорных реакций составляют четыре уравнения, а для проверки результатов еще три проверочных уравнения.

Опорные реакции левой опоры ( $V_A$ , и  $H_A$ ) вычисляют из двух уравнений.

Первое – это сумма моментов всех внешних сил относительно правой опоры  $B$ :

$$\Sigma M_B = 0 .$$

Второе – это сумма моментов относительно промежуточного шарнира  $C$  только внешних сил, расположенных слева от шарнира  $C$ :

$$\Sigma M_C^{лев} = 0 .$$

Опорные реакции правой опоры ( $V_B$ , и  $H_B$ ) вычисляют из следующих двух уравнений.

Третье – это сумма моментов всех внешних сил относительно правой опоры  $A$ :

$$\Sigma M_A = 0 .$$

Четвертое – это сумма моментов относительно промежуточного шарнира  $C$  только внешних сил, расположенных справа от шарнира  $C$ :

$$\Sigma M_C^{прав} = 0 .$$

Для проверки результатов применяют суммы проекций всех внешних сил на координатные оси и сумму моментов всех внешних сил относительно любой точки, не используемой как моментная точка ранее.

После определения опорных реакций эпюры внутренних сил в стержнях трехшарнирной рамы строятся, как в любых других стержневых системах. Вычисленные опорные реакции рассматриваются как известные внешние силы. Внутренние силы вычисляются по общим правилам в назначенных характерных сечениях. Для рассматриваемой рамы характерных сечений с ненулевыми изгибающими моментами выбрано шесть (рисунок 4.16): это начало и конец каждого стержня, середина участка приложения распределенной нагрузки.

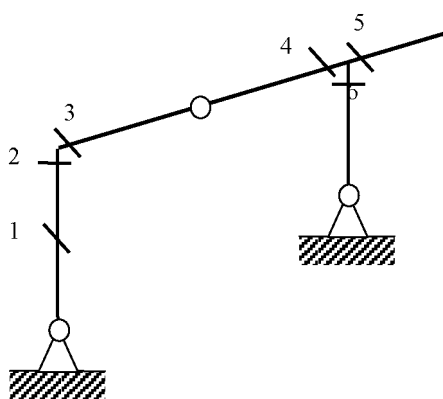


Рисунок 4.16

Вычисляем в указанных сечениях изгибающие моменты:

$$M_1 = \Sigma M_1^{лев} = 20 \times 3 - 4 \times 3 \times 1.5 = 42 .$$

$$M_2 = \sum M_2^{\text{лев}} = 20 \times 6 - 4 \times 6 \times 3 = 48.$$

$$M_3 = \sum M_3^{\text{лев}} = 20 \times 6 - 4 \times 6 \times 3 = 48.$$

$$M_4 = \sum M_4^{\text{лев}} = 20 \times 10 - 4 \times 6 \times 7 - 10 \times 8 = -48.$$

$$M_5 = -\sum M_5^{\text{прав}} = -(12 \times 2) = -24.$$

$$M_6 = \sum M_6^{\text{нижн левых}} = 4 \times 6 = 24$$

Эпюра изгибающих моментов построена на рисунке 4.17.

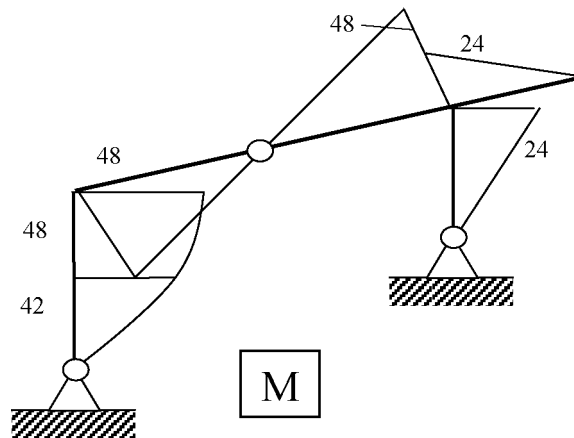


Рисунок 4.17

Вычисление поперечных и продольных сил начнем с опорного сечения А:

$$Q_A = H_A = 20 \quad N_A = V_A = 10.$$

На участке А-1, где приложена равномерно распределенная нагрузка, поперечные силы линейно убывают, а продольные силы постоянны. Поэтому вычисляем:

$$Q_2 = 20 - 4 \times 6 = -4, \quad N_2 = N_A = 10.$$

На наклонном участке 3-4 поперечные и продольные силы постоянны. Тангенс угла  $\alpha$  наклона к горизонту стержня на этом участке равен  $\operatorname{tg} \alpha = 4/8 = 0.5$ . Следовательно  $\sin \alpha = 0.4472$ , и  $\cos \alpha = 0.8944$ . Далее вычисляем

$$Q_3 = Q_4 = -10 \times 0.8944 + (20 - 4 \times 6) \times 0.4472 = -10.73$$

$$N_3 = N_4 = 10 \times 0.4472 + (20 - 4 \times 6) \times 0.8944 = 0.8944$$

На участке наклонной консоли поперечные и продольные силы также постоянны. Достаточно их вычислить в сечении 5 через правые внешние силы:

$$Q_5 = 12 \times 0.8944 = 10.73, \quad N_5 = -12 \times 0.4472 = -5.366$$

На правой стойке поперечные и продольные силы также постоянны. Вычисляем

$$Q_6 = Q_B = 4, \quad N_6 = N_B = -22.$$





## Тема 5. Расчет плоских статически определимых ферм

### 5.1. Понятие о фермах, их классификация, анализ структуры

Фермой принято называть геометрически неизменяемую стержневую систему, составленную, как правило, из прямолинейных стержней, соединенных по своим концам идеальными, без трения шарнирами.

Другими словами, расчетной схемой фермы является геометрически неизменяемая шарнирно-стержневая система (рисунки 5.1-5.3).

Фермой часто называют и реальное сооружение с жесткими узлами (сварными или монолитными), которое остается геометрически неизменяемым после условной замены всех жестких узлов шарнирными (рисунок 5.4).

Стержни, расположенные по верхнему и нижнему контурам фермы, образуют ее пояса. Стержни, соединяющие пояса, образуют решетку фермы. Наклонные стержни решетки называются раскосами. Вертикальные стержни решетки называются стойками (или подвесками, если они растянуты; или распорками, если ферма башенного типа).

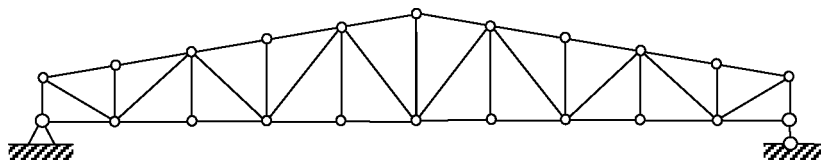


Рисунок 5.1. Двухскатная ферма с треугольной решеткой и дополнительными стойками

Классификация расчетных схем ферм, как шарнирно-стержневых систем может быть проведена по многим признакам.

Фермы, как и другие сооружения, подразделяют на плоские (рисунок 5.1 - 5.3) и пространственные (рисунок 5.4).

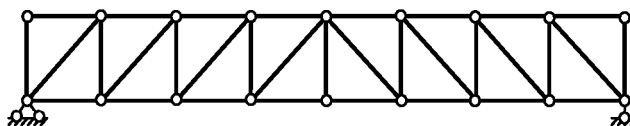


Рисунок 5.2. Ферма с параллельными поясами и раскосной решеткой

Фермы можно подразделять по условиям опирания на безраспорные, или балочные (рисунок 5.1, 5.2, 5.5); и распорные, или арочные (рисунок 5.3).

По очертанию поясов фермы подразделяются на фермы с параллельными поясами (рисунок 5.2 и 5.5,а) и полигональными поясами (рисунок 5.5,б), фермы треугольные, трапециевидные (рисунок 5.1), параболические, круговые (рисунок 5.3) и т. д.

По типу решетки фермы делятся на фермы с треугольной решеткой (рисунок 5.1; 5.3), фермы с раскосной решеткой (рисунок 5.2;), фермы с крестовой решеткой (рисунок 5.5,а), фермы со смешанной решеткой (рисунок 5.5,б).

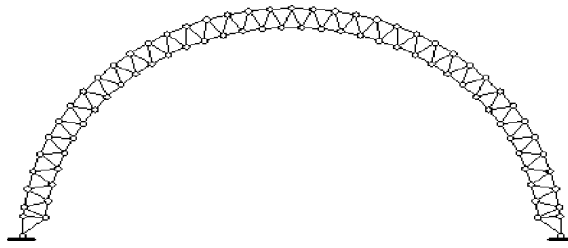


Рисунок 5.3. Сквозная арка.

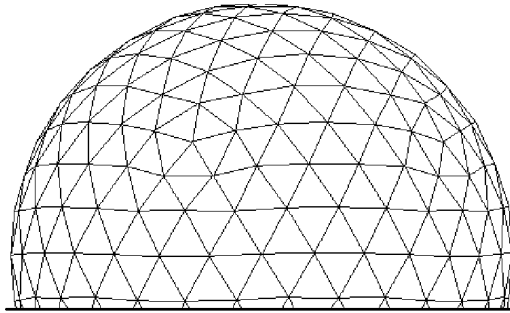


Рисунок 5.4. Решетчатый купол

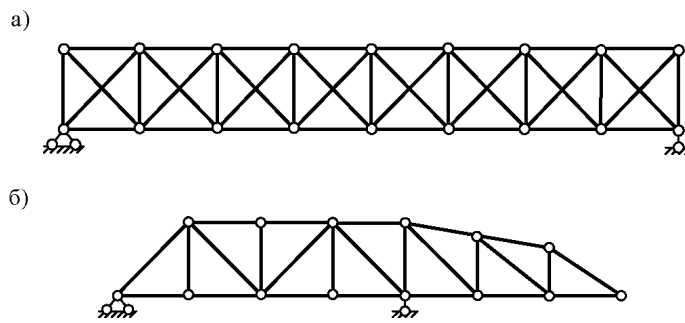


Рисунок 5.5: а) балочная ферма с крестовой решеткой, б) консольно-балочная ферма со смешанной решеткой

Приведенная здесь классификация является далеко не полной. В реальных сооружениях могут применяться фермы самых разных видов.



Иллюстрация 5.1. Балочные фермы однопролетного моста

## 5.2. Степень свободы и степень изменяемости плоских ферм

Необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости фермы как шарнирно-стержневой системы состоит в равенстве нулю ее степени свободы ( $W = 0$ ) или, если ферма отделена от ее опор, в равенстве нулю ее степени изменяемости ( $V = 0$ ).

Будем полагать, что ферма в общем случае состоит из  $Y$  узлов, соединенных между собой  $C$  стержнями фермы и присоединена к опорам  $C_o$  опорными стержнями. Тогда для плоской фермы ее степень свободы  $W$  относительно системы отсчета, связанной с опорной поверхностью, равна

$$W = 2Y - C - C_o,$$

где  $2Y$  – степень свободы  $Y$  свободных узлов как материальных точек;  $C$  – число простых связей, налагаемых на систему путем соединения узлов стержнями фермы, устраняющих  $C$  степеней свободы;  $C_o$  – число простых опорных связей, также устраняющих  $C_o$  степеней свободы системы.

Степень свободы плоской системы, отделенной от опор (не имеющей опорных связей), состоит из степени свободы ее как жесткого целого (диска), равной трем (на плоскости), и степени изменяемости  $V$  ее элементов относительно друг друга (внутренней изменяемости). Таким образом, можем записать

$$W = 3 + V,$$

откуда

$$V = W - 3.$$

Подставив в последнюю формулу выражение для  $W$  при условии  $C_o = 0$ , получим окончательную формулу для вычисления степени изменяемости фермы (шарнирно-стержневой системы), отсоединенной от опор,

$$V = 2Y - C - 3.$$

Если степень свободы (степень изменяемости) фермы положительна (больше нуля)

$$W > 0 \quad (V > 0),$$

то ферма геометрически изменяема. В ее структуре недостает  $W$  связей (стержней).

Если степень свободы (степень изменяемости) фермы отрицательна (меньше нуля)

$$W < 0 \quad (V < 0),$$

то ферма формально содержит избыточное количество связей и является, опять-таки формально, статически неопределимой.

Если степень свободы (степень изменяемости) фермы равна нулю

$$W = 0 \quad (V = 0),$$

то ферма формально имеет необходимое для геометрической неизменяемости количество стержней (связей) и может, опять-таки формально, быть статически определимой.

Так балочная ферма (рисунок 5.1) имеет 22 узла, по 10 стержней в верхнем и нижнем поясах, 10 раскосов и 11 стоек. Опирается ферма на три опорных стержня. Её степень свободы

$$W = 2 \times 22 - 41 - 3 = 44 - 44 = 0.$$

Значит, ферма имеет необходимое количество стержней и опорных связей для геометрической неизменяемости и статической определимости.

Ферма с параллельными поясами и крестовой решеткой состоит из 18 узлов, связанных 41 стержнем, и опирается, как простая балка, на три опорных стержня. Её степень свободы

$$W = 2 \times 18 - 41 - 3 = 36 - 44 = -8.$$

Следовательно, данная ферма имеет 8 избыточных связей и является статически неопределимой.

### 5.3. Способы образования плоских ферм

Как отмечалось в подразделе 1.1.5, для окончательного заключения о геометрической неизменяемости и о статической определимости фермы, как и любой стержневой системы, необходим анализ ее структуры, анализ законов, по которым она составлена. Фермы только правильной структуры могут быть действительно геометрически неизменяемыми ( $W \leq 0$ ) и статически определимыми ( $W = 0$ ).

К фермам (системам) неправильной структуры относятся системы частично статически неопределимые и частично геометрически изменяемые, а также системы мгновенно изменяемые. Для таких систем понятие степени свободы или степени изменяемости становится неопределенным, не имеющим смысла.

Способы, правила образования ферм заведомо правильной структуры, остаются такими же, как и для любых других стержневых систем. Напомним основные из них.

1. Степень свободы фермы не изменится, если к ней присоединить (отсоединить) узел с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой (способ диады). В качестве стержней могут выступать заведомо геометрически неизменяемые и статически определимые фермы.

2. Три стержня (три диска), соединенные тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют внутренне геометрически неизменяемую систему (единый диск) без лишних связей.

3. Две фермы (два диска), соединенные тремя стержнями, лежащими на прямых, не пересекающихся в одной точке и не параллельных все три сразу между собой, образуют единую систему (диск). В такой системе суммарное количество избыточных связей не изменяется, а суммарная степень свободы снижается на три единицы.

4. Две фермы (два диска), соединенные общим шарниром и стержнем, не проходящим через общий шарнир, образуют единую ферму (единый диск), при этом общее количество избыточных связей не увеличивается, а общая степень свободы снижается на три единицы.

По своей структуре фермы (рисунок 5.1, 5.2 и 5.5,б) составлены из стержневых треугольников, представляют собой диски без лишних связей. Диски опираются на балочные опоры (в сумме три опорных стержня, не параллельных, не пересекающихся в одной точке). Следовательно, все данные фермы геометрически неизменяемы и статически определимы.

Арочная ферма (рисунок 5.3) также составлена из стержневых треугольников, образующих круговой диск. Но этот один диск опирается на две шарнирно неподвижные опоры (в сумме четыре опорных связи). Следовательно, одна из опорных связей (горизонтальная) лишняя. Данная сквозная арка статически неопределима.

Ферма с крестовой решеткой (рисунок 5.5,а) по своей структуре отличается от геометрически неизменяемой и статически определимой фермы с раскосной решеткой (рисунок 5.2) наличием дополнительных раскосов. Следовательно, дополнительные раскосы представляют собой лишние связи. Такая ферма геометрически неизменяемая, но статически неопределимая.

#### 5.4. Определение усилий в стержнях ферм от неподвижных нагрузок

Определение усилий в стержнях плоских ферм, как и в других системах (балках, рамах, арках), выполняется методом сечений. Суть метода сечений для ферм заключается в следующем. Ферма разрезается (разделяется) на две (рисунок 5.6,а) или несколько частей так, чтобы был рассечен стержень, в котором ищется усилие. Для фермы, находящейся в равновесии, любая ее часть также должна быть уравновешена. В уравнения равновесия, составленные для выбранной части фермы, наряду с внешними узловыми нагрузками входят и усилия в разрезанных стержнях. Усилия (продольные силы) в разрезанных стержнях обычно направляют от узла к разрезу, что соответствует растяжению стержней (рисунок 5.6,б). Уравнения равновесия составляют в такой форме и очередности, чтобы в каждое из них, по возможности, входило только одно неизвестное усилие. Знаки найденных усилий сохраняют. Это позволяет по знаку усилия определить вид напряженного состояния стержня: растяжение или сжатие. Знак плюс соответствует растяжению в стержне, Знак минус – сжатию в стержне.

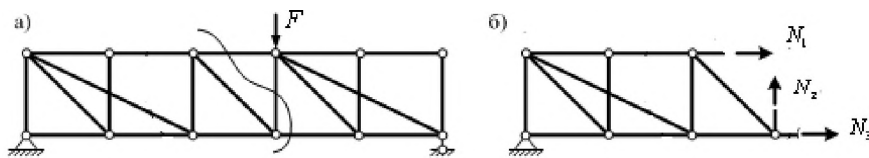


Рисунок 5.6

Рассмотрим процесс применения метода сечений на примере стропильной трапециевидной фермы с треугольной решеткой и дополнительными стойками, примыкающими к верхнему поясу. Длина пролета фермы равна 24 м. Высота фермы над опорами 2 м. Высота фермы в середине пролета 5 м. Загружена ферма шестью вертикальными узловыми силами по 24 кН (рисунок 5.7).

Предварительно найдем опорные реакции. Реакцию левой опоры найдем из суммы моментов всех сил относительно правой опорной точки:

$$V_A = \frac{24 \times (22 + 20 + 18 + 16 + 14 + 12)}{24} = 102(\text{кН}).$$

Соответственно реакцию правой опоры найдем из суммы моментов всех сил относительно левой опорной точки:

$$V_B = \frac{24 \times (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12)}{24} = 42(\text{кН}).$$

Выполним проверку в виде суммы проекций активных и реактивных сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 102 + 42 - 6 \times 24 = 144 - 144 = 0.$$

Усилия в стержнях фермы можно определять в произвольном порядке. Проведем, например, разрез через пятую панель верхнего пояса и третью панель нижнего пояса, как показано на рисунке 5.7. Рассматривать будем равновесие левой части. Усилие  $N_1$  в разрезанном стержне третьей панели нижнего пояса найдем из суммы моментов всех левых сил относительно моментной точки, где пересекаются разрезанный раскос и разрезанный

стержень верхнего пояса. Высота фермы в этой точке на расстоянии 10 м от левой опоры равна 4.5 м. Это будет плечо усилия  $N_1$  в разрезанном стержне нижнего пояса. Разрешая уравнение равновесия относительно  $N_1$ , найдем

$$N_1 = \frac{102 \times 10 - 24 \times 8 - 24 \times 6 \times -24 \times 4 - 24 \times 2}{4.5} = 120(\text{кН}) .$$

Усилие  $N_2$  в разрезанном стержне верхнего пояса найдем из суммы моментов левых сил относительно узла пересечения разрезанного раскоса и разрезанного стержня нижнего пояса, расположенного на расстоянии 8 м от левой опоры. Высота фермы в этом узле равна 4 м. Плечо усилия  $N_2$  в верхнем поясе относительно этой моментной точки, расположенной на нижнем поясе, равно проекции высоты фермы в этой точке на нормаль к верхнему поясу. Вычисляем тангенс угла  $\theta$  наклона верхнего пояса к горизонту, а через него синус и косинус этого угла:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{5-2}{12} = 0.25, \quad \sin \theta = 0.2425, \quad \cos \theta = 0.9701 .$$

Вычисляем плечо  $\rho_2$  усилия  $N_2$  относительно моментной точки

$$\rho_2 = 4 \times 0.9701 = 3.880 .$$

Итак, из суммы моментов левых сил относительно моментной точки находим усилие в разрезанном стержне верхнего пояса

$$N_2 = -\frac{102 \times 8 - 24 \times 6 - 24 \times 4 - 24 \times 2}{3.880} = -136.08(\text{кН}) .$$

Отрицательное значение найденного усилия означает, что стержень верхнего пояса фермы сжат.

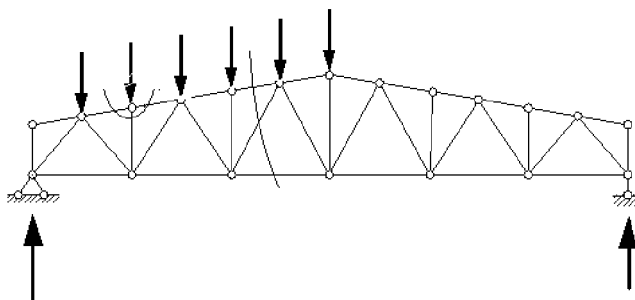


Рисунок 5.7

Чтобы найти усилие  $N_3$  в разрезанном раскосе, вычислим синус угла  $\alpha$  наклона этого стержня к горизонту, а затем и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{4.5}{\sqrt{4.5^2 + 2^2}} = 0.9138, \quad \cos \alpha = 0.4062 .$$

Спроектируем на вертикальную ось все силы, действующие на левую часть:

$$\sum Y = 102 - 4 \times 24 + (-136.08 \times 0.2425) + N_3 \times 0.9138 = 0 .$$

Откуда найдем

$$N_3 = -\frac{102 - 96 - 33.00}{0.9138} = 29.55(\text{кН}).$$

Выполним проверку вычислений, спроектировав все силы, действующие на левую часть, на горизонтальную ось:

$$\begin{aligned}\sum X &= N_1 + N_2 \cos \theta + N_3 \cos \alpha = \\ &= 120 - 136.08 \times 0.9701 + 29.55 \times 0.4062 = \\ &= 120 - 132.01 + 12.00 = -0.01.\end{aligned}$$

Проверка показала, что вычисления выполнены практически точно. Погрешность составляет всего лишь единицу пятой значащей цифры одного из слагаемых.

Подобным образом можно найти усилия и в остальных стержнях фермы. Предлагаем читателю выполнить необходимые действия самостоятельно.

В ряде случаев разрезы (сечения) приходится проводить так, что от фермы отсекается только один узел. Например, третий слева узел верхнего пояса фермы (рисунок 5.7). Вырезанный узел показан на рисунке 5.8. Выполненный разрез демонстрирует частный случай метода сечений, называемый методом вырезания узлов. Все силы, действующие на вырезанный одиночный узел, сходятся в одной точке, в самом вырезанном узле. Для такой системы сил, проходящих через одну точку, можно составить только два независимых уравнения равновесия. Следовательно, узлы следует вырезать в такой очередности, чтобы в каждом вырезанном узле было не более двух неизвестных сил.

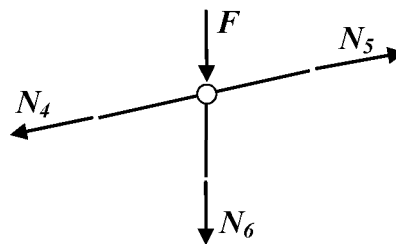


Рисунок 5.8

Для рассматриваемого вырезанного узла из суммы проекций на горизонтальную ось (рисунок 5.8)

$$\sum X = -N_4 \cos \theta + N_5 \cos \theta = 0$$

следует только равенство усилий в стержнях смежных панелях верхнего пояса

$$N_4 = N_5.$$

Значения же этих усилий остаются неизвестными. Их придется найти из других уравнений равновесия, например, так, как это было показано выше.

Зато из суммы проекций на вертикальную ось

$$\sum Y = -F - N_6 = 0$$

легко находим



$$N_6 = -F = -24(\text{кН}) .$$

Следовательно, вторая слева стойка фермы сжата силой 24 кН.

Очень часто метод вырезания узлов позволяет визуально, без вычислений установить стержни с нулевыми усилиями, стержни с одинаковыми усилиями, стержни с наперед известными усилиями. Рассмотрим такие наиболее часто встречающиеся частные случаи равновесия узлов:

1. Двухстержневой ненагруженный узел (рисунок 5.9,а). Усилия в обоих стержнях равны нулю.
2. Двухстержневой узел с нагрузкой вдоль одного из стержней (рисунок 5.9,б). Усилие в стержне, лежащем на одной прямой с внешней силой, равно этой силе. Усилие в одиночном стержне нулевое.
3. Трехстержневой ненагруженный узел (рисунок 5.9,в). Усилия в стержнях, лежащих на одной прямой, равны. Усилие в одиночном стержне нулевое.
4. Трехстержневой узел с нагрузкой вдоль одиночного стержня (рисунок 5.9,г). Усилия в стержнях, лежащих на одной прямой, равны. Усилие в одиночном стержне равно внешней силе.
5. Четырехстержневой ненагруженный узел со стержнями, попарно лежащими на одной прямой (рисунок 5.9,д). Усилия в попарно лежащих на одной прямой стержнях одинаковы.
6. Четырехстержневой ненагруженный узел с двумя стержнями, лежащими на одной прямой, и двумя другими, равнонаклонными к первым двум (рисунок 5.9,е). Усилия в равнонаклонных стержнях равны по значению и противоположны по знаку.

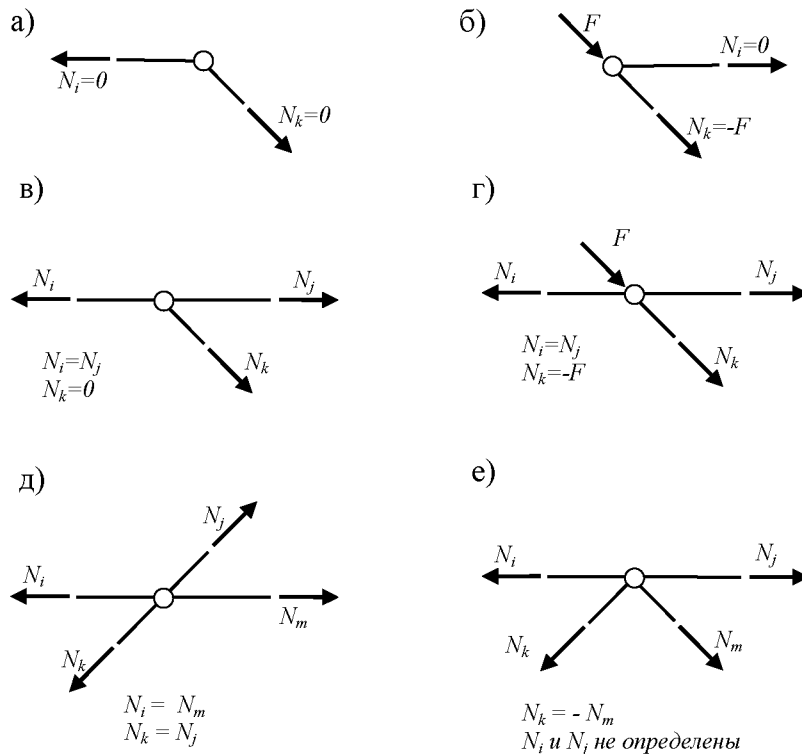


Рисунок 5.9. Частные случаи равновесия узлов

Так, основываясь на рассмотренных частных случаях равновесия узлов, можно в рассматриваемой ферме (рисунок 5.7) сразу установить, что опорные стойки и крайние стержни верхнего пояса не работают (случай 1). Также не работают две стойки правого полупролета фермы (случай 3). Вторая и третья стойки левого полупролета сжаты силой 24

кН (случай 4). Усилия в стержнях верхнего пояса, примыкающие к промежуточным стойкам, попарно равны (случай 4 и 3).

Предлагаем читателю установить неработающие стержни в ферме, изображенной на рисунке 5.6,а.

Не всегда в стержнях фермы удастся вычислить усилия сразу, из одного уравнения. Иногда приходится выполнять несколько сечений и составлять соответствующее количество уравнений. Примером такого стержня может служить центральная стойка двухскатной фермы (рисунок 5.7).

Чтобы найти усилие в этой стойке, необходимо сначала найти методом моментной точки усилие в одном из примыкающих стержней верхнего пояса (первое сечение и первое уравнение). Предлагаем проделать это самостоятельно. Затем вырезать (второе сечение) центральный узел верхнего пояса (рисунок 5.10) и составить еще два уравнения.

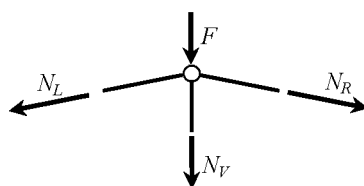


Рисунок 5.10

Второе уравнение:

$$\sum X = -N_L \cos \theta + N_R \cos \theta = 0.$$

Откуда следует

$$N_L = N_R = N.$$

где значение  $N$  со своим знаком уже найдено из первого уравнения.

Третье уравнение:

$$\sum Y = -2N \sin \theta - F - N_V = 0.$$

Откуда следует

$$N_V = -F - 2N \sin \theta.$$

Таким образом, усилие в центральной стойке методом двух сечений выражается через узловую силу и усилия в примыкающих стержнях верхнего пояса.

### 5.5. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм

Линии влияния усилий в стержнях балочных ферм (рисунок 5.11,а) строят, как правило, методом сечений.

Построим сначала линии влияния опорных реакций. Как и в простой балке для определения опорных реакций балочной фермы составим уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0; \quad -1 x_B + R_A 5d = 0; \quad R_A = \frac{x_B}{5d}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B 5d + 1 x_A = 0; \quad R_B = \frac{x_A}{5d}.$$

Полученные выражения для  $R_A$  и  $R_B$  представляют собой функции независимых переменных соответственно  $x_B$  и  $x_A$ . Их графики приведены на рисунках 5.11,б и 5.11,в.

Таким образом, линии влияния опорных реакций в балочной ферме строятся точно так же, как в соответствующей простой балке. Причем линии влияния опорных реакций не зависят от того, по какому поясу движется нагрузка: нижнему или верхнему. Усилия же в стержнях фермы, как будет показано ниже, зависят от того, какой пояс фермы является грузовым: верхний или нижний.

Предполагая для определенности движение единичной силы по нижнему поясу, построим линию влияния усилия  $N_1$  в раскосе четвертой панели (очередность рассмотрения стержней и построения для них линий влияния усилий может быть произвольной).

Для определения усилия  $N_1$  проведем сечение I–I и воспользуемся уравнением равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось. Это позволит исключить из уравнения равновесия неизвестные усилия в разрезанных горизонтальных стержнях нижнего и верхнего поясов. В уравнение проекций на вертикальную ось будут входить только вертикальные и наклонные силы: единичная сила, опорные реакции и усилие в раскосе. При этом подвижная единичная сила может находиться как на левой части фермы, так и на правой. Рассмотрим возможные варианты.

Предполагая движение единичной силы только слева от рассеченной панели (р. п.), рассмотрим равновесие правой части фермы.

Проектируя на вертикальную ось все силы, действующие на правую часть фермы, получим:

$$\sum Y^{прав} = -N_1 \cos \alpha + R_B = 0;$$

$$N_1 = \frac{R_B}{\cos \alpha}; \quad \text{л. в. } N_1 = (\text{л. в. } R_B) / \cos \alpha.$$

То есть линия влияния усилия  $N_1$  на участке А–10 будет иметь такой же вид, как линия влияния опорной реакции  $R_B$ , все ординаты которой разделены на  $\cos \alpha$  (угол  $\alpha$  находится из геометрии системы).

При движении единичной силы только справа от рассеченной панели (на участке 11–12) рассмотрим равновесие левой части фермы:

$$\sum Y^{лев} = +N_1 \cos \alpha + R_A = 0;$$

$$N_1 = -\frac{R_A}{\cos \alpha}; \quad \text{л. в. } N_1 = -(\text{л. в. } R_A) / \cos \alpha.$$

Получаем, что линия влияния усилия  $N_1$  на участке 11–12 будет иметь вид опорной реакции  $R_A$ , все ординаты которой необходимо разделить на  $\cos \alpha$ .

При движении единичной силы на участке рассеченной панели (на участке 10–11) усилия в стержнях фермы в соответствии с принципом узловой передачи нагрузки будут изменяться по линейному закону. Поэтому для ее построения на этом участке рассматриваемой линии влияния достаточно соединить прямой линией ординаты линии влияния слева и справа от рассеченной панели. Этот прямолинейный отрезок называют переходной прямой.

Окончательный вид линия влияния усилия  $N_1$  представлен на рисунке 5.11,г.

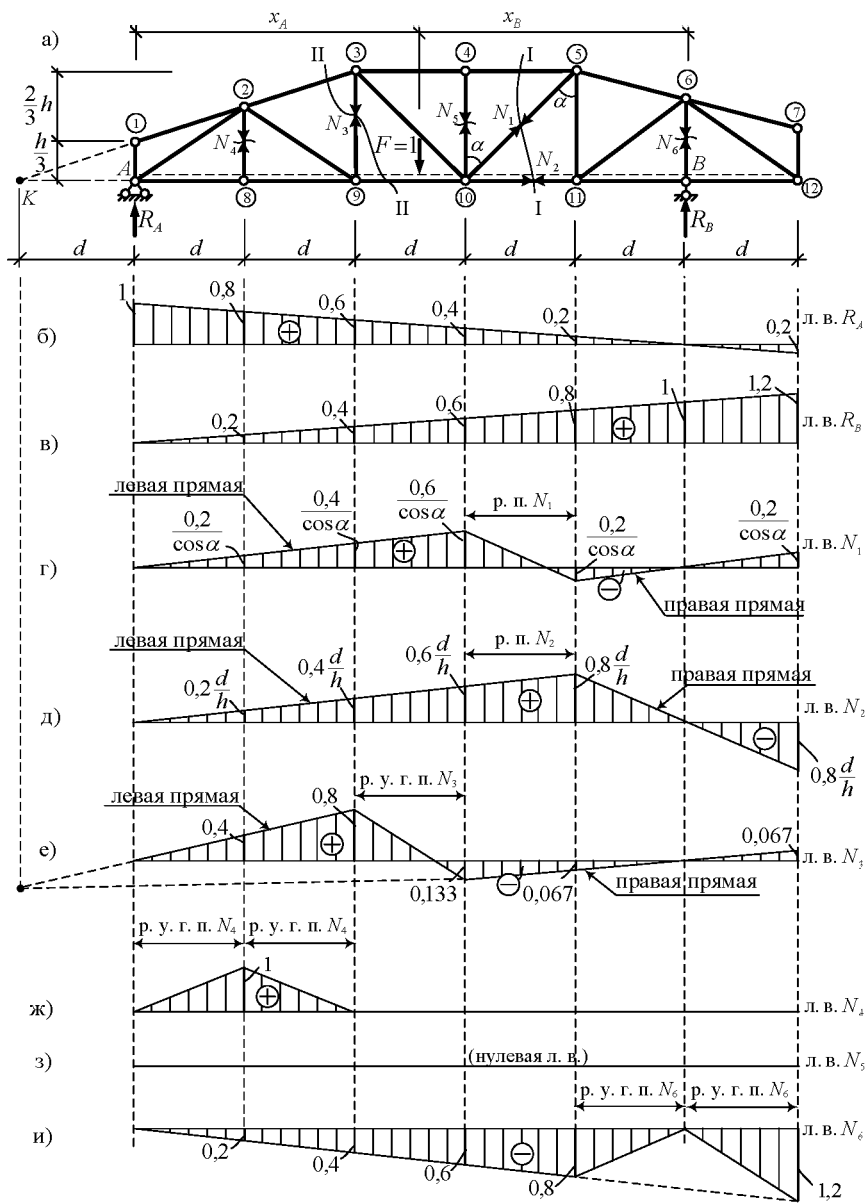


Рисунок 5.11

Для определения усилия  $N_2$  в стержне нижнего пояса 10–11 можно использовать то же сечение I–I (рисунок 5.11,а) и способ моментной точки. Моментную точку выберем в узле 5, в котором пересекаются разрезанные стержни 4–5 и 10–5.

Предполагая, что единичная сила располагается слева от рассеченной панели 10–11, рассматриваем равновесие правой части фермы:

$$\sum M_5^{прав} = 0; \quad N_2 h - R_B d = 0;$$

$$N_2 = R_B \frac{d}{h}; \quad \text{л. в. } N_2 = (\text{л. в. } R_B) \frac{d}{h};$$

При расположении единичной силы справа от рассеченной панели 10–11 рассматриваем равновесие левой части фермы:

$$\sum M_5^{лев} = 0; \quad -N_2 h + R_A 4d = 0;$$

$$N_2 = R_A \frac{4d}{h}; \quad \text{л. в. } N_2 = (\text{л. в. } R_A) \frac{4d}{h};$$

На участке рассеченной панели 10–11 проводим переходную прямую.

Линия влияния усилия  $N_2$  показана на рисунке 5.11, д.

Анализ этой линии влияния показывает, что ее левая и правая прямые пересекаются под моментной точкой. Эта закономерность будет выполняться при использовании способа моментной точки и в других случаях.

Для определения усилия  $N_3$  в стержне 3–9 проведем сечение II–II (рисунок 5.11,а) и воспользуемся также способом моментной точки, в качестве которой примем точку  $K$  пересечения осей разрезанных стержней 2–3 и 9–10. Рассеченные сечением II–II панели нижнего и верхнего поясов располагаются на разных вертикалях. В таких случаях положение подвижной силы следует определять относительно рассеченных панелей грузового пояса, то есть пояса, по которому движется единичная сила. В данном случае при движении силы понизу рассеченная панель грузового (нижнего) пояса находится между узлами 9 и 10. Если же единичная сила будет двигаться поверху, то грузовым будет верхний пояс, а рассеченная панель – между узлами 2 и 3.

Рассмотрим движение единичной силы понизу.

Если единичная сила движется слева от рассеченной панели (на участке А–9), то, как и ранее, рассматриваем равновесие правой части фермы:

$$\sum M_K^{npas} = 0; \quad N_3 3d - R_B 6d = 0;$$

$$N_3 = R_B \frac{6d}{3d} = 2R_B; \quad \text{л. в. } N_3 = (\text{л. в. } R_B) \cdot 2;$$

Когда единичная сила движется справа от рассеченной панели грузового пояса (на участке между узлами 10 и 12), рассмотрим равновесие левой части фермы:

$$\sum M_K^{neg} = 0; \quad -N_3 3d - R_A d = 0;$$

$$N_3 = -0,333R_A; \quad \text{л. в. } N_3 = (\text{л. в. } R_A) \cdot (-0,333);$$

На участке рассеченной панели грузового пояса (9–10) проводим переходную прямую. Линия влияния усилия  $N_3$  показана на рисунке 5.11,е. Ее левая и правая ветви пересекаются под моментной точкой  $K$ .

При построении линии влияния усилия  $N_4$  в стержне 2–8 усилие  $N_4$  определим путем вырезания узла 8 (рисунок 5.11,а). Узел 8 находится на нижнем поясе фермы, по которому движется единичная сила. Возможны три варианта расположения единичной силы по отношению к узлу 8.

1. Сила располагается прямо в вырезанном узле 8. Имеет место частный случай (рисунок 5.12). Рассматриваемый стержень растянут единичной силой, и усилие в нем  $N_4 = 1$ . На линии влияния под узлом откладываем единицу со знаком «плюс».

2. При расположении единичной силы вне вырезанного узла, слева или справа от разрезанных панелей нижнего пояса, или в любом из узлов верхнего пояса также имеем частный случай равновесия узла 8 (рисунок 5.13), и усилие  $N_4 = 0$ . На соответствующих участках ординаты линии влияния нулевые.

3. При движении единичной силы в пределах рассеченных панелей нижнего, грузового пояса имеет место узловая передача нагрузки, и на соответствующих участках линии влияния (А–8 и 8–9) необходимо провести переходные прямые

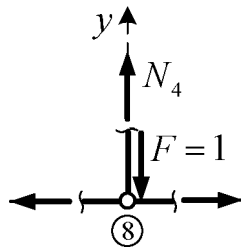


Рисунок 5.12

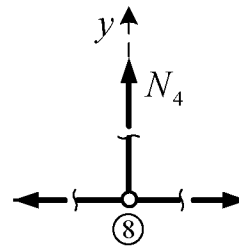


Рисунок 5.13

Окончательная линия влияния усилия  $N_4$  имеет вид, представленный на рисунок 5.11,ж.

Усилие  $N_5$  в стержне 4–10 проще всего определить, вырезав узел 4. Снова имеем частный случай равновесия узла 4. При любом положении единичной силы на грузовом, нижнем поясе фермы усилие  $N_5 = 0$ . Соответственно линия влияния  $N_5$  на всей длине фермы будет нулевой (рисунок 5.11,з), но при условии движения силы только по нижнему поясу, т. е. понизу. Предлагаем читателю самостоятельно построить линию влияния усилия  $N_5$  при движении единичной силы по верхнему поясу.

Рассмотрим процесс построения линии влияния усилия в опорной стойке 6 – B. Усилие  $N_6$  в этом стержне также легко определить методом вырезания опорного узла B, равновесие которого также представляет собой частный случай. Усилие  $N_6$  в опорной стойке уравнивает опорную реакцию  $R_B$ , но при условии, что в этом узле нет подвижной единичной силы.

Когда единичная сила находится в вырезанном опорном узле B (рисунок 5.14), из суммы проекций сил на вертикальную ось

$$\sum Y = N_6 + R_B - 1 = 0$$

следует

$$N_6 = 1 - R_B.$$

Таким образом, усилие в опорной стойке равно минус опорной реакции, если в опорном узле нет подвижной силы. Если подвижная сила находится в опорном узле, то усилие в опорной стойке равно нулю. Нагрузка воспринята опорой, и вся ферма не работает.

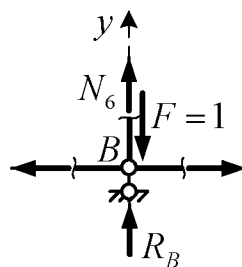


Рисунок 5.14

Линия влияния усилия  $N_6$  повторяет со знаком «минус» линию влияния опорной реакции  $R_B$ , когда единичная сила находится во всех узлах фермы, кроме опорного узла B. Когда же сила находится в узле B, ордината линии влияния усилия  $N_6$  равна нулю. На участках двух разрезанных панелей нижнего пояса находятся переходные прямые линии.

Итоговая линия влияния усилия  $N_6$ , представлена на рисунке 5.11,и.

## ТЕМА 6 РАСЧЕТ РАСПОРНЫХ ФЕРМ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

### 6.1. Расчет распорных ферм

В распорных фермах при действии только вертикальных нагрузок возникают не только вертикальные, но и горизонтальные составляющие опорных реакций. Последние и называют распором. Примерами распорных ферм являются фермы, показанные на рисунках 6.1 и 6.2,а.

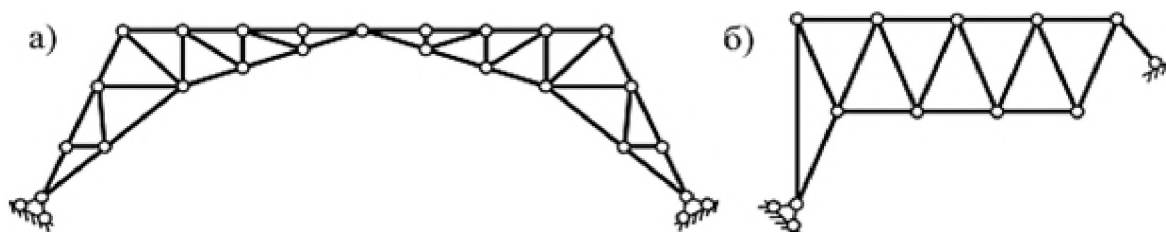


Рисунок 6.1

Фермы, представленные на рисунках 6.1,а и 6.2,а, называют арочными фермами, так как способ их образования подобен способу образования трехшарнирных арок.

