1995. Т. 31, № 12. С. 1989 — 1995

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ УСПОКАИВАЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

А. В. Метельский

Введение. Пусть линейная автономная дифференциально-разностная система управления (обозначим ее Σ) имеет соизмеримые запаздывания, кратные числу $\omega > 0$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - i\omega) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in H^- = [-h, 0], \quad h = m\omega, \tag{2}$$

$$y(t) = Gx(t), \quad t \in T = [0, t_1]. \tag{3}$$

Здесь x — n-вектор (столбец) решения уравнения (1) $(n \geq 2)$; y — l-вектор измеряемых величин (выход) $(l \geq 1)$; u — r-вектор входных воздействий (управление) $(r \geq 1)$; $0 < t_1$ — фиксированный момент времени; A, A_i, B, G — постоянные матрицы подходящих размеров, причем $A_m \neq 0$. В качестве начальных функций η будем брать элементы банахова пространства непрерывных n-вектор-функций $C = C(H^-, \mathbb{R}^n)$. Будем считать, что управление $u \in \bar{C}$, где $\bar{C} = \bar{C}(T, \mathbb{R}^r)$ — линейное многообразие кусочно-непрерывных функций.

Пусть $x(t)$, $t \in T$, — решение уравнения (1) с начальной функцией η и управлением u. Под состоянием системы Σ в момент времени $t \geq 0$ будем понимать [1, 2] функцию $x_t = x_t(\tau) = x(t+\tau)$, $\tau \in H^-$. Набор данных $\bar{x}_t = \{x(t), \sum_{i=k+1}^{m} A_i x(\tau - i\omega),\ t + k\omega < \tau \leq t + (k+1)\omega,\ k = \overline{0, m-1}\}$ назовем s-состоянием системы Σ в момент времени $t \geq 0$. Чтобы подчеркнуть, что состояние или s-состояние отвечает начальной функции η, будем писать $x_{t,\eta}$ или $\bar{x}_{t,\eta}$.

Задача успокоения системы Σ, называемая также задачей полной управляемости, доложена Н. Н. Красовским [3] в 1963 г. на II конгрессе ИФАК. Она заключается в том, чтобы из любого начального состояния привести траекторию системы Σ в начало координат и удержать ее там в течение времени последействия.

Определение 1. Начальное состояние $\eta \in C$ системы Σ назовем [4] управляемым, если существует управление $u \in \bar{C}$ такое, что s-состояние системы Σ в момент времени t_1 обращается в нуль

$$\bar{x}_{t_1,\eta} = 0. \tag{4}$$

Система Σ называется управляемой, когда управляемы все начальные состояния $\eta \in C$.

Управление, обеспечивающее равенство (4), назовем успокаивающим. Если $\bar{x}_{t_1,\eta} = 0$, то при $u(t) = 0$, $t > t_1$, в силу уравнения (1) решение $x(t) = 0$, $t \geq t_1$.

Впервые проблема полной управляемости исследовалась Н. Н. Красовским [5] для автономного объекта Σ второго порядка $(n = 2)$ в предположении, что $\det A_1 \neq 0$, $\operatorname{rank}[B, A_1 B] = 2$. Основная идея упомянутой работы состоит в сведении задачи полной управляемости к проблеме моментов. Этот подход был затем развит в монографии [6]. Указанная задача рассматривалась также А. Б. Куржанским [7]. Применение результатов приведенных работ связано с проверкой линейной независимости некоторого набора функций. В случае системы Σ с "чистым" запаздыванием $(A = 0)$ Ф. М. Кирилловой и С. В. Чураковой доказано [2], что

Согласно одному из условий теоремы, включения (2.8), (2.10) гарантируют выполнение неравенства (2.4). С другой стороны, если положим $u(t) = \rho_H(x-y)(t)$ при $0 \le t \le a_0$, то согласно (2.5), из (2.7) и (2.9) найдем

$$\|H^{-1}(t)(x(t)-y(t))\| \le \omega(u)(t) \text{ при } 0 \le t \le a_0. \tag{2.11}$$

Ввиду условий $\delta \in M^+([0,a])$ и $\omega(u) \in M^+([0,a])$ из (2.4) и (2.11) вытекает, что $u \in \in M_\delta^+([0,a])$ является решением функционального неравенства (2.6). Поэтому $u(t) \equiv 0$, т.е. $y(t) \equiv x(t)$. Тем самым единственность решения x доказана.

Для завершения доказательства теоремы нам остается установить, что

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(t) = x(t) \text{ равномерно на } [0,a_0], \tag{2.12}$$

где $(x_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность, заданная равенствами (1.9).

С учетом (2.1) и (2.2) по индукции докажем, что

$$x_k \in C^{k_0}_{c_0,r,f}([0,a_0];\mathbb{R}^n) \quad (k = k_0, k_0+1, \ldots). \tag{2.13}$$

Положим

$$z_k(0) = 0, \quad z_k(t) = H^{-1}(t)(x(t) - x_k(t)) \text{ при } 0 < t \le a_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.14}$$

Тогда