Опорные реакции арочных ферм определяют так же, как в трехшарнирных арках и рамах. После определения опорных реакций усилия в стержнях распорных ферм от действия неподвижной нагрузки определяют теми же методами что и в балочных фермах.



Иллюстрация 6.1. Арочные фермы моста с ездой посередине

Рассмотрим особенности построения линий влияния усилий в стержнях распорных ферм.

Построим, например, линию влияния усилия  $N_1$  в стержне верхнего пояса фермы, показанной на рисунке 6.2,а. До этого необходимо построить линии влияния опорных реакций.

Вертикальную составляющую реакции шарнирно неподвижной опоры  $A$  определим из уравнения моментов всех сил, действующих на ферму, относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B = 0; \quad R_A l - 1(l - x_F) = 0; \quad R_A = 1 - \frac{x_F}{l}.$$

Полученная зависимость совпадает с соответствующей зависимостью для простой балки, поэтому линия влияния опорной реакции  $R_A$  строится как в простой балке (рисунок 6.2,б).

Аналогично получается зависимость для вертикальной составляющей реакции опоры  $B$ :

$$R_B = \frac{x_F}{l}.$$

Линия влияния реакции  $R_B$  показана на рисунке 6.2,в.

Горизонтальную составляющую опорных реакций, т.е. распор, определим, как в трехшарнирной арке, по формуле:

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

Следовательно, линия влияния распора есть линия влияния балочного изгибающего момента в сечении балки, расположенном под промежуточным шарниром арочной фермы, взятая с коэффициентом  $1/f$  (рисунок 6.2,г).

Усилие  $N_1$  будем искать с помощью сечения I-I и моментной точки 1 (рисунок 6.2,а).



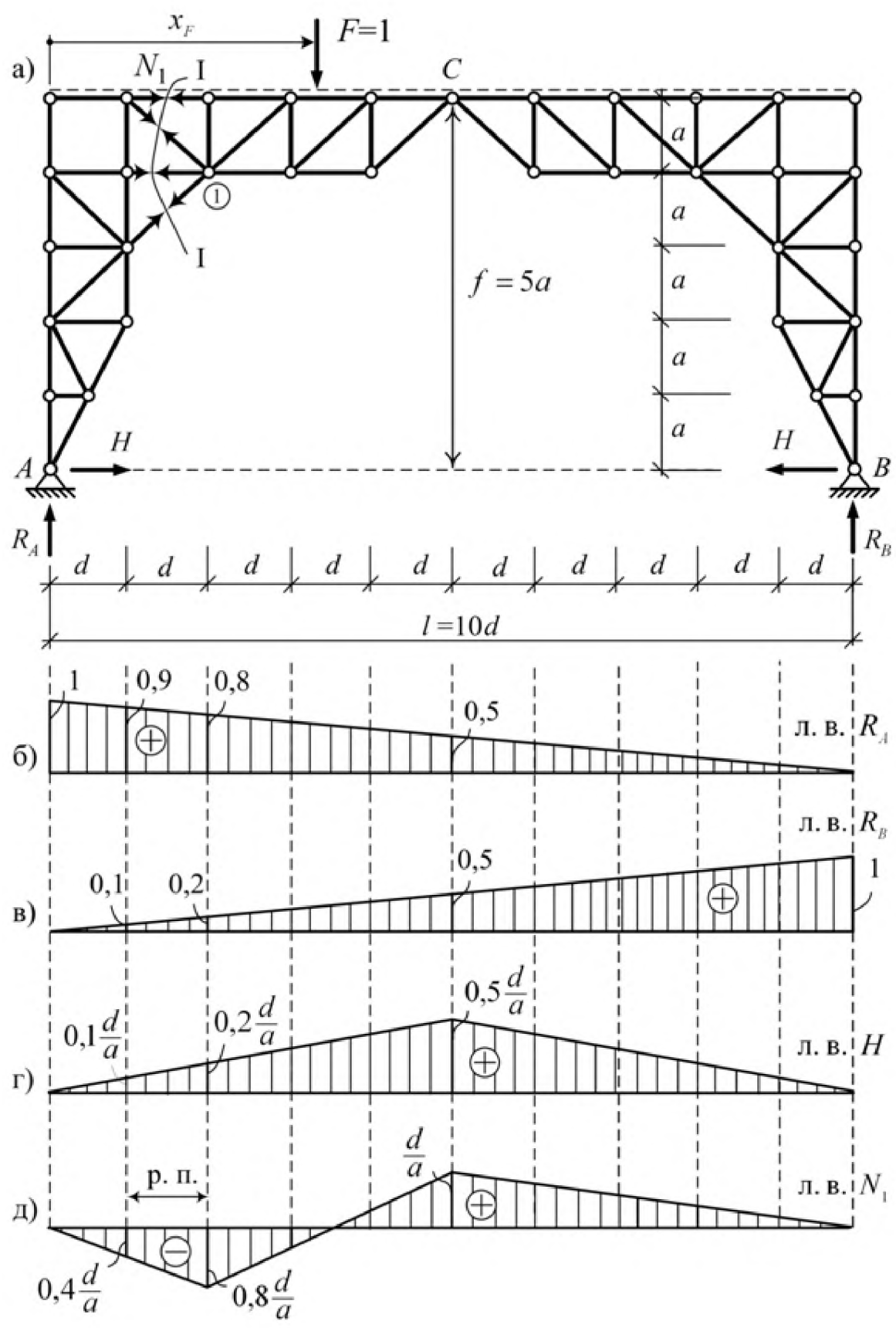


Рисунок 6.2

Если единичная сила располагается слева от сечения, то, рассматривая равновесие правой части фермы, получим:

$$\sum M_1^{прав} = 0; \quad -R_B 8d + H 4a - N_1 a = 0; \quad N_1 = 4H - \frac{8d}{a} R_B.$$

Это означает, что

$$\text{л. в. } N_1 = (\text{л. в. } H) \cdot 4 - (\text{л. в. } R_B) \cdot \frac{8d}{a}.$$

При движении единичной силы справа от рассеченной панели из уравнения равновесия левых сил найдем:

$$\sum M_1^{лев} = 0; \quad R_A 2d - H 4a + N_1 a = 0; \quad N_1 = 4H - \frac{2d}{a} R_A.$$

Значит,

$$\text{л. в. } N_1 = (\text{л. в. } H) \cdot 4 - (\text{л. в. } R_A) \cdot \frac{2d}{a}.$$

На участке рассеченной панели проводим переходную прямую.

Линия влияния усилия  $N_1$  представлена на рисунке 6.2, д.

## 6.2. Расчет комбинированных систем

Комбинированными называют системы, часть элементов которых работает на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие, а другая часть – только на растяжение-сжатие. К таким системам, например, относятся: балка с гибкой аркой (рисунок 6.3, а), трехшарнирная арка с затяжкой (рисунок 6.3, б), трехшарнирная рама с затяжкой (рисунок 6.3, в), трехшарнирная рама со шпренгелем (рисунок 6.3, г), шпренгельная балка (рисунок 6.4, а), цепь с балкой жесткости (рисунок 6.5).

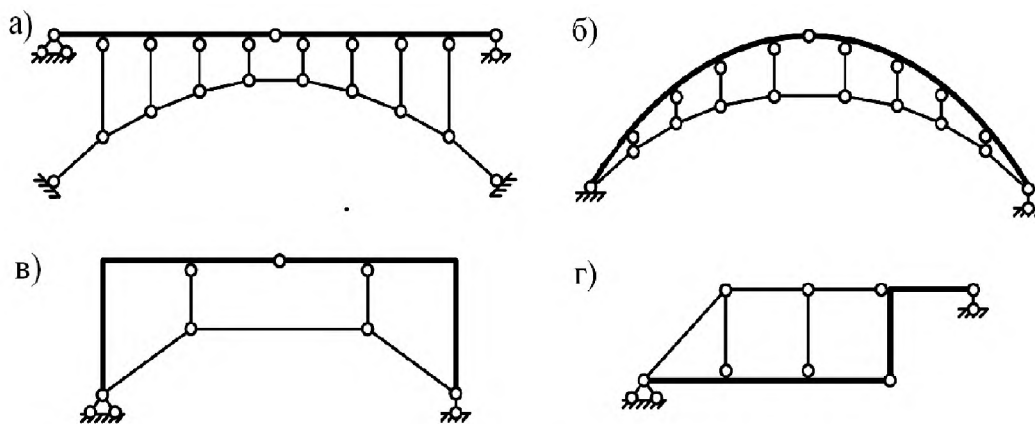


Рисунок 6.3

## 6.1. Расчет шпренгельной балки

Особенности расчета комбинированных систем рассмотрим на примере расчета шпренгельной балки (рисунок 6.4,а), в которой горизонтальные стержни  $AC$  и  $CB$ , соединенные шарниром, усилены шарнирно-стержневой системой в виде полигонального пояса (шарнирной цепи) и вертикальных стоек. Усиливающую группу стержней называют шпренгелем.

Вертикальные опорные реакции, вызванные заданной нагрузкой, найдем из уравнений равновесия всей системы:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad -R_B 5d + q 2d d = 0; & \quad R_B = 0,4qd; \\ \sum M_B = 0; & \quad R_A 5d - q 2d 4d = 0; & \quad R_A = 1,6qd. \end{aligned}$$

Горизонтальная реакция опоры  $A$  равна нулю.

Расчет внутренних сил начинаем с определения усилия  $H$  в стержне 4–6 шарнирной цепи. Для этого проводим сечение I–I через названный стержень и шарнир  $C$ . Рассматривая равновесие правой части, получим:

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad -R_B 2,5d + H h = 0; \quad H = R_B \frac{2,5d}{h} = \frac{qd^2}{h}.$$

Затем определяем усилия в стержнях шпренгеля, как в стержнях фермы (рисунок 6.4,б).

После определения усилий в элементах шпренгеля выполняется расчет горизонтальных стержней, как простой балки, на действие заданной нагрузки и сил, передаваемых шпренгелем (рисунок 6.4,г). Рекомендуем читателю соответствующие вычисления выполнить самостоятельно.

Эпюры внутренних сил показаны на рисунке 6.4,д,е,ж.

## 6.2. Расчет висячей системы

Особенности построения линий влияния усилий в элементах комбинированных систем рассмотрим на примере висячей системы типа цепь с балкой жесткости (рисунок 6.5,а).

Предварительно покажем порядок определения усилий в элементах данной системы.

Найдем опорные реакции от действия нагрузки, приложенной к балке жесткости. Разрежем шарнирную цепь в точках  $A'$  и  $B'$ , расположенных по вертикали над опорами  $A$  и  $B$  (рисунок 6.5,а). Разложим продольные силы в разрезанных стержнях на горизонтальные и вертикальные составляющие  $V'_A$ ,  $H'_A$  и  $V'_B$ ,  $H'_B$ . Составив уравнения равновесия нижней части системы в виде сумм моментов относительно точек  $A'$  и  $B'$ , найдем суммы вертикальных составляющих  $R_A = V_A + V'_A$  и  $R_B = V_B + V'_B$ .

$$\sum M_{A'} = 0; \quad 1x - R_B l = 0; \quad R_B = \frac{x}{l}; \quad (6.1)$$

$$\sum M_{B'} = 0; \quad -1(l-x) + R_A l = 0; \quad R_A = \frac{l-x}{l}. \quad (6.2)$$

Из уравнений равновесия узлов шарнирной цепи в местах примыкания вертикальных подвесок (рисунок 6.6,б,в,г) или фрагмента (рисунок 6.6,а) следует, что горизонтальная составляющая продольных сил в элементах цепи есть величина постоянная и равна распуру системы  $H$ .

Чтобы найти усилие  $H$ , проведем сечение II – II, проходящее через шарнир  $C$  и горизонтальный стержень цепи (рисунок 6.5,а). Составив сумму моментов сил относительно шарнира  $C$  для одной из частей системы, например, для левой, получим:

$$\Sigma M_C^{le\theta} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - 1 \left( \frac{l}{2} - x \right) + H h - H (h + f) = 0.$$

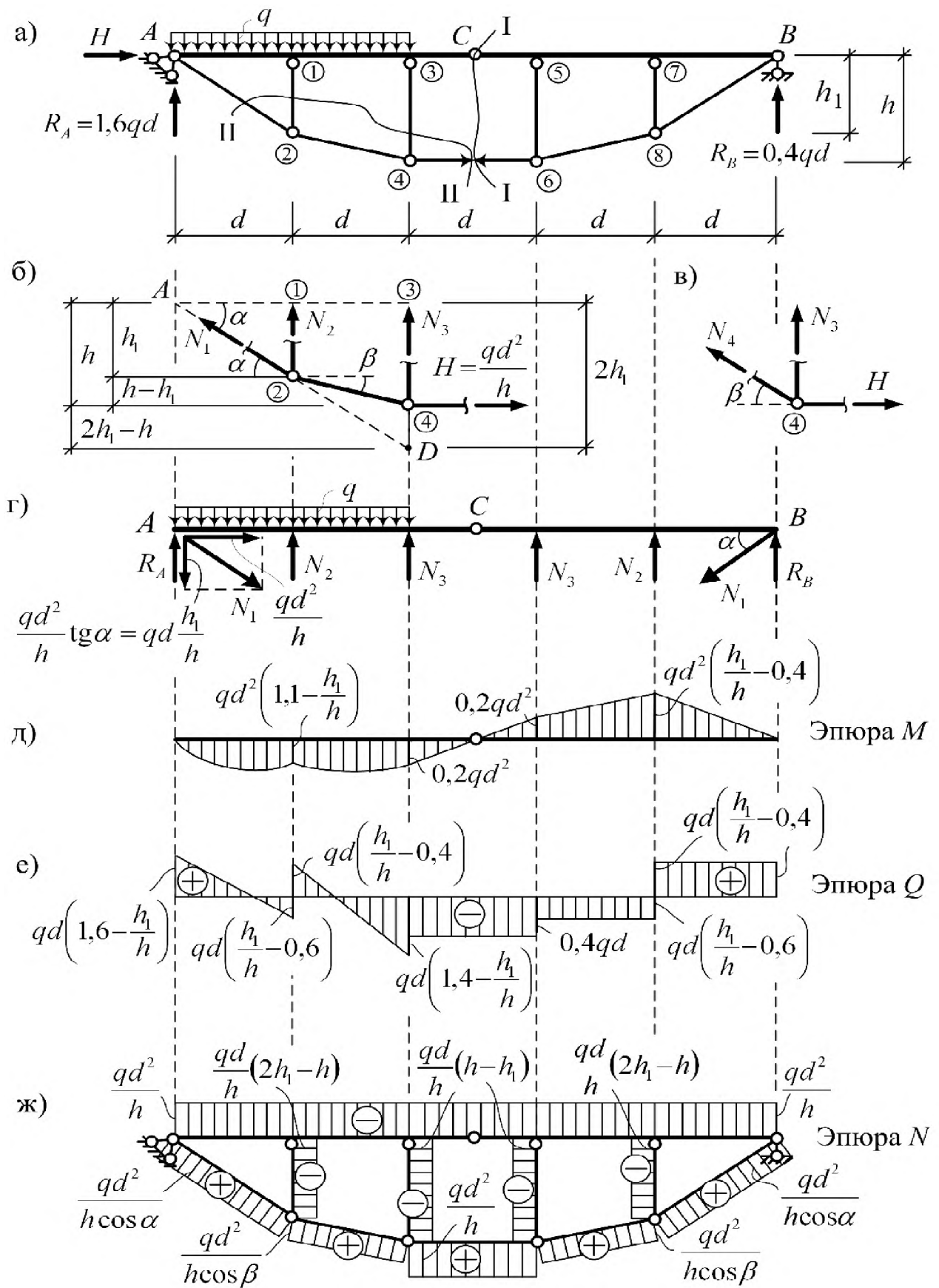


Рисунок 6.4

Или, учитывая, что

$$R_A \frac{l}{2} - 1 \left( \frac{l}{2} - x \right) = M_C^0, \quad (6.3)$$

получим формулу для определения усилия  $H$

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (6.4)$$

Из условий разложения продольной силы в элементе цепи в точке  $A'$  (рисунок 6.6,а), найдем вертикальную составляющую  $V_A'$ :

$$V_A' = H \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Аналогично определяется составляющая  $V_B'$ .

После этого находим опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$ :

$$V_A = R_A - V_A'; \quad V_B = R_B - V_B'. \quad (6.5)$$

При известной горизонтальной составляющей  $H$  полные усилия в элементах цепи будут равны

$$N_i = \frac{H}{\cos \alpha_i}.$$

Усилия в подвесках определяются из уравнений равновесия узлов (рисунок 6.6,б,в,г)

Для определения внутренних сил в сечении  $K$  проведем через  $K$  строго вертикальное сечение и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 6.7).

Продольную силу в разрезанном элементе цепи разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие  $H$  и  $V_1$ . Изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $K$  будут равны:

$$\begin{aligned} M_K &= (V_A + V_A') x_K - F(x_K - x) - H(h + f) + H(h + f - y_K) = \\ &= R_A x_K - 1(x_K - x) - H y_K = M_K^0 - H y_K; \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$Q_K = (V_A + V_A') - P - H \operatorname{tg} \alpha_1 = R_A - 1 - H \operatorname{tg} \alpha_1 = Q_K^0 - H \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (6.7)$$

где  $M_K^0$  и  $Q_K^0$  – изгибающий момент и поперечная сила в соответствующем сечении простой двухопорной балки, имеющей тот же пролет и ту же нагрузку, что и рассматриваемая система.

На основе полученных зависимостей для определения опорных реакций и усилий можно строить необходимые линии влияния.

Так, используя формулы (6.1) и (6.2) строим линии влияния  $R_A = V_A + V_A'$  (рисунок 6.5,б) и  $R_B = V_B + V_B'$  (рисунок 6.5,в). Как для простой балки строится линия влияния балочного изгибающего момента (рисунок 6.5,г). По формуле (6.4) строится линия влияния усилия  $H$  (рисунок 6.5,д), а на основании (6.5) – линия влияния реакции  $V_A$  (рисунок 6.5,е).

По формулам (6.6) и (6.7) строятся линии влияния изгибающего момента  $M_K$  (рисунок 6.5,ж) и поперечной силы  $Q_K$  (рисунок 6.5,з).

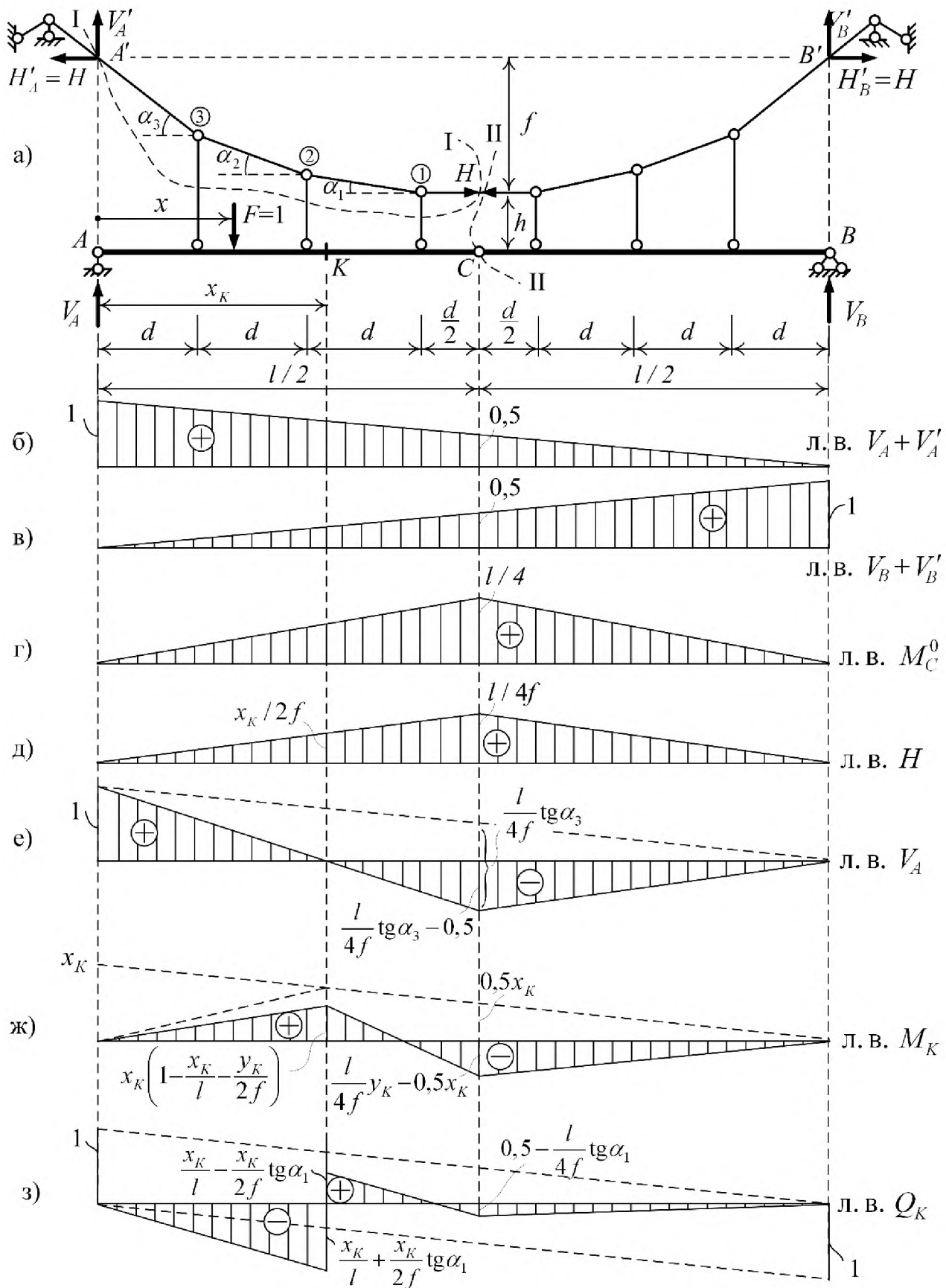


Рисунок 6.5

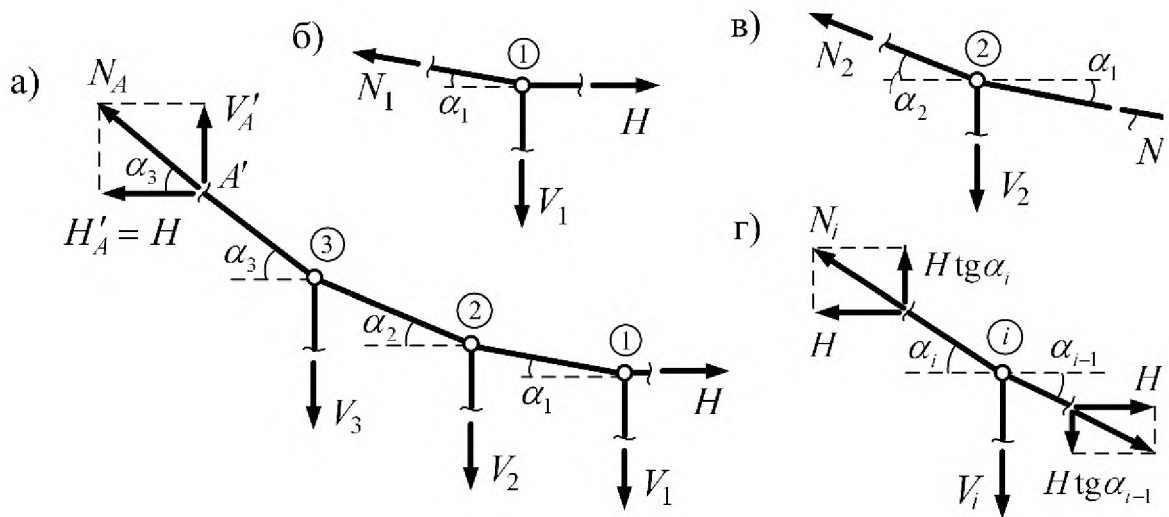


Рисунок 6.6

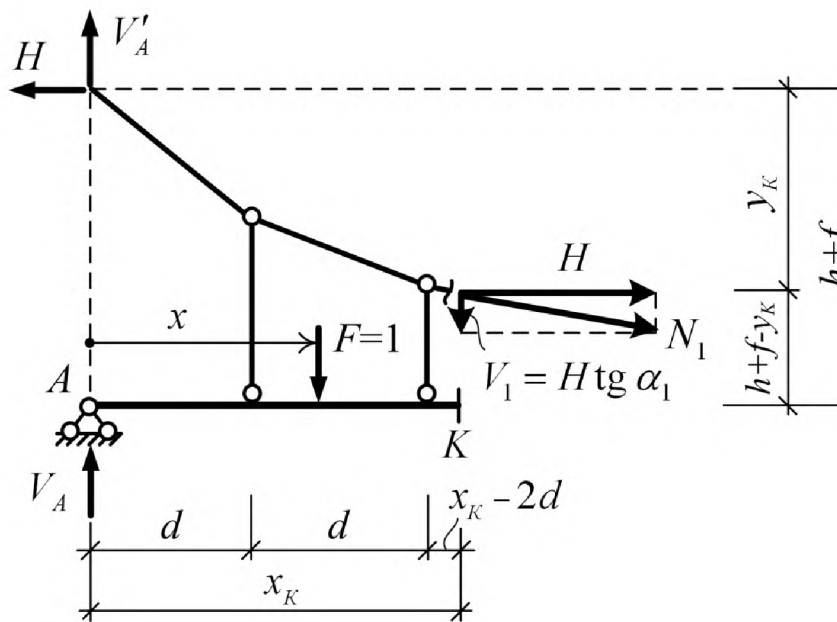


Рисунок 6.7

## ТЕМА 7

### ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

#### 7.1. Общие сведения о перемещениях стержневых систем

При действии на сооружение нагрузки (будем далее обозначать этот фактор через  $F$ ), изменении температуры ( $t$ ) или смещении опор ( $c$ ) появляются линейные отклонения его точек и углы поворота сечений.



На рисунке 7.1 сплошной линией показано начальное (до приложения внешней нагрузки) положение стержней рамы, штриховой – положение после нагружения (деформированное). Сечение  $K$  переместилось в положение  $K_1$ . Угол  $\varphi$  характеризует поворот сечения, отрезок  $KK_1$  (на схеме не показан) – линейное перемещение сечения  $K$ .

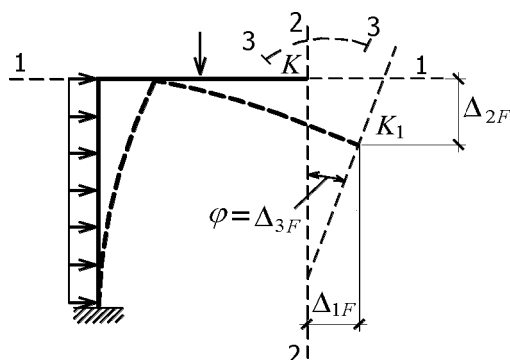


Рисунок 7.1

Линейное перемещение сечения  $K$  по направлению, не совпадающему с истинным, можно установить найдя проекцию отрезка  $KK_1$  на это направление. В инженерных расчетах наиболее часто определяются перемещения сечения по вертикальному и горизонтальному направлениям.

Определение перемещений производится при проверке жесткости сооружений, расчете их на устойчивость и колебания, а также при расчете статически неопределимых систем.

Перемещение какого-либо сечения принято обозначать буквой  $\Delta$  (дэльта) с двумя индексами, первый из которых указывает направление перемещения, а второй – причину, вызвавшую перемещение. Так,  $\Delta_{1F}$  обозначает перемещение сечения по 1-му направлению, вызванное внешней нагрузкой. Смысл обозначений  $\Delta_{2F}$  и  $\Delta_{3F}$  раскрывается с помощью рисунка 7.1. В дальнейшем необходимо будет определять перемещения по направлению действия некоторых сосредоточенных сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Тогда обозначение  $\Delta_{iF}$  следует читать так: это перемещение точки приложения силы  $F_i$  по ее направлению, вызванное нагрузкой  $F$ .

Перемещение по  $i$ -му направлению, вызванное температурным воздействием, обозначается  $\Delta_{it}$ , смещением опор –  $\Delta_{ic}$ .

Определение перемещений в линейно деформируемых системах основывается на общих теоремах об упругих системах.

## 7.2. Работа внешних статически приложенных сил

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает перемещение (движение) его из исходного состояния в новое, деформированное. Будем рассматривать такую нагрузку, которая прикладывается к сооружению настолько медленно, плавно, что возникающими при этом ускорениями его элементов, следовательно, и силами инерции их масс можно пренебречь. Такой процесс нагружения называют статическим, а соответствующую ему нагрузку – статической.

Пусть стержень, выполненный из нелинейно-упругого материала, испытывает растяжение силой  $F$  (рис. 7.2).

Диаграмма “напряжение-деформация” этого материала показана на рисунке 7.3.

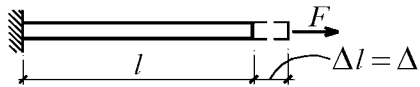


Рисунок 7.2

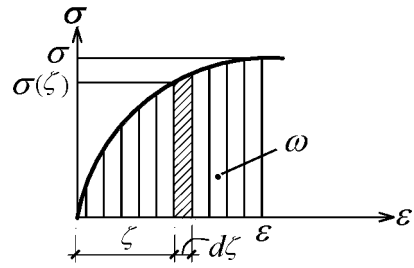


Рисунок 7.3

Площадь диаграммы  $\omega$ , как известно из курса сопротивления материалов, равна удельной потенциальной энергии  $u_0$  (иначе, плотности энергии – энергии, отнесенной к единице первоначального объема элемента) при линейном напряженном состоянии.

Если изменить масштаб ординат графика  $\sigma - \varepsilon$ , введя зависимости  $N = \sigma A$  и  $\Delta l = \varepsilon l$ , то можно получить часто используемую в практике расчетов зависимость “нагрузка-перемещение” (рисунок 7.4).

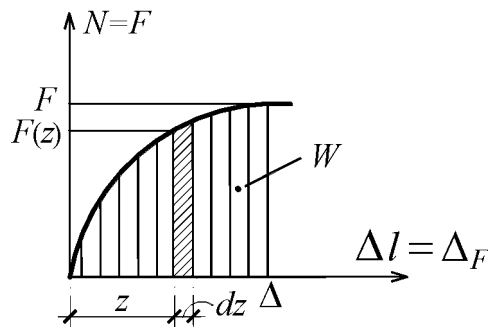


Рисунок 7.4

Через  $z$  обозначено некоторое промежуточное абсолютное удлинение стержня, вызываемое силой  $F(z)$ , а через  $\Delta$  – перемещение, соответствующее конечному (максимальному) значению силы  $F$ .

При бесконечно малом увеличении перемещения на  $dz$  совершаемая силой работа определится по выражению  $dW = F(z)dz$ . Суммируя элементарные работы на всем интервале изменения перемещений, получаем формулу для определения работы, совершаемой статически приложенной внешней силой  $F$ :

$$W = \int_0^{\Delta} F(z) dz.$$

Для линейно-упругого стержня зависимость между силой и перемещением линейная (рисунок 7.5). Поэтому  $F(z) = k z$ , где  $k$  – коэффициент жесткости стержня.

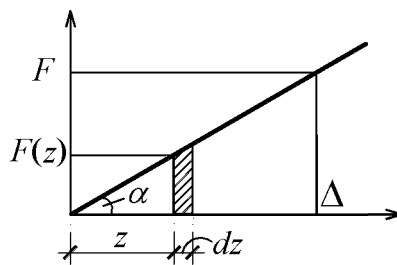


Рисунок 7.5

Конечному значению силы соответствует перемещение  $\Delta$ . Работа статически приложенной силы вычисляется по выражению:

$$W = \int_0^{\Delta} F(z) dz = \int_0^{\Delta} k z dz = \frac{kz^2}{2} \Big|_0^{\Delta} = k \frac{\Delta^2}{2}.$$

Так как  $k = \frac{F}{\Delta}$ , то  $W = \frac{F \Delta}{2}$ .

**Работа внешней статически приложенной силы равна половине произведения значения этой силы на значение вызванного ею перемещения** (теорема Клапейрона (1799 – 1864)). Работу статически приложенной силы на перемещении, вызванном этой же силой, принято называть действительной работой.

В общем случае под силой надо понимать не только сосредоточенную силу, но и момент, и распределенную нагрузку. Соответствующими им перемещениями будут линейное перемещение по направлению силы, угловое по направлению момента и площадь эпюры перемещений на участке действия распределенной нагрузки.

При совместном действии на систему нескольких статически приложенных сил их работа вычисляется полусуммой произведений каждой силы на соответствующее ей суммарное перемещение.

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta_i. \quad (7.1)$$

Например, при статическом действии на балку, показанную на рисунке 7.6, сосредоточенных сил  $F_1$ ,  $F_2$  и сосредоточенного момента  $M$  действительная работа внешних сил равна

$$W = \frac{F_1 \Delta_1}{2} + \frac{F_2 \Delta_2}{2} - \frac{M\varphi}{2}.$$

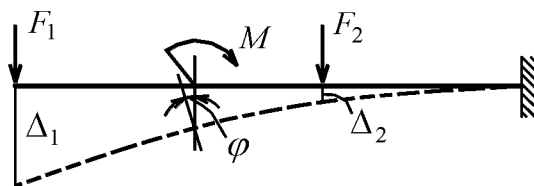


Рисунок 7.6

Знак минус перед последним слагаемым выражения принят потому, что направление угла поворота  $\varphi$  поперечного сечения балки и направление момента  $M$  являются противоположными

### 7.3. Работа внутренних сил плоской линейно-упругой стержневой системы

При статическом действии внешних сил на деформируемую систему в ее сечениях развиваются внутренние силы. Для определения работы этих сил выделим из системы (рисунок 7.7,а) двумя бесконечно близко расположенными сечениями элемент длины  $dx$  (рисунок 7.7,б).

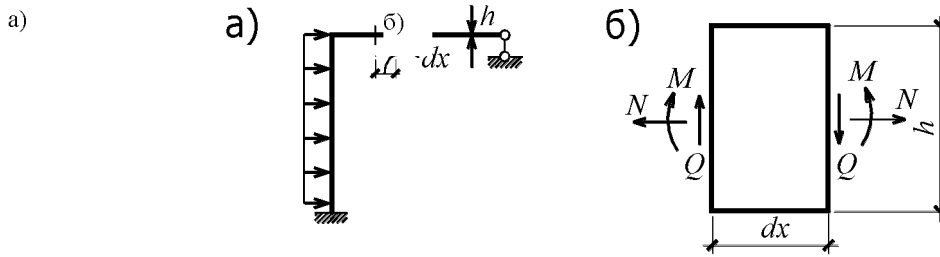


Рисунок 7.7

По отношению к этому элементу силы  $N$ ,  $M$  и  $Q$ , заменяющие действие отброшенных частей системы на выделенный элемент, являются внешними. Внутренние же силы им равны, но противоположны по направлению и сопротивляются деформациям элемента. Поэтому работа внутренних сил всегда отрицательна.

Действие на элемент продольных сил  $N$  вызывает растяжение его на  $\Delta dx = \frac{N dx}{EA}$  (рисунок 7.8,а). На этом перемещении статически возрастающая внешняя сила  $N$  совершит элементарную действительную работу:  $dW_N = \frac{1}{2} N \Delta dx = \frac{N^2 dx}{2EA}$ . Работа же  $dA_N$  внутренних продольных сил будет ей равна, но отрицательна (направления внутренних сил и соответствующих им деформаций противоположны). Следовательно,  $dA_N = -dW_N = -\frac{N^2 dx}{2EA}$ .

На угловом перемещении сечений  $d\varphi$ , вызванном действием изгибающего момента (рисунок 7.8,б), его работа будет равна  $-\frac{1}{2} M d\varphi$ .

Используя формулу для определения кривизны оси стержня  $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$ , величину угла взаимного поворота сечений получим в виде  $d\varphi = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}$ . Тогда  $dA_M = -\frac{M^2 dx}{2EJ}$ .

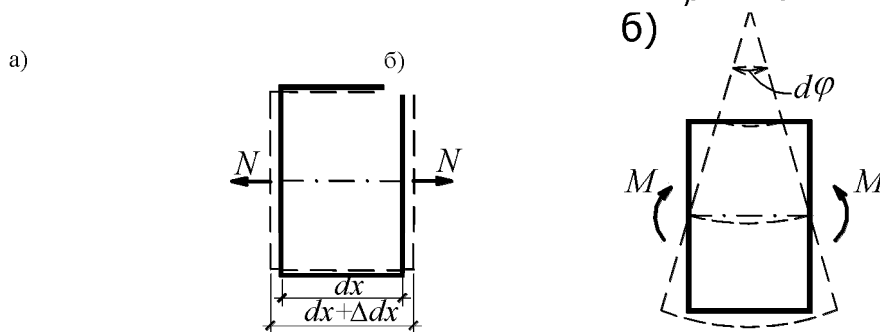


Рисунок 7.8

Касательные напряжения в сечении, определяемые по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q S_y^{omc}}{J_y b(z)},$$

вызывают взаимный сдвиг сечений на  $\Delta_Z = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx$  (рисунок 7.9).

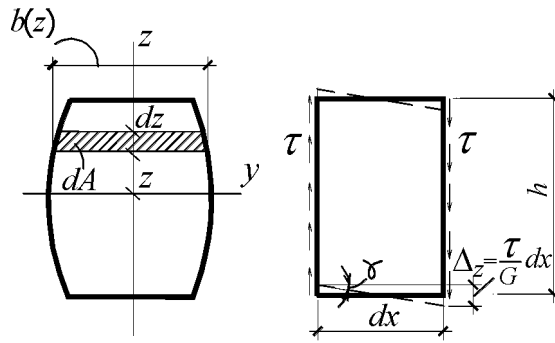


Рисунок 7.9

Для определения их работы, выделим на торцевых сечениях элемента  $dx$  соответствующие полоски площадью  $dA$ . Учитывая статический характер нагрузки, найдем, что

$$dA_Q = -\frac{1}{2} \int_A (\tau dA) \Delta_z = -\frac{dx}{2G} \int_A \tau^2 dA =$$

$$= -\frac{Q^2 dx}{2G} \int_A \left( \frac{S_y^{omc}}{J_y b(z)} \right)^2 dA = -\frac{\mu Q^2 dx}{2GA},$$

где  $\mu = A \int_A \left( \frac{S_y^{omc}}{J_y b(z)} \right)^2 dA$  – безразмерный коэффициент, зависящий от формы площади поперечного сечения. Для прямоугольного сечения  $\mu = 1,2$ ; для круглого –  $\mu = 1,18$ ; для прокатных двутавров приближенно  $\mu$  равно отношению площади двутавра к площади его стенки.

Полную действительную работу внутренних сил плоской стержневой системы получим интегрируя выражения для элементарных работ по длине каждого участка стержня и производя суммирование по всем участкам системы. Суммарная действительная работа внутренних сил равна

$$A_{внутр} = -\sum \int \frac{N^2 dx}{2EA} - \sum \int \frac{M^2 dx}{2EJ} - \sum \int \frac{\mu Q^2 dx}{2GA}. \quad (7.2)$$

Поскольку в формулу (7.2) величины  $N$ ,  $M$  и  $Q$  входят в квадрате, то работа внутренних сил всегда отрицательна.

*Замечание.* В приведенных в п. 7.3 формулах использованы обозначения:

$A$  – площадь сечения стержня;

$J$  – осевой момент инерции сечения; обозначение момента инерции  $J_y$  в формуле Журавского связано с принятым обозначением осей на рисунке 7.9;

$EA$  – жесткость стержня на растяжение-сжатие;

$EJ$  – жесткость стержня на изгиб;

$GA$  – жесткость стержня на сдвиг.

В линейно деформируемых системах зависимость между нагрузкой и перемещениями (усилиями) линейная. Зависимость же между нагрузкой и работой, как следует из формулы (7.2), нелинейная. Действительная работа группы одновременно действующих внешних сил, не равна сумме действительных работ, вызванных каждой из сил в отдельности. Принцип независимости действия сил при вычислении действительной работы не применим.

#### 7.4. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам

Расширим понятия, изложенные в п. 2.4.

Упругая система, испытывающая заданное внешнее воздействие, занимает определенное деформированное положение. Перемещения точек системы, отсчитанные от начального (недеформированного) состояния системы до соответствующего положения их в деформированном состоянии – это действительные перемещения.

Зададим рассматриваемой системе возможные перемещения. Так как положение упругой системы в деформированном состоянии характеризуется бесконечно большим числом параметров, то такая система является системой с бесконечно большим числом степеней свободы. Число возможных перемещений для нее тоже будет бесконечно большим.

Как отмечено в п. 2.4, при “переходе” системы из деформированного состояния в новое, в котором учитываются возможные перемещения, внешнее воздействие и внутренние силы не меняются. Поэтому, работу внешних и внутренних сил на возможных перемещениях необходимо определять по выражениям:

$$W^{(возм)} = \sum F_i \Delta_i,$$

где  $F_i$  – обобщенные силы,  $\Delta_i$  – соответствующие обобщенные перемещения;

$$A_{внутр}^{(возм)} = -\sum S_i e_i,$$

где  $S_i$  – обобщенные внутренние силы,  $e_i$  – соответствующие обобщенные деформации. Работа внутренних сил всегда отрицательна.

Формальная запись принципа возможных перемещений остается такой же как и в п. 2.4:

$$W^{(возм)} + A_{внутр}^{(возм)} = 0.$$

Предполагается, что в упругой системе связи являются идеальными и на возможных перемещениях никаких затрат работы на преодоление трения или на образование и выделение тепла и т. п. не происходит; в неупругих системах это учитывается.

В практических приложениях за возможные перемещения принимаются конечно малые перемещения, которые могут быть вызваны силовыми или другими воздействиями. Например, для состояния балки, показанного на рисунке 7.10 (состояние “ $i$ ”), в качестве возможных перемещений можно принять перемещения этой же балки, нагруженной другой группой сил (состояние “ $k$ ”). Тогда возможная работа внешних сил состояния “ $i$ ” на этих перемещениях запишется в виде

$$W^{(возм)} = F_1 \Delta_{1k} + F_2 \Delta_{2k}.$$

Возможная работа внутренних сил состояния “ $i$ ” на деформациях балки в состоянии “ $k$ ” будет равна

$$A_{внутр}^{(возм)} = -\sum \int N_i \frac{N_k dx}{EA} - \sum \int M_i \frac{M_k dx}{EJ} - \sum \int \mu Q_i \frac{Q_k dx}{GA}.$$

Состояние  $i$

Состояние  $k$

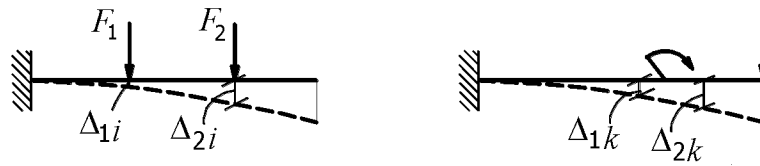


Рисунок 7.10

Принцип возможных перемещений является одним из основных принципов механики. Он позволяет найти условия равновесия, что очень важно, без определения неизвестных реакций связей.

Если за возможные перемещения принять действительные, то возможная работа внешних и внутренних сил будет определяться по выражениям:

$$W^{(возм)} = \sum F_i \Delta_i,$$

$$A_{внутр}^{(возм)} = -\sum \int \frac{N^2 dx}{EA} - \sum \int \frac{M^2 dx}{EJ} - \sum \int \frac{\mu Q^2 dx}{GA}, \quad (7.3)$$

где  $W^{(возм)}$  – возможная работа внешних сил,

$A_{внутр}^{(возм)}$  – возможная работа внутренних сил.

Отметим, что понятие возможного перемещения (обозначается символом  $\delta$ ) было введено Лагранжем. В классическом трактате “Аналитическая механика” (1788; рус. пер., т. 1–2, 2 изд., 1950) он в основу всей статики положил “общую формулу”, являющуюся принципом возможных перемещений, а в основу всей динамики – “общую формулу”, являющуюся сочетанием принципа возможных перемещений с принципом Д’Аламбера.

### 7.5. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений

Предположим, что линейно деформируемая система (рисунок 7.11,а) последовательно нагружается вначале силой  $F_i$ , а затем силой –  $F_k$ .

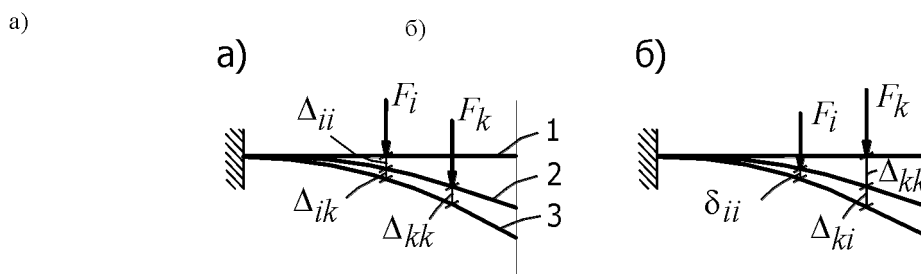


Рисунок 7.11

При “переходе” балки из положения 1 в положение 2 силой  $F_i$  на перемещении  $\Delta_{ii}$  совершается действительная работа, равная  $W_{ii} = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii}$ .

При “переходе” балки из положения 2 в положение 3 сила  $F_k$  совершает действительную работу  $W_{kk} = \frac{1}{2} F_k \Delta_{kk}$ , а сила  $F_i$ , оставаясь в это время неизменной, совершает на перемещении  $\Delta_{ik}$  возможную работу  $W_{ik} = F_i \Delta_{ik}$ . Суммарная работа двух сил будет равна

$$W_1 = W_{ii} + W_{kk} + W_{ik}.$$

Если осуществить нагружение балки в обратной последовательности – вначале силой  $F_k$ , а затем силой  $F_i$  (рисунок 7.11,б), то получим

$$W_2 = W_{kk} + W_{ii} + W_{ki}.$$

Так как значение работы внешних сил равно потенциальной энергии системы и, поскольку независимо от последовательности нагружения, в обоих случаях совпадают начальные и конечные положения балки, то  $W_1 = W_2$ . Значит, имеет место равенство

$$W_{ik} = W_{ki}, \quad (7.4)$$

или в развернутой форме записи

$$F_i \Delta_{ik} = F_k \Delta_{ki}.$$

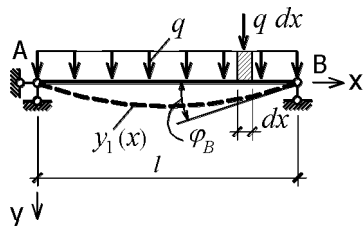
Получена формальная запись теоремы о взаимности работ (теоремы Бетти (1823-1892)): **работа сил состояния  $i$  на перемещениях состояния  $k$  равна работе сил состояния  $k$  на перемещениях состояния  $i$ .**

Заметим, что в приведенной формулировке термин “сила” следует понимать как “обобщенная сила”, которой может быть и группа сил, а термин “перемещение” – как “обобщенное перемещение”.

Аналогичная зависимость о взаимности имеется и для возможных работ внутренних сил на соответствующих деформациях. Тогда формулировка теоремы о взаимности работ может быть дана в такой форме: **возможная работа внешних (внутренних) сил состояния  $i$  на перемещениях (деформациях) состояния  $k$  равна работе внешних (внутренних) сил состояния  $k$  на перемещениях (деформациях) состояния  $i$ .**

**Пример.** Балка (рисунок 7.12) постоянного сечения в состоянии 1 нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , а в состоянии 2 – сосредоточенным моментом  $M$ , приложенным в концевом сечении. Показать справедливость теоремы о взаимности работ.

Состояние 1



Состояние 2

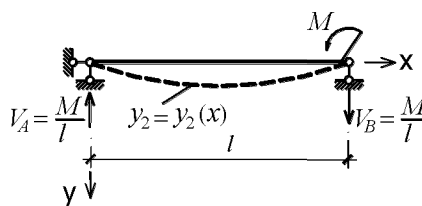


Рисунок 7.12



Обобщенной силой в состоянии 1 является нагрузка  $q$ . Ее возможную работу определим как сумму элементарных работ сил  $q dx$  на перемещениях  $y$  состояния 2.

$$W_{12} = \int_0^l q dx y_2 = q \int_0^l y_2 dx = q \omega,$$

где  $\omega$  – площадь эпюры вертикальных перемещений балки. Для определения  $\omega$  найдем уравнение изогнутой оси балки. Дифференциальное уравнение изогнутой оси запишется в виде:

$$EJ y_2''(x) = -\frac{M}{l} x.$$

Последовательное интегрирование дает:

$$EJ y_2'(x) = -\frac{M}{2l} x^2 + c_1,$$

$$EJ y_2(x) = -\frac{M}{6l} x^3 + c_1 x + c_2.$$

Используя граничные условия  $x=0 \quad y_2=0$  и  $x=l \quad y_2=0$ , найдем

$$EJ y_2(x) = \frac{M}{6} \left( -\frac{x^3}{l} + lx \right).$$

Тогда

$$\omega = \int_0^l y_2(x) dx = \frac{M}{6EJ} \int_0^l \left( -\frac{x^3}{l} + lx \right) dx = \frac{M l^3}{24 EJ}.$$

Возможная работа

$$W_{12} = \frac{q M l^3}{24 EJ}.$$

Возможная работа сосредоточенного момента равна  $W_{21} = M \phi_B$ .

Прогибы и углы поворота балки в состоянии 1 определяются из уравнений:

$$y_1(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{q l^3}{24} x - \frac{q l}{12} x^3 + \frac{q x^4}{24} \right],$$

$$y_1'(x) = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{q l^3}{24} - \frac{q l}{4} x^2 + \frac{q x^3}{6} \right].$$

При  $x=l \quad y_1'(x) = \phi_B = -\frac{q l^3}{24 EJ}.$

Направление действия момента  $M$  совпадает с направлением перемещения  $\varphi_B$ , поэтому

$$W_{21} = \frac{M q l^3}{24 EJ}.$$

Следовательно,  $W_{12} = W_{21}$ .

Если обобщенные силы в состояниях “ $i$ ” и “ $k$ ” будут равны единице (перемещения от единичных сил обозначаются буквой  $\delta$ , рисунок 7.13), то из теоремы (7.4) следует, что

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (7.5)$$

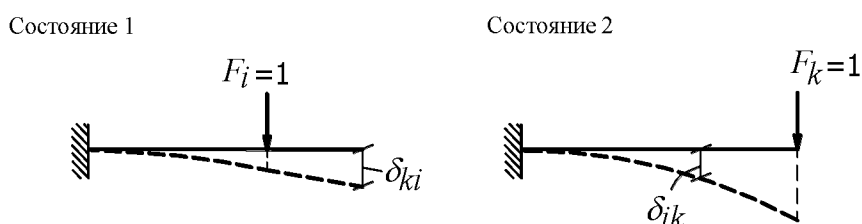


Рисунок 7.13

Равенство (7.5) выражает одно из общих свойств линейно деформируемых систем и является формальной записью теоремы о взаимности перемещений (теоремы Максвелла (1831-1879)): **перемещение по  $i$ -му направлению от  $k$ -ой единичной силы равно перемещению по  $k$ -му направлению от  $i$ -ой единичной силы.**

Замечание о размерности перемещений  $\delta_{ik}$ . Обобщенное перемещение  $\Delta_{ik}$ , вызываемое обобщенной силой  $F_k$ , определяется как  $\Delta_{ik} = \delta_{ik} F_k$ . Поэтому размерность перемещения  $\delta_{ik}$  получается в виде

$$\text{размерность } \delta_{ik} = \frac{\text{размерность } \Delta_{ik}}{\text{размерность } F_k}.$$

Например, при нагружениях балок, показанных на рисунке 7.14,

$$\delta_{21} = \frac{\Delta_{21}}{F_1}, \quad \text{размерность } \delta_{21} = \text{рад/кН} = \text{кН}^{-1};$$

$$\delta_{12} = \frac{\Delta_{12}}{F_2}, \quad \text{размерность } \delta_{12} = \text{м/(кН} \cdot \text{м)} = \text{кН}^{-1}.$$

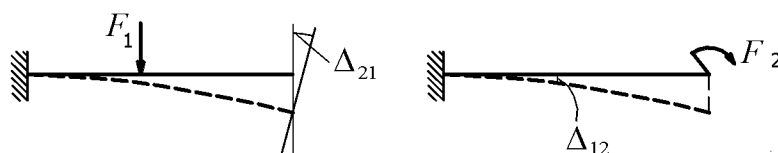


Рисунок 7.14

Перемещения  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$  имеют одинаковую размерность.

## 7.6. Общая формула для определения перемещений

## плоской стержневой системы

Предположим, что стержневая система (рисунок 7.15,а) под влиянием заданных воздействий деформировалась, и требуется определить перемещение какой-либо ее точки  $i$  по заранее установленному направлению, не обязательно совпадающему с истинным направлением перемещения этой точки. Рассматриваемое состояние системы будем обозначать как “состояние  $a$ ”, а внутренние силы в сечениях элементов – через  $N_a, M_a, Q_a$ . Бесконечно малый элемент этой системы в деформированном состоянии испытывает, в общем случае, деформации удлинения  $\Delta dx = \varepsilon dx$ , изгиба  $d\varphi = \kappa dx$  и сдвига  $\Delta_z = \gamma dx$ .

Здесь через  $dx$  обозначена длина элемента, через  $\varepsilon$  – относительное удлинение (укорочение) его, через  $\kappa = \frac{1}{\rho}$  – кривизна изогнутой оси, через  $\gamma$  – относительный сдвиг (угол сдвига) граней элемента.

Для определения искомого перемещения  $\Delta_{ia}$  наряду с состоянием  $a$ , которое является действительным состоянием системы, рассмотрим вспомогательное (фиктивное). Во вспомогательном состоянии к той же системе по направлению обобщенного перемещения  $\Delta_{ia}$  приложим единичную обобщенную силу  $F_i = 1$  (рисунок 7.15,б).

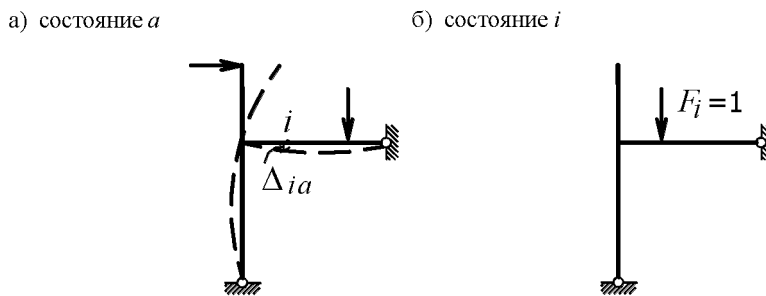


Рисунок 7.15

Внутренние силы в этом состоянии (состоянии  $i$ ) системы обозначим через  $N_i, M_i, Q_i$ . Так как это состояние является состоянием равновесия, то к нему применим принцип возможных перемещений. За возможные перемещения примем перемещения, вызываемые заданным воздействием. Суммарная работа внешних и внутренних сил состояния  $i$  на перемещениях состояния  $a$  должна быть равна нулю (7.3), т.е.

$$W^{(возм)} + A_{внутр}^{(возм)} = 1 \Delta_{ia} - \sum \int N_i \varepsilon dx - \sum \int M_i \kappa dx - \sum \int Q_i \gamma dx = 0$$

Интегрирование ведется по длине каждого стержня или участка стержня, на протяжении которого подынтегральное выражение представляется непрерывной функцией определенного вида.

Следовательно,

$$\Delta_{ia} = \sum \int N_i \varepsilon dx + \sum \int M_i \kappa dx + \sum \int Q_i \gamma dx. \quad (7.6)$$

Полученная формула позволяет найти требуемое перемещение через деформации элементов системы в состоянии  $a$ , причем сама система может быть как линейной, так и физически нелинейной. Несущественно так же и то, чем вызваны деформации элементов: силовым воздействием, изменением температуры окружающей среды, ползучестью материала или другими причинами. Поэтому формулу (7.6) можно рассматривать как общую формулу для определения перемещений стержневых систем.

Состояние системы под действием заданной нагрузки принято называть грузовым (состоянием  $F$ ). Из курса сопротивления материалов известно, что деформации элементов линейно деформируемой системы в этом состоянии определяются через внутренние силы так:

$$\varepsilon dx = \frac{N_F dx}{EA}, \quad \kappa dx = \frac{M_F dx}{EJ}, \quad \gamma dx = \frac{\mu Q_F dx}{GA},$$

где  $EA$ ,  $EJ$ ,  $GA$  – жесткости элемента соответственно на растяжение (сжатие), изгиб и сдвиг.

Подставляя эти выражения в (7.6), получим формулу для определения перемещений плоской стержневой системы в следующем виде:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{N_i N_F dx}{EA} + \sum \int \frac{M_i M_F dx}{EJ} + \sum \int \frac{\mu Q_i Q_F dx}{GA}. \quad (7.7)$$

Ее называют формулой Максвелла-Мора для определения перемещений упругих систем от заданной нагрузки.

Относительный вклад каждого из трех слагаемых формулы (7.7) в конечный результат зависит от вида стержневой системы и характера нагружения. В частности, оказывается, что перемещения в балках зависят, в основном, только от второго слагаемого (изгибающих моментов); доля слагаемого, учитывающего влияние поперечных сил, составляет ничтожно малую часть от окончательного значения  $\Delta_{iF}$ . Поэтому, с достаточной для практических целей точностью, перемещения систем, работающих преимущественно на изгиб, можно вычислять по формуле

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_i M_F dx}{EJ}.$$

По той же причине в расчетах (особенно “вручную”) рамных и арочных систем пренебрегают влиянием на перемещения продольных и поперечных сил. В то же время автоматизированный расчет этих систем с помощью компьютерных программ производится, как правило, с учетом влияния на перемещения изгибающих моментов и продольных сил.

В элементах шарнирно-стержневых систем, в том числе ферм, от узловой нагрузки возникают только продольные силы. Поэтому определение перемещений узлов производится по формуле

$$\Delta_{iF} = \sum \int_0^l \frac{N_i N_F dx}{EA}.$$

Так как при узловой нагрузке на ферму продольная сила по длине стержня не изменяется, то, при условии постоянной жесткости каждого стержня, формула переписывается в виде

$$\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \frac{N_{ki} N_{kF} l_k}{EA_k}, \quad (7.8)$$

где  $l_k$  – длина  $k$ -го стержня,  
 $n$  – число стержней фермы.

В таком виде (7.8) впервые в 1864 г. Дж. Максвеллом была получена формула для определения перемещений ферм. Спустя 10 лет О. Мором (1835–1918) метод определения перемещений был развит на случай произвольных деформаций системы (см. формулу (7.7)).

Поясним особенности выбора вспомогательного состояния. Единичная обобщенная сила должна прикладываться к системе по направлению соответствующего обобщенного перемещения. Произведение их, как известно, дает работу силы  $F = 1$  на искомом перемещении. Если, например, для рамы в состоянии  $F$  (рисунок 7.16,а) необходимо определить угол поворота  $\varphi$  какого-либо сечения элемента, например, сечения  $D$ , то во вспомогательном состоянии в этом сечении необходимо приложить единичный сосредоточенный момент  $M = 1$  (рисунок 7.16,б) и тогда возможная работа внешней силы состояния  $i$  на перемещении  $\Delta_{iF}$  состояния  $F$  будет равна  $M \varphi = 1 \Delta_{iF}$ . В дальнейшем номер единичной силы во вспомогательном состоянии будет определять и номер этого состояния.

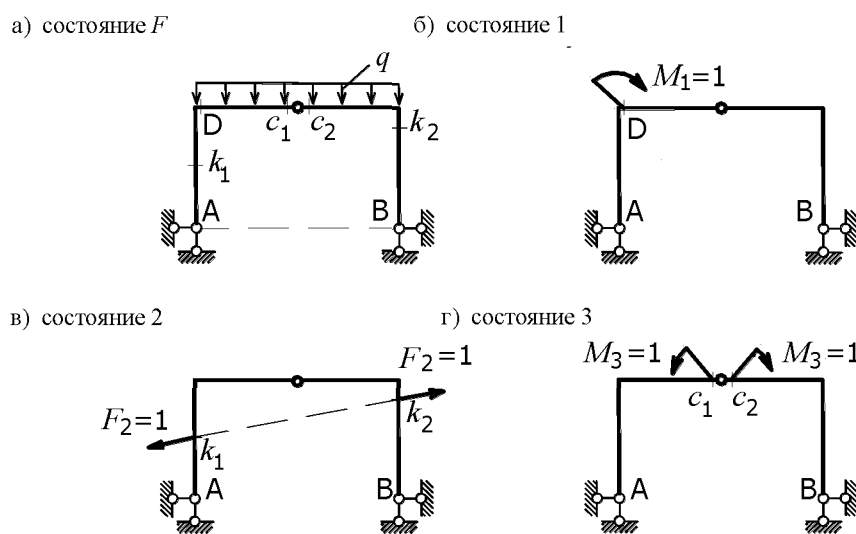


Рисунок 7.16

Если требуется определить изменение расстояния между точками  $k_1$  и  $k_2$ , то во вспомогательном состоянии (состояние 2) по направлению прямой, соединяющей эти точки, следует приложить две направленные в противоположные стороны единичные силы (рисунок 7.16,в); при необходимости найти угол взаимного поворота сечений  $c_1$  и  $c_2$  – во вспомогательном состоянии (состояние 3) в этих сечениях прикладываются разнонаправленные единичные моменты (рисунок 7.16,г).

Задаваемые во вспомогательных состояниях направления единичных сил соответствуют положительным направлениям перемещений  $\Delta_{iF}$ . Если в результате вычисления окажется  $\Delta_{iF} < 0$ , то это будет означать, что искомое перемещение направлено в сторону, противоположную направлению силы  $F_i = 1$ .

### 7.7. Способы вычисления интегралов Мора

Задача о вычислении перемещений по формуле Мора сводится к вычислению интегралов вида  $\int_a^b \frac{M_i M_F dx}{EJ}$ , которые принято называть интегралами Мора. Для относительно несложных задач подынтегральная функция  $f(x) = \frac{M_i M_F}{EJ}$  может быть такой, что

неопределенный интеграл  $F(x)$  можно выразить при помощи конечного числа элементарных функций. Тогда определенный интеграл вычисляется по формуле  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .

Покажем, например, определение вертикального перемещения сечения 1 и угла поворота сечения 2 консольной балки (рисунок 7.17), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с учетом влияния на прогиб только изгибающих моментов.

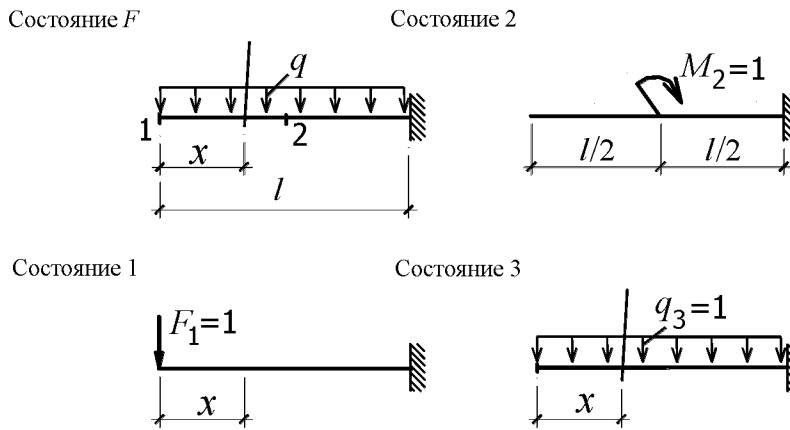


Рисунок 7.17

Для определения прогиба используем вспомогательное состояние 1. В дальнейшем обозначения усилий от безразмерных сил будут сопровождаться верхней чертой. Тогда

$$M_F = -0,5qx^2, \quad \bar{M}_1 = -1x.$$

Принимая жесткость балки  $EJ$  неизменной по ее длине, получим

$$\Delta_1^{(верт)} = \Delta_{1F} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_F}{EJ} dx = \int_0^l \frac{1}{EJ} (-x) \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Для определения угла поворота сечения посередине балки используем вспомогательное состояние 2. Тогда

$$M_F = -\frac{qx^2}{2}; \quad \bar{M}_2 = 0, \text{ если } 0 \leq x < \frac{l}{2}; \quad \bar{M}_2 = 1,$$

если  $\frac{l}{2} \leq x \leq l$ .

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \Delta_{2F} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F}{EJ} dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{EJ} 0 \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx + \\ &+ \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{1}{EJ} 1 \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx = \left. -\frac{q}{2EJ} \frac{x^3}{3} \right|_{\frac{l}{2}}^l = \frac{-7ql^3}{48EJ}. \end{aligned}$$

Для этого же примера при вычислении площади эпюры прогибов с помощью вспомогательного состояния 3 (балка нагружена единичной равномерно распределенной нагрузкой) получим

$$M_F = -\frac{qx^2}{2}, \bar{M}_3 = -\frac{x^2}{2}.$$

$$\omega = \Delta_{3F} = \int_0^l \frac{1}{EJ} \left( -\frac{qx^2}{2} \right) \left( -\frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{q}{4EJ} \frac{x^5}{5} \Big|_0^l = \frac{ql^5}{20EJ}.$$

Указанный способ вычисления интегралов Мора может привести к существенным затруднениям, так как для неопределенного интеграла  $F(x)$  может получиться или очень сложная формула, или вовсе ее невозможно получить.

На практике интегралы типа  $\int_a^b \frac{f_1(x) f_2(x)}{f_3(x)} dx$  вычисляют графо-аналитическим способом или с помощью численного интегрирования.

Для случая, когда на участке интегрирования стержень имеет постоянную жесткость, т.е.  $EJ = f_3(x) = const$ , а одна из функций  $f_1(x)$  или  $f_2(x)$  является линейной, одним из наиболее распространенных является способ, предложенный А. Верещагиным. Поясним его сущность.

Построим на участке интегрирования графики функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , т.е. эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_i(x)$  и  $M_F(x)$  (рисунок 7.18).

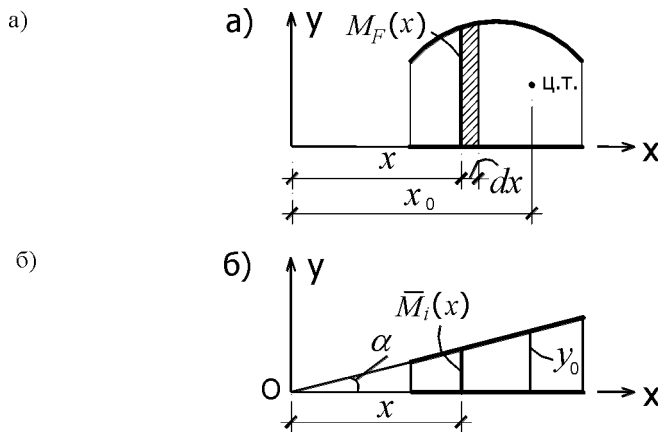


Рисунок 7.18

Пусть, например, эпюра  $\bar{M}_i$  является прямолинейной (рисунок 7.18,б). Точку пересечения оси  $x$ , на которой расположен стержень, с наклонной прямой примем за начало координат. Тогда

$$\bar{M}_i(x) = x \operatorname{tg} \alpha,$$

а интеграл Мора преобразуется к виду

$$\int_a^b \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_a^b x \operatorname{tg} \alpha \cdot M_F dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \int_a^b x M_F dx.$$

Интеграл  $\int_a^b x M_F dx$ , по определению, представляет собой статический момент площади эпюры  $M_F$  (рисунок 7.18,а) относительно оси  $y$ . Он, как известно, равен произведению площади  $\omega$  этой эпюры на расстояние от ее центра тяжести до оси  $y$ , т.е.

$$\int_a^b x M_F dx = \omega x_0.$$

Учитывая соотношение  $x_0 = y_0 / \operatorname{tg} \alpha$ , получим

$$\int_a^b \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \frac{\omega y_0}{EJ}. \quad (7.9)$$

Таким образом, интеграл Мора вычисляется посредством произведения площади криволинейной эпюры на ординату прямолинейной эпюры, взятую под центром тяжести криволинейной.

Операцию вычисления интегралов по способу Верещагина называют иногда “перемножением” эпюр. Положительный знак произведения  $\omega y_0$  принимается тогда, когда эпюра  $M$ , площадь которой обозначена через  $\omega$ , и ордината  $y$  имеют одинаковые знаки, т.е. когда они расположены с одной стороны стержня. На практике часто руководствуются более простым правилом: если обе эпюры усилий на некотором участке стержня расположены по одну сторону от его оси, то результат “перемножения” их принимается положительным, если по разные – отрицательным.

При использовании правила Верещагина сложные по очертанию эпюры усилий следует представлять в виде суммы простых, для каждой из которых известны формулы для вычисления площади и положения ее центра тяжести. Примерами таких простых эпюр являются эпюры изгибающих моментов для консольных или однопролетных балок, нагруженных сосредоточенной силой или равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 7.19).

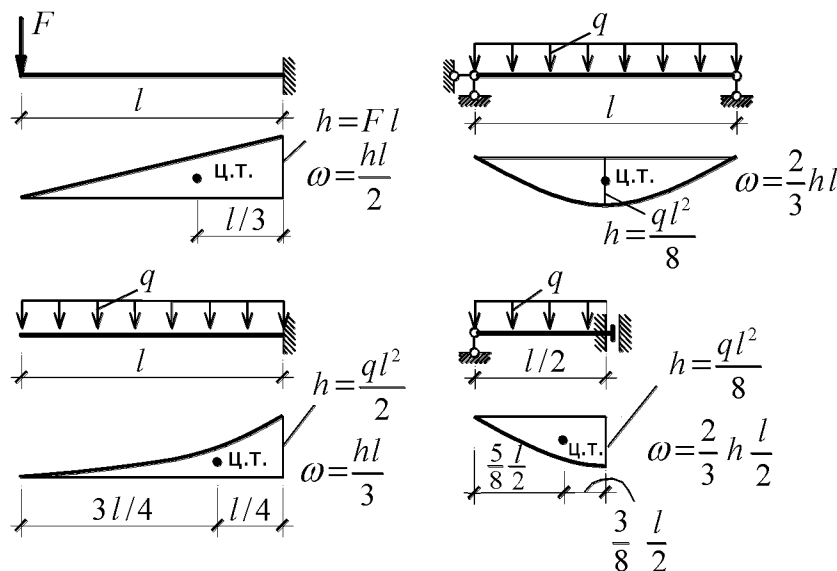


Рисунок 7.19

Для получения простых эпюр следует иногда использовать принцип независимости действия сил.

Пример. Определить вертикальное перемещение точки  $D$  и угол поворота сечения  $C$  балки постоянной жесткости (рисунок 7.20,а).

Эпюра изгибающих моментов для балки от заданной нагрузки показана на рисунке 7.20,б.



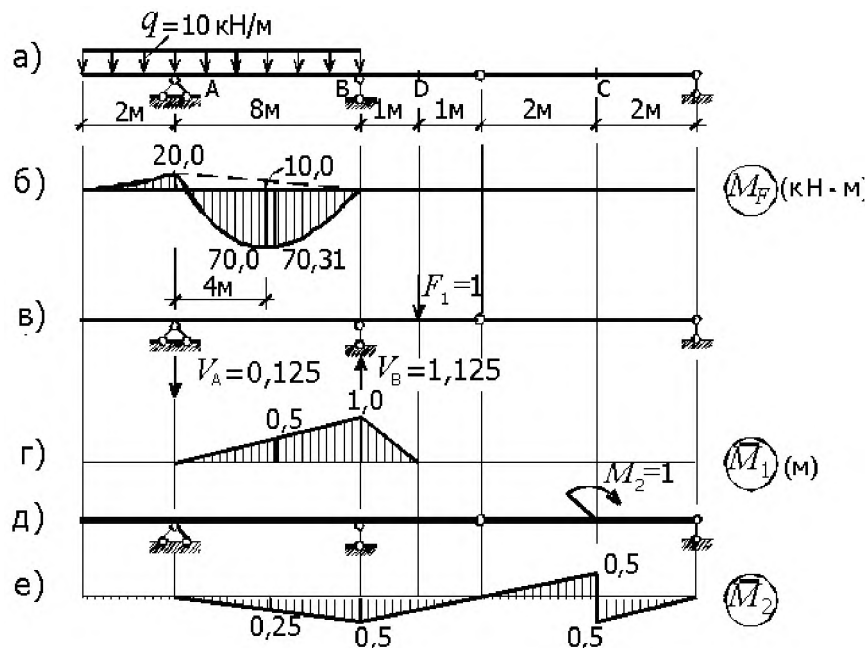


Рисунок 7.20

Для определения вертикального перемещения точки  $D$  нагрузим балку силой  $F_1 = 1$  (рисунок 7.20,в) и построим соответствующую ей эпюру изгибающих моментов (рисунок 7.20,г).

Используя принцип независимости действия сил, представим эпюру  $M_F$  в виде двух простых (рисунок 7.21) и определим перемещение по правилу Верещагина.

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_0}{EJ} =$$

$$= \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 8 \cdot 0,5 = -\frac{186,67}{EJ} \text{ м.}$$

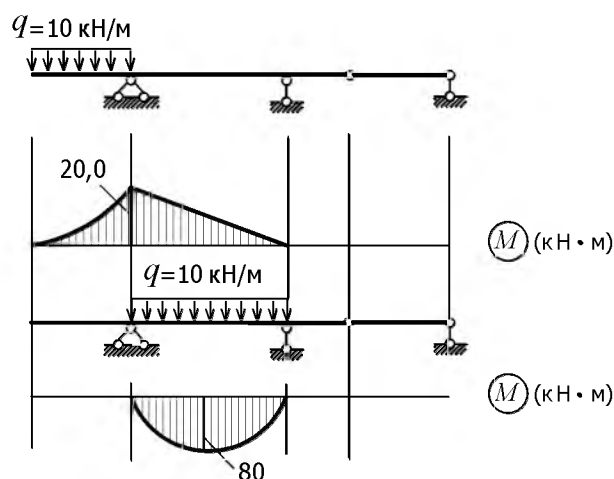


Рисунок 7.21

Вспомогательное состояние к определению угла поворота сечения  $C$  показано на рисунке 7.20,д, а соответствующая ему эпюра изгибающих моментов – на рисунке 7.20,е.

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F dx}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 20 \cdot 8 \frac{1}{3} 0,5 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} 80 \cdot 8 \cdot 0,25 = \frac{93,33}{EJ} \text{ рад.}$$

Пример. Найти горизонтальное перемещение точки  $A$  рамы, показанной на рисунке 7.22,а.

Вспомогательное состояние (состояние 1) показано на рисунке 7.22,б. Соответствующие состояниям рамы эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 7.22,в,г.

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{3} 16 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} 6 \cdot 4 \frac{16+32}{2} +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 32 \cdot 4 \frac{2}{3} 4 = \frac{1568}{3EJ} \text{ м.}$$

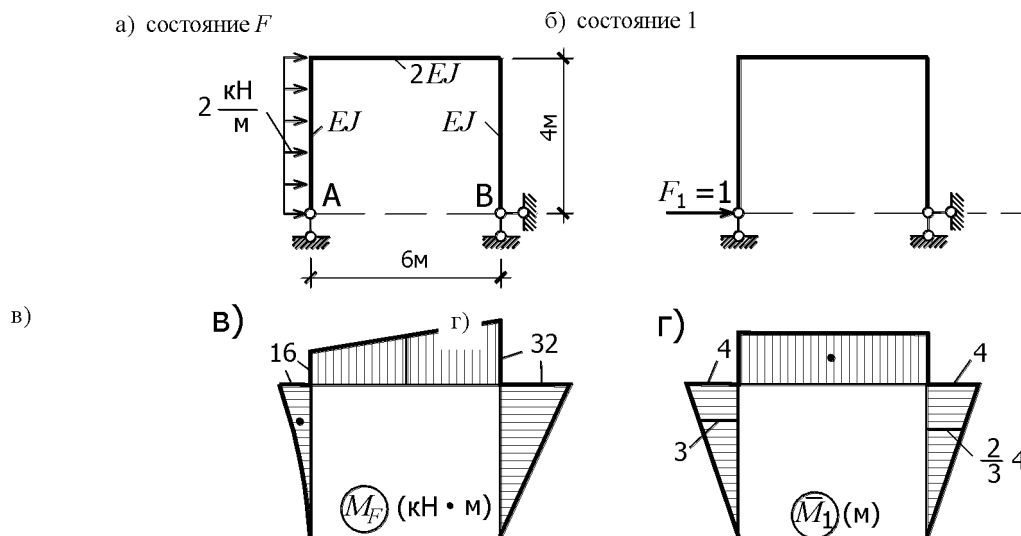


Рисунок 7.22

В этом примере искомое перемещение вычислено в виде суммы интегралов по трем стержням. На каждом из них функции  $\bar{M}_1(x)$  и  $M_F(x)$  имеют вполне определенные аналитические выражения. Если по длине одного стержня эпюры моментов описываются различными функциональными зависимостями, то стержень необходимо разбить на соответствующие участки, вычислить интегралы отдельно для каждого участка и результаты вычислений суммировать.

Еще раз отметим, что способ Верещагина нельзя применять в случае, когда обе эпюры усилий являются нелинейными. Так, например, его нельзя применить к вычислению площади эпюры прогибов балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Такое же правило вычисления интегралов применимо и к двум другим слагаемым в формуле Мора для определения перемещений.

Величину определённого интеграла, как известно, можно вычислить с помощью формул численного интегрирования, основанных на замене интеграла конечной суммой

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n c_k f(x_k),$$

где  $x_k$  – точки отрезка  $[a, b]$ ,

$c_k$  – числовые коэффициенты.

Записанное равенство, в общем случае приближенное, называют квадратурной формулой, точки  $x_k$  – узлами квадратурной формулы, а числа  $c_k$  – коэффициентами квадратурной формулы. Погрешность квадратурной формулы

$$\psi = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$$

зависит как от расположения узлов, так и от выбора коэффициентов. Наиболее часто в практических приложениях к задачам строительной механики используется равномерная сетка узлов, при этом исходный интеграл представляется в виде суммы интегралов по частичным отрезкам, на каждом из которых применяется квадратурная формула.

Простейшими квадратурными формулами для одного интервала являются формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

и формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Естественно, что даже в случае функций  $f(x)$  близких к линейным, использование этих формул приведет к погрешности в вычислениях перемещений.

При действии на систему, составленную из прямолинейных элементов, сосредоточенных сил или равномерно распределённой нагрузки эпюра изгибающих моментов на отдельных участках стержня ограничивается прямой линией или параболой. Если для этой системы необходимо определить линейное или угловое перемещение какой-нибудь точки, то во вспомогательном состоянии от действия силы  $F_1 = 1$  очертание эпюры “ $M$ ” будет определяться линейными зависимостями  $M(x)$ . В таком случае при  $f_3(x) = const$  функция  $f(x) = f_1(x) f_2(x)$  будет представлена кривой второй или третьей степени. Тогда на участках стержней с постоянной жесткостью интеграл Мора можно вычислить точно с помощью формулы Т. Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{l}{6} (y_1 + 4y_2 + y_3), \quad (7.10)$$

где  $y_1, y_2, y_3$  – значения функции в концевых точках отрезка  $[a, b]$  и посередине его (рисунок 7.23).

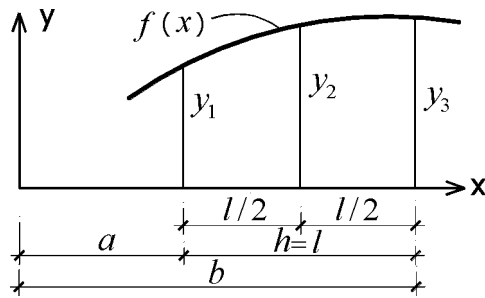


Рисунок 7.23

Формула Симпсона является точной для любого многочлена не выше третьей степени.

Определим с помощью формулы Симпсона вертикальное перемещение сечения  $D$  и угол поворота сечения  $C$  для балки, показанной на рисунке 7.20.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p dx}{EJ} = \frac{8}{6EJ} (0 - 4 \cdot 70 \cdot 0,5 + 0) = -\frac{186,67}{EJ} \text{ м.}$$

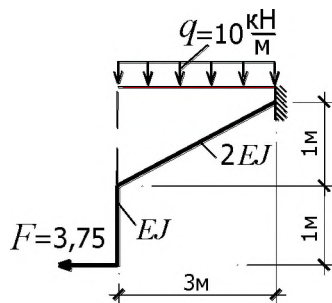
$$\Delta_{2F} = \frac{8}{6EJ} (0 + 4 \cdot 70 \cdot 0,25 + 0) = \frac{93,33}{EJ} \text{ рад.}$$

Полученные значения перемещений совпадают с найденными по правилу Верещагина.

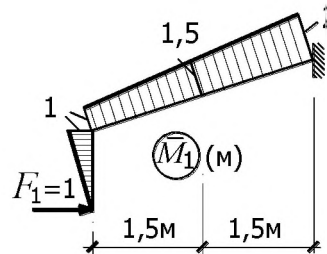
Пример. Определить горизонтальные перемещения конца консоли ломаного стержня (рис. 7.24,а).

Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки показана на рисунке 7.24,б, от единичной силы  $F_1 = 1$  – на рисунке 7.24,в.

а) состояние  $F$



в) состояние 1



б)

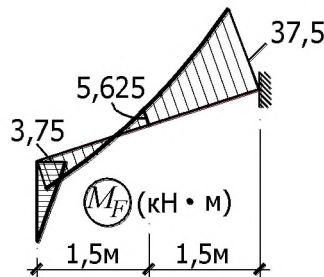


Рисунок 7.24

“Перемножение” эпюр  $M_F$  и  $\bar{M}_1$  на вертикальном стержне выполним по правилу Верещагина, на наклонном (его длина равна  $\sqrt{10}$  м) – по Симпсону.

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3,75 \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6 \cdot 2EJ} (-1 \cdot 3,75 + 4 \cdot 5,625 \cdot 1,5 + 37,5 \cdot 2) =$$

$$= \frac{-1,25 + 8,75 \sqrt{10}}{EJ} = \frac{26,42}{EJ} \text{ м.}$$

Если функция  $f(x)$  на некотором участке стержня будет представляться более сложным выражением, чем многочлен третьей степени, что возможно для стержней криволинейного очертания, или при изменении жесткости вдоль оси стержня, или при действии на него неравномерно распределенной нагрузки, то результат вычисления по формуле Симпсона будет приближенным.

На частичном отрезке погрешность оценивается так:

$$|\psi| \leq \frac{h^5}{2880} M,$$

где

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|^*,$$

т.е. на этом отрезке формула Симпсона имеет точность  $O(h^5)$ , на всем отрезке –  $O(h^4)$ , в то время как формула трапеций, так же как и формула прямоугольников, имеет второй порядок точности.

Пример. Определить с помощью формулы Симпсона площадь эпюры прогибов консольной балки постоянного поперечного сечения, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Эпюры  $M_F$  и  $\bar{M}_1$  показаны на рисунке 7.25.

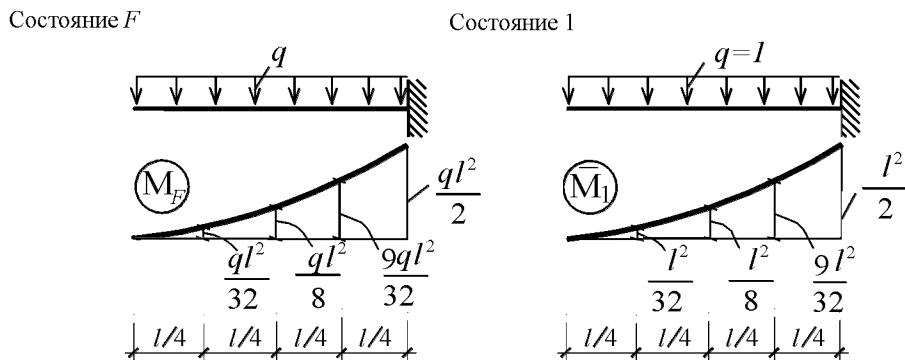


Рисунок 7.25

Здесь

$$f(x) = M_F(x) \bar{M}_1(x) = \frac{qx^4}{4}.$$

Для варианта с одним участком длиной  $l$  получим:

\* лат. supremus – высший

$$\Delta_{1F} = \frac{l}{6EJ} \left( 4 \frac{ql^2}{8} \frac{l^2}{8} + \frac{ql^2}{2} \frac{l^2}{2} \right) = \frac{ql^5}{19,2 EJ}.$$

Точное решение получено ранее непосредственным интегрированием. Площадь равна

$$\Delta_{1F} = \frac{ql^5}{20 EJ}.$$

Если принять  $\frac{q}{EJ} = 1$ , то погрешность вычисления  $\psi = \frac{l^5}{19,2} - \frac{l^5}{20} = 2,083 \cdot 10^{-3} l^5$ , что

соответствует указанной ранее оценке  $\frac{l^5}{2880} M = \frac{l^5}{2880} 6 = 2,083 \cdot 10^{-3} l^5$ , где принято

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \left| \left( \frac{x^4}{4} \right)^{IV} \right| = 6.$$

Для варианта с двумя участками длиной  $\frac{l}{2}$  получим

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \left( 4 \frac{ql^2}{32} \frac{l^2}{32} + \frac{ql^2}{8} \frac{l^2}{8} \right) + \\ &+ \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \left( \frac{ql^2}{8} \frac{l^2}{8} + 4 \frac{9ql^2}{32} \frac{9l^2}{32} + \frac{ql^2}{2} \frac{l^2}{2} \right) \approx \frac{ql^5}{19,95 EJ}. \end{aligned}$$

Погрешность равна  $\psi = \frac{l^5}{19,95} - \frac{l^5}{20} = 1,253 \cdot 10^{-4} l^5$ . На всем отрезке интегрирования

погрешность оценивается так:

$$|\psi| \leq \frac{h^4 (b-a)}{2880} M.$$

В данном случае  $h = \frac{l}{2}$ ,  $b-a = l$  и, значит,  $\psi < \frac{l^5}{16 \cdot 2880} 6 = 1,302 \cdot 10^{-4} l^5$ .

Формула Симпсона построена на трех равноотстоящих узлах.

В некоторых случаях применяются квадратурные формулы и с большим числом равноотстоящих узлов. В частности, такой формулой, построенной на четырех узлах, является следующая:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[ f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b) \right].$$

Ее иногда удобно использовать для перемножения линейных эпюр усилий. Результат вычисления получается точным. Например, если перемножаемые эпюры имеют вид, показанный на рисунке 7.26, то интеграл Мора на этом участке будет равен

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx = \frac{l}{8EJ} (-ac - bd).$$

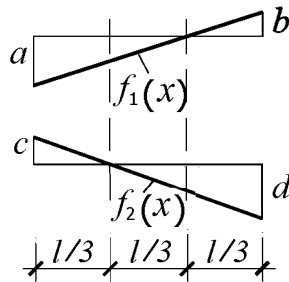


Рисунок 7.26

В общем случае, формулы с большим числом равноотстоящих узлов применяются относительно редко.

### 7.8. Определение перемещений от тепловых воздействий

Пусть для системы в состоянии  $a$  (п. 7.6) внешним воздействием является тепловое, т.е. температура ее элементов изменилась по отношению к некоторому начальному состоянию. Примем для бесконечно малого элемента (рис. 7.27) этой системы температуру нижнего волокна равной  $t_1$ , верхнего –  $t_2$  и распределение температуры по высоте сечения по линейному закону.

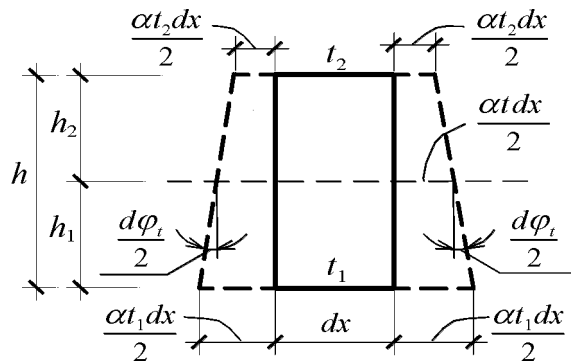


Рисунок 7.27

Температура на оси, проходящей через центр тяжести сечения, будет равной  $t = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{h} h_2$ . При  $h_1 = h_2$  получим  $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ .

Переход элемента под воздействием температуры в новое положение (показано штриховой линией) представим как результат удлинения всех волокон на  $d\varepsilon_t = \varepsilon dx = \alpha t dx$  и затем поворота каждой боковой грани относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, на угол  $\frac{d\varphi_t}{2}$ .

Удлинение нижнего волокна равно  $\alpha t_1 dx$ , а верхнего –  $\alpha t_2 dx$ , ( $\alpha$  – коэффициент линейного расширения). Тогда, вследствие малости деформаций, получим:

$$d\varphi_t = k dx = \frac{\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx}{h} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx = \frac{\alpha t' dx}{h},$$

где  $t' = t_1 - t_2$  – перепад температур.

Так как температурные деформации не вызывают сдвига сечений, то, подставляя  $d\varepsilon_t$  и  $d\varphi_t$  в общую формулу (7.6) для определения перемещений и заменяя в обозначении  $\Delta_{ia}$  индекс  $a$  на  $t$  (указывает от чего возникает перемещение), получим

$$\Delta_{it} = \sum \int_l \bar{N}_i \alpha t dx + \sum \int_l \bar{M}_i \frac{\alpha t'}{h} dx. \quad (7.11)$$

Заметим, что каждый из интегралов в этом выражении определяет работу внутренних сил вспомогательного состояния системы на перемещениях, вызываемых изменением температуры. Поэтому на участке интегрирования значения интегралов принимаются положительными в том случае, когда совпадают соответствующие направления деформаций стержня, вызываемые усилиями  $i$ -го (вспомогательного) состояния и тепловым воздействием.

Если на отдельных участках стержней  $\alpha$ ,  $t$ ,  $t'$  и  $h$  остаются неизменными, то выражение (7.11) преобразуется к виду:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha t \Omega_N + \sum \frac{\alpha t'}{h} \Omega_M, \quad (7.12)$$

где  $\Omega_N = \int_l \bar{N}_i dx$ ,  $\Omega_M = \int_l \bar{M}_i dx$  – площади эпюр продольных сил и изгибающих моментов на участках стержней с указанными особенностями.

Пример. Определить горизонтальное перемещение точки  $B$  рамы (рис. 7.28,а) от указанного на схеме теплового воздействия. Неизменные по длине каждого из стержней поперечные сечения принять симметричными. Высота сечения вертикального стержня равна  $h_1$ , горизонтального –  $h_2$ .

а) состояние  $t$

б) состояние 1



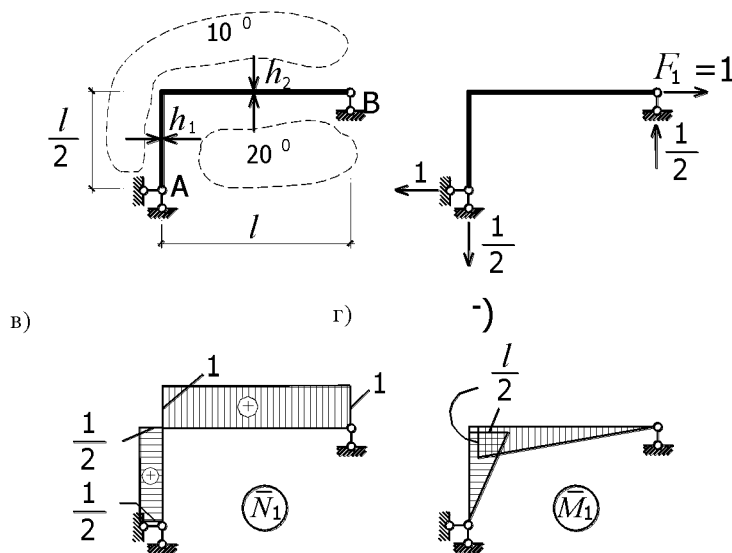


Рисунок 7.28

Температура по оси каждого стержня равна  $t = \frac{20+10}{2} = 15^0$ , перепад температур  $t' = 20 - 10 = 10^0$ .

На рисунке 7.28,б показано вспомогательное состояние рамы, а на рисунке 7.28,в,г – эпюры усилий  $\bar{N}_1$  и  $\bar{M}_1$ .

Вычисляем искомое перемещение.

$$\Delta_{1t} = \sum \alpha t \Omega_N + \sum \frac{\alpha t'}{h} \Omega_M = \alpha 15^0 \frac{1}{2} \frac{l}{2} + \alpha 15 \cdot 1 \cdot l + \frac{\alpha 10}{h_1} \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{2} + \frac{\alpha 10}{h_2} \frac{1}{2} \frac{l}{2} l = 18,75\alpha + \left( \frac{1,25l^2}{h_1} + \frac{2,5l^2}{h_2} \right) \alpha.$$

### 7.9. Определение перемещений, вызываемых перемещениями опор

Предположим, что опорные связи заданной статически определимой системы (рис. 7.29,а) под влияниями каких-то воздействий переместились в положение, показанные на рисунке 7.29,а: заземление повернулось по часовой стрелке на угол  $c_1$ , а шарнирно-подвижная опора сместилась вверх на  $c_2$ . Обозначим это состояние системы как состояние  $c$ . Для определения перемещения какой-нибудь точки, например горизонтального перемещения узла  $D$ , во вспомогательном состоянии по направлению искомого перемещения приложим силу  $F_i = 1$  (рис. 7.29,б).

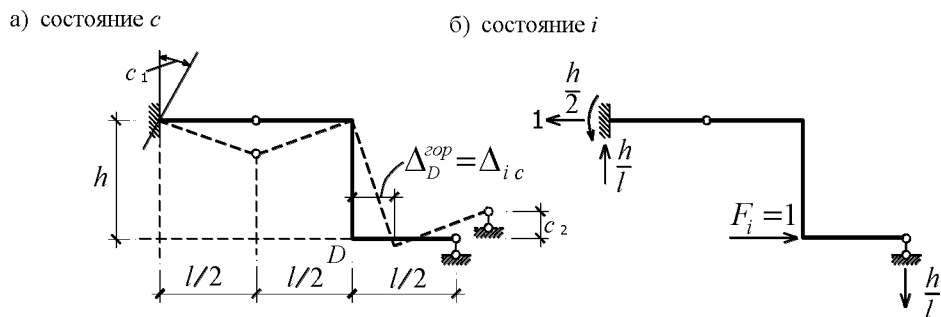


Рисунок 7.29

Определим работу сил  $i$ -го состояния системы на перемещениях ее в состоянии  $c$ . В состоянии  $c$  внутренние силы отсутствуют: перемещения опор статически определимой системы не вызывают усилий в ее элементах. Поэтому на перемещениях состояния  $c$  совершают работу только внешние силы, к которым относятся и опорные реакции. В соответствии с принципом возможных перемещений получим

$$1 \cdot \Delta_{ic} + \sum R_{ki} c_k = 0,$$

где  $R_{ki}$  – реакция в связи с номером  $k$  от  $F_i = 1$ ,

$c_k$  – заданное смещение связи  $k$ .

Отсюда следует, что

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ki} c_k. \quad (7.13)$$

Знак произведения  $R_{ki} c_k$  принимается положительным, если направление  $R_{ki}$  и  $c_k$  совпадают.

Для рассматриваемого примера получим

$$\Delta_D^{zop} = \Delta_{ic} = -\sum R_{ki} c_k = -\left(-\frac{h}{2} c_1 - \frac{h}{l} c_2\right) = h\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{l}\right).$$

В заключение отметим, что если заданная линейно деформируемая система испытывает одновременно несколько воздействий (внешняя нагрузка, изменение температуры, смещение опорных или других связей), то искомое перемещение определяется суммированием составляющих от каждого воздействия в отдельности.

Особенности определения перемещений в статически неопределимых системах будут изложены в дальнейшем.

### 7.10. Матричная форма определения перемещений

Рассмотрим вначале этот вопрос применительно к плоским фермам. В практических задачах расчета их на заданные воздействия важно уметь определять перемещения каждого узла по горизонтальному и вертикальному направлениям. Общее число неизвестных перемещений при таком подходе будет равно числу степеней свободы узлов  $m = 2V - C_0$  (перемещения закрепленных узлов по направлениям опорных связей отсутствуют). На рисунке 7.30,а неизвестные перемещения узлов показаны стрелками.

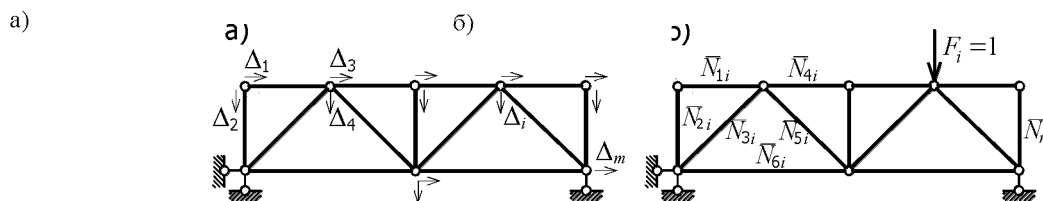


Рисунок 7.30

Для определения перемещения  $\Delta_i$  примем вспомогательное состояние таким, как показано на рисунке 7.30,б: по направлению искомого перемещения приложена сила  $F_i = 1$ . На этом рисунке



где  $EA_k$  – жесткость стержня на растяжение (сжатие),

$d_k = \frac{l_k}{EA_k}$  – коэффициент податливости  $k$ -го стержня.

Тогда для вектора деформаций, вызываемых заданной нагрузкой  $F$ , существует зависимость

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1F} \\ N_{2F} \\ \vdots \\ N_{nF} \end{bmatrix} = D \vec{N}_F, \quad (7.15)$$

где  $D$  – матрица внутренней податливости стержней фермы,

$\vec{N}_F$  – вектор усилий в стержнях фермы от нагрузки  $F$ .

Подставляя выражение (7.15) в формулу (7.14), получим матричную запись формулы для определения узловых перемещений фермы от нагрузки  $F$ :

$$\vec{\Delta} = L_N^T D \vec{N}_F. \quad (7.16)$$

Для определения перемещений изгибаемых систем от нагрузки  $F$  воспользуемся формулой Симпсона. На  $k$ -м участке стержня с переменной изгибной жесткостью интеграл Мора запишется в виде:

$$\int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \frac{l_k}{6} \left( \frac{\bar{M}_i^H M_F^H}{EJ^H} + 4 \frac{\bar{M}_i^C M_F^C}{EJ^C} + \frac{\bar{M}_i^K M_F^K}{EJ^K} \right),$$

где верхние индексы  $H$ ,  $C$  и  $K$  указывают на значения  $\bar{M}_i$ ,  $M_F$ , ... и  $EJ$  в начале, середине и конце участка интегрирования.

Представим это выражение в матричной форме записи:

$$\int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i^H & \bar{M}_i^C & \bar{M}_i^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_k}{6EJ^H} & & \\ & \frac{4l_k}{6EJ^C} & \\ & & \frac{l_k}{6EJ^K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_F^H \\ M_F^C \\ M_F^K \end{bmatrix} = \\ = L_{ki}^T D_k \vec{M}_{kF},$$

где  $D_k$  – диагональная матрица податливости  $k$ -го участка.

Для варианта линейных эпюр  $\bar{M}_i$ ,  $M_F$ , ... получим

$$\bar{M}_i^C = \frac{\bar{M}_i^H + \bar{M}_i^K}{2}, \quad M_F^C = \frac{M_F^H + M_F^K}{2}$$

и тогда при  $EJ = \text{const}$  вычисления на участке сведутся к следующему:

$$\int_0^{l_k} \frac{M_i M_F dx}{EJ} = \begin{bmatrix} M_i^H & M_i^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2l_k}{6EJ} & \frac{l_k}{6EJ} \\ \frac{l_k}{6EJ} & \frac{2l_k}{6EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_F^H \\ M_F^K \end{bmatrix}.$$

Суммируя результаты вычислений по всем участкам, получим

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} = \sum_k L_{ki}^T D_k \bar{M}_{kF}. \quad (7.17)$$

Используя последовательную стыковку векторов изгибающих моментов на всех  $n$  участках системы и введя в расчет матрицу податливости  $D$  всей системы, вычисление перемещений можно представить и так:

$$\Delta_{iF} = \begin{bmatrix} L_{1i}^T & L_{2i}^T & \dots & L_{ni}^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \ddots \\ D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{1F} \\ \bar{M}_{2F} \\ \vdots \\ \bar{M}_{nF} \end{bmatrix} = L_i^T D \bar{M}_F. \quad (7.18)$$

Если необходимо определить перемещения нескольких точек системы, то следует вектор-строку  $L_i^T$  заменить на матрицу  $L^T$ , в каждой строке которой будут записаны значения изгибающих моментов, вызываемых  $i$ -м вспомогательным состоянием.

Если ставится задача определения перемещений, вызываемых различными нагрузками, то необходимо вектор  $\bar{M}_F$  заменить на матрицу, в каждом столбце которой записываются значения усилий, соответствующие определенному нагружению.

С учетом этих замечаний выражение для определения перемещений изгибаемой системы в общем случае может быть записано в виде:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1t} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{m1} & \Delta_{m2} & \dots & \Delta_{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^T & L_{12}^T & \dots & L_{1n}^T \\ L_{21}^T & L_{22}^T & \dots & L_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{m1}^T & L_{m2}^T & \dots & L_{mn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \ddots \\ D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{1F}^{(1)} & \bar{M}_{1F}^{(2)} & \dots & \bar{M}_{1F}^{(t)} \\ \bar{M}_{2F}^{(1)} & \bar{M}_{2F}^{(2)} & \dots & \bar{M}_{2F}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{M}_{nF}^{(1)} & \bar{M}_{nF}^{(2)} & \dots & \bar{M}_{nF}^{(t)} \end{bmatrix} = L^T D M. \quad (7.19)$$

В этом выражении индекс  $m$  соответствует числу определяемых перемещений для одного нагружения, индекс  $t$  – числу независимых нагружений.

Если  $M = L$ , то матрица  $\Delta$  будет представлять собой матрицу внешней податливости  $A$  изгибаемой стержневой системы

$$A = L_M^T D L_M. \quad (7.20)$$

Это же замечание относится и к формуле (7.16). Заменяв вектор  $\bar{N}_F$  на матрицу  $N = L_N$ , получим в результате вычислений матрицу податливости фермы

$$A = L_N^T D L_N. \quad (7.21)$$

### 7.11. Линии влияния перемещений

Теорема о взаимности перемещений используется при решении различных задач механики. В частности с ее помощью относительно легко получают линии влияния перемещений. Пусть, например, необходимо построить линию влияния угла поворота  $\varphi_k$  (рис. 7.31,а). Каждому новому положению единичной силы (рис. 7.31,б) соответствует определенное значение угла поворота ( $\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots$ ). В то же время на основании теоремы о взаимности эти перемещения можно определить каждый раз от загрузки балки неподвижной обобщенной силой  $M_k = 1$  (рис. 7.31,в). Следовательно, очертание линий влияния  $\varphi_k$  совпадает с эпюрой вертикальных перемещений оси балки, которые возникают от силы  $M_k = 1$ . Соответствующее этому нагружению уравнение изогнутой оси балки записано в п. 7.5.

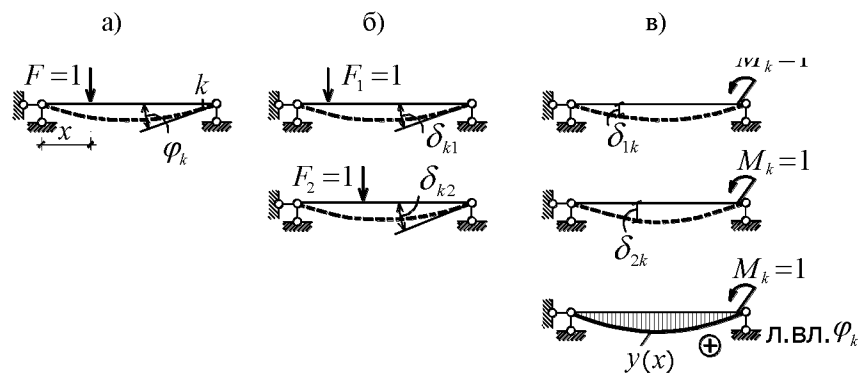


Рисунок 7.31

Анализ результатов последнего примера (рис. 7.31) показывает, что практическая задача построения линий влияния перемещений линейно деформируемой системы может быть связана или с расчетом ее на множество единичных нагружений в характерных сечениях и последующим определением для каждого из них искомого перемещения или с расчетом заданной системы на одно нагружение и определением соответствующих перемещений в тех сечениях, в которых по известным перемещениям можно представить правильный вид линии влияния. Второй вариант решения является, как правило, более предпочтительным. Проиллюстрируем сказанное еще раз на примере многопролетной статически определимой балки (рис. 7.32), для которой построим линию влияния  $\delta_3$ . Из расчета балки на нагружение силой  $F_1 = 1$  можно найти только одну ординату линии влияния  $\delta_3 - \delta_{31}$  (рис. 7.32,б), из расчета на действие  $F_2 = 1 - \delta_{32}$  и т. д. Более простой является техника построения линии влияния  $\delta_3$  как эпюры вертикальных перемещений оси балки от действия  $F_3 = 1$  (рис. 7.32,в). На рисунке 7.32,г показан вид л. вл.  $\delta_3$  с учетом общепринятых правил построения: положительные ординаты л. вл.  $\delta_3$  располагаются выше оси балки, отрицательные – ниже.

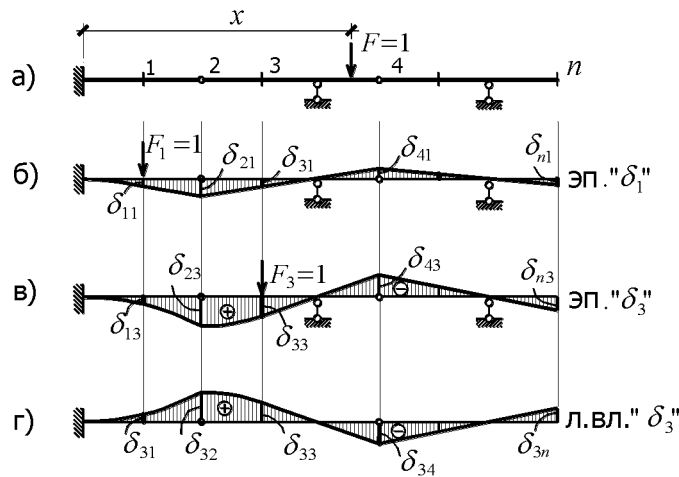


Рисунок 7.32

### 7.12. Матрица влияния перемещений

Вертикальное перемещение сечения  $i$ , для которого построена линия влияния перемещения, от действия на балку заданной нагрузки можно вычислить по формуле

$$\Delta_{iF} = \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \dots + \delta_{in} F_n,$$

где  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – сосредоточенные вертикальные силы, приложенные в характерных сечениях. При значении индекса  $i = 3$  получим выражение для определения  $\Delta_{3F}$  с помощью линии влияния  $\delta_3$  (рис. 7.32,г).

Применяя выражение для  $\Delta_{iF}$  к каждому характерному сечению и используя матричную форму записи преобразований, получим значение вектора перемещений  $\vec{\Delta}_F$ .

$$\vec{\Delta}_F = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \vdots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = A \vec{F},$$

где  $A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$  – матрица влияния перемещений. Компонентами  $i$ -го

столбца являются значения ординат эпюр перемещений, построенных от  $F_i = 1$ , что соответствует общему определению матриц влияния. В силу выполнения условия  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  матрица  $A$  является симметрической матрицей и, значит, по элементам  $i$ -го столбца или  $i$ -й строки можно построить линии влияния  $\delta_i$ .

В случае систем произвольного очертания, не обязательно балочных, перемещения  $\delta_{ik}$  могут иметь различную ориентацию в пространстве. Они определяют податливость системы в некоторой точке  $i$  по направлению единичной силы  $F_i = 1$  от единичной силы  $F_k = 1$ ,

приложенной в точке  $k$ . Поэтому матрицу  $A$  называют матрицей податливости системы. Для ее вычисления можно использовать формулы (7.20) и (7.21).

Пример. Вычислить матрицу внешней податливости  $A$  рамы по заданным направлениям (рисунок 7.33).

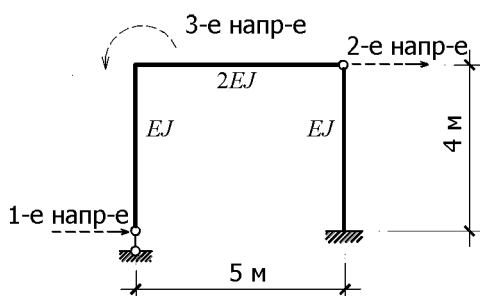


Рисунок 7.33

Эпюры изгибающих моментов от действия единичных сил по заданным направлениям показаны на рисунке 7.34.

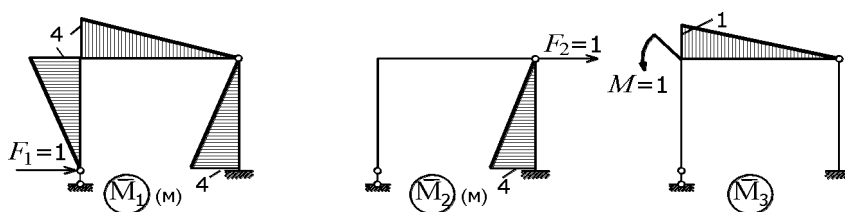


Рисунок 7.34

При составлении матрицы влияния  $L_M$  будем считать ординаты эпюр  $M$ , расположенные внутри контура рамы, положительными.

Вычисляем матрицу податливости  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = L_M^T D L_M =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -4 & -2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$



|   |   |   |
|---|---|---|
| $\frac{4}{6EJ}$<br>$\frac{4 \cdot 4}{6EJ}$<br>$\frac{4}{6EJ}$ |   |   |
| ×   | $\frac{5}{6 \cdot 2EJ}$<br>$\frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 2EJ}$<br>$\frac{5}{6EJ}$ | ×   |
|   |   | $\frac{4}{6EJ}$<br>$\frac{4 \cdot 4}{6EJ}$<br>$\frac{4}{6EJ}$ |

|    |   |      |
|----|---|------|
| 0  | 0 | 0    |
| -2 | 0 | 0    |
| -4 | 0 | 0    |
| -4 | 0 | -1   |
| -2 | 0 | -0,5 |
| 0  | 0 | 0    |
| 0  | 0 | 0    |
| 2  | 2 | 0    |
| 4  | 4 | 0    |

|     |    |     |
|-----|----|-----|
| 168 | 64 | 10  |
| 64  | 64 | 0   |
| 10  | 0  | 2,5 |

 $\frac{1}{3EJ}$

## ТЕМА 8

### МЕТОД СИЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ

#### 8.1. Статически неопределимые системы и их свойства

Статически неопределимыми системами называют такие системы, у которых не все внутренние силы могут быть найдены из уравнений равновесия твердого тела или системы твердых тел.

В статически неопределимых системах число неизвестных усилий превышает число возможных (независимых) уравнений равновесия. Например, для определения четырех опорных реакций балки (рисунок 8.1,а), возникающих от действия на нее любой нагрузки, можно составить только три независимых уравнений равновесия.

Следовательно, во всех сечениях балки на участке  $AC$  усилия определить невозможно. Если в этой балке удалить опорный стержень в точке  $B$  или ввести в некотором сечении шарнир на участке  $BC$ , то получим расчетные схемы статически определимых балок, показанные на рисунке 8.1,а,б. Связи, которые можно удалить в балке (а в общем случае, в любой системе), не нарушая ее свойства геометрической неизменяемости и неподвижности, называют лишними. Количество лишних связей, устранение которых обращает систему в статически определимую, называют степенью статической неопределимости системы. Балка, изображенная на рисунке 8.1,а, является один раз статически неопределимой.

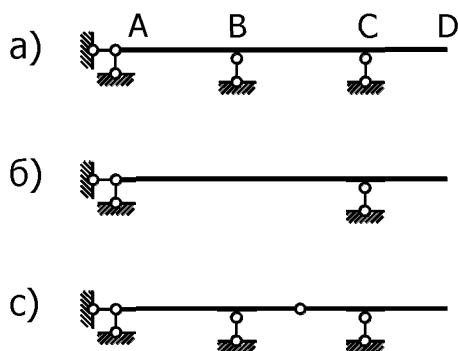


Рисунок 8.1

То же можно сказать и о расчётной схеме фермы (рисунок 8.2). От нагрузки, приложенной к ее узлам, можно с помощью уравнений равновесия найти опорные реакции и усилия в стержнях 3–5 и 4–5, но усилия в остальных стержнях останутся неизвестными. Среди этих стержней имеется один лишний, поэтому ферма является один раз статически неопределимой.

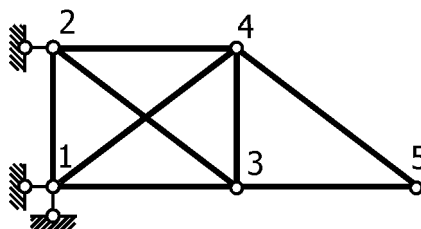


Рисунок 8.2

Еще раз отметим, что термин ”лишняя связь“ нужно понимать с точки зрения геометрической неизменяемости и неподвижности системы. По условиям же работы конструкции эти связи необходимы, при их отсутствии прочность и жесткость конструкции могут оказаться недостаточными.

В качестве лишней может быть принята любая связь, устранение которой не повлияет на неизменяемость и неподвижность системы. Так, для схемы (рисунок 8.1) за лишнюю связь можно принять любой вертикальный опорный стержень или, в любом сечении на участке  $AC$ , связь, через которую передается изгибающий момент с одного участка балки на другой.

Степень статической неопределимости сооружения является важной характеристикой сооружения.

Статически неопределимые системы обладают следующими свойствами.

1. Тепловое воздействие на систему, смещение опор или неточность изготовления ее элементов с последующим натяжением их во время сборки вызывают, в общем случае, в статически неопределимой системе дополнительные усилия. В статически определимой системе эти факторы вызывают только перемещения сечений, усилий же при этом не возникает.

Приведем некоторые примеры.

Пусть температура нижних волокон балки (рисунок 8.3,а) будет равна  $t_1$ , а верхних –  $t_2$ , причем  $t_1 > t_2$ . Если бы в точке  $B$  опорная связь отсутствовала, то консольный стержень при указанном воздействии занял бы положение  $AB'$  (показано штриховой линией). Чтобы вернуть его из этого положения в начальное (недеформированное) необходимо в точке  $B'$  приложить силу  $X_1$ , равную реакции, возникающей в опоре  $B$  от изменения температуры.

Смещение опорной точки  $C$  в положение  $C'$  сопровождается изгибом балки  $AC$  (рисунок 8.3,б), что свидетельствует о появлении в сечениях балки изгибающих моментов и поперечных сил.

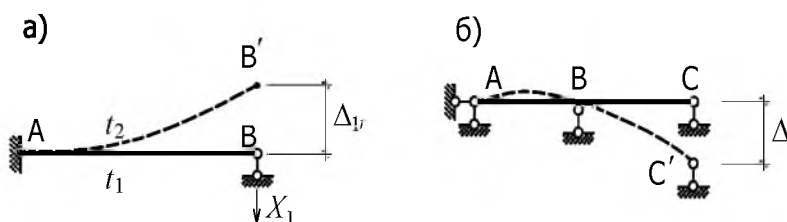


Рисунок 8.3

Если предположить, что в ферме, расчётная схема которой показана на рисунке 8.2, длина заготовки стержня 1–4 оказалась меньше требуемого по проекту размера, то для того, чтобы концы его присоединить к узлам стержень придется натянуть. Значит, вся группа стержней этой панели фермы будет еще до приложения заданной нагрузки испытывать дополнительные усилия, в частности, стержни 1–4 и 2–3 будут растянутыми, а четыре других стержня – сжатыми (возникает начальное напряжённое состояние).

2. Усилия в статически неопределимых системах, возникающие от внешней нагрузки, зависят от соотношения жёсткостей элементов этой системы.

Сравните, например, распределение изгибающих моментов в раме (рисунок 8.4,а,б) с различными соотношениями изгибных жёсткостей стержней.

Усилия в этих системах, возникающие от теплового воздействия и осадки опор, зависят от значений жёсткостей стержней.

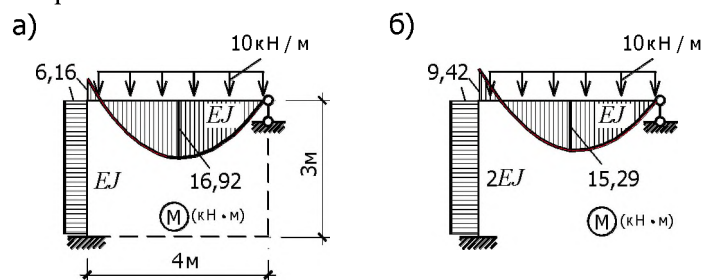


Рисунок 8.4

3. Система с  $n$  лишними связями сохраняет геометрическую неизменяемость и после потери этих связей, в то время как статически определимая система после устранения хотя бы одной связи превращается в изменяемую.

4. Перемещения статически неопределимых систем, как правило, меньше соответствующих перемещений тех статически определимых систем, из которых они образуются. Например, как следует из анализа работы под нагрузкой балок, показанных на рисунке 8.5,  $\Delta_2 > \Delta_1$ .

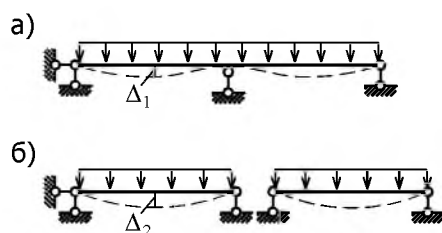


Рисунок 8.5

Другие особенности распределения усилий и перемещений в статически неопределимых системах будут поясняться в последующих параграфах главы.

## 8.2. Степень статической неопределимости. Методы расчета статически неопределимых систем

По определению, степень статической неопределимости равна количеству лишних связей. Из формулы (1.1), устанавливающей количественные соотношения между числом степеней свободы

дисков и числом связей, наложенных на них, следует, что число лишних связей ( $L$ ) будет равно  $L = -W$ , т.е. вычисляется по формуле

$$L = C_0 + 2Ш + 3Ж - 3Д, \quad (8.1)$$

а если диски соединяются между собой только связями первого (одиночная связь) и второго (шарнир) видов, то по формуле

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д. \quad (8.2)$$

Как и при определении  $W$ , обе формулы можно использовать в том случае, когда ни один из дисков системы не представляется в виде замкнутого контура.

Если контур рамы замкнутый, то при использовании формулы (8.1) его нужно разбить на несколько незамкнутых.

Замкнутый бесшарнирный контур является трижды статически неопределимым. Действительно, чтобы раму в виде замкнутого контура (рисунок 8.6,а) превратить в статически определимую, например, показанную на рисунке 8.6,б, необходимо удалить три связи в сечении  $k$  (через эти связи осуществляется передача внутренних сил с одного конца стержня на другой).

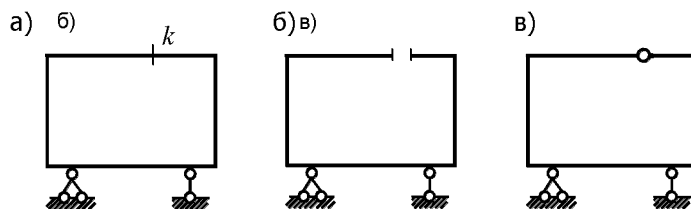


Рисунок 8.6

Если в сечении  $k$  удалить связь, через которую передается изгибающий момент с одной части стержня на другую, т.е. поставить шарнир, то получим дважды статически неопределимую раму (рисунок 8.6,в).

Таким образом, степень статической неопределимости рамы может быть определена по формуле

$$L = 3K - Ш, \quad (8.3)$$

где  $K$  – число замкнутых контуров в раме,

$Ш$  – число простых шарниров.

Заметим, что и рама, показанная на рисунке 8.7, также представляет собой замкнутый бесшарнирный контур. Основание, к которому рама прикрепляется в точках  $A$  и  $B$ , в этом случае рассматривается как диск, соединяющий эти точки.

Приведем некоторые примеры. Определим степень статической неопределимости для рамы, изображенной на рисунке 8.8.

По формуле (8.2) получим:

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = 9 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4.$$

По формуле (8.3):

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Замкнутые контуры показаны на рисунке волнистой линией.

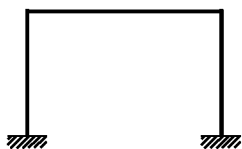


Рисунок 8.7

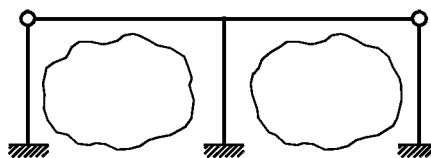


Рисунок 8.8

При использовании формулы (8.1) для рамы, изображенной на рисунке 8.9, учтем, что жестко соединяются между собой диски 1 и 2, а также 2 и 3.

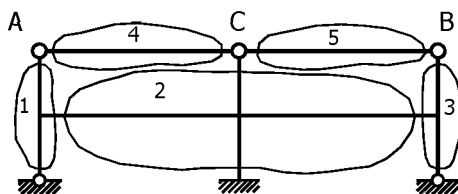


Рисунок 8.9

Очертания дисков выделены волнистыми линиями. Шарнир в точке  $C$  является двукратным.

$$L = C_0 + 2Ш + 3Ж - 3Д = 7 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 6.$$

По формуле (8.3) получим

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 6 = 6.$$

Разбиение рамы (рисунок 8.10) на отдельные диски примем таким, как показано на рисунке.

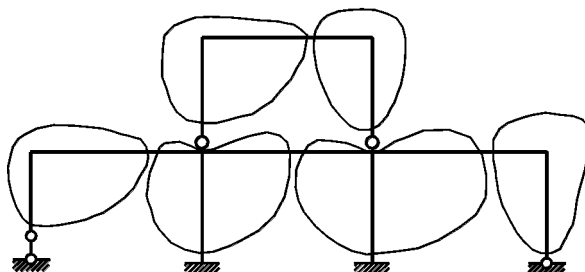


Рисунок 8.10

Тогда получим:  $Д = 6$ ,  $Ш = 2$ , число жестких соединений  $Ж = 4$ .

По формуле (8.1):

$$L = C_0 + 2Ш + 3Ж - 3Д = 9 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 7.$$

По формуле (8.3)

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 5 = 7.$$

В предыдущем выражении принято  $Ш = 2$ , т.к. на схеме имеются два простых шарнира (каждый из них соединяет только два диска).

В последнем выражении  $Ш = 5$ , т.к. дополнительно к двум шарнирам в верхнем контуре учитываются два шарнира в нижнем левом контуре и один шарнир в нижнем правом контуре.

Степень статической неопределимости определяет число дополнительных уравнений, которые нужно составить для определения неизвестных усилий. Последовательность операций по раскрытию статической неопределимости заданной системы зависит от того, что в статически неопределимой системе определяется в первую очередь.

Если в статически неопределимой системе сначала определяются усилия в лишних связях, затем усилия в остальных элементах и только потом перемещения заданных узлов или сечений, то такой порядок действий называют **методом сил**.

Если в статически неопределимой системе сначала определяются перемещения узлов заданной системы, затем усилия во всех элементах и только потом перемещения в дополнительных сечениях, то такой порядок расчета называют **методом перемещений**.

Если в первую очередь одновременно вычисляют усилия в части лишних связей и перемещения части узлов заданной статически неопределимой системы, по такой подход называют **смешанным методом**.

В настоящее время для расчета, как стержневых, так и любых других систем применяют компьютерные технологии, позволяющие автоматизировать как процесс подготовки исходной информации, так и процесс вычислений, а также и обзор полученных результатов. При автоматизированном подходе в основу расчета закладывается алгоритмичность применяемых методов, а не объем вычислений.

В первой части данного учебно-методического комплекса будет рассмотрен только метод сил.

### 8.3. Основная система и основные неизвестные метода сил

Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил сводится к следующему.

В заданной статически неопределимой системе удаляются лишние связи, а вместо них прикладываются неизвестные силы. Полученную таким образом систему называют основной системой метода сил, а неизвестные силы – основными неизвестными этого метода. Их обозначают буквами  $X_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n \leq L$ ).



Иллюстрация 8.1. Поперечные рамы цеха

С целью уменьшения числа неизвестных опытные специалисты применяют иногда и статически неопределимые основные системы. Число неизвестных ( $n$ ) в этом случае будет меньше числа лишних связей ( $L$ ). Такой способ расчёта требует дополнительных вычислений для включённых в основную систему статически неопределимых фрагментов.

В дальнейшем, сопоставляя перемещения заданной и основной систем, получают уравнения для определения основных неизвестных.

Поясним некоторые особенности выбора основной системы. Прежде всего отметим, что основная система должна быть геометрически неизменяемой и неподвижной. Для любой статически неопределимой рамы можно выбрать несколько основных систем. Рассмотрим следующий пример. Степень статической неопределимости рамы, изображенной на рисунке 8.11,а, равна трем. Возможные варианты основных систем показаны на рисунке 8.11,б-в. Так за основные неизвестные могут быть приняты усилия в опорных связях заданной рамы (рисунок 8.11,в). Как вариант, за основные неизвестные можно выбрать реакции в опорных связях  $X_1$  и  $X_3$ , а также силы взаимодействия  $X_2$  между примыкающими к введённому шарниру стержнями. Системы, показанные на рисунках 8.11,г,д, не могут быть выбраны в качестве основных, так как являются мгновенно-изменяемыми.

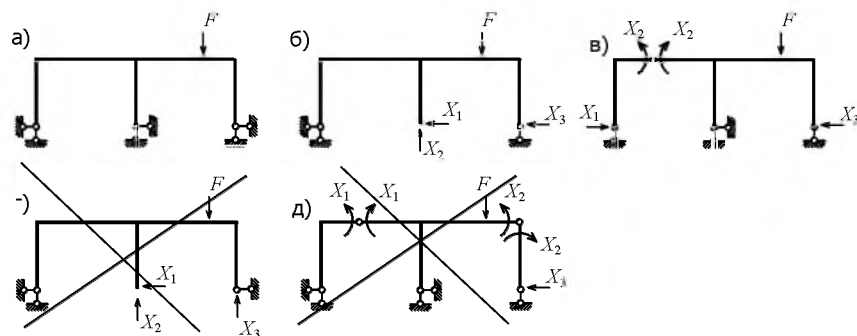


Рисунок 8.11

Все последующие вычисления в методе сил связаны с основной системой. Поэтому от удачного выбора варианта основной системы будет существенно зависеть трудоемкость расчета. Способы выбора рациональных основных систем изложены в разделе 8.8.

#### 8.4. Канонические уравнения метода сил

Деформации заданной и основной систем будут одинаковыми только в том случае, если перемещения точек приложения основных неизвестных по их направлениям в основной системе будут такими же, как и в заданной системе, т.е. равными нулю. Действительно, например, перемещение по направлению силы  $X_1$  или  $X_3$  (рисунок 8.11,в) равно нулю, так же равен нулю в заданной системе и угол взаимного поворота сечений по направлению неизвестной  $X_2$  (рисунок 8.11,в).

Перемещения в основной системе по направлениям основных неизвестных зависят от действующей на систему внешней нагрузки и основных неизвестных, поэтому можно записать, что

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0; \\ \Delta_2(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0; \\ \cdot & \cdot \cdot \\ \Delta_n(X_1, X_2, \dots, X_n, F) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Здесь  $\Delta_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) – полное перемещение по направлению неизвестной  $X_i$ , т.е. перемещение, вызванное неизвестными  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и внешней нагрузкой  $F$ .

Число ( $n$ ) таких уравнений, естественно, соответствует числу основных неизвестных. Если воспользоваться принципом независимости действия сил, то  $i$ -е уравнение из системы (8.4) можно записать в форме, позволяющей видеть вклад каждого силового фактора в конечный результат:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF}, \quad (8.5)$$

где  $\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots, \Delta_{in}$  – перемещения точки приложения  $i$ -й основной неизвестной по ее направлению, вызванные силами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ;

$\Delta_{iF}$  – перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой.

Перемещение по направлению  $i$ -й неизвестной, вызываемое силой  $X_k$ , может быть представлено как

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k, \quad (8.6)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение по тому же направлению, вызываемое силой  $X_k = 1$ .

Учитывая выражения (8.5) и (8.6), систему уравнений (8.4) запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \cdot & \cdot \cdot \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$



Эти уравнения называют каноническими уравнениями метода сил для расчета системы на действие внешней нагрузки. Суть  $i$ -го уравнения сводится к тому, что перемещение точки приложения неизвестной  $X_i$  по ее направлению, вызываемое всеми неизвестными и внешней нагрузкой, равно нулю.

В матрично-векторной форме записи система (8.7) имеет вид:

$$A \vec{X} + \vec{B} = 0, \quad (8.8)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

– матрица коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях (матрица податливости основной системы);

$$\vec{X}^T = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \cdots \ X_n] \quad (8.10)$$

– вектор неизвестных;

$$\vec{B}^T = [\Delta_{1F} \ \Delta_{2F} \ \cdots \ \Delta_{nF}] \quad (8.11)$$

– вектор свободных членов канонических уравнений (вектор грузовых перемещений).

Коэффициенты типа  $\delta_{ii}$ , т.е. расположенные на главной диагонали, называют главными (главные перемещения), а коэффициенты  $\delta_{ik}$ , если  $i \neq k$  – побочными (побочные перемещения). Согласно теореме о взаимности перемещений  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ , т.е. матрица  $A$  является симметричной.

При расчете статически неопределимой системы на тепловое воздействие вектор  $\vec{B}$  в уравнении (8.8) имеет вид:

$$\vec{B}^T = [\Delta_{1t} \ \Delta_{2t} \ \cdots \ \Delta_{nt}], \quad (8.12)$$

где  $\Delta_{it}$  – перемещение точки приложения  $i$ -й неизвестной по ее направлению, вызванное изменением температуры стержней.

При расчете системы на смещение связей

$$\vec{B}^T = [\Delta_{1c} \ \Delta_{2c} \ \cdots \ \Delta_{nc}], \quad (8.13)$$

где  $\Delta_{ic}$  – перемещение  $i$ -й неизвестной, вызванное смещением связей.

### 8.5. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены уравнений вычисляются по правилам определения перемещений, изложенным в гл. 7. Для рамных систем, испытывающих преимущественно изгибные деформации, при неавтоматизированных вычислениях (“ручной” счет) ограничиваются учетом влияния на перемещения только изгибающих моментов. Поэтому  $\delta_{ik}$  и  $\Delta_{iF}$  вычисляются по формулам:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EJ},$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ},$$

где  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{M}_k$  – изгибающие моменты, вызываемые безразмерными силами соответственно  $X_i = 1$  и  $X_k = 1$ ;

$M_F$  – изгибающий момент, вызываемый внешней нагрузкой.

Так, например, если для рамы (рисунок 8.12,а) принять основную систему по варианту рисунка 8.12,б, то при определении перемещения  $\delta_{21}$  необходимо состояние рамы под действием  $X_1 = 1$  (рисунок 8.12,в) рассматривать как грузовое, а второе, соответствующее действию  $X_2 = 1$  (рисунок 8.12,г), – как вспомогательное. Тогда, после построения эпюр изгибающих моментов (рисунок 8.12,е,ж), можно воспользоваться известными способами вычисления интеграла Мора вида

$$\delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_1 dx}{EJ}.$$

Перемещение  $\Delta_{1F}$  (рисунок 8.12,д) вычисляется с помощью эпюр  $M_F$  (рисунок 8.12,з) и  $\bar{M}_1$  (рисунок 8.12,е).

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ}.$$

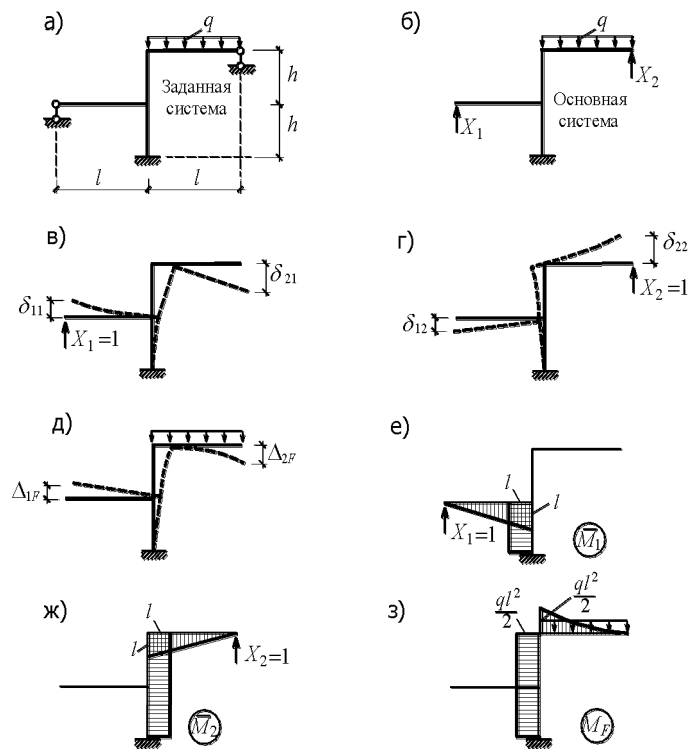


Рисунок 8.12

Матричная форма определения перемещений изложена в разделе<sup>7.10</sup>.

Естественно, что значения коэффициентов и свободных членов уравнений получаются более точными, если при их определении учитываются, кроме изгибающих моментов, продольные и поперечные силы в элементах рамы.

После определения коэффициентов и свободных членов система канонических уравнений может быть записана в численном виде.

### 8.6. Построение окончательных эпюр усилий

Решение системы канонических уравнений позволяет найти значения основных неизвестных. Окончательные усилия  $S \in \{M, Q, N\}$  в  $k$ -м сечении заданной системы, на основании принципа независимости действия сил, вычисляются по выражению

$$S_k = S_{kF} + \bar{S}_{k1} X_1 + \bar{S}_{k2} X_2 + \dots + \bar{S}_{kn} X_n, \quad (8.14)$$

где  $S_{kF}$  – усилие в  $k$ -м сечении от действия внешней нагрузки;

$\bar{S}_{ki}$  – усилие в  $k$ -м сечении от  $X_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В соответствии с выражением (8.14) строятся окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n, \quad (8.15)$$

$$Q = Q_F + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n,$$

$$N = N_F + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n.$$

Построение эпюр  $Q$  и  $N$  по приведенным выше формулам не всегда удобно. Более простой способ построения эпюры  $Q$  основан на использовании дифференциальной зависимости

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Чтобы воспользоваться этой зависимостью получим аналитическое выражение для определения изгибающего момента в сечении стержня рамы. Рассмотрим такой стержень как балку на двух опорах. Предположим, что пролет балки загружен так, как показано на рисунке 8.13,а. Оба опорных момента (левый ( $l$ ) и правый ( $n$ )) – положительные.

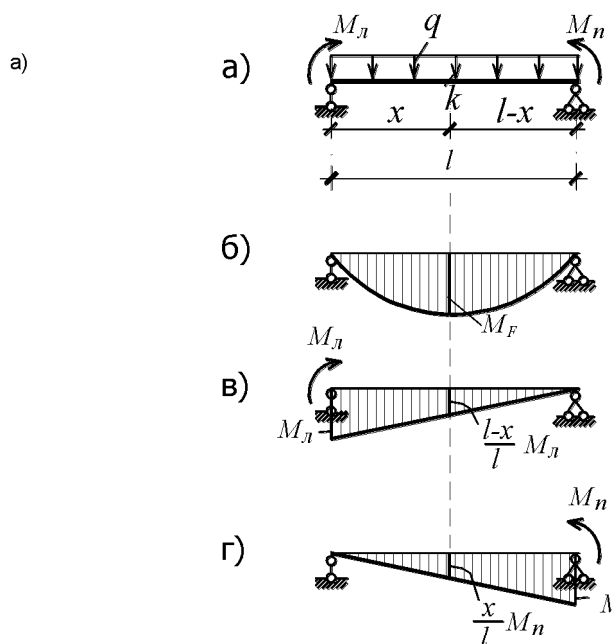


Рисунок 8.13

Построив для этого пролета эпюры моментов от нагружения его пролетной нагрузкой (рисунок 8.13,б) и опорными моментами (рисунок 8.13,в,г), определим, на основании принципа независимости действия сил, окончательную ординату в сечении  $k$  на эпюре  $M$  как сумму составляющих ее:

$$M = M_F + \frac{l-x}{l} M_l + \frac{x}{l} M_n. \quad (8.16)$$

Взяв первую производную от выражения (8.16), получим формулу для определения поперечной силы в том же сечении:

$$Q = Q_F + \frac{M_n - M_l}{l}. \quad (8.17)$$

### 8.7. Алгоритм расчёта. Проверки расчёта

Процесс расчета статически неопределимых рам методом сил включает следующие операции.

1. Определение степени статической неопределимости системы.
2. Выбор основной системы.
3. Запись в общем виде системы канонических уравнений.
4. Построение эпюр усилий в основной системе от внешней нагрузки и единичных значений основных неизвестных.
5. Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений.
6. Запись системы канонических уравнений в численном виде и решение ее.
7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов.
8. Построение эпюр  $Q$  и  $N$ .

Чтобы не ошибиться в ходе расчета, вычисления на каждом этапе алгоритма следует проверять. Для этого, разумеется, необходимо глубоко понимать суть выполняемых операций и правильно использовать знания, накопленные в ходе изучения курса строительной механики.

Поясним особенности контроля правильности расчета на отдельных этапах алгоритма.

Прежде всего, сделаем замечание к вопросу о выборе основной системы. Для всех возможных вариантов основной системы следует выполнить кинематический анализ их в той последовательности, которая рекомендована в гл. 1. Особое внимание надо уделить анализу структуры системы и проверке ее на мгновенную изменяемость.

На этапе построения эпюр усилий в основной системе применяется, как правило, статический метод. Для проверки эпюр наиболее часто используются условия равновесия фрагментов расчетной схемы, в частности, узлов рамы.

Проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений производится с помощью суммарной единичной эпюры моментов  $\bar{M}_s$ , строящейся по правилу

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \quad (8.18)$$

Если “перемножить” единичную эпюру  $M_i$  и эпюру  $M_s$ , то получим

$$\begin{aligned} \delta_{is} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s dx}{EJ} = \sum \int \frac{\bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) dx}{EJ} = \\ &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1 dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2 dx}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n dx}{EJ} = \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \sum \delta_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (8.19)$$

т.е. сумма коэффициентов при неизвестных в  $i$ -м ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) уравнении должна быть равна  $\delta_{is}$ . Такая проверка называется построчной.

Вместо “перемножения” каждой единичной эпюры моментов на суммарную эпюру моментов  $M_s$  на практике производится “перемножение”  $\bar{M}_s$  на  $\bar{M}_s$ . Используя (8.19), несложно показать, что

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s dx}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}, \quad (8.20)$$

т.е.  $\delta_{ss}$  равно сумме всех коэффициентов канонических уравнений. Эту проверку называют универсальной.

Аналогично выполняется проверка правильности вычисления свободных членов

$$\Delta_{sF} = \sum \int \frac{\bar{M}_s M_F dx}{EJ} = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF}. \quad (8.21)$$

Сумма всех свободных членов уравнений равна  $\Delta_{sF}$ .

Необходимо отметить, что выполнение упомянутых здесь проверок коэффициентов и свободных членов не всегда является гарантией правильных вычислений. В ходе определения  $\delta_{ik}$ ,  $\Delta_{iF}$  и  $\delta_{ss}$ ,  $\Delta_{sF}$  на некоторой операции может быть допущена одна и та же ошибка и, как следствие, она окажется незамеченной. Поэтому, еще раз напомним, основой правильных расчетов на этом этапе является знание и умение правильно применять способы вычисления интегралов Мора.

Для проверки окончательной эпюры моментов используются статическая и кинематическая проверки. Статическая проверка эпюры “ $M$ ” сводится к проверке равновесия узлов рамы. С ее помощью выявляются только ошибки, которые могут быть допущены при операции построения эпюры моментов с помощью формулы (8.15).

Основной проверкой является кинематическая (другие ее названия: деформационная проверка, проверка перемещений). Перемещение точки приложения  $i$ -й основной неизвестной по ее направлению в заданной системе должно быть равно нулю. Поэтому, пользуясь общим правилом определения перемещений, получим

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M dx}{EJ} = 0. \quad (8.22)$$

В таком случае понятно, что и сумма перемещений по направлениям всех основных неизвестных то же равна нулю. Следовательно,

$$\sum \int \frac{\bar{M}_s M dx}{EJ} = 0, \quad (8.23)$$

т.е. результат “перемножения” суммарной единичной эпюры  $\bar{M}_s$  на окончательную эпюру моментов должен быть равен нулю.

Статическая проверка эпюр  $Q$  и  $N$  заключается в проверке равновесия отсеченной от опорных закреплений части рамы.

Пример. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для рамы, изображенной на рисунке 8.14,а.

Заданная рама является дважды статически неопределимой. Основная система и основные неизвестные показаны на рисунке 8.14,б. Система канонических уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  и внешней нагрузки показаны на рисунке 8.14,в,г,е.

Определяем коэффициенты при неизвестных и свободные члены в канонических уравнениях.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{203}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EJ} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{144}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EJ} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = -\frac{66}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{2EJ} 320 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{6}{6EJ} (320 \cdot 3 + 4 \cdot 125 \cdot 3 + 20 \cdot 3) = \frac{3160}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{2EJ} 320 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{6}{6EJ} (-320 \cdot 6 - 4 \cdot 125 \cdot 3) = -\frac{7260}{EJ}.$$

Для проверки коэффициентов и свободных членов построена суммарная единичная эпюра моментов  $\bar{M}_s$ . Используя формулу (8.20), получим

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 2) + \\ &+ \frac{6}{6EJ} (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \frac{2}{3} 3 = \frac{239}{3EJ}; \end{aligned}$$

Действительно,

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{203}{3EJ} - \frac{66}{EJ} - \frac{66}{EJ} + \frac{144}{EJ} = \frac{239}{3EJ}.$$

По формуле (8.21) имеем

$$\Delta_{sF} = -\frac{1}{2EJ} 320 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{6}{6EJ} (-320 \cdot 3 + 20 \cdot 3) = -\frac{4100}{EJ},$$

что равно  $\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{3160}{EJ} - \frac{7260}{EJ} = -\frac{4100}{EJ}$ .

Записываем систему уравнений в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{203}{3EJ} X_1 - \frac{66}{EJ} X_2 + \frac{3160}{EJ} &= 0; \\ -\frac{66}{EJ} X_1 + \frac{144}{EJ} X_2 - \frac{7260}{EJ} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$X_1 = 4,477 \text{ кН}; \quad X_2 = 52,468 \text{ кН}.$$

Для построения окончательной эпюры моментов используем формулу (8.15). Эпюры  $M_1 X_1$  и  $M_2 X_2$  показаны на рисунке 8.14, ж, з, а окончательная эпюра  $M$  – на рисунке 8.14, и. Статическая проверка ее выполняется (советуем читателю провести ее самостоятельно). Выполним кинематическую проверку.

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_s M dx}{EJ} &= \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (-2 \cdot 3 \cdot 18,62 - 2 \cdot 7 \cdot 0,71 - 3 \cdot 0,71 - 7 \cdot 18,62) + \\ &+ \frac{6}{6EJ} (-3 \cdot 18,62 + 3 \cdot 33,43) + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \frac{2}{3} 13,43 = \\ &= -\frac{140,57}{EJ} + \frac{140,55}{EJ} = -\frac{0,02}{EJ}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность вычислений составляет

$$\varepsilon = \left| \frac{-0,02}{140,55} \right| \cdot 100 \approx 0,01\%,$$

что меньше допустимого значения, принимаемого равным около 1%.

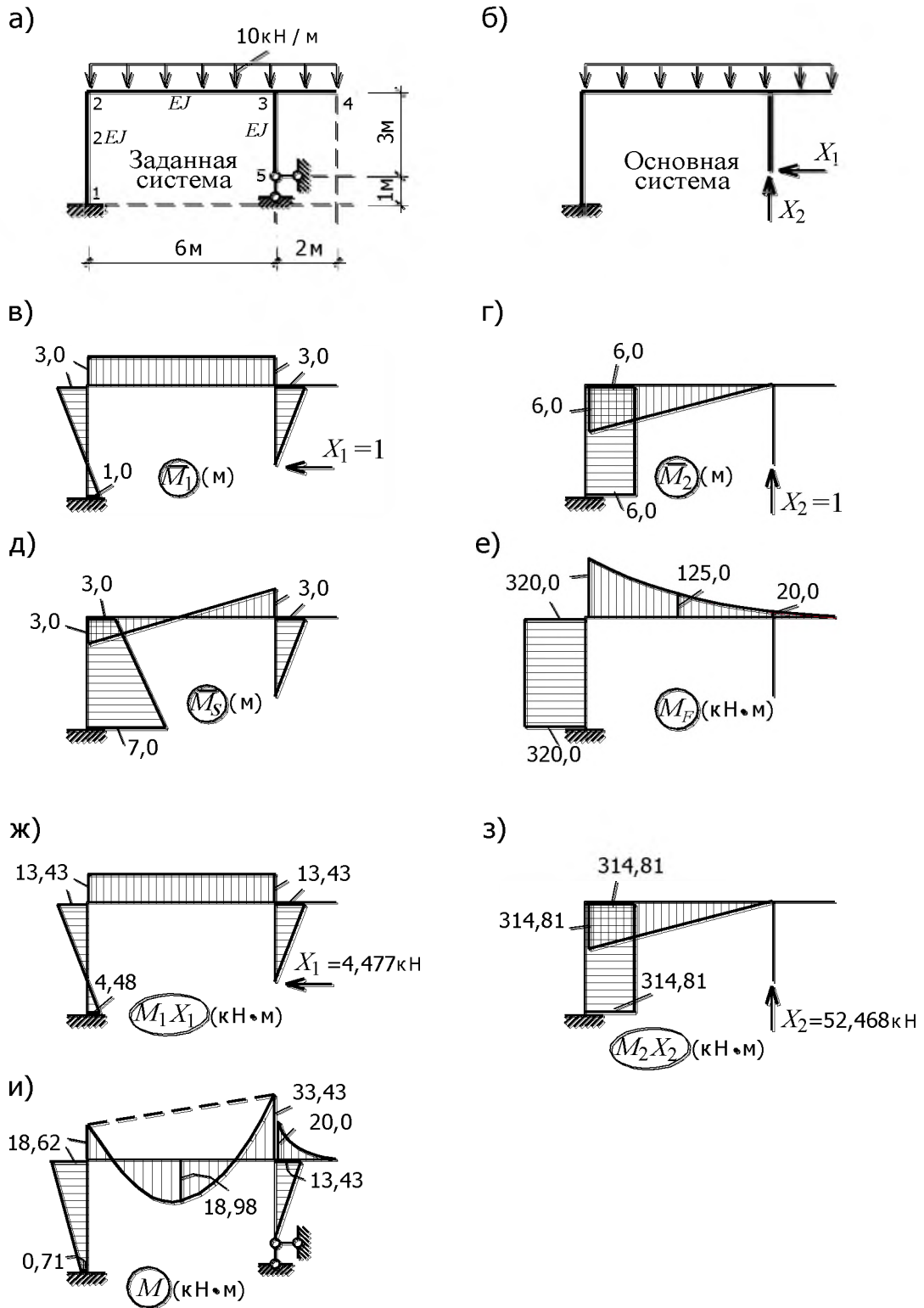
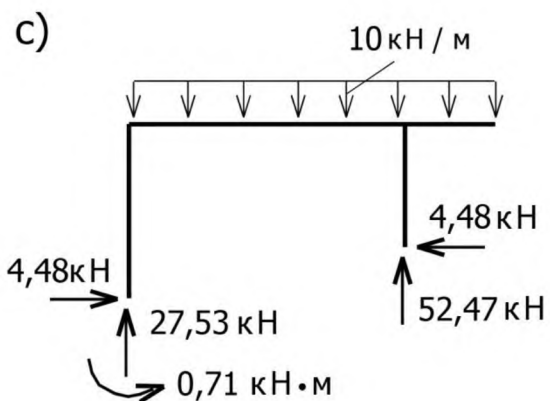
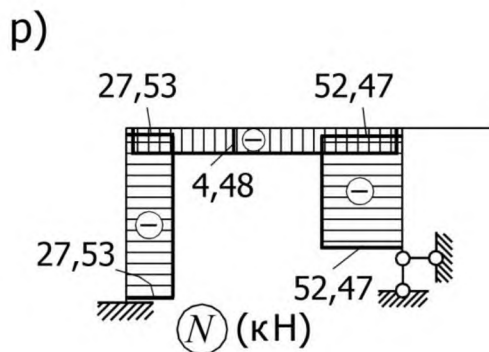
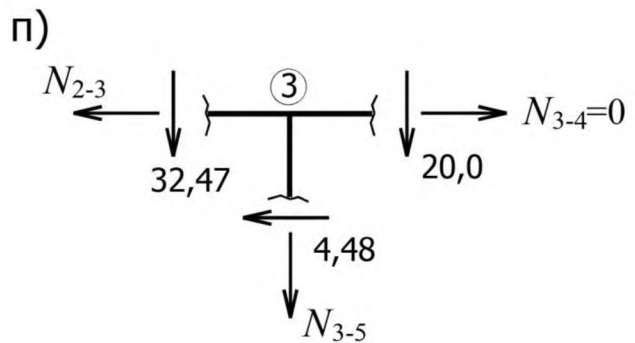
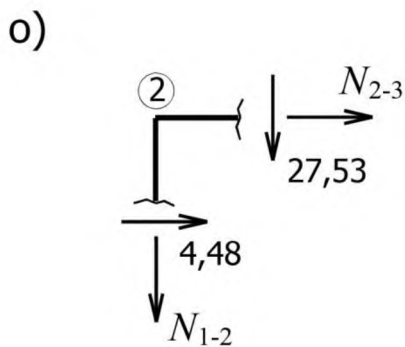
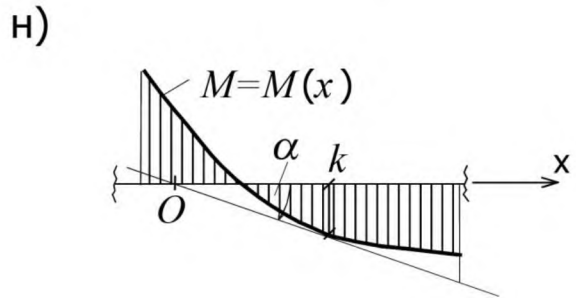
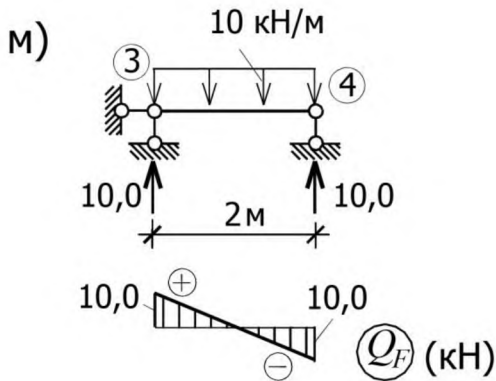
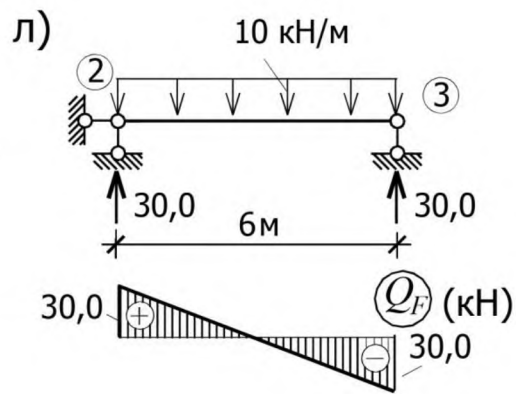
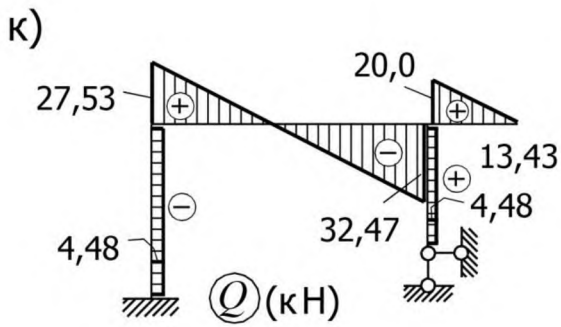


Рисунок 8.14





Окончание рисунка 8.14

Эпюра  $Q$  (рисунок 8.14,к) строится по эпюре  $M$ . Еще раз отметим, что более простой способ ее построения основывается на зависимости  $Q = \frac{dM}{dx}$ . Воспользуемся формулой (8.17).

Рассматривая стержень 2-3 как простую балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой, построим эпюру поперечных сил (балочную эпюру поперечных сил). Она показана на рисунке 8.14,л.

Учитывая распределение моментов на этом стержне (рисунок 8.14,и) с помощью формулы (8.17) найдем, что в сечении, примыкающем к узлу 2,

$$Q_2 = 30 + \frac{-33,43 - (-18,62)}{6} = 27,53 \text{ кН},$$

а в сечении, примыкающем к узлу 3,

$$Q_3 = -30 + \frac{-33,43 - (-18,62)}{6} = -32,47 \text{ кН}.$$

Эпюра  $Q$  на консоли 3-4 строится как для статически определимого фрагмента рамы. Впрочем, и в этом случае можно воспользоваться формулой (8.17), если рассмотреть участок 3-4 как балку на двух опорах (рисунок 8.14,м).

Тогда в сечении, примыкающем к узлу 3,

$$Q_3 = 10 + \frac{0 - (-20)}{2} = 20 \text{ кН},$$

а в сечении, примыкающем к узлу 4,

$$Q_4 = -10 + \frac{0 - (-20)}{2} = 0.$$

Для стержня 1-2 получим:

$$Q_1 = 0 + \frac{-18,62 - (-0,71)}{4} = -4,48 \text{ кН},$$

$$Q_2 = 0 + \frac{-18,62 - (-0,71)}{4} = -4,48 \text{ кН}.$$

Напомним, что  $\frac{dM}{dx} = tg\alpha$ . Эпюра изгибающих моментов строится на растянутых волокнах стержня. Для балочных схем положительные ординаты эпюры расположены ниже оси балки. Поэтому знак поперечной силы в заданном сечении  $k$  стержня можно определять следующим образом. Проведя касательную к линии, ограничивающей эпюру  $M$ , в точке соответствующей положению сечения  $k$  (рисунок 8.14,н), необходимо найти точку пересечения касательной и оси стержня (точка  $O$ ).

Если ось стержня необходимо поворачивать вокруг точки  $O$  до совмещения с касательной кратчайшим путем по ходу часовой стрелки, то поперечная сила в сечении  $k$  будет положительной ( $Q > 0$ ). При движении оси стержня против хода часовой стрелки  $Q < 0$ .

На линейных участках эпюры изгибающих моментов положение касательной совпадает с линией, ограничивающей эпюру  $M$ . Поперечная сила на всей длине этого участка будет постоянной. Для стержня 3-5  $Q = \frac{13,43}{3} = -4,48$  кН, а для стержня 1-2  $Q = -\frac{18,62 - 0,71}{4} = -4,48$  кН.

При известных значениях поперечных сил в стержнях из уравнений равновесия узлов определяются продольные силы  $N$ . Вычисления  $N$  начинают с узла, в котором стыкуются стержни не более чем с двумя неизвестными усилиями, и далее, последовательно вырезая

узлы, определяют усилия во всех остальных стержнях. Уравнения равновесия записывают в виде суммы проекций всех усилий (и приложенных к узлу внешних сил, если они имеются) на вертикальную и горизонтальную оси, или, при наличии наклонных стержней, если вычисления упрощаются, на оси, перпендикулярные направлениям стержней.

Составив для узла 2 (рисунок 8.14,о) уравнения  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  найдем  $N_{2-3} = -4,48$  кН,  $N_{1-2} = -27,53$  кН.

Из уравнения  $\sum Y = 0$  для узла 3 (рисунок 8.14,п) получим  $N_{3-5} = -52,47$  кН.

Уравнение  $\sum X = 0$  для узла 3 является проверочным. Эпюра  $N$  показана рисунке 8.14,р.

Для проведения статической проверки эпюр  $Q$  и  $N$  отсекаем раму от опорных закреплений, нагружаем ее заданной нагрузкой и поперечными и продольными силами в сечениях, отделяющих стержни от опорных закреплений (рисунок 8.14,с). Составляя уравнения  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  и  $\sum M = 0$ , убеждаемся в том, что рама находится в равновесии.

### 8.8. Понятие о рациональной основной системе и способы ее выбора

Рациональной основной системой называют такую систему, для которой в канонических уравнениях возможно большее число побочных коэффициентов обращается в нуль. При этом очень важно установить нулевые коэффициенты лишь на основе визуального анализа очертания эпюр усилий, не затрачивая время на их определение. Обращение в нуль побочных коэффициентов приводит к значительным упрощениям в расчете.

Если некоторый коэффициент  $\delta_{ik}$  равен нулю, то соответствующие эпюры  $\bar{M}_i$  и  $\bar{M}_k$  принято называть взаимно ортогональными (аналогия со скалярным произведением взаимно ортогональных векторов).

К наиболее часто используемым способам получения рациональных основных систем относятся: использование симметрии системы, группировки неизвестных, преобразование нагрузки, расчленение многопролетных рам.

**1. Использование симметрии системы.** Основную систему для рамы, имеющей симметричное распределение линейных размеров и жесткостей стержней, следует принимать симметричной. Если основные неизвестные можно расположить на оси симметрии, то часть из них будет относиться к симметричным, а другая – к обратносимметричным (иначе, кососимметричным). От действия на раму симметричной нагрузки распределение усилий в ее элементах окажется симметричным, и наоборот: обратносимметричная нагрузка вызывает обратносимметричные усилия. Поэтому эпюры изгибающих моментов в основной системе будут либо симметричными, либо обратносимметричными. Симметричные и обратносимметричные эпюры являются взаимно ортогональными.

Например, приняв для рамы, показанной на рисунке 8.15,а, основную систему, изображенную на рисунке 8.15,б, получим симметричные эпюры  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$ ,  $\bar{M}_4$  (рисунок 8.15,в,г,е) и обратносимметричную  $\bar{M}_3$  (рисунок 8.15,д). Следовательно, коэффициенты  $\delta_{13}$ ,  $\delta_{31}$ ,  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{32}$ ,  $\delta_{34}$ ,  $\delta_{43}$  равны нулю.

Вычеркнув в системе уравнений (читатель должен записать их) слагаемые, включающие перечисленные коэффициенты, увидим, что она распалась на подсистему, содержащую только симметричные неизвестные и уравнение с обратносимметричной неизвестной.

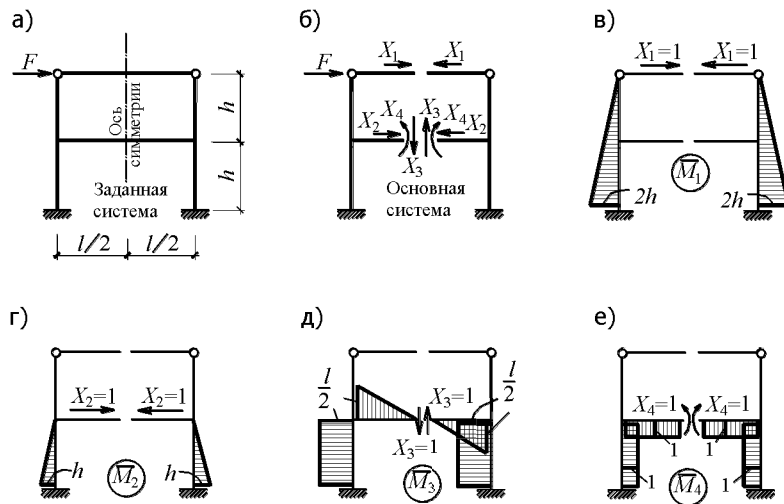


Рисунок 8.15

Несложно, очевидно, распространить приведенные рассуждения на примеры рам с большим количеством неизвестных.

**2. Группировки неизвестных.** Во многих случаях основные неизвестные невозможно расположить на оси симметрии. Так для рамы, изображенной на рисунке 8.16,а, число лишних связей равно шести. Симметричная основная система может быть принята по варианту, показанному на рисунке 8.16,б. Однако в этом случае при загрузении ее силами  $X_i=1$  ни одна из эпюр изгибающих моментов не получится симметричной или обратносимметричной, а, значит, все побочные коэффициенты  $\delta_{ik}$  будут отличными от нуля.

Чтобы получить симметричные и обратносимметричные эпюры усилий необходимо вместо традиционных неизвестных  $X_i$  ввести новые (будем обозначать их  $Z_i$ ), представляющие собой группы сил. Переход от старых неизвестных к новым, и наоборот, должен быть однозначным.

На рисунке 8.16,в показана та же основная система с новыми неизвестными. Сопоставляя расположение неизвестных на рисунке 8.16,б,в находим правила преобразования их: каждой паре симметрично расположенных неизвестных  $X_i$  соответствует операция сложения или вычитания симметричных и обратносимметричных групповых неизвестных  $Z_i$ .

В частности,  $X_1 = Z_1 + Z_2$ ,  $X_4 = Z_1 - Z_2$ , откуда следуют и выражения для  $Z$ :

$$Z_1 = \frac{X_1 + X_4}{2}, \quad Z_2 = \frac{X_1 - X_4}{2}.$$

Эпюры усилий от групповых неизвестных показаны на рисунке 8.16,г-и. Вследствие взаимной ортогональности симметричных и обратносимметричных эпюр система канонических уравнений распадается на две независимые: в одну из них войдут только симметричные неизвестные  $Z_1, Z_3, Z_5$ , а в другую – обратносимметричные ( $Z_2, Z_4, Z_6$ ).

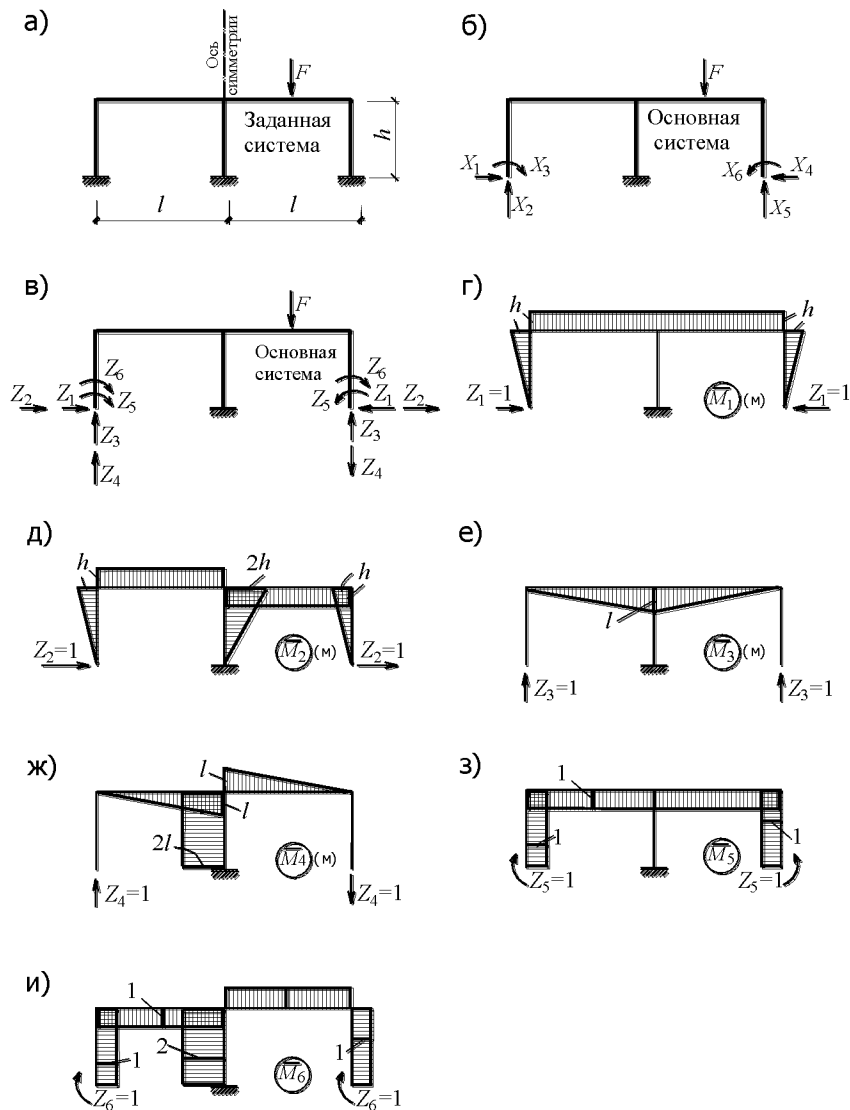


Рисунок 8.16

**3. Преобразование нагрузки.** Дальнейшие упрощения в расчете симметричных систем (рисунок 8.17,а) связаны с разложением нагрузки на симметричную и反对称ную составляющие.

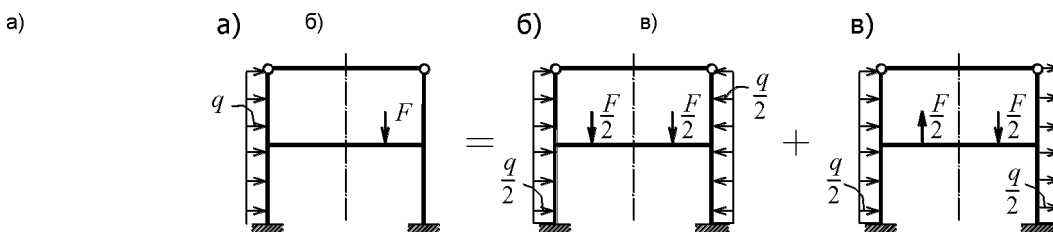


Рисунок 8.17

Используя свойство взаимной ортогональности эпюр, несложно показать, что при действии на систему симметричной нагрузки反对称ные неизвестные обращаются в нуль, а при действии反对称ной нагрузки оказываются равными нулю симметричные неизвестные. Применительно к расчетной схеме рамы, показанной на рисунке 8.17,б, это означает, что расчет ее надо выполнять как системы с неизвестными  $X_1$ ,

$X_2, X_4$  (основная система изображена на рисунке 8.15,б), а расчет рамы на действие обратносимметричной нагрузки (рисунок 8.17,в) – как системы с одной неизвестной ( $X_3$ ).

**4. Расчленение многопролетных рам.** Этот способ применяется как для симметричных, так и для несимметричных рам. Меньшая вычислительная работа по определению  $\delta_{ik}$  будет в том случае, если эпюры усилий в основной системе будут распространяться на небольшие фрагменты рамы, т.е. будут “локализованы” в окрестности действия нагрузки.

Для рамы (рисунок 8.18,а) с четырьмя неизвестными на рисунке 8.18,б,в представлены два варианта основной системы. Анализируя распределение моментов от  $X_i=1$  в раме, показанной на рисунке 8.18,б, убедимся в том, что ни один из коэффициентов  $\delta_{ik}$  не равен нулю.

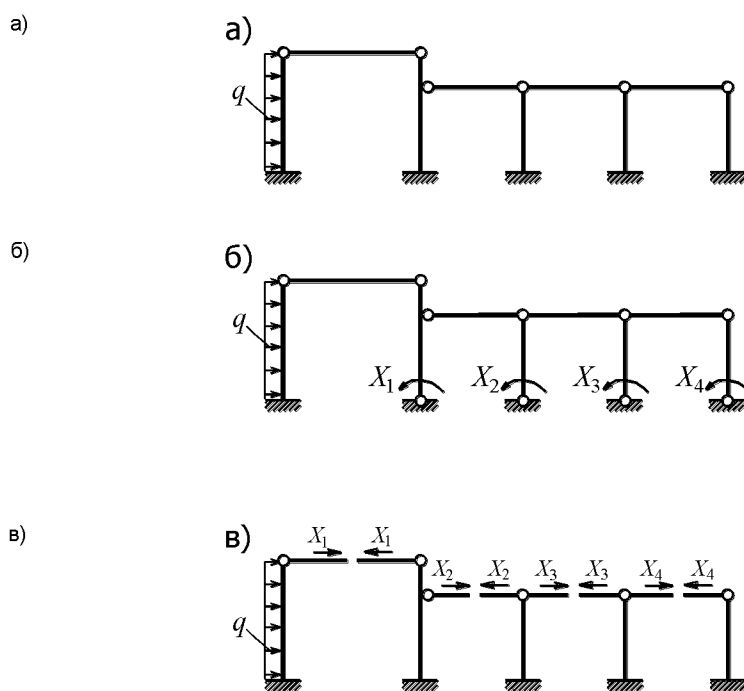


Рисунок 8.18

В системе же, показанной на рисунке 8.18,в, эпюры изгибающих моментов имеют место только на стойках, непосредственно воспринимающих действие  $X_i=1$ . Поэтому  $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ ,  $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$ ,  $\delta_{24} = \delta_{42} = 0$ , следовательно, основная система является рациональной.

### 8.9. Определение перемещений в статически неопределимых системах

Для определения перемещений с помощью формулы Мора необходимо, следуя изложенному в разделе 7.6, построить эпюры изгибающих моментов для заданного нагружения системы (рисунок 8.19,а) и для вспомогательного (рисунок 8.19,б). Тогда искомое перемещение будет вычисляться по формуле

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M}{EJ} dx. \quad (8.24)$$

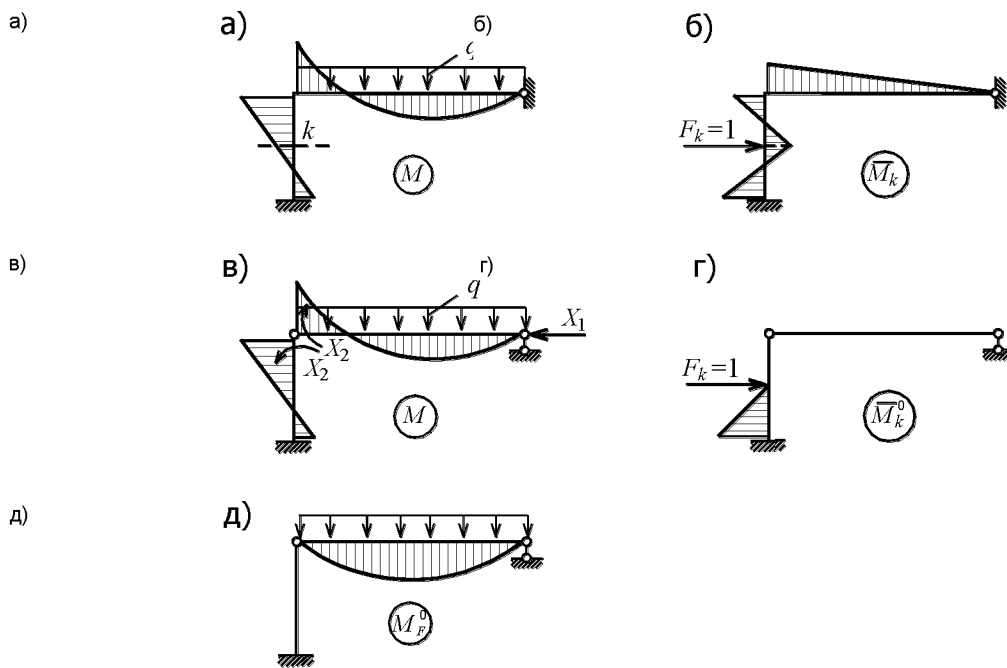


Рисунок 8.19

Однако такой способ вычисления не совсем удобен, так как потребуется дважды рассчитать статически неопределимую систему.

Более простой способ вычисления можно получить из следующих рассуждений. Если загрузить основную систему заданной нагрузкой и основными неизвестными, которые определены из канонических уравнений, то эпюра моментов в этой статически определимой системе (рисунок 8.19,в) будет полностью совпадать с окончательной эпюрой моментов (рисунок 8.19,а). Следовательно, рассматривая состояние рамы на рисунке 8.19,в как исходное, можно для определения перемещения точки  $k$  во вспомогательном состоянии принимать статически определимую систему (рисунок 8.19,г). В этом случае

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k^0 M}{EJ} dx, \quad (8.25)$$

где  $\bar{M}_k^0$  – изгибающие моменты в статически определимой системе, возникающие от  $F_k = 1$ .

Для вычисления перемещения можно применить и другой способ: эпюру моментов от заданной нагрузки можно строить в основной системе, а эпюру от  $F_k = 1$  – в заданной статически неопределимой системе. Покажем это.

Применяя к состояниям рамы, изображенным на рисунке 8.19,а,б, теорему о взаимности работ, получим:

$$F_k \Delta_{kF} = F \Delta_{Fk}, \quad (8.26)$$

где  $F_k = 1$ ;  $F$  – силы, действующие в состоянии  $a$  (на рисунке 8.19,а этой силой является равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ );  $\Delta_{Fk}$  – перемещение по направлению силы  $F$ , возникающее от  $F_k = 1$  (в этом примере – площадь эпюры вертикальных перемещений горизонтального стержня).

Так как эпюры моментов в состояниях  $a$  (рисунок 8.19,а) и  $v$  (рисунок 8.19,в) полностью совпадают, то выражение (8.26) применимо к состояниям рамы  $b$  (рисунок 8.19,б) и  $v$ . В этом случае под  $F$  на рисунке 8.19,в надо понимать распределенную нагрузку и основные

неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ . Но работа основных неизвестных на перемещениях рамы в состоянии  $b$  равна нулю. Поэтому

$$\Delta_{kF} = \sum F \Delta_{Fk}, \quad (8.27)$$

т.е. в правой части выражения (8.27) записана работа внешних сил, приложенных к основной системе, на перемещениях статически неопределимой системы в состоянии  $k$ .

Заметим, что в приведенных пояснениях на выбор основной системы никаких ограничений не накладывалось.

Записывая выражение (8.27) через работу изгибающих моментов, получим

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_F^0}{EJ} dx, \quad (8.28)$$

где  $M_F^0$  – изгибающие моменты в основной системе (рисунок 8.19,д).

Таким образом, при определении перемещений в статически неопределимых системах можно одну из “перемножаемых” эпюр строить в заданной статически неопределимой системе, а вторую – в любой статически определимой, полученной из заданной системы.

Обратимся к вычислениям. На рисунке 8.20,а показана эпюра изгибающих моментов в статически неопределимой раме от заданной нагрузки, а на рисунке 8.20,б – эпюра моментов в той же раме от  $F_k = 1$ . По формуле (8.24) получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{kF} &= \sum \int \frac{\bar{M}_k M}{EJ} dx = \\ &= \frac{l}{24EJ} \left[ -2 \frac{15l}{176} \frac{ql^2}{22} - 2 \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{44} + \frac{15l}{176} \frac{ql^2}{44} + \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{22} \right] + \\ &+ \frac{l}{24EJ} \left[ 2 \frac{3l}{176} \frac{ql^2}{11} - 2 \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{44} - \frac{13l}{176} \frac{ql^2}{11} + \frac{3l}{176} \frac{ql^2}{44} \right] + \\ &+ \frac{l}{6EJ} \left[ \frac{3l}{176} \frac{ql^2}{11} - 4 \frac{3l}{352} \frac{7}{88} ql^2 \right] = -\frac{ql^4}{1408} \frac{1}{EJ} \text{ м.} \end{aligned}$$

На рисунке 8.20,в показана эпюра моментов в статически определимой раме (основной системе) от  $F_k = 1$ , а на рисунке 8.20,г – эпюра моментов в основной системе от заданной нагрузки. По формуле (8.25) получим:

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{\bar{M}_k^0 M}{EJ} dx = \frac{l}{24EJ} \left[ -2 \frac{l}{4} \frac{ql^2}{22} + \frac{l}{4} \frac{ql^2}{44} \right] = -\frac{ql^4}{1408} \frac{1}{EJ} \text{ м.}$$







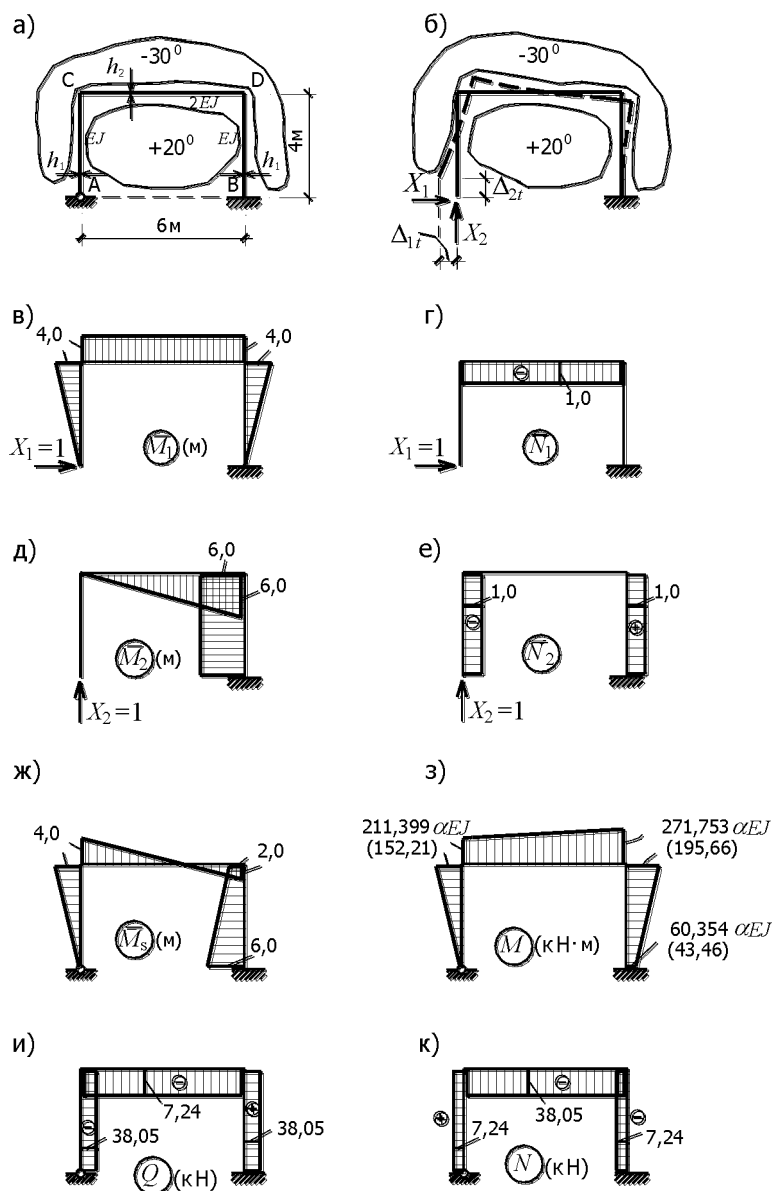


Рисунок 8.21

Следуя алгоритму расчета (раздел 8.7), запишем систему уравнений в численном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{272}{3EJ} X_1 - \frac{84}{EJ} X_2 - 5636,67 \alpha = 0; \\ -\frac{84}{EJ} X_1 + \frac{180}{EJ} X_2 + 6250,0 \alpha = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив ее, найдем  $X_1 = 52,8498 \alpha EJ$  кН,  $X_2 = -10,0590 \alpha EJ$  кН.

Статическая неопределимость рамы раскрыта. Так как грузовая эпюра моментов в основной системе (статически определимой) при расчете на действие температуры отсутствует, то окончательную эпюру моментов строим по выражению

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

Она показана на рисунке 8.21,з. Изгибающие моменты в раме зависят от значений жесткостей стержней, т.е. подтверждается одно из общих свойств статически неопределимых систем (раздел 8.1). В скобках указаны значения ординат для принятых в примере исходных данных.

Выполняем кинематическую проверку. Суммарная единичная эпюра моментов  $M_s$  изображена на рисунке 8.21,ж.

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \bar{M}_s}{EJ} + \sum_{i=1}^2 \Delta_{it} = \frac{\alpha EJ}{EJ} & \left[ \frac{1}{2} 211,399 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \right. \\ & + \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 211,399 \cdot 4 - 2 \cdot 271,753 \cdot 2 + 271,753 \cdot 4 - 211,399 \cdot 2) - \\ & - \frac{4}{6} (2 \cdot 271,753 \cdot 2 + 2 \cdot 60,354 \cdot 6 + 60,354 \cdot 2 + 271,753 \cdot 6) - \\ & \left. - 5636,67 \alpha + 6250,0 \alpha \right] = 0. \end{aligned}$$

Условие (8.30) выполняется. Эпюры  $Q$  и  $N$  изображены на рис. 8.21,и,к.

Пример. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в раме от указанного на рисунке 8.22,а смещения опорных связей, приняв жесткости стержней равными  $EJ = 60 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$ , а смещения связей  $c_1 = c_2 = c = 0,01 \text{ м}$ .

Заданная рама дважды статически неопределима. Выбрав основную систему (рисунок 8.22,б), запишем канонические уравнения метода сил для расчета рамы на смещение опор в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1c} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2c} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Построим единичные эпюры моментов (рисунок 8.23,в,г) и вычислим коэффициенты при неизвестных:

$$\delta_{11} = \frac{225}{3EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{16}{3EJ}, \quad \delta_{12} = \frac{20}{3EJ}.$$

Учитывая распределение реакций в опорных связях от  $X_1 = 1$  (рисунок 8.23,в) и  $X_2 = 1$  (рисунок 8.23,г), по формуле (7.13) получим:

$$\Delta_{1c} = -\sum R_{k1} c_k = -(-1 c_1 - 2,5 c_2) = c_1 + 2,5 c_2 = 3,5 c;$$

$$\Delta_{2c} = -\sum R_{k2} c_k = -(-0,5 c_2) = 0,5 c_2 = 0,5 c.$$

Канонические уравнения, после несложных преобразований, получают следующую форму записи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{225}{3} X_1 + \frac{20}{3} X_2 + 3,5 c EJ &= 0; \\ \frac{20}{3} X_1 + \frac{16}{3} X_2 + 0,5 c EJ &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив их, найдем:

$$X_1 = -0,043125 cEJ ; \quad X_2 = -0,039844 cEJ .$$

Так как смещение опор не вызывает усилий в статически определимой системе, то окончательная эпюра изгибающих моментов строится по выражению

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 .$$

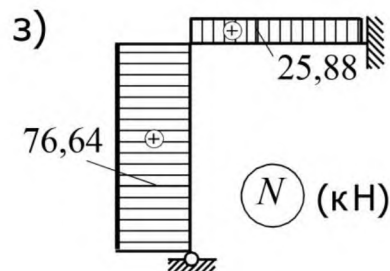
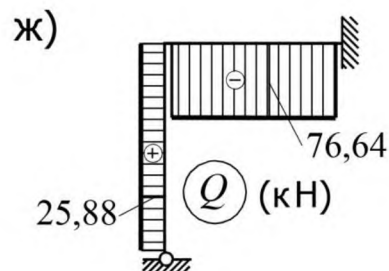
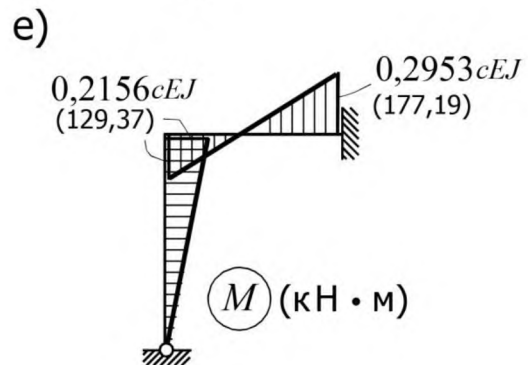
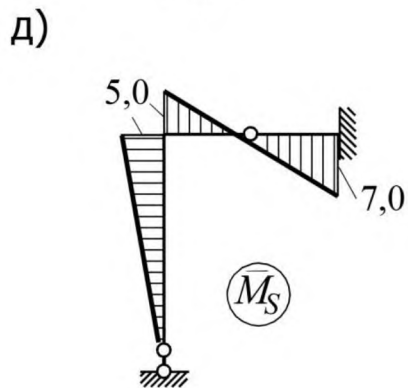
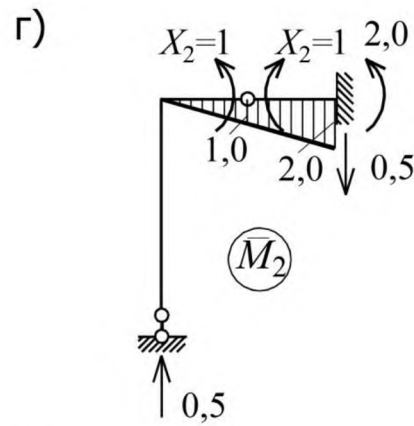
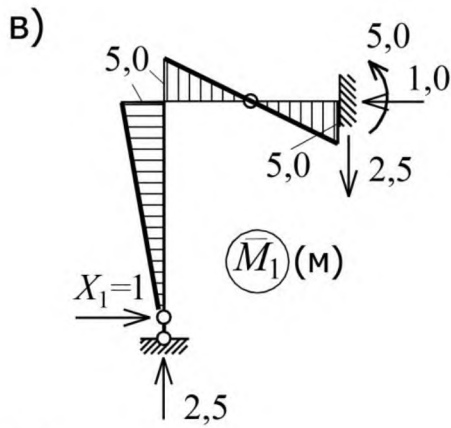
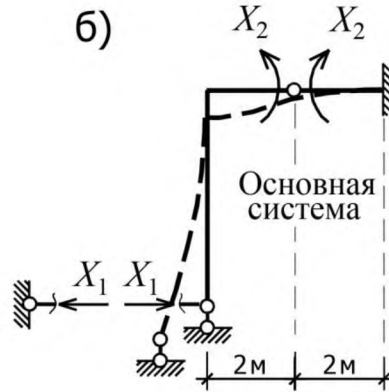
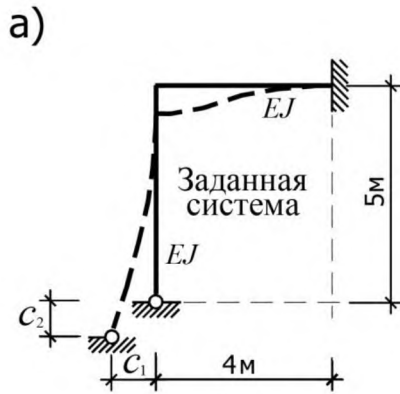


Рисунок 8.22

Она показана на рис 8.22,д. В скобках указаны значения ординат моментов для принятых исходных данных. Кинематическая проверка ее, так же как и при расчете на тепловое воздействие, сводится к проверке выполнения условия

$$\sum \int \frac{M\bar{M}_s dx}{EJ} + \sum \Delta_{ic} = 0.$$

Проведем ее, используя суммарную единичную эпюру  $M_s$  (рисунок 8.22,д).

$$\begin{aligned} & \frac{cEJ}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} 0,2156 \cdot 5 \frac{2}{3} 5 + \frac{4}{6} \times \right. \\ & \times (-2 \cdot 0,2156 \cdot 5 - 2 \cdot 0,2953 \cdot 7 + 0,2156 \cdot 7 + 0,2953 \cdot 5) \left. \right] + \\ & + 3,5 c + 0,5 c = 0. \end{aligned}$$

Проверка выполняется. Эпюры  $Q$  и  $N$  показаны на рисунке 8.22,ж,з.

### 8.11. Линии влияния усилий

Для построения линии влияния какого-нибудь усилия необходимо, как известно, вначале, пользуясь известными методами строительной механики, получить зависимость (аналитическую или в численном виде) этого усилия от положения силы  $F=1$  ( $S=f(x)$ ), а затем, с помощью этой зависимости, определить значения ординат линии влияния для всех характерных сечений.

Если для определения зависимости  $S=f(x)$  применяются методы статики сооружений, то соответствующий метод построения линии влияния называется статическим.

В статически неопределимых системах усилие в сечении стержня определяется по выражению (8.14). Если его использовать для построения линий влияния, то необходимо иметь в виду, что от подвижной силы  $F=1$  меняются и значения основных неизвестных  $X_i$  и значение усилия в сечении  $k$  основной системы. Поэтому выражение (8.14) для построения линии влияния усилия в сечении  $k$  следует переписать в виде:

$$\begin{aligned} \text{л. вл. } S_k &= \text{л. вл. } S_k^0 + \bar{S}_{k1} (\text{л. вл. } X_1) + \\ &+ \bar{S}_{k2} (\text{л. вл. } X_2) + \dots + \bar{S}_{kn} (\text{л. вл. } X_n), \end{aligned}$$

где л. вл.  $S_k^0$  – линия влияния усилия  $S$  в сечении  $k$  основной системы;

$\bar{S}_{ki}$  – усилие в сечении  $k$  основной системы от  $X_i=1$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Используем это выражение для построения линии влияния изгибающего момента в сечении  $k$  однажды статически неопределимой балки (рисунок 8.23,а).

Выбрав основную систему (рисунок 8.23,б), построим грузовую эпюру моментов (рисунок 8.23,в) и единичную (рисунок 8.23,г), после чего определим

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \delta_{1F} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EJ}.$$

Из канонического уравнения  $\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0$  найдем

$$X_1 = \frac{x^2(3l-x)}{2l^3}.$$

Отсюда следует, что линия влияния  $X_1$  описывается кривой третьей степени относительно координаты  $x$  подвижной силы  $F=1$ . Она показана на рисунке 8.23,д.

В статически определимых системах линии влияния усилий имели прямолинейное очертание или кусочно-ломаное (прямолинейное очертание на ограниченной длине движения силы). Вспомните, например, линии влияния опорных реакций в простых балках, линии влияния изгибающих моментов и т.д.

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_k$  выражение (8.31) запишем в виде:

$$\text{л.вл. } M_k = \text{л.вл. } M_k^0 + \bar{M}_{k1} (\text{л.вл. } X_1). \quad (8.32)$$

В рассматриваемом примере  $M_{k1} = \frac{l}{2}$  (рисунок 8.23,г). На рисунке 8.24,б изображена л.вл.  $M_k^0$ , а на рисунке 8.24,в – л.вл.  $M_{k1} X_1$ . Суммируя их, получим л.вл.  $M_k$  (рисунок 8.24,г).

Изложенный способ построения линии влияния может быть применен и для систем с небольшим числом неизвестных при “ручном” (неавтоматизированном) способе вычисления координат.

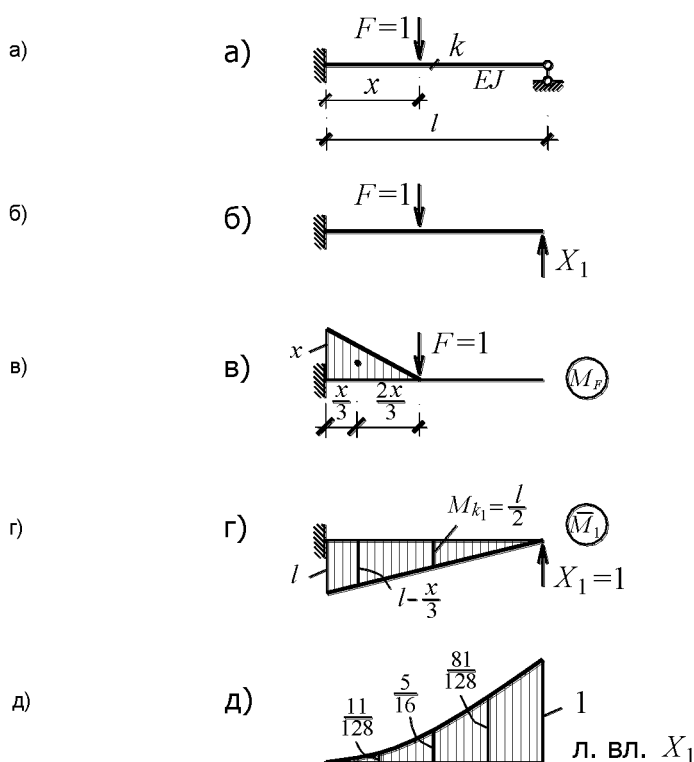


Рисунок 8.23

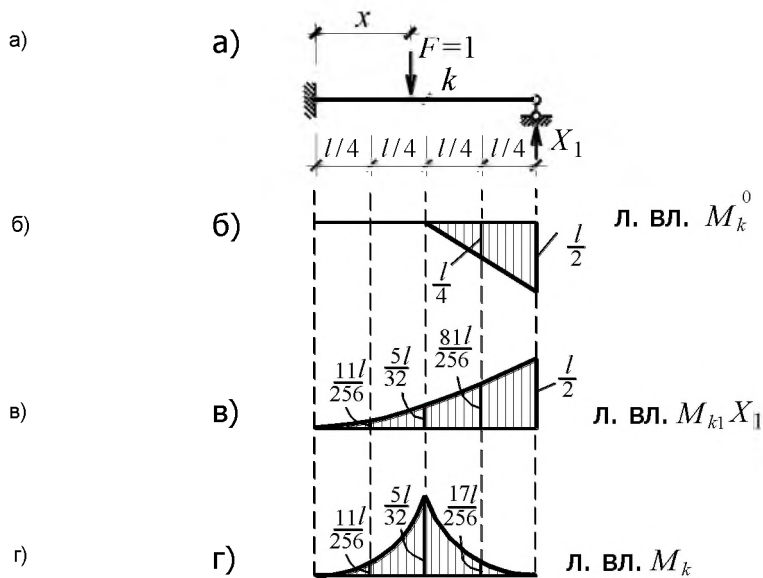


Рисунок 8.24

Для сложных систем, к которым относятся и рамы, получить аналитические зависимости исследуемого фактора от координаты силы  $F=1$  трудно, поэтому для них используются численные методы решения. С помощью компьютерных программ, в которых реализованы методы расчета различных систем, можно найти искомое усилие при положениях силы  $F=1$  в различных характерных сечениях рамы.

Решение задачи о построении линии влияния усилия сводится, таким образом, к расчету заданной системы на несколько одновременных загрузений ее силами  $F=1$ . Поясним этот подход к построению линий влияния на примере двухпролетной рамы (рисунок 8.25) все стержни которой имеют одинаковую изгибную жесткость.

Предположим, что сила  $F=1$  может двигаться по стержням 4–8 и 9–11. Построим линию влияния изгибающего момента в сечении 6. Определив на каждой из стержней три промежуточных сечения и считая, что все стержни рамы имеют  $EA \rightarrow \infty$ , выполним расчет заданной рамы на шесть загрузений ее единичными силами (в каждом промежуточном сечении стержней 4–8 и 9–13 прикладывается сила  $F=1$ ). Выбрав из результатов расчета на каждое загрузение значение момента в сечении 6, построим линию влияния  $M_6$  (рисунок 8.25).

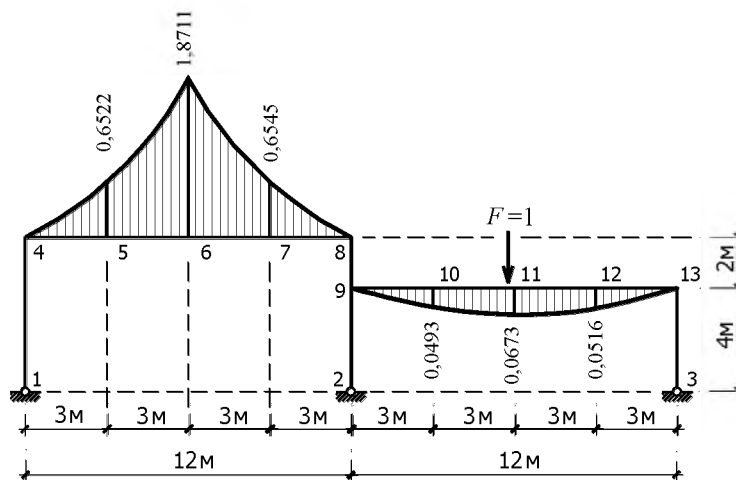


Рисунок 8.25



В изложенной форме решения статический метод является в настоящее время основным методом построения линий влияния усилий и перемещений в стержневых и континуальных системах.

Более подробно такой подход к построению линий влияния усилий (или других факторов) изложен в разделе 9.9.

Кратко поясним суть кинематического метода построения линий влияния усилий в статически неопределимых рамах.

Если для заданной системы, имеющей  $n$  лишних связей, в качестве основной системы принять статически неопределимую систему с  $n-1$  лишними связями, то каноническое уравнение метода сил для расчета рамы на действие силы  $F=1$  примет вид:

$$\delta_{11}^{(n-1)} X_1 + \delta_{1F}^{(n-1)} = 0. \quad (8.33)$$

Так как по теореме о взаимности перемещений  $\delta_{1F}^{(n-1)} = \delta_{F1}^{(n-1)}$ , то

$$X_1 = -\frac{\delta_{F1}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}, \quad (8.34)$$

где  $\delta_{11}^{(n-1)}$  – перемещение в системе с  $n-1$  неизвестной точки приложения силы  $X_1$  по ее направлению; оно вычисляется “перемножением” эпюры  $M_1^{(n-1)}$  самой на себя;

$\delta_{F1}^{(n-1)}$  – перемещение в той же системе точки приложения силы  $F=1$ , вызванное силой  $X_1=1$ .

Сила  $F=1$  может занимать любое положение на стержнях рамы, поэтому  $\delta_{F1}$  определяет перемещения стержней рамы от силы  $X_1=1$ .

Таким образом, выражение (8.34) для построения линии влияния  $X_1$  можно записать следующим образом:

$$\text{л. вл. } X_1 = -\frac{\text{эп. } \delta_{F1}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}. \quad (8.35)$$

Итак, чтобы построить линию влияния  $X_1$  необходимо построить от  $X_1=1$  эпюру перемещений стержней рамы, по которым движется сила  $F=1$ , и все ординаты ее поделить на  $-\delta_{11}$ .

Очертание линии влияния, оказывается, подобно эпюре перемещений сечений стержней. Множитель  $-\frac{1}{\delta_{11}}$  является коэффициентом подобия. В этом и состоит основное достоинство

кинематического метода. С его помощью легко представить форму линии влияния усилия. Для этого необходимо удалить связь, в которой возникает искомое усилие и загрузить раму (или другую систему) соответствующей силой  $X_1=1$ . Обладая достаточной инженерной интуицией, несложно показать эпюру перемещений, т. е. форму линии влияния.

Для построения, например, линии влияния  $M_k$  в статически неопределимой балке (рисунок 8.24,а) необходимо ввести в сечении  $k$  шарнир и загрузить балку моментами  $X_1$  (рисунок 8.26). Эпюра вертикальных перемещений точек балки будет подобна л. вл.  $M_6$ .

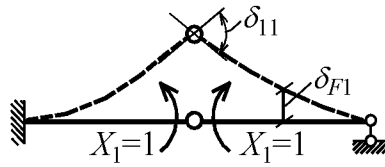


Рисунок 8.26

Для построения линии влияния  $M_6$  в раме (рисунок 8.25) введем в 6-м сечении шарнир и загрузим раму моментами  $X_1 = 1$  (рисунок 8.27). Эпюра вертикальных перемещений грузовой линии от данного нагружения будет подобна линии влияния  $M_6$ . Ординаты  $\delta_{F1}$  эпюры перемещений, если нужно, могут быть вычислены по правилам, изложенным в разделе 8.9.

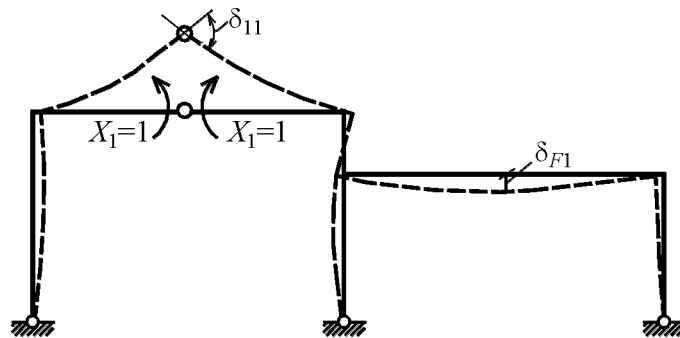


Рисунок 8.27

## ТЕМА 9

### РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

#### 9.1. Общие сведения

Неразрезной балкой называют балку, которая перекрывает два или более пролетов, не прерываясь по своей длине шарнирами.



Иллюстрация 9.1. Нерезная балка

Степень статической неопределимости неразрезных балок может быть определена по общим правилам (раздел 8.2). Поскольку балка представляет собой один диск, перекрывающий несколько пролетов, то формула (8.2) преобразуется к виду

$$L = C_0 - 3. \quad (9.1)$$

Балки, показанные на рисунке 9.1, а, б, содержат соответственно две и три лишние связи.

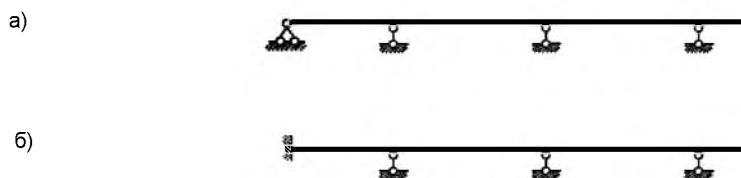


Рисунок 9.1

Читатель уже знаком с методами расчета статически неопределимых рам на различные виды внешних воздействий (см. гл. 8,9,10). Особенности применения их к расчету неразрезных балок рассматриваются в следующем параграфе.

## 9.2. Примеры расчета неразрезной балки

**Пример 1.** Используя метод сил, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки (рис. 9.2,а).

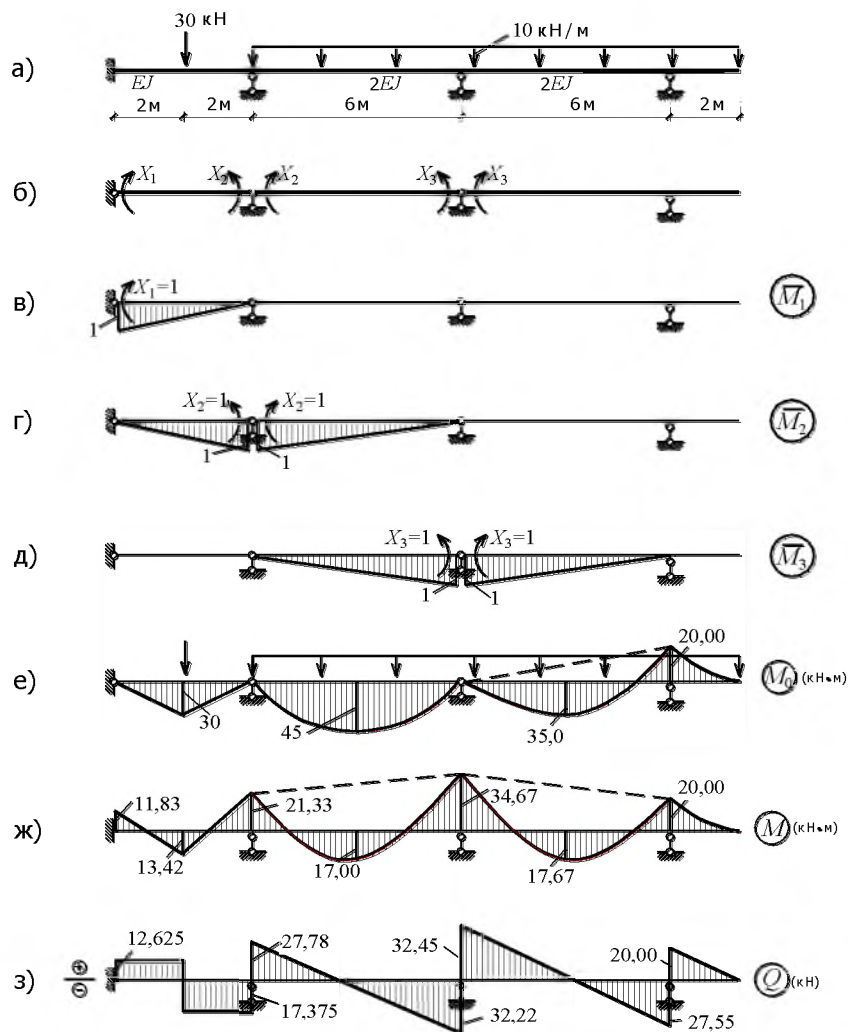


Рисунок 9.2

Балка является трижды статически неопределимой. Основную систему метода сил можно получить посредством устранения опорных связей (рисунок 9.3,б). Тогда в качестве неизвестных будут приняты опорные реакции. Несложно заметить, что в этом случае ни один из побочных коэффициентов канонических уравнений не равен нулю (рисунок 9.3,в). В этом же можно убедиться и “перемножая” соответствующие единичные эпюры моментов. Значит, такая основная система является нерациональной.

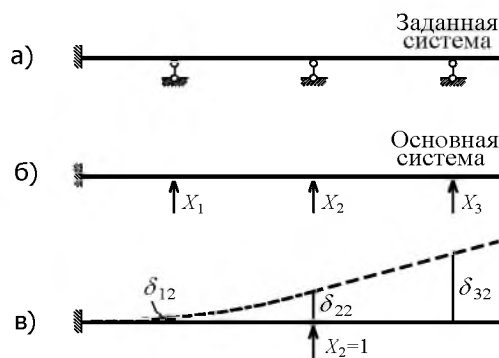


Рисунок 9.3

Более удачной (рациональной) будет основная система, полученная введением шарниров в надпорные сечения (рисунок 9.2,б). При таком выборе основной системы неразрезная балка расчленяется на отдельные однопролетные балки. Основными неизвестными в этом случае являются надпорные моменты.

Построив в основной системе единичные эпюры изгибающих моментов (рисунок 9.2, в-д) и грузовую эпюру изгибающих моментов (рисунок 9.2,е), вычислим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений.

После несложных преобразований получим уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3} X_1 + \frac{2}{3} X_2 + 30 &= 0; \\ \frac{2}{3} X_1 + \frac{7}{3} X_2 + \frac{1}{2} X_3 + 75 &= 0; \\ \frac{1}{2} X_2 + 2X_3 + 80 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Обратим внимание на то, что при указанном способе выбора основной системы для неразрезной балки первое и последнее уравнения получаются двухчленными, а все промежуточные – трехчленными ( $i$ -е уравнение содержит неизвестные  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$ ).

Решив систему уравнений, найдем:

$$X_1 = -\frac{71}{6} \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad X_2 = -\frac{64}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad X_3 = -\frac{104}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов (рисунок 9.2,ж) строится по выражению:

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3.$$

Аналитическое выражение для определения изгибающего момента в сечении, расположенном между опорными точками балки, можно получить по формуле (8.16).

Кинематическая проверка правильности эпюры  $M$  состоит в проверке перемещений по направлениям основных неизвестных и выполняется по формуле (8.23).

Эпюра поперечных сил показана на рисунке 9.2,з.

Для определения реакции в опоре с номером  $n$  (рисунок 9.4) вырежем двумя сечениями, расположенными по обе стороны от опоры, бесконечно малый участок балки и покажем в этих сечениях поперечные силы. Из уравнения  $\sum Y = 0$  следует, что

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n.$$

В частности, в защемлении (рисунок 9.5) и первой промежуточной опоре (рисунок 9.6) вертикальные реакции равны соответственно 12,625 кН и 45,155 кН (рисунок 9.6).

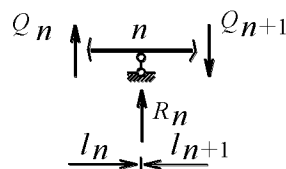


Рисунок 9.4

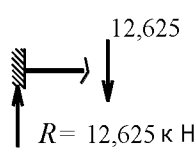


Рисунок 9.5

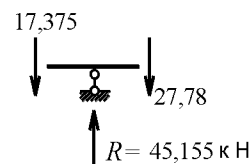


Рисунок 9.6

Пример 2. Смещения опор неразрезной балки показаны на рисунке 9.7,а. Построить эпюру изгибающих моментов, приняв  $c_1 = 0,01$  рад,  $c_2 = c_3 = 0,06$  м.

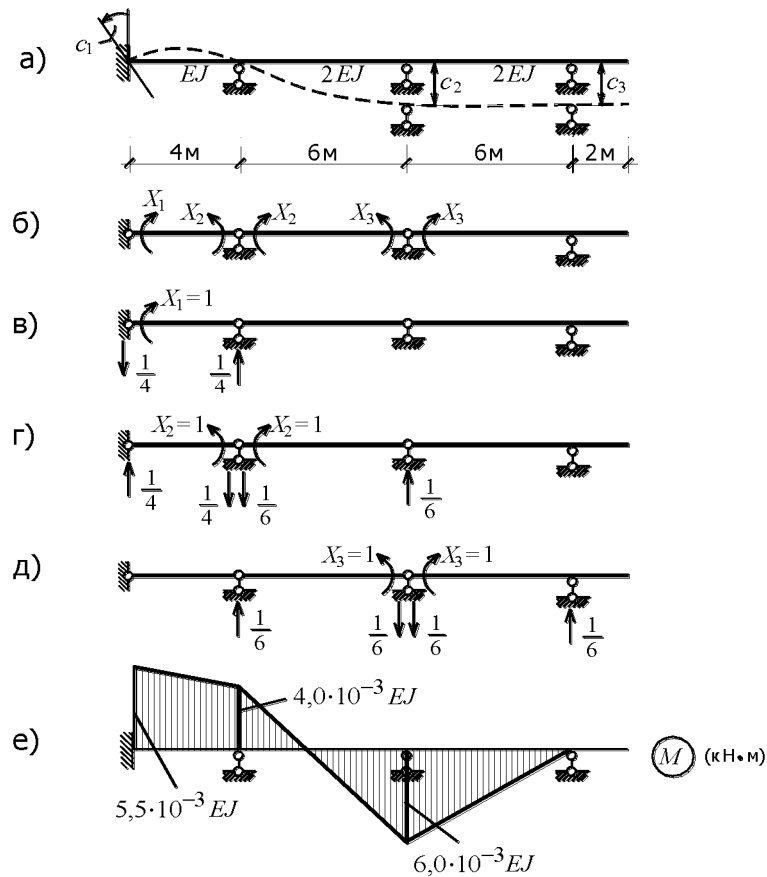


Рисунок 9.7

Расчет балки на смещение опор, как и расчет на внешнюю нагрузку, выполняется методом сил.

Пусть основная система будет такой, как показана на рисунке 9.7,б. Свободные члены канонических уравнений определим по формуле (7.13). Используя распределение реакций в опорных связях (рисунок 9.7,в-д), найдем:

$$\Delta_{1c} = -\sum R_{k1}c_k = -(-1 \cdot c_1) = c_1 = 0,01;$$

$$\Delta_{2c} = -\sum R_{k2}c_k = -\left(-\frac{1}{6}c_2\right) = \frac{1}{6}c_2 = 0,01;$$

$$\Delta_{3c} = -\sum R_{k3}c_k = -\left(\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{6}c_3\right) = -\frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{6}c_3 = -0,01.$$

Коэффициенты при неизвестных имеют те же значения, что и в примере 1. Запишем канонические уравнения для расчета на заданные смещения опор.

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3} X_1 + \frac{2}{3} X_2 + 0,01 EJ &= 0; \\ \frac{2}{3} X_1 + \frac{7}{3} X_2 + \frac{1}{2} X_3 + 0,01 EJ &= 0; \\ \frac{1}{2} X_2 + 2 X_3 - 0,01 EJ &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив их, получим:

$$X_1 = -5,5 \cdot 10^{-3} EJ \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_2 = -4,0 \cdot 10^{-3} EJ \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$X_3 = 6,0 \cdot 10^{-3} EJ \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра  $M$  изображена на рисунке 9.7,е

### 9.3. Построение линий влияния усилий

Для построения линий влияния усилий статическим методом (раздел 8.11) необходимо, в общем случае, выполнить расчет неразрезной балки на действие силы  $F = 1$ , приложенной в ряде характерных точек каждого пролета, и составить матрицу влияния усилий  $L_S$ . По значениям элементов  $i$ -й строки можно построить линию влияния  $S_i$ .

Рассчитаем балку (рисунок 9.8,а) на действие единичной силы в обозначенных на рисунке сечениях и по результатам расчета построим линии влияния усилий.

Форма линии влияния на протяжении каждого пролета, как правило, определяется значениями ее ординат в трех промежуточных сечениях. Например, для построения л. вл.  $M_c$  (рисунок 9.8,б) или л. вл.  $M_5$  (рисунок 9.8,в) достаточно найти соответствующие моменты при положениях силы  $F = 1$  в сечениях, делящих пролет на четыре части.

Некоторые особенности очертания линии влияния изгибающих моментов возникают при построении их для сечений, расположенных вблизи опор. Так, при построении линии влияния момента для сечения  $K_2$  (рисунок 9.8,г) оказывается, что сила  $F = 1$ , расположенная правее второго пролета, не вызывает в этом сечении изгибающего момента (точку  $K_2$  называют левым фокусом второго пролета).

Если же некоторое сечение  $K_1$  будет расположено между точками  $B$  и  $K_2$ , то линия влияния изгибающего момента в этом пролете будет двузначной (рисунок 9.8,д). Поэтому, во избежание ошибок, в пролете, к которому относится исследуемое усилие, число пробных установок силы  $F = 1$  следует принимать более частым.

Известно, что форма линии влияния, в соответствии с кинематическим методом (раздел 8.11), подобна эпюре перемещений балки, вызываемой смещением соответствующей связи по ее направлению на единицу. Например, чтобы получить очертание л. вл.  $Q_5$  (рисунок 9.8,е) необходимо торцы балок, примыкающие к пятому сечению, раздвинуть по вертикали на длину, равную единице, так, чтобы они оставались параллельными один другому. Численные же значения ординат линии влияния удобно вычислять статическим методом.

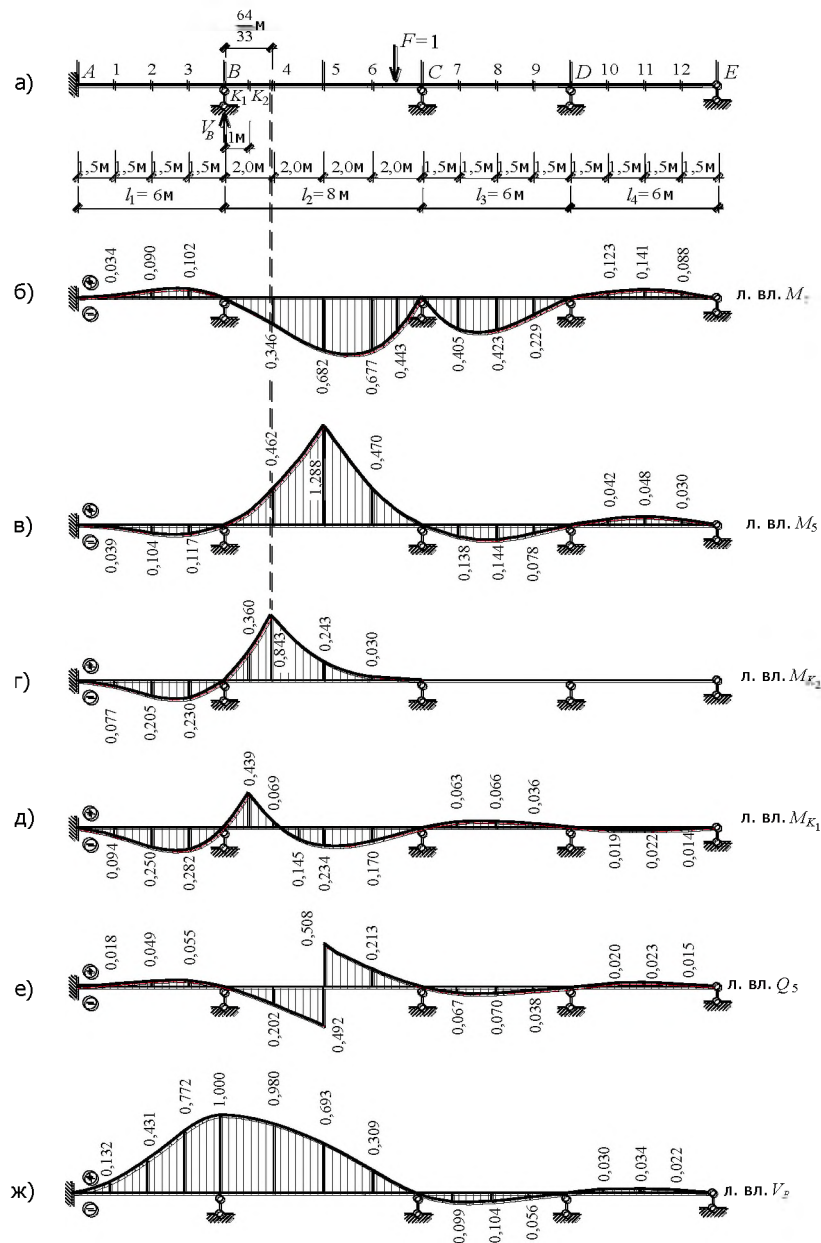


Рисунок 9.8

Для установления формы л. вл.  $V_B$  (рисунок 9.8,ж) необходимо в балке удалить опорную связь в точке  $B$  и дать ей единичное перемещение по направлению удаленной связи. Положение изогнутой оси балки будет соответствовать очертанию искомой линии влияния. Ординаты линии влияния определены статическим методом.

#### 9.4. Огибающие эпюры усилий

Неразрезные балки, как и большинство других конструкций, загружаются как постоянной нагрузкой, так и временной, характер действия которой, в общем случае, оказывается достаточно произвольным: она может быть во всех пролетах балки или только в некоторых из них. Экстремальные усилия в сечениях балки определяются с помощью невыгодных загружений линий влияния (гл. 3). Однако такой способ нахождения их при отмеченном характере действия временной нагрузки является достаточно сложным и, к тому же, не дает наглядного представления о распределении максимальных и минимальных усилий по длине балки.



Более просто задача об определении экстремальных усилий решается с помощью огибающих эпюр усилий. Рассмотрим задачу построения огибающих эпюр изгибающих моментов в неразрезной балке, нагруженной постоянной (рисунок 9.9,а) и временной нагрузками (рисунок 9.9,б). На рисунке 9.14,в показана эпюра моментов от постоянной нагрузки, на рисунке 9.9,г-ж – от последовательного нагружения каждого пролета временной нагрузкой.

Максимальный и минимальный изгибающие моменты в сечениях балки определим по выражениям:

$$\max M = M_{пост} + \sum M_{вр}^+; \quad \min M = M_{пост} + \sum M_{вр}^-,$$

где  $M_{пост}$  – изгибающий момент от постоянной нагрузки в данном сечении;

$M_{вр}^+$  – изгибающие моменты от временных нагрузок, вызывающие в этом сечении положительный момент;

$M_{вр}^-$  – изгибающие моменты от временных нагрузок, вызывающие в этом сечении отрицательный момент.

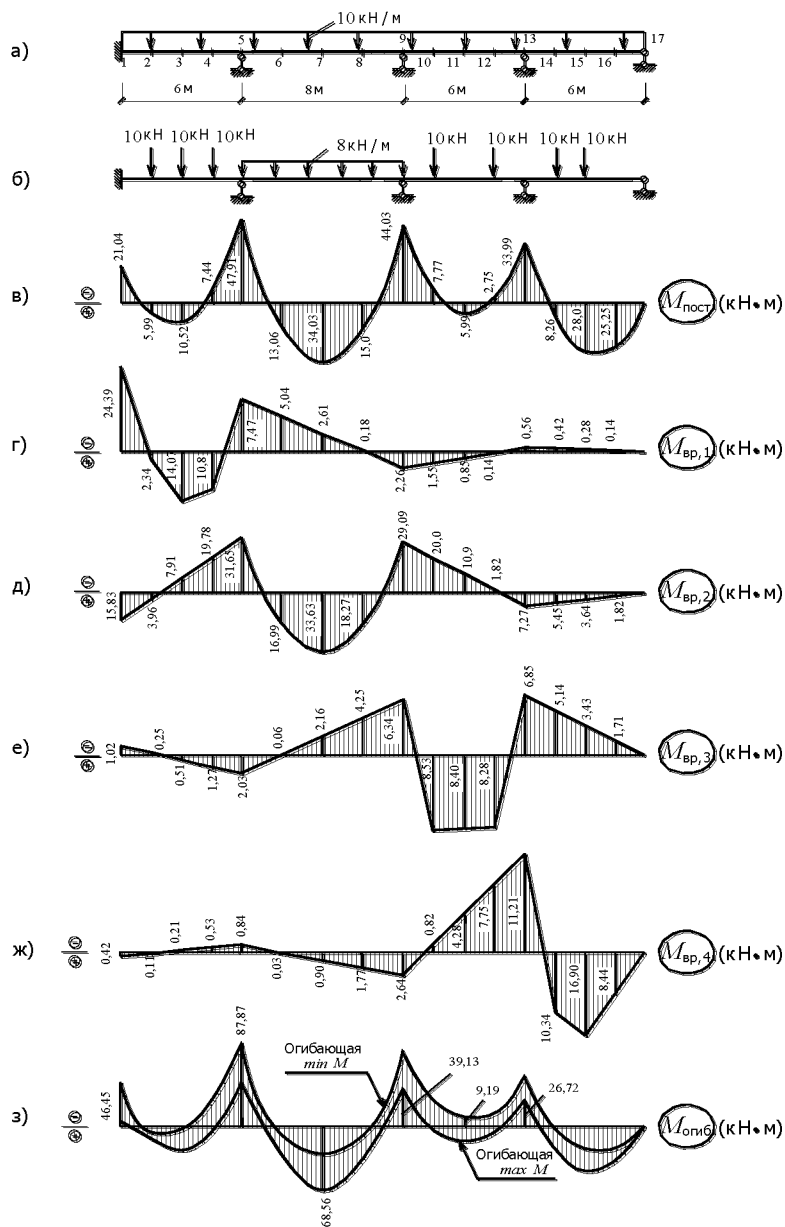


Рисунок 9.9

Например,  $\max M_7 = 34,03 + 33,63 + 0,90 = 68,56 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  
 $\max M_{10} = -44,03 + 2,26 + 2,64 = -39,13 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  
 $\min M_1 = -21,04 - 24,39 - 1,02 = -46,45 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  
 $\min M_{11} = 5,99 - 10,9 - 4,28 = -9,19 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Соединяя плавной кривой точки, соответствующие  $\max M$ , получим огибающую максимальных моментов (рисунок 9.9,з). Огибающая минимальных моментов соответствует значениям  $\min M$ .

Из построенных графиков следует, что на отдельных участках растянутые волокна балки располагаются только внизу (или только сверху), а на других участках растянутые волокна могут располагаться как внизу, так и сверху. В сечении 11  $\max M_{11} = 15,24 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (на рисунке 9.9,з не показан), а  $\min M_{11} = -9,19 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Сведения о распределении расчетных значений усилий используются при конструировании балок.

Аналогичный подход к построению огибающих эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил может быть применен при расчете других конструкций.

### 9.5. Расчет неразрезных балок на упругих опорах

Примерами упругих опор могут служить длинные колонны, на которые опирается неразрезная балка (рисунок 9.10,а), поперечные балки проезжей части металлического моста, на которые опираются продольные неразрезные балки, а также понтоны, которые служат опорами наплавного моста.

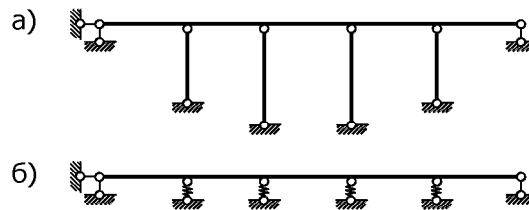


Рисунок 9.10

На расчетной схеме балки такие опоры изображаются в виде пружин (рисунок 9.10,б). Если упругие опоры являются линейно деформируемыми, то перемещения опорных точек балки пропорциональны реакциям опор:

$$y_m = c_m R_m,$$

где  $c_m$  – коэффициент податливости  $n$ -й опоры, м/кН.

Расчет неразрезных балок на упругих опорах удобно выполнять методом сил. Основная система метода сил принимается такой же, как и при расчете балок на неподатливых (жестких) опорах. На рисунке 9.11,а показан фрагмент основной системы многопролетной неразрезной балки. Подчеркивая конкретный физический смысл основных неизвестных метода сил, в практических расчетах заменяют обозначения  $X_i$  на  $M_i$ .

Перемещение по направлению неизвестного  $M_n$  (угол взаимного поворота сечений балок, примыкающих к  $n$ -й опоре) будет вызываться только опорными моментами  $M_{n-2}$ ,  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$ ,  $M_{n+2}$  и нагрузкой, расположенной в пролетах  $l_{n-1}$ ,  $l_n$ ,  $l_{n+1}$ ,  $l_{n+2}$ , поэтому соответствующее каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{n,n-2}M_{n-2} + \delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{nn}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \delta_{n,n+2}M_{n+2} + \Delta_n F = 0.$$

Его называют уравнением пяти моментов.

Деформированное состояние основной системы, вызванное  $M_n=1$ , показано на рисунке 9.11,б, а на рисунке 9.11,в,г представлены эпюры моментов и даны значения опорных реакций от  $M_n=1$  и  $M_{n-2}=1$ .

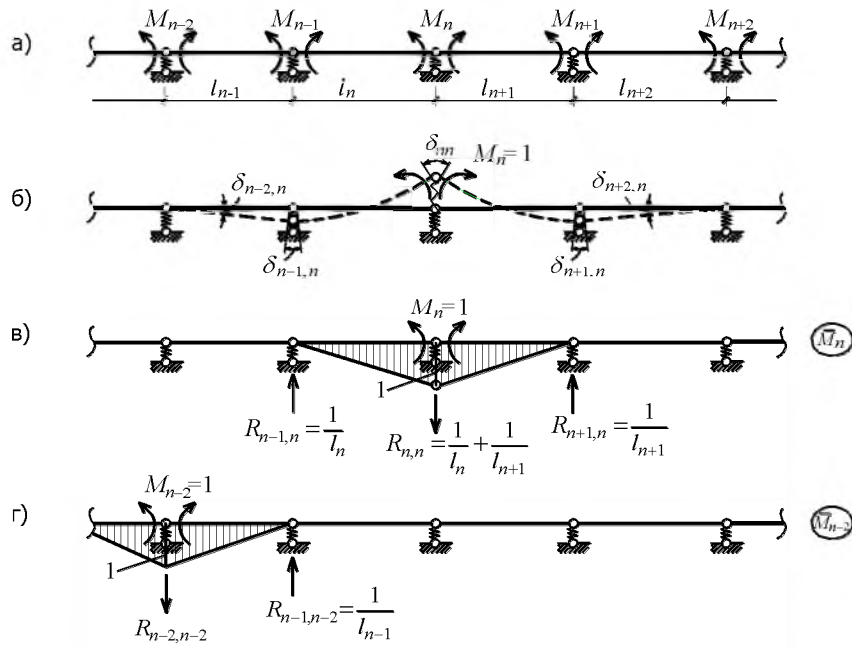


Рисунок 9.11

Коэффициенты и свободные члены уравнений определяют по формуле Мора-Максвелла, учитывая влияние изгибающих моментов в балке и реакций в упругих опорах:

$$\delta_{ik} = \sum \int \bar{M}_i \frac{\bar{M}_k dx}{EJ} + \sum c_m R_{mi} R_{mk};$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \bar{M}_i \frac{M_F dx}{EJ} + \sum c_m R_{mi} R_{mF},$$

где  $\bar{M}_i, \bar{M}_k$  – моменты в балке соответственно от  $M_i=1$  и  $M_k=1$ ;

$M_F$  – моменты в балке от заданной нагрузки;

$R_{mi}, R_{mk}$  – реакции опоры  $m$  соответственно от  $M_i=1$  и  $M_k=1$ ;

$R_{mF}$  – реакция опоры  $m$  от нагрузки;

$c_m$  – коэффициент податливости опоры  $m$ .

Линии влияния усилий в балках на упругих опорах, как и в балках на абсолютно жестких опорах, строятся статическим и кинематическим методами.

## ТЕМА 10

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

#### 10.1. Виды статически неопределимых ферм

В данной главе рассматриваются особенности расчета ферм как шарнирно-стержневых систем с лишними связями. Напомним, что узловые соединения шарнирно-стержневых систем представляют собой идеальные шарниры без трения.

Степень статической неопределимости  $L$  шарнирно-стержневой системы определяется по формуле

$$L = C_0 + C - 2U,$$

где  $C_0$  – количество опорных стержней фермы;  $C$  – количество стержней, составляющих ферму;  $U$  – количество узлов фермы.

Примеры нескольких типов статически неопределимых ферм приведены на рисунке 10.1. и 10.2,а.

Трехпролетная неразрезная ферма с параллельными поясами и треугольной решеткой (Рисунок 10.1,а) является дважды внешне статически неопределимой. Отсоединенная от опор она имеет геометрически неизменяемую статически определимую структуру.

Семипанельная балочная ферма с крестовой решеткой (рисунок 10.1,б) содержит семь лишних связей. Данная ферма является внутренне статически неопределимой. Внешне она статически определима: реакции ее опор можно найти из уравнений равновесия, как у простой балки. Балочная ферма с параллельными поясами, треугольной решеткой и дополнительными стойками, усиленная шпренгелем (рисунок 10.1,в), также внутренне один раз статически неопределима.

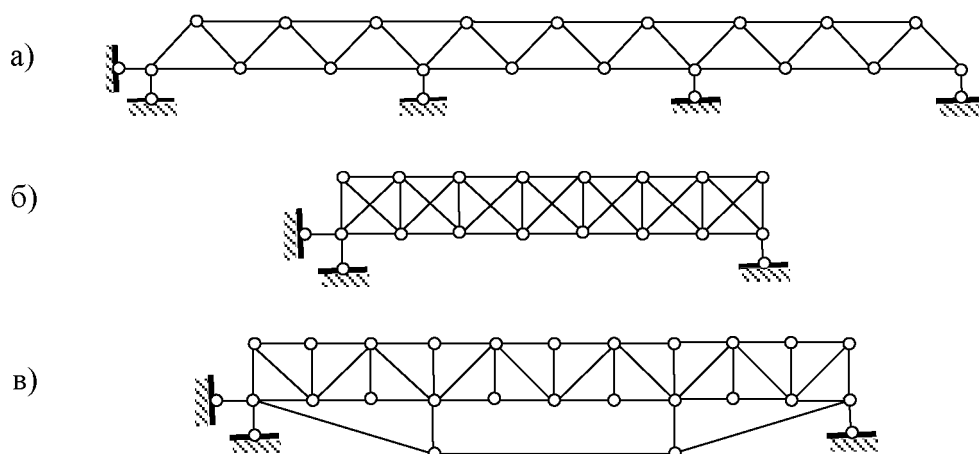


Рисунок 10.1

Распорная ферма с дополнительным раскосом в центральной панели (рисунок 10.2,а) статически неопределима как внешне, так и внутренне.

## 10.2. Особенности расчета статически неопределимых ферм

Расчет статически неопределимых ферм, как правило, производится методом сил. Основная система метода сил выбирается путем разрезания стержней фермы, либо путем удаления опорных связей (рисунок 10.2,б), которые не являются абсолютно необходимыми.

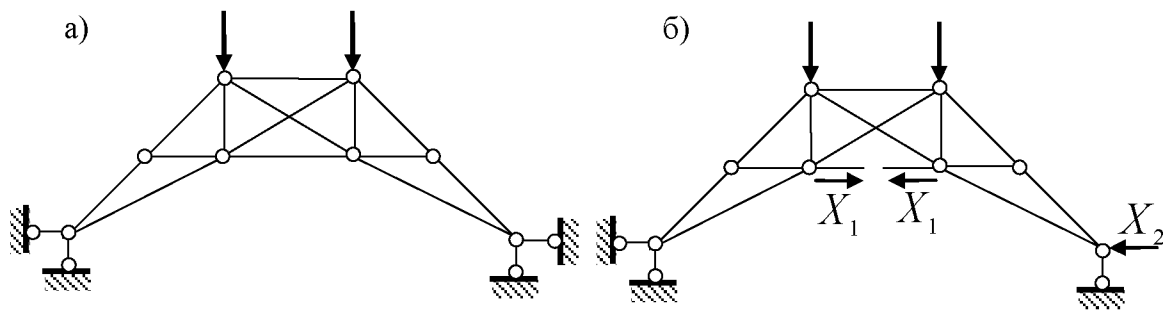


Рисунок 10.2

Канонические уравнения метода сил имеют стандартный вид

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix} = 0,$$

где индекс  $n$  означает количество неизвестных метода сил.

При узловой нагрузке в стержнях статически неопределимых ферм, как и других шарнирно-стержневых систем, будут возникать только продольные внутренние силы. Следовательно, перемещения в фермах будут зависеть только от продольных деформаций их стержней, и для вычисления перемещений следует использовать одночленную формулу Максвелла. Следовательно,

$$\delta_{ik} = \sum \frac{sN_i N_k}{EA}; \quad \Delta_{iF} = \sum \frac{sN_i N_F}{EA} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

где знак суммирования  $\sum$  распространяется на все стержни фермы;  $N_i, N_k, N_F$  – соответственно усилия в стержнях основной системы метода сил от единичных значений основных неизвестных ( $X_i = 1, X_k = 1$ ) и от заданной нагрузки  $F$ ;  $s$  и  $EA$  – длина и жесткость на растяжение-сжатие соответствующего стержня фермы.

Окончательные усилия в стержнях статически неопределимых ферм вычисляют по формуле

$$N = N_F + \sum_{i=1}^n N_i X_i.$$

Все вычисления удобно вести в табличной форме. Для фермы с двумя лишними связями (рисунок 10.2) такая таблица может иметь следующий вид (табл. 10.1).

Таблица 10.1

| № ст.  | $b = \frac{s}{EA}$ | $N_F$ | $N_1$ | $N_2$ | $\frac{N_1}{N_1 b}$ | $N_1 N_2 b$   | $N_2 N_2 b$   | $N_1 N_F b$   | $N_2 N_F b$   | $\frac{N_1}{X_1}$ | $\frac{N_1}{X_2}$ | N  |
|--------|--------------------|-------|-------|-------|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|----|
| 1      | 2                  | 3     | 4     | 5     | 6                   | 7             | 8             | 9             | 10            | 11                | 12                | 13 |
| ...    |                    |       |       |       |                     |               |               |               |               |                   |                   |    |
| ...    |                    |       |       |       |                     |               |               |               |               |                   |                   |    |
| $\sum$ |                    |       |       |       | $\delta_{11}$       | $\delta_{12}$ | $\delta_{22}$ | $\Delta_{1F}$ | $\Delta_{2F}$ |                   |                   |    |

В первом столбце таблицы указываются номера стержней в произвольном порядке. Во второй столбец вносятся податливости стержней, т.е. отношения  $b = s/(EA)$ , в третий, четвертый и пятый столбцы вносятся усилия в стержнях фермы, вычисленные в основной системе метода сил от заданной нагрузки и единичных значений основных неизвестных. В последующих пяти столбцах производятся собственно вычисления, смысл которых указан в шапке таблицы. Суммы элементов, полученных в столбцах 6...10, дают значения коэффициентов при неизвестных (единичных перемещениях) и свободных членов (грузовых перемещениях) канонических уравнений метода сил. После того как определены значения основных неизвестных из решения системы канонических уравнений, заполняются столбцы 11 и 12 (вычисляются исправленные значения усилий в основной системе от найденных значений основных неизвестных). Наконец, суммируя столбцы 3, 11 и 12, получают окончательные значения усилий в стержнях статически неопределимой фермы. При необходимости в таблицу могут быть внесены дополнительные столбцы для осуществления промежуточных и окончательных кинематических проверок в соответствии со смыслом метода сил.

Расчет ферм методом перемещений приводит к значительно большему количеству основных неизвестных. Как правило, метод перемещений применяют при автоматизированном расчете ферм на компьютерах.

### 10.3. Построение линий влияния усилий

При расчете ферм на подвижную нагрузку для определения ее наиболее невыгодного расположения применяются линии влияния. На основании теоремы о взаимности реакций и перемещений (кинематический метод построения линий влияния) линия влияния усилия в любом стержне (связи) статически неопределимой фермы совпадает с линией прогибов узлов грузового пояса фермы, вызванных действием единичного перемещения по направлению этого усилия (этой связи).

Процесс построения линии влияния усилия в некотором стержне (связи) статически неопределимой фермы можно осуществить и несколько по иному, на основании теоремы о взаимности перемещений. Разрезается стержень (удаляется связь), линию влияния усилия в котором (которой) требуется построить. Степень статической неопределимости фермы при этом уменьшается на единицу. Ферму с удаленной связью можно рассматривать как основную систему метода сил, в общем случае статически неопределимую. Основное неизвестное, реакция в удаленной связи, зависит от точки приложения единичной подвижной силы. Закон изменения этого основного неизвестного и определяет искомую линию влияния.

Из соответствующего канонического уравнения находим

$$\text{л.в. } X_1 = \frac{-\delta_{1F}(x)}{\delta_{11}} = \frac{-\delta_{F1}(x)}{\delta_{11}},$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение в основной системе по направлению удаленной связи от единичного значения усилия в этой связи, т. е. величина постоянная;  $\delta_{1F}(x)$  – перемещение в основной системе по направлению удаленной связи от подвижной единичной силы, т. е. функция аргумента  $x$  – абсциссы точки приложения единичной подвижной силы; а  $\delta_{F1}(x)$  – функция того же аргумента  $x$ , но выражающая собой перемещения по направлению подвижной единичной силы от единичного значения неподвижного основного неизвестного  $X_1 = 1$ , т.е. эпюра перемещений (эпюра прогибов грузового пояса) в ферме с удаленной связью от единичного значения усилия в этой связи.

Таким образом, чтобы построить в статически неопределимой ферме линию влияния некоторого усилия, необходимо удалить связь, воспринимающую это усилие. Затем к ферме с удаленной связью по направлению этой связи прикладывается единичная сила (единичное усилие в удаленной связи). От приложенной единичной силы определяются прогибы всех узлов грузового пояса, и строится эпюра перемещений (линия прогибов). По направлению удаленной связи вычисляется также перемещение  $\delta_{11}$ . Обычно это перемещение отличается от единицы. Следовательно, ординаты линии прогибов, уменьшенные в  $\delta_{11}$  раз, и представляют собой ординаты искомой линии влияния.

При использовании компьютерных технологий линию влияния любого усилия можно построить и по ее прямому определению, как результат многократного вычисления этого усилия от действия единичных вертикальных сил, прикладываемых поочередно к каждому из узлов грузового пояса.

Если тем или иным способом построены линии влияния усилий во всех «лишних» связях статически неопределимой фермы (л.в.  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ), то линия влияния усилия в любом другом стержне ( л.в.  $N^j$ ) может быть построена по простой формуле

$$\text{л.в. } N^j = \text{л.в. } N_0^j + \sum_{k=1}^n N_k^j (\text{л.в. } X_k),$$

где л.в.  $N_0^j$  – линия влияния рассматриваемого усилия в основной системе метода сил при  $n = \mathcal{L}$  удаленных связях,  $N_k^j$  – усилие в рассматриваемом стержне в основной системе метода сил от единичного неизвестного  $X_k = 1$ .

## ТЕМА 11

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК, ВИСЯЧИХ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

#### 11.1. Виды статически неопределимых арок

В строительной практике наиболее часто находят применение следующие виды статически неопределимых арок: двухшарнирные (рисунок 11.1,а), характеризующиеся наличием двух шарниров, как правило, опорных, или пятовых; одношарнирные (рисунок 11.1,б), содержащие один шарнир, как правило, ключевой; бесшарнирные (рисунок 11.1,в), представляющие собой сплошной криволинейный стержень, жестко защемленный по концам. С точки зрения статической неопределимости, двухшарнирная арка имеет одну «лишнюю» связь, одношарнирная арка дважды статически неопределима, а бесшарнирная арка трижды статически неопределима.

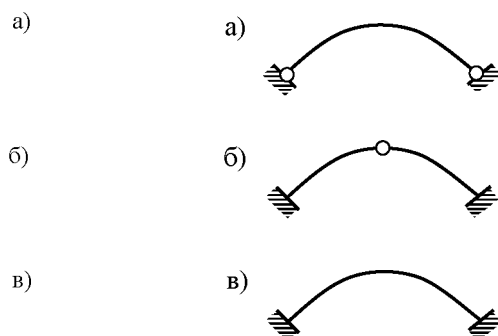




Рисунок 11.1

По очертанию арки выполняются, как правило, симметричными. В зависимости от характера нагрузки ось арки может быть очерчена по квадратной параболе, по дуге окружности или иной кривой, может иметь переломы. Поперечное сечение арки может быть как постоянным по длине арки, так и переменным.

Все виды арок являются распорными системами, то есть при действии на арку только вертикальной нагрузки в ее опорах возникают и горизонтальные опорные реакции.

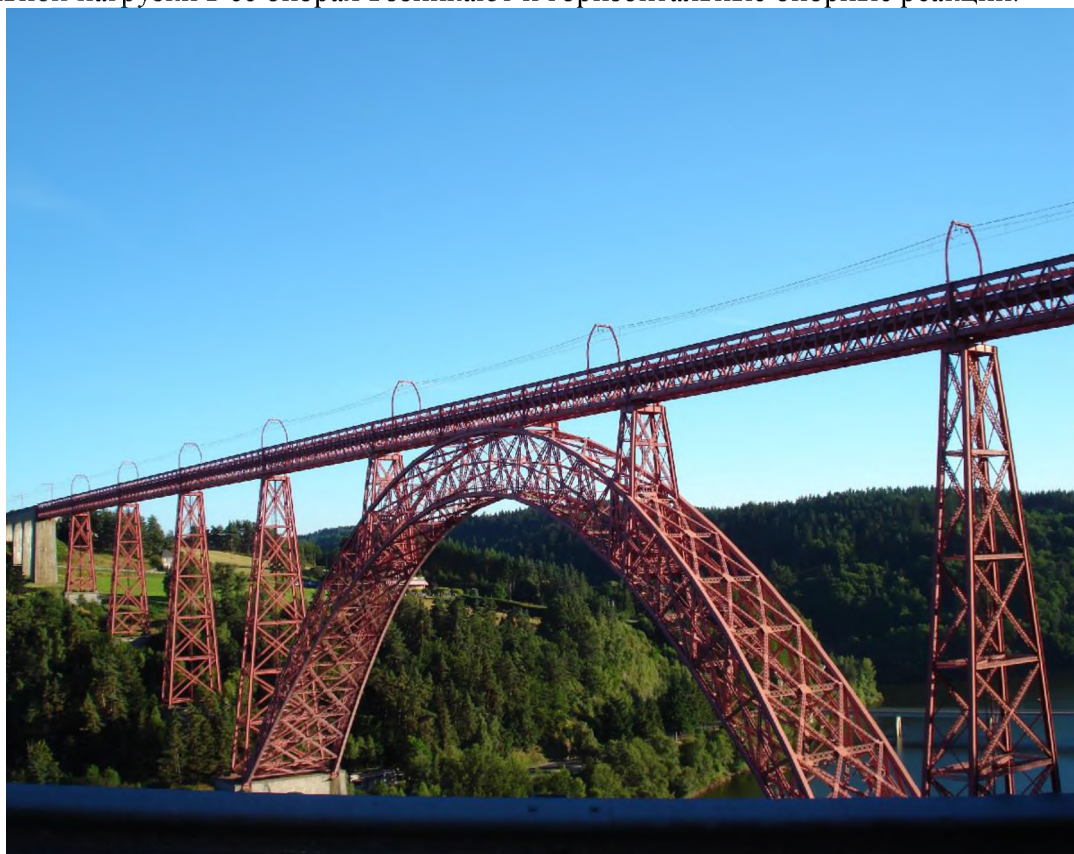


Иллюстрация 11.1. Двухшарнирная сквозная арка с надарочным строением

Следовательно, арки требуют создания мощных опорных устройств. Чтобы не передавать на ниже лежащие конструкции значительные горизонтальные усилия, применяют арки с затяжками. Обычно затяжки разной конструкции устраивают в двухшарнирных арках (рисунок 11.2). Двухшарнирная арка с затяжкой, сохраняя свойства распорных систем, имеет балочные опоры и передает на опорные конструкции от вертикальной нагрузки только вертикальные усилия и может быть расположена на высоких колоннах или стенах без устройства контрфорсов.

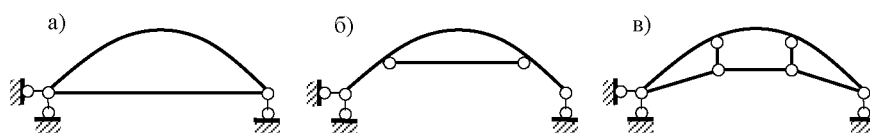


Рисунок 11.2

Особенности расчета один раз статически неопределимых арок рассмотрим на примере расчета двухшарнирной арки с затяжкой.

## 11.2. Расчет двухшарнирной арки с затяжкой

Двухшарнирная арка с затяжкой является внешне безраспорной. Распор воспринят затяжкой, и его следует рассматривать как внутреннюю растягивающую силу в затяжке. Двухшарнирная арка с затяжкой является один раз статически неопределимой, и ее нетрудно рассчитать методом сил (иллюстрация 11.2).

Рассмотрим двухшарнирную арку с прямолинейной затяжкой, расположенной в уровне опор. Арка имеет переменное по длине пролета поперечное сечение и загружена вертикальной нагрузкой (рисунок 11.3,а). Основную систему метода сил можно получить, рассекая затяжку (точнее, удаляя из затяжки связь, воспринимающую продольную силу). Основным неизвестным метода сил будет усилие в затяжке  $N_{зам} = X_1$  (рисунок 11.3,б).

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где  $\delta_{11}$  есть взаимное перемещение концов затяжки в месте разреза, вызываемое единичным усилием в затяжке  $X_1 = 1$ ,  $\Delta_{1F}$  – взаимное перемещение концов разрезанной затяжки от внешней нагрузки.



Иллюстрация 11.2. Двухшарнирная арка с затяжкой

При вычислении перемещений в основной системе учитываем изгибные деформации арки и продольные деформации затяжки. Продольными деформациями и деформациями сдвига в арке будем пренебрегать. Это допущение справедливо для достаточно подъемистых арок при отношении стрелы подъема арки к ее пролету, равному  $f/L = 1/6 \div 1/4$ .

При разрезанной затяжке основная система арки представляет собой криволинейную балку. Нагрузка, приложенная к арке, вызывает изгибающие моменты только в арке как в криволинейной балке  $M_F = M_x^0$  (рисунок 11.3,в). Усилий в разрезанной затяжке нагрузка не вызывает.

Единичное неизвестное вызывает изгибающие моменты в арке  $\bar{M}_1 = -y(x)$ . Единичная эпюра изгибающих моментов повторяет очертание оси арки (рисунок 11.3,г). В затяжке единичное неизвестное вызывает постоянную растягивающую продольную силу  $\bar{N}_{зам} = 1$  (рисунок 11.3,д).

Основная особенность расчета арок состоит в том, что интегралы Мора для вычисления перемещений в арках должны браться по длине оси арки, т.е. являются криволинейными интегралами. Свободный член канонического уравнения, т.е. грузовое перемещение, находят по одночленной формуле Мора

$$\Delta_{1F} = \int_S \frac{\bar{M}_1 M_F ds}{EJ(x)} = - \int_S \frac{y(x) M_F ds}{EJ(x)}.$$

Коэффициент при неизвестном (единичное перемещение), вычисляемый с учетом продольных деформаций затяжки, находят по двучленной формуле

$$\delta_{11} = \int_S \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ(x)} + \frac{\bar{N}_{зам}^2 L}{EA_{зам}} = \int_S \frac{[y(x)]^2 ds}{EJ(x)} + \frac{L}{EA_{зам}}.$$

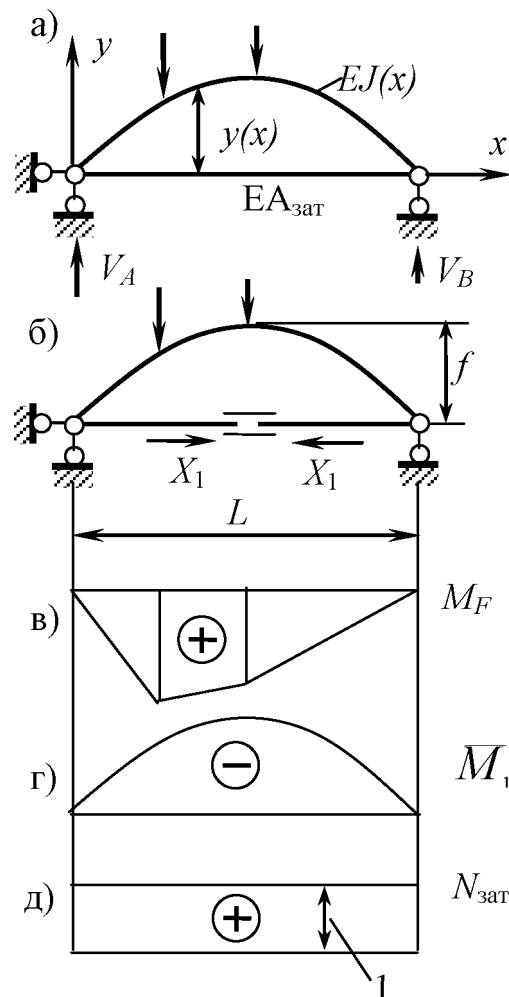


Рисунок 11.3

Чтобы в этих криволинейных интегралах перейти к интегрированию по длине пролета, т.е. по абсциссе  $x$  введем замену

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi(x)},$$

где  $\varphi(x)$  – угол наклона к горизонтали касательной к оси арки в сечении с абсциссой  $x$ . В результате для вычисления коэффициента и свободного члена канонического уравнения метода сил получим следующие формулы:

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{[y(x)]^2 dx}{EJ(x) \cos \varphi(x)} + \frac{L}{EA_{зам}};$$

$$\Delta_{1F} = - \int_0^L \frac{y(x) M_F dx}{EJ(x) \cos \varphi(x)}.$$

Таким образом, вычисление перемещений в арках, как и в других криволинейных стержнях переменного сечения, оказывается значительно более трудоемким, чем вычисление перемещений в прямолинейных стержнях постоянного сечения. Вычисление определенных интегралов по правилу перемножения эпюр (по правилу Верещагина) здесь невыполнимо, так как под знаками определенных интегралов стоит произведение нескольких нелинейных функций. Формула Симпсона должна рассматриваться как один из вариантов приближенного вычисления определенных интегралов.

Принимая во внимание введенные выше предположения о неучете продольных и сдвиговых деформаций арки, допустимо применить для вычисления перемещений в арке более простой метод численного интегрирования – метод прямоугольников. Для этой цели пролет арки разбивают на достаточно малые участки, желательно, одинаковой длины, нумеруют их в определенной последовательности и в среднем сечении каждого участка вычисляют значения всех подынтегральных функций. В итоге процедура взятия определенного интеграла заменяется вычислением конечной суммы произведений значений подынтегральных функций в серединах участков:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k} + \frac{L}{EA_3};$$

$$\Delta_{1F} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k},$$

где  $k$  – номер участка,  $n$  – количество участков. Обычно все вычисления проводят в таблицах (табл. 11.1).

Таблица 11.1

| № участка $k$ | $x_k$ | $y_k$ | $EJ_k$ | $\cos \varphi_k$ | $(M_F)_k$ | $\Delta x_k$ | $\frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}$ | $\frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}$ |
|---------------|-------|-------|--------|------------------|-----------|--------------|--|--|
| 1             | 2     | 3     | 4      | 5                | 6         | 7            | 8  | 9  |
| ...           |       |       |        |                  |           |              |  |  |
| ...           |       |       |        |                  |           |              |  |  |
| ...           |       |       |        |                  |           |              |  |  |
| $\Sigma$      |       |       |        |                  |           |              | $\delta_{11}^{(M)}$                            | $-\Delta_{1F}$                                       |

Сумма элементов предпоследнего столбца дает часть единичного перемещения, обусловленную изгибными деформациями арки. Полное единичное перемещение найдем как сумму

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{(M)} + \frac{L}{EA_{зат}}$$

После того как из решения канонического уравнения будет найдено усилие в затяжке

$$N_{зат} = X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}},$$

внутренние силы в любом сечении двухшарнирной арки можно найти по тем же формулам, что и в трехшарнирной арке

$$M_x = M_x^0 - X_1 y_x;$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - X_1 \sin \varphi_x;$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + X_1 \cos \varphi_x).$$

Индекс  $x$  в данных формулах обозначает произвольное сечение арки.

### 11.3. Влияние податливости затяжки на усилие в затяжке

В статически неопределимых системах распределение усилий в элементах зависит от соотношения их жесткостей (податливостей). Следовательно, податливость затяжки, величина  $L/(EA_{зат})$  будет влиять на значение усилия в затяжке. Полученную в предыдущем разделе формулу для вычисления усилия в затяжке можно переписать следующим образом:

$$N_{зат} = X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}^{(M)} + \frac{L}{EA_{зат}}}.$$

Графическое изображение зависимости усилия в затяжке от жесткости затяжки дано на рисунке 11.4.

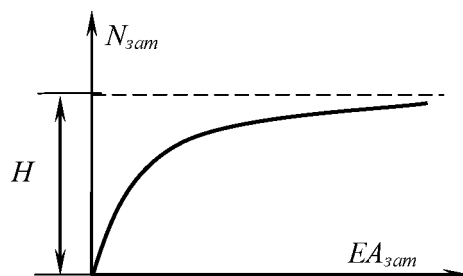


Рисунок 11.4

Если постепенно уменьшать жесткость затяжки, величину  $EA_{зат}$ , или, что то же самое, увеличивать податливость затяжки, величину  $L/(EA_{зат})$ , то усилие в затяжке будет уменьшаться. Чем слабее, податливее затяжка, тем меньше воспринимаемое ею усилие. В

пределе, при затяжке нулевой жесткости, т. е. при ее отсутствии, арка с затяжкой превращается в безраспорную криволинейную балку; усилие в затяжке равно нулю.

С другой стороны, если постепенно увеличивать жесткость затяжки  $EA_{зат}$  усилие в затяжке будет также увеличиваться, однако в гораздо меньшей степени. В пределе, при стремлении жесткости затяжки к бесконечности, а податливости затяжки к нулю, усилие в затяжке будет асимптотически стремиться к величине

$$H = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}^{(M)}},$$

где  $H$  – величина, численно равная распору двухшарнирной арки без затяжки на шарнирно-неподвижных опорах (рисунок 11.1,а).

То есть в этом предельном случае, когда затяжка абсолютно нерастяжима, двухшарнирная арка с затяжкой превращается как бы в двухшарнирную арку на неподвижных опорах – в обыкновенную двухшарнирную арку.

Таким образом, относительно слабая затяжка не позволяет полностью использовать преимущества арки с затяжкой как распорной системы. В противовес, чрезмерно жесткая затяжка практически оказывается бесполезной. Усилие в жесткой затяжке не может превысить распора арки без затяжки, вычисляемого по последней формуле.

При расчете двухшарнирных арок без затяжки за основное неизвестное также принимают распор ( $X_1 = H$ ). Основную систему метода сил получают, отбрасывая горизонтальный опорный стержень одной из опор. Единичная и грузовая эпюры изгибающих моментов в основной системе для двухшарнирной арки без затяжки получаются такими же, как и для арки с затяжкой (рисунок 11.3,в,г). Распор двухшарнирной арки без затяжки вычисляют по формуле

$$X_1 = H = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}}.$$

#### 11.4. Особенности расчета бесшарнирной арки

Бесшарнирная арка является трижды статически неопределимой. Для определения трех основных неизвестных метода сил необходимо составить и решить три канонических уравнения. Соответствующим выбором рациональной основной системы метода сил можно добиться даже полного разделения системы канонических уравнений на три отдельных уравнения, каждое с одним неизвестным, при произвольном очертании оси арки и произвольной нагрузке. Варианты основных систем, представленные на рисунке 11.5,а,б,в, позволяют обнулить побочные коэффициенты канонических уравнений и привести уравнения к виду

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Добиться такого результата можно ценою дополнительных вычислений по определению длины жестких консолей (рисунок 11.5,а,б). Так, например, в симметричной арке (рисунок 11.5,б) основное неизвестное  $X_1$  является кососимметричным и отделено от двух других



прямосимметричных неизвестных. Разделить основные неизвестные  $X_2$  и  $X_3$  можно, подобрав длину абсолютно жестких консолей  $y_0$  так, чтобы перемещение  $\delta_{23}$  равнялось нулю. Точка, в которой находятся концы абсолютно жестких консолей, называют упругим центром арки. Полного разделения основных неизвестных можно добиться, и поместив в упругий центр конец единственной консоли (рисунок 11.5,а). Тот же результат можно получить и при основной системе в виде трехшарнирной арки (рисунок 11.5,в), сгруппировав основные неизвестные  $X_1$  и  $X_3$  и определив положение крайних шарниров из условий, чтобы побочные коэффициенты канонических уравнений метода сил обратились в нуль.

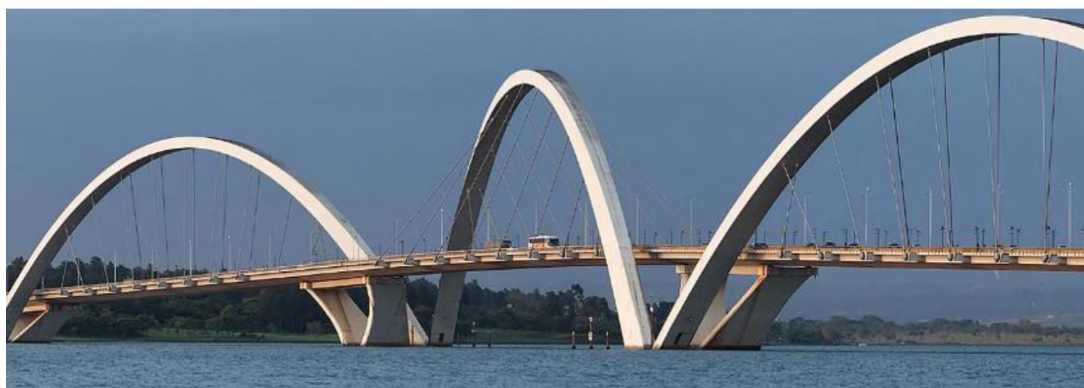


Иллюстрация 11.2. Бесшарнирные арки как основные несущие конструкции мостового перехода

Однако в век электронных калькуляторов и компьютеров решение систем линейных алгебраических уравнений второго-третьего порядка не представляет каких-либо затруднений. Поэтому можно отказаться от выбора оригинальных основных систем и дополнительных вычислений.

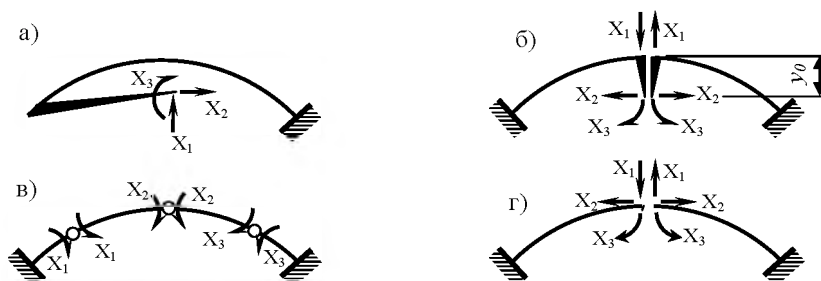


Рисунок 11.5

Так основная система, полученная сквозным разрезом бесшарнирной арки по оси симметрии (рисунок 11.5,г), позволяет сразу разделить три совместных канонических уравнения на одно независимое уравнение относительно кососимметричного основного неизвестного  $X_1$  и на систему двух совместных уравнений относительно двух симметричных основных неизвестных  $X_2$  и  $X_3$ :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

К таким же результатам приводит и основная система в виде криволинейной балки (рисунок 11.6,б). Рассмотрим данный вариант более подробно, так как приемы построения ряда эпюр внутренних сил в такой основной системе, уже нашли свое отражение в расчете двухшарнирных и трехшарнирных арок.

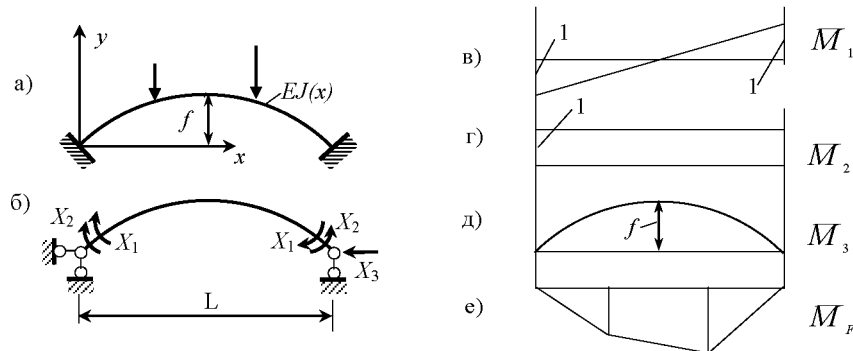


Рисунок 11.6

Сгруппируем неизвестные опорные моменты, разложив их на кососимметричное групповое неизвестное  $X_1$  и симметричное групповое неизвестное  $X_2$ . Основное неизвестное  $X_1 = 1$  вызовет в арке линейную кососимметричную эпюру (рисунок 11.6,в). Ординаты этой единичной эпюры можно вычислить в обычной системе координат с началом на левой опоре по уравнению  $M_1(x) = 1 - 2x/L$ . Неизвестное  $X_2 = 1$  вызовет в арке постоянные положительные изгибающие моменты  $M_2(x) = 1$  (рисунок 11.6,г). Неизвестное  $X_3 = 1$  вызовет в основной системе симметричную эпюру изгибающих моментов с отрицательными ординатами, совпадающую с очертанием оси арки,  $M_3(x) = -y(x)$  (рисунок 11.6,д). Грузовая эпюра изгибающих моментов совпадает с балочной эпюрой изгибающих моментов  $M_F = M_x^0$  (рисунок 11.6,е).

Криволинейные интегралы по длине арки, определяющие коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, вычислим по правилу прямоугольников, разбив пролет арки на  $n$  участков. С учетом введенных выше обозначений соответственно получим:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{M}_1)_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}; \quad \delta_{22} = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k};$$

$$\delta_{23} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}; \quad \delta_{33} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2 \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k};$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{M}_1)_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}; \quad \Delta_{2F} = \sum_{k=1}^n \frac{(M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k};$$

$$\Delta_{3F} = - \sum_{k=1}^n \frac{y_k (M_F)_k \Delta x_k}{EJ_k \cos \varphi_k}.$$

В приведенных выше формулах индекс  $k$  обозначает номер участка при вычислении интегралов Мора по правилу прямоугольников. Значения подинтегральных функций вычисляются обычно в серединах участков.



После определения из решения канонических уравнений основных неизвестных можно определить внутренние силы в любом сечении бесшарнирной арки точно так же как в трехшарнирных и двухшарнирных арках. Основное неизвестное  $X_1$  вызывает в основной системе вертикальные опорные реакции

$$V_{A1} = -2X_1/L; \quad V_{B1} = 2X_1/L.$$

Основное неизвестное  $X_2$  в основной системе опорных реакций не вызывает. Основное неизвестное  $X_3$  вызывает в основной системе только горизонтальную опорную реакцию  $H_{A3} = X_3$ . Следовательно, для вычисления внутренних сил в произвольном сечении  $x$  бесшарнирной арки будем иметь следующие формулы:

$$M_x = M_x^0 + X_1(1 - 2x/L) + X_2 - y_x X_3;$$

$$Q_x = (Q_x^0 - 2X_1/L) \cos \varphi_x - X_3 \sin \varphi_x;$$

$$N_x = -(Q_x^0 - 2X_1/L) \sin \varphi_x - X_3 \cos \varphi_x.$$

### 11.5. Понятие о расчете статически неопределимых комбинированных и висячих систем

Напомним, что комбинированными системами называют расчетные схемы сооружений, у которых часть стержней работает на изгиб, а остальные только на сжатие-растяжение. Стержни, работающие на изгиб, обычно имеют более мощное поперечное сечение, и их называют жесткими элементами. Стержни, воспринимающие только сжимающие или, тем более, растягивающие усилия, являются более легкими. Их называют гибкими элементами. Рассмотренные в шестой теме шпренгельная балка с промежуточным шарниром в середине пролета и цепь с балкой жесткости, также имеющей промежуточный шарнир, являются основными представителями статически определимых комбинированных систем. Виды статически неопределимых комбинированных систем практически необозримы.

Все виды арок с затяжками можно отнести к комбинированным системам. Арка представляет собой жесткий элемент. Элементы затяжки являются гибкими. Примеры некоторых других статически неопределимых комбинированных систем показаны на рисунке 11.8.

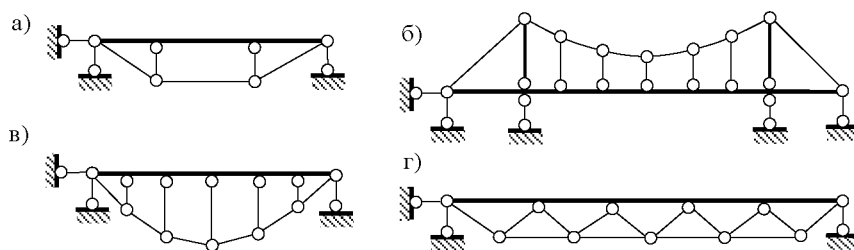


Рисунок 11.8

Висячими называют такие системы, основные несущие элементы которых работают на растяжение. К висячим системам относятся висячие арки (рисунок 11.9,а), разнообразные вантовые (тросовые) системы (рисунок 11.9,б,в,г), некоторые виды комбинированных систем (рисунок 11.8,б,в).



Иллюстрация 11.3. Многопролетный вантовый мост

Расчет висячей (растянутой) двухшарнирной арки (рисунок 11.9,а) отличается от расчета обыкновенной (сжатой) двухшарнирной арки только тем, что распор висячей арки направлен наружу от пролета. Если висячая арка выполнена из гибких элементов (тросов, канатов), то она превращается в гибкую нить (рисунок 11.9,в). Расчет гибких нитей, как и других висячих, вантовых и комбинированных систем больших пролетов, ведется в нелинейной постановке по деформированной схеме. Особенности расчета сооружений по деформированной схеме будут рассмотрены во второй части комплекса. В данном разделе рассмотрим особенности



Иллюстрация 11.4. Висячий мост с фермой жесткости

расчета некоторых комбинированных систем (в том числе и висячих) в классической постановке по недеформированной расчетной схеме.

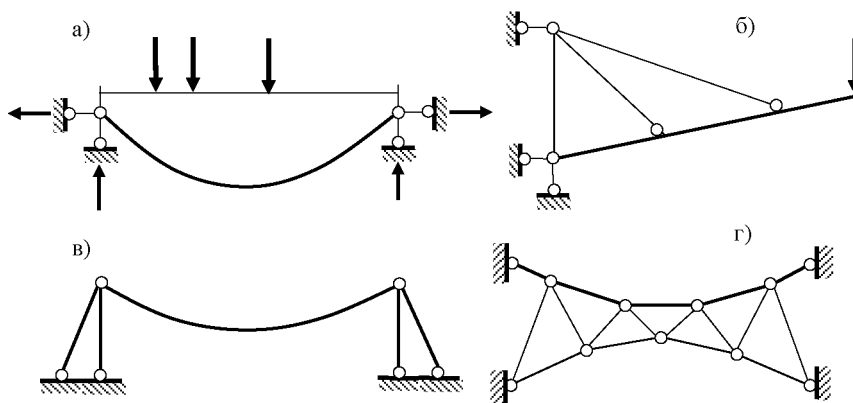


Рисунок 11.9

Шпренгельная балка (рисунок 11.8,а) и балка с многостоечным шпренгелем (рисунок 11.8,в) являются примерами комбинированных систем с одной лишней связью. Висячая система в виде цепи с неразрезной балкой жесткости и распором цепи, переданным на балку (рисунок 11.8,б), является трижды статически неопределимой. Ферма с неразрезным верхним поясом (рисунок 11.8,г) содержит четыре лишних связи. Вантовая комбинированная система (рисунок 11.9,б) с неразрезной балкой и двумя оттяжками один раз статически неопределима при условии, что оттяжки из работы не выключаются. Вантовая ферма (рисунок 11.9,г) трижды статически неопределима. Такие фермы подвергают предварительному натяжению так, чтобы все их элементы не выключались из работы. При таком условии расчет вантовых ферм не отличается от расчета обычных статически неопределимых ферм, рассмотренных выше.

Расчет комбинированных систем малых и средних пролетов при небольшом количестве лишних связей может быть выполнен по недеформированной расчетной схеме методом сил. Основную систему метода сил для комбинированных систем рекомендуется выбирать такой, чтобы от заданной нагрузки в ней возникали усилия только в жестких элементах. Это возможно, если вся нагрузка приложена к жестким элементам. На рисунке 11.10 для двух комбинированных систем приведены варианты основных систем метода сил, построены грузовые и характерные единичные эпюры изгибающих моментов в жестких элементах. Единичные основные неизвестные вызывают также усилия в гибких элементах. Усилий от нагрузки в гибких элементах не будет.

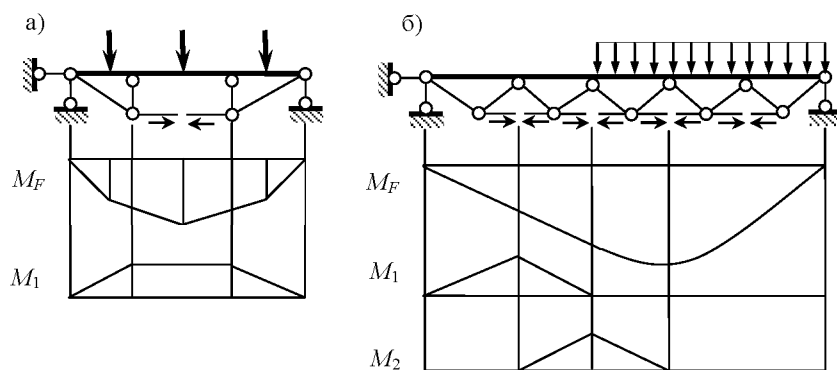


Рисунок 11.10

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений метода сил в комбинированных системах вычисляют по двучленным формулам Максвелла-Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k ds}{EJ} + \sum \frac{N_i N_k L}{EA};$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_i M_F ds}{EJ} + \sum \frac{N_i N_F L}{EA}.$$

Практически из-за большой разницы в площадях поперечных сечений гибких и жестких элементов суммирование во втором слагаемом приведенных формул распространяется только на гибкие элементы: поправки к перемещениям за счет продольных деформаций жестких элементов получаются незначительными.

## ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### 1. Примерный перечень практических занятий

| Название темы  |
|--|
| 1. Составные балки. Кинематический анализ. Этажная схема. Определение реакций. Построение эпюр внутренних сил.   |
| 2. Построение матриц влияния усилий в балках с помощью единичных эпюр  |
| 3. Определение усилий по линиям влияния усилий в простых и составных балках  |
| 4. Определение реакций и построение эпюр усилий в трёхшарнирных арке   |
| 5. Расчёт трёхшарнирных и составных рам  |
| 6. Определение усилий в стержнях балочных ферм.  |
| 7. Построение линий влияния усилий в стержнях балочных ферм.   |
| 8. Расчёт распорных ферм. Определение усилий. Построение линий влияния.  |
| 9. Расчёт комбинированных систем (шпренгельной балки, балок с оттяжками).  |
| 10. Вычисление перемещений от нагрузок в однопролётных и многопролётных балках.  |
| 11. Вычисление перемещений от нагрузок и изменения температуры в рамах.  |
| 12. Определение степени статической неопределимости рам. Выбор основной системы метода сил. Построение единичных и грузовых эпюр. Полный расчёт рам с одной лишней связью методом сил. |
| 13. Расчёт методом сил неразрезных балок и рам с двумя-тремя неизвестными.   |
| 14. Расчёт методом сил статически неопределимых ферм.  |
| 15. Расчёт методом сил статически неопределимых арок.  |
| 16. Расчёт методом перемещений рам с 1 - 2 неизвестными  |
| 17. Расчёт методом перемещений рам с линейными смещениями.   |
| 18. Расчёт методом перемещений симметричных рам. Комбинированный метод.  |
| 19. Расчёт методом перемещений рам с наклонными стойками   |
| 20. Расчёт методом перемещений рам на смещения опор.   |
| 21. Расчёт методом перемещений рам на тепловые воздействия   |
| 22. Расчёт рам смешанным методом   |
| 23. Расчёт пространственных систем: ст. определимый ломаный стержень; пространственные ст. определимые и неопределимые фермы.  |
| 24. Расчёт плоской рамы на нагрузку из плоскости   |
| 25. Автоматизированный расчёт стержневых систем в компьютерном классе  |
| 26. Расчёт плоских ферм на основе общих уравнений строительной механики  |
| 27. Расчёт статически неопределимой пространственной фермы на основе общих уравнений стр. мех.   |
| 28. Расчёт плоских рам на основе общих уравнений строительной механики   |
| 29. МКЭ. Векторы узловых перемещений и узловых реакций. . Переход от местной системы координат к общей и наоборот  |
| 30. Построение матриц жёсткости для плоских стержневых КЭ  |
| 31. Расчёт неразрезных балок по несущей способности  |
| 32. Вычисление податливостей и жёсткостей стержневых систем по заданным направлениям   |
| 33. Определение частот и периодов в системах с одной степенью свободы  |
| 34. Применение динамического коэффициента в системах с одной степенью свободы  |
| 35. Вычисление собственных частот и форм в системах с 2-мя – 3-мя степенями свободы  |
| 36. Динамический расчёт рамы с двумя степенями свободы.  |
| 37. Вычисление собственных частот в системах с распределёнными массами. Применение программных комплексов  |
| 38. Расчёт стержневых систем на устойчивость по Эйлеру   |
| 39. Расчёт на устойчивость стержней на упругих опорах.   |
| 40. Расчёт на устойчивость методом перемещений простых рам   |
| 41. Расчёт на устойчивость методом перемещений сложных рам.  |

## **2. Примерный перечень расчетно-графических и контрольных работ**

1. Расчет статически определимых многопролетных балок и трехшарнирных рам (рекомендуется выполнять с применением матриц влияния усилий).
2. Расчет плоской рамы методом перемещений (рекомендуется выполнять с использованием программного комплекса).

## **РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ**

### **1. Средства диагностики результатов учебной деятельности**

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале.

Оценка промежуточных учебных достижений студента также осуществляется по десятибалльной шкале.

Для оценки уровня знаний студента используются следующие приёмы:

- защита выполненных индивидуальных расчётно-графических или контрольных работ;
- работа студента на текущих практических занятиях;
- проведение текущих контрольных опросов по отдельным темам;
- выступление студента на конференции по подготовленному реферату или учебно-исследовательской (научно-исследовательской) работе;
- сдача экзамена (зачёта) по дисциплине.

### **2. Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов**

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- контролируемая самостоятельная работа в виде решения индивидуальных задач в аудитории во время проведения практических занятий под контролем преподавателя в соответствии с расписанием;
- управляемая самостоятельная работа, в том числе в виде выполнения индивидуальных расчётных заданий с консультациями преподавателя;
- подготовка рефератов по индивидуальным темам, в том числе с использованием патентных материалов.

### **3. Методы (технологии) обучения**

Основными методами (технологиями) обучения, отвечающими целям изучения дисциплины, являются:

- объяснительно-иллюстративный метод;
- элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;
- элементы учебно-исследовательской деятельности, творческого подхода, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;
- коммуникативные технологии (дискуссия, учебные дебаты, мозговой штурм и другие формы и методы), реализуемые на практических занятиях и конференциях.

## **УЧЕБНО-ПРОГРАММНЫЙ РАЗДЕЛ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине  
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
для специальности  
1-70 02 01 Промышленное и гражданское строительство**

**Минск 2019**



## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по дисциплине «Строительная механика» разработана для специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство».

Цель изучения дисциплины состоит в том, чтобы вооружить будущего инженера-строителя знаниями, умениями и навыками, необходимыми для проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции промышленных и гражданских зданий и инженерных сооружений.

Развитие техники постоянно выдвигает перед инженерами новые проблемы, связанные с повышением надёжности и долговечности зданий и сооружений при снижении их материалоемкости. Решение таких проблем и составляет предмет строительной механики.

Задачами строительной механики являются:

А. Изучение методов создания расчётных схем несущих деформируемых систем как совокупности самых разнообразных элементов (стержневых, таких как балки, рамы, фермы, арки, комбинированные системы; пространственных тонкостенных, таких как плиты, пластины и оболочки; трёхмерных деформируемых твёрдых тел произвольной формы).

Б. Определения усилий, напряжений и перемещений в деформируемых системах при действии на них статических и динамических нагрузок, при изменении температуры и осадке опор;

В. Приобретение умений и навыков формирования расчётных схем сооружений и их практического расчёта.

Г. Изучение взаимодействия расчётных схем сооружений с окружающей средой и внешними воздействиями.

Как наука строительная механика – это совокупность наук о прочности, жёсткости и устойчивости строительных конструкций. Классическими разделами строительной механики в широком смысле этого слова являются: сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, теория сооружений, включающая статику динамику и устойчивость сооружений. Теорию сооружений иногда называют строительной механикой в узком смысле этого слова.

В учебную программу курса «Строительная механика» включены разделы:

1. Статически определимые стержневые системы.
2. Статически неопределимые стержневые системы.
3. Динамика и устойчивость сооружений.

Для успешного усвоения курса «Строительная механика» студенту необходимо освоить курсы высшей математики, физики, теоретической механики и сопротивления материалов. Строительная механика решает свои задачи, базируясь на основных положениях этих дисциплин, при этом основное внимание уделяется современным численным методам расчёта сооружений на ЭВМ

Знания, умения и навыки, полученные студентами при изучении строительной механики, используются ими при изучении курсов строительных конструкций и инженерных сооружений.

В результате освоения дисциплины «Строительная механика» студент должен

### **знать:**

- основные понятия и гипотезы строительной механики, методы исследования напряжено-деформированного состояния (НДС) упругих тел;
- принципы образования и классификацию расчётных схем плоских и пространственных стержневых систем;
- цель и методы кинематического анализа расчётных схем сооружений;

- методы определения усилий в статически определимых и неопределимых стержневых системах от различных нагрузок и воздействий, а также методы определения перемещений в этих системах;
- методы определения динамических характеристик сооружений и методы проведения их расчёта на динамические нагрузки и воздействия;
- методы исследования устойчивости сооружений и их элементов.

**уметь:**

- провести кинематический анализ расчётной схемы сооружения;
- определить внутренние силы в элементах стержневой системы;
- определить перемещения узлов стержневой системы по заданным направлениям;
- определить собственные частоты и соответствующие собственные формы колебаний стержневой системы и выполнить расчёт системы на действие вибрационной нагрузки;
- найти критическую нагрузку или дать заключение об устойчивости равновесия стержневой системы;
- решать задачи строительной механики с привлечением современных средств САПР: MathCAD, MatLAB, Mathematica, ANSYS, SIMCENTER FEMAP with NASTRAN, LIRA, SCAD, AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS и других.

**владеть:**

- принципами образования геометрически неизменяемых систем, знать особенности проведения кинематического анализа и установления главных и второстепенных частей сооружения;
- методами определения усилий в стержневых системах;
- техникой построения эпюр усилий и построения линий влияния усилий;
- методами практического вычисления перемещений;
- навыками работы с научно-технической литературой по строительной механике.

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечить формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

СЛК-6. Уметь работать в коллективе.

СЛК-7. Самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со строительством.

ПК-5. Пользоваться оперативными и глобальными информационными ресурсами.

ПК-10. Проектировать конструктивные схемы зданий и сооружений различного функционального назначения в составе группы специалистов или самостоятельно.

ПК-12. Выполнять расчёты и конструирование строительных конструкций с использованием методов автоматизированного проектирования.

ПК-27. Разрабатывать технико-экономическое обоснование эффективности новых конструктивных решений зданий и сооружений.

Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины отведено:

- для очной формы получения высшего образования всего 395 ч., из них аудиторных - 187 часов;
- для заочной формы получения высшего образования всего 395 ч., из них аудиторных – 40 часа.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено в таблице 1.

Таблица 1.

| Очная форма получения высшего образования |         |            |                          |                          |                          |
|---|---------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Курс                                      | Семестр | Лекции, ч. | Лабораторные занятия, ч. | Практические занятия, ч. | Форма текущей аттестации |
| 2   | 4       | 51         | -                        | 34                       | экзамен                  |
| 3   | 5       | 51         | -                        | 51                       | экзамен                  |

## **СОДЕРЖАНИЕ дисциплины**

### **Тема 1. Общие положения и понятия теории стержневых систем**

Строительная механика, ее задачи и методы. Связь строительной механики с другими дисциплинами учебного плана. Краткий исторический очерк развития строительной механики.

Понятие о расчётной схеме сооружения. Многообразие расчётных схем, их зависимость от требуемой точности расчёта, применяемой вычислительной техники.

Основные элементы расчётных схем сооружений: стержни, пластины, оболочки и массивные тела, узлы и опоры (связи). Основные способы соединения элементов в единую систему и прикрепления ее к основанию. Системы неизменяемые, изменяемые и вырожденные, статически определимые и статически неопределимые. Число степеней свободы и число "лишних" связей. Кинематический анализ стержневых систем.

Понятие о расчётах сооружений по недеформированному и деформированному состояниям. Учет реальных свойств материалов. Системы линейно деформируемые, геометрически и физически нелинейные.

Матрицы в задачах строительной механики. Матрицы влияния, матрицы податливости и матрицы жёсткости системы. Программы и программные комплексы для расчётов на ЭВМ.

### **Тема 2. Основные свойства статически определимых систем и методы их расчёта при неподвижной нагрузке**

Виды нагрузок. Свойства и методы расчёта статически определимых систем: а) статический метод; б) метод замены связей; в) кинематический метод. Примеры применения этих методов. Построение и проверки эпюр усилий. Составление и применение матриц влияния усилий.

### **Тема 3. Определение усилий от подвижной нагрузки**

Виды подвижных нагрузок. Понятие об особенностях расчёта на подвижную нагрузку. Огибающие эпюры и линии влияния. Статический и кинематический методы построения линий влияния. Линии влияния при узловой передаче нагрузки. Определение усилий по линиям влияния. Определение наиболее невыгодного положения подвижных нагрузок по линиям влияния. Связь понятий "линия влияния" и "матрица влияния".

### **Тема 4. Расчёт трёхшарнирных арок и рам**

Образование трёхшарнирных систем. Определение реакций и усилий. Сопоставление трёхшарнирной системы с балкой. Построение линий влияния реакций и усилий в трёхшарнирных системах. Рациональное очертание оси арки. Трёхшарнирные арки с затяжкой. Образование и расчёт арок с надарочным строением. Висячие арки. Равновесие гибкой нити. Трёхшарнирные и составные рамы.

### **Тема 5. Расчёт плоских статически определимых ферм**

Понятие о ферме. Особенности работы ее элементов при узловой нагрузке. Расчётные схемы ферм. Классификация ферм по назначению, очертанию поясов, системе решетки и опиранию. Способы определения усилий в стержнях ферм при неподвижной нагрузке. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм. Сопоставление работы ферм с различными очертаниями поясов. Понятие о рациональной схеме фермы. Фермы со шпренгельной решёткой, их расчёт на неподвижную и подвижную нагрузки.

### **Тема 6. Расчёт распорных ферм и комбинированных систем**

Определение усилий в стержнях распорных ферм от неподвижной нагрузки. Построение линий влияния усилий. Комбинированные системы, их расчёт при действии неподвижной и подвижной нагрузок. Понятие о вантовых системах и их расчёте.

### **Тема 7. Общие теоремы строительной механики и определение перемещений.**

Перемещения и их обозначения. Работа внешних и внутренних сил. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений. Применение принципа возможных перемещений к упругим системам. Общая формула перемещений Максвелла-Мора. Способы вычисления интегралов Мора. Перемещения от изменения температуры и смещения опор. Матричная форма вычисления перемещений. Матрицы внешней податливости и жесткости упругой системы. Линии влияния перемещений. Определение перемещений физически нелинейных систем при малых деформациях.

### **Тема 8. Метод сил и его применение к расчёту плоских рам**

Статически неопределимые системы и их свойства. Степень статической неопределимости плоских рам. Сущность метода сил. Основная система и основные неизвестные. Канонические уравнения. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Определение окончательных усилий, проверки правильности расчётов. Общий алгоритм расчёта статически неопределимых рам по методу сил. Использование симметрии системы, групповые неизвестные. Особенности определения перемещений в статически неопределимых системах. Расчёт на изменение температуры и смещение опор. Расчёт на множество загрузжений. Построение линий влияния усилий.

Понятие о матричной форме метода сил, автоматизация расчётов статически неопределимых рам.

### **Тема 9. Расчёт методом сил неразрезных балок**

Виды неразрезных балок. Применение метода сил к расчёту балок. Рациональные основные системы. Построение огибающих эпюр и линий влияния. Понятие о расчёте неразрезных балок на упругих опорах.

### **Тема 10. Расчёт методом сил статически неопределимых ферм**

Виды статически неопределимых ферм. Применение метода сил к расчёту ферм на неподвижную нагрузку, изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов. Построение линий влияния усилий. Матрица влияния усилий. Понятие о применении шарнирно-стержневой аппроксимации для расчёта континуальных систем.

### **Тема 11. Расчёт методом сил статически неопределимых арок,**

## **висячих и комбинированных систем**

Виды статически неопределимых арок. Расчёт двухшарнирных и бесшарнирных арок. Влияние продольных деформаций. Построение линий влияния усилий. Понятие о расчёте арки в деформируемой среде.

Расчёт комбинированных (и висячих) систем на неподвижную нагрузку, построение линий влияния усилий.

Расчёт гибких нитей на изменение нагрузки. Понятие о расчёте висячих и вантовых систем по деформированному состоянию.

### **Тема 12. Метод перемещений и его применение к расчёту плоских рам**

Сущность метода и основные допущения. Основные неизвестные и степень кинематической неопределимости системы. Основная система и канонические уравнения метода перемещений. Статический способ определения единичных и грузовых реакций. Определение окончательных усилий, проверки правильности расчётов. Общий алгоритм расчёта статически неопределимых рам методом перемещений. Теоремы о взаимности реакций, реакций и перемещений. Кинематический способ определения единичных и грузовых реакций. Особенности расчёта рам с наклонными стойками. Использование симметрии системы, групповые перемещения. Расчёт на изменение температуры и смещения опор. Построение линий влияния перемещений и усилий. Особенности расчёта рам методом перемещений с учетом продольных деформаций стержней.

Программные комплексы для расчёта рам на основе метода перемещений.

### **Тема 13. Совместное применение метода сил и метода перемещений. Смешанный метод**

Сопоставление метода сил и метода перемещений. Комбинированное применение этих методов.

Смешанный метод. Основная система, основные неизвестные, канонические уравнения смешанного метода. Свойства матрицы коэффициентов системы канонических уравнений. Общий алгоритм расчёта стержневых систем смешанным методом.

Понятие о приближенных методах расчёта рам.

### **Тема 14. Особенности применения метода перемещений к расчёту неразрезных балок, статически неопределимых ферм, арок и комбинированных систем**

Выбор основной системы метода перемещений для неразрезных балок. Замена арок ломаными стержнем. Учет продольных деформаций. Основная система метода перемещений для ферм и комбинированных систем. Применение МКЭ и программных комплексов.

### **Тема 15. Особенности расчёта пространственных систем**

Виды пространственных стержневых систем, их расчётные схемы. Соединение стержней при помощи шаровых и цилиндрических шарниров. Опоры пространственных стержневых систем, их статические и кинематические свойства. Анализ образования пространственных рам и ферм. Особенности определения усилий в стержнях статически определимых пространственных стержневых систем. Применение метода сил и метода перемещений к расчёту статически неопределимых пространственных стержневых систем. Расчёт плоских рам на пространственную нагрузку.

Применение МКЭ и программных комплексов.

## **Тема 16. Общие уравнения строительной механики стержневых систем**

Стержневые системы как системы с конечным числом степеней свободы: узловые силы и узловые перемещения, внутренние силы и деформации. Составление уравнений равновесия (статических уравнений) для стержневой системы. Анализ геометрической изменяемости, статической и кинематической неопределимости. Геометрические уравнения. Принцип двойственности. Физические уравнения. Матрицы внутренней податливости и матрицы внутренней жесткости для отдельных стержней и для стержневой системы в целом. Полная система уравнений строительной механики в общем виде и ее решение. Смешанный метод, метод перемещений, метод сил.

Основные уравнения строительной механики для стержня. Формирование матрицы равновесия и матрицы внутренней жесткости для плоской стержневой системы. Формирование матрицы равновесия для пространственных ферм.

Матрицы влияния перемещений и усилий.

Построение алгоритмов определения усилий в стержневых системах при использовании ЭВМ. Уравнения для расчёта геометрически и физически нелинейных упругих систем. Шаговые методы решения геометрически и физически нелинейных задач.

## **Тема 17. Вариационные принципы и вариационные методы строительной механики. Метод конечных элементов**

Потенциальная энергия деформации упругой системы. (Выражение потенциальной энергии деформации через квадратичные формы обобщенных сил и обобщенных перемещений.) Потенциал внешних сил. Полная энергия деформируемой системы.

Вариационные принципы и вариационные методы строительной механики. Принципы Лагранжа (и Кастилиано). Прямые вариационные методы. Метод Релея-Ритца.

Метод конечных элементов (МКЭ). Разбивка системы на конечные элементы. Виды конечных элементов стержневых и континуальных систем. Узловые перемещения и узловые реакции. Узловая степень свободы. Местные и общая системы координат. Построение матриц жесткости стержневых конечных элементов в местной системе координат. Переход от местной системы координат к общей и наоборот. Способы построения матрицы внешней жесткости системы конечных элементов. Определение усилий в конечных элементах. Общий алгоритм расчёта стержневой системы МКЭ.

Реализация МКЭ в программных комплексах.

## **Тема 18. Основы расчёта стержневых систем по несущей способности**

Общие сведения (действительная диаграмма растяжения-сжатия материала, диаграммы упругопластического и жесткопластического материалов, понятие о предельной нагрузке). Работа стержня в пластической стадии. Особенности расчёта статически определимых и неопределимых систем с учетом пластических свойств материала. Пластические шарниры. Предельные состояния стержневых систем. Определение предельной нагрузки статическим и кинематическим методами. Прямая и обратная задачи расчёта. Расчёт по несущей способности балок, рам, ферм, арок и его реализация в статической и кинематической формах.

Применение программных комплексов.

## **Тема 19. Основные понятия динамики сооружений**

Динамические нагрузки и их классификация. Силы инерции. Задачи и методы динамики сооружений. Виды колебаний. Определение числа степеней свободы стержневой системы в динамике сооружений.

### **Тема 20. Колебания системы с одной степенью свободы**

Дифференциальное уравнение движения. Использование уравнений Лагранжа и обобщенных координат для описания движения системы с одной степенью свободы. Свободные колебания. Частота и период свободных колебаний. Общий случай действия возмущающей силы. Вибрационная нагрузка. Резонанс и его развитие во времени. Динамический коэффициент. Определение амплитудных значений усилий и перемещений, вызванных динамической нагрузкой. Объемлющие эпюры усилий.

Учет сил сопротивления. Кинематическое возбуждение колебаний.

### **Тема 21. Колебания систем с несколькими степенями свободы**

Дифференциальные уравнения движения системы при произвольной нагрузке. Свободные колебания системы. Спектр частот и форм собственных (главных) колебаний. Ортогональность собственных форм колебаний. Вынужденные колебания при вибрационной нагрузке. Действие произвольной нагрузки. Разложение движения системы по формам собственных колебаний как пример применения обобщенных координат. Определение амплитудных значений усилий и перемещений, вызванных динамической нагрузкой. Объемлющие эпюры усилий.

Учет сил сопротивления. Вынужденное смещение опорных закреплений. Понятие о расчёте сооружений на ветровые и сейсмические воздействия.

### **Тема 22. Колебания систем с бесконечно большим числом степеней свободы**

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с распределенной массой. Свободные колебания. Балочные функции. Понятие об общем случае действия возмущающей нагрузки. Решение в форме метода начальных параметров для случая гармонического воздействия.

Расчёт статически неопределимых рам с распределенными массами на вибрационную нагрузку. Определение частот и форм собственных колебаний. Понятие о расчёте балок на действие подвижной нагрузки.

Программные комплексы для определения амплитудных значений усилий и перемещений, вызванных динамической нагрузкой.

### **Тема 23. Приближенные и численные методы в динамике сооружений**

Приближенные методы определения частот свободных колебаний. Энергетический метод. Замена распределенных масс сосредоточенными. Использование численных методов в задачах динамики стержневых систем.

Применение программных комплексов.

### **Тема 24. Методы исследования устойчивости упругих систем**

Устойчивые и неустойчивые состояния равновесия деформируемых систем. Устойчивость системы "в малом" и "в большом". Кривая множества состояний равновесия сооружения. Понятие о критической нагрузке. Точки ветвления и предельные точки.



Основные гипотезы и допущения. Критерии и методы исследования устойчивости упругих систем: динамический, статический и энергетический. (Качественная теория.) Устойчивость идеализированных систем с одной и несколькими степенями свободы. Понятие об устойчивости систем при действии нагрузки, зависящей от нескольких параметров.

### Тема 25. Устойчивость прямых сжатых стержней

Устойчивость сжатого стержня постоянного сечения. Использование точного и приближенного выражения для кривизны стержня. Устойчивость стержней с упругими опорами. Устойчивость сжато-изогнутых стержней.

### Тема 26. Устойчивость стержневых систем

Основные допущения. Метод перемещений. Вычисление реакций сжато-изогнутых стержней. Уравнение устойчивости и определение критической нагрузки. Качественное исследование устойчивости равновесия. Использование симметрии. Понятие о расчёте упругих рамных систем по деформированному состоянию методами последовательных нагружений и последовательных приближений. Понятие о кривой множества состояний равновесия. Понятие о применении метода сил к исследованию устойчивости стержневых систем. Особенности расчёта на устойчивость ферм, неразрезных сжатых стержней на жестких и упругих опорах, арок и круговых колец.

### Учебно-методическая карта учебной дисциплины

| Номер раздела, темы, занятия | Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов                                 | Количество аудиторных часов |                      | Форма контроля знаний |
|------------------------------|--|-----------------------------|----------------------|-----------------------|
|                              |  | Лекции                      | практические занятия |                       |
| 1                            | 2  | 3                           | 4                    | 5                     |
| <b>4 семестр</b>             |  |                             |                      |                       |
| 1                            | Общие положения и понятия строительной механики  | 4                           | 2                    |                       |
| 2.                           | Основные свойства статически определимых систем и методы их расчёта при неподвижной нагрузке | 4                           | 2                    |                       |
| 3.                           | Определение усилий от подвижной нагрузки   | 8                           | 2                    |                       |
| 4                            | Расчёт трехшарнирных арок и рам  | 6                           | 4                    |                       |
| 5                            | Расчёт плоских ферм  | 6                           | 4                    |                       |
| 6                            | Расчёт распорных ферм и комбинированных систем   | 4                           | 4                    |                       |
| 7                            | Основные теоремы строительной механики и определение перемещений                             | 6                           | 4                    |                       |

|     |   |     |    |         |
|-----|---|-----|----|---------|
| 8   | Метод сил и его применение к расчёту плоских рам  | 6   | 4  |         |
| 9   | Расчёт неразрезных балок методом сил  | 2   | 2  |         |
| 10  | Расчёт статически неопределимых ферм методом сил  | 2   | 2  |         |
| 11  | Расчёт методом сил статически неопределимых арок, висячих и комбинированных систем  | 3   | 4  |         |
|     | Итого за семестр  | 51  | 34 | экзамен |
|     | <b>5 семестр</b>  |     |    |         |
| 12  | Метод перемещений и его применение к расчёту плоских рам  | 8   | 8  |         |
| 13  | Совместное применение метода сил и метода перемещений. Смешанный метод  | 2   | 4  |         |
| 14  | Особенности применения метода перемещений к расчёту неразрезных балок, статически неопределимых ферм, арок и комбинированных систем | 2   | 2  |         |
| 15  | Особенности расчёта пространственных систем   | 2   | 4  |         |
| 16  | Общие уравнения строительной механики стержневых систем   | 8   | 8  |         |
| 17  | Вариационные принципы и вариационные методы строительной механики. Метод конечных элементов   | 6   | 4  |         |
| 18  | Основы расчёта стержневых систем по несущей способности   | 2   | 2  |         |
| 19  | Основные понятия динамики сооружений  | 2   | 2  |         |
| 320 | Колебания систем с одной степенью свободы   | 2   | 2  |         |
| 21  | Колебания систем с несколькими степенями свободы  | 4   | 4  |         |
| 22  | Колебания систем с бесконечно большим числом степеней свободы   | 2   | 2  |         |
| 23  | Приближенные и численные методы в динамике сооружений   | 2   | 2  |         |
| 24  | Методы исследования устойчивости упругих систем   | 2   | 1  |         |
| 25  | Устойчивость прямых сжатых стержней   | 2   | 2  |         |
| 26  | Устойчивость стержневых систем  | 5   | 4  |         |
|     | Итого за семестр  | 51  | 51 | экзамен |
|     | Всего аудиторных часов  | 187 |    |         |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

#### 1. Основная литература

- 1.1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
- 1.2. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.
- 1.3. Сидорович, Е.М. Динамика и устойчивость сооружений. Численные методы решения задач: учебное пособие / Е.М.Сидорович. – Минск: БНТУ, 2006. – 246 с.
- 1.4. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. Под ред. А.Ф. Смирнова. - М.: Стройиздат, 1981.- 512 с.
- 1.5. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: Учебник для вузов / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. Под ред. А.Ф. Смирнова. - М.: Стройиздат, 1983.- 488 с.
- 1.6. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. Под ред. А.Ф. Смирнова. - М.: Стройиздат, 1984.- 416 с.
- 1.7. Дарков, А.В. Строительная механика: Учебник для вузов. / А. В. Дарков, Н.Н. Шапошников. - М.: Высшая школа, 1986.- 607 с.
- 1.8. Леонтьев, Н. Н. Основы строительной механики стержневых систем: Учебник для вузов / Н.Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А.А. Амосов. - М.: Изд-во АСВ, 1996. - 541 с.
- 1.9. Строительная механика. Основы теории с примерами расчётов: Учебник для вузов / А. Е. Саргсян, А. Т. Демченко, Н. В. Дворянчиков, Г. А. Джинчвелашвили. Под ред. А. Е. Саргсяна. - М.: Высш. шк., 2000. - 416 с.
- 1.10. Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем: учеб. пособие / А. В. Яровая; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2013. - 447 с.
- 1.11. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. - М.: Высшая школа, 1991.- 439 с.
- 1.12. Чирас, А.А. Строительная механика: Теория и алгоритмы / А.А. Чирас. - М.: Стройиздат, 1989г. - 255 с.
- 1.13. Строительная механика / Под ред. А.В. Даркова. - М.: Высшая школа, 1976. -
- 1.14. Киселев, В.А. Строительная механика / В.А.Киселев. - М.: Стройиздат, 1976.- 511 с.
- 1.15. Киселев, В.А. Строительная механика (специальный курс) / В.А.Киселев.- М.: Стройиздат, 1969. - 432 с.
- 1.16. Рабинович, И.М. Основы строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. - М.: Госстройиздат, 1960. - 520 с.
- 1.17. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. - М.: Высшая школа, 1987. - 264 с.
- 1.18. Довнар, Е.П. Строительная механика / Е.П. Довнар, Л.И. Коршун. - Мн.: Вышэйшая школа, 1986. - 310 с.
- 1.19. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем / Под ред. Г.К.Клейна.- М.: Высшая школа, 1980. - 384 с.
- 1.20. Клейн, Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г.К. Клейн, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. - М.: Высшая школа, 1972. - 320 с.

1.21. Селюков, В. М. Расчётно-проектировочные работы по строительной механике / В.М. Селюков. - Мн.: Вышэйшая школа, 1989. - 205 с.

## **2. Дополнительная литература**

2.1. Смирнов, В. А. Строительная механика: Учебник для вузов / В.А. Смирнов, С.А. Иванов, М. А., Тихонов. - М.: Стройиздат, 1984. - 208 с.

2.2. Снитко Н.К. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1980. -431с.

2.3. Кузьмин Н. Л. Сборник задач по курсу строительной механики / Н.Л. Кузьмин, В.Г. Рекач, Г.И. Розенблат. - М.: Госстройиздат, 1962. - 332 с.

2.4. Строительная механика в примерах и задачах / Под ред. В.А.Киселева. М.: Стройиздат, 1986. -387с.

2.5. Расчёт сооружений с применением вычислительных машин / Под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздаат, 1964. - 380 с.

2.6. Справочник проектировщика. Расчётно-теоретический. В 2-х кн. -Кн.1. - М.: Стройиздат,1972. - 600 с. - Кн. 2. - М.: Стройиздат, 1973. - 416 с.

2.7. Строительная механика.: Учебник для вузов / Под ред. Ю.И. Бутенко. - К.: Вища школа, 1989. - 479 с.

2.8. Строительная механика.: Программы и решения задач на ЭВМ: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.А. Чираса. -М.: Стройиздат, 1990. -360с.

2.9. Раевский, А.Н. Основы расчёта сооружений на устойчивость / А.Н. Раевский. - М.: Высшая школа, 1962. - 160 с.

2.10. Довнар, Е.П. Расчёт рам на статические и динамические нагрузки: учебное пособие / Е.П.Довнар, Л.Б. Климова. – Минск: БНТУ, 2005. – 208 с.

2.11. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. - М., 576 с.

2.12. Безухов Н.И. Сборник задач по теории упругости и пластичности. Гос. издательство технико-теоретической литературы. М.,286 с.

## **3. Компьютерные программы**

При выполнении расчётно-проектировочных (курсовых) работ и проведении практических занятий рекомендуется использовать имеющиеся в наличии программные комплексы, специализированные или общего назначения: "ЛИРА", "МИРАЖ", "СТАРК-МИФРА", "ANSYS", "COSMOS/M", "EUROSTAT", "SIMCENTER FEMAP with NASTRAN", "MSC/NASTRAN", "ORION", "SCAD", "AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS" и другие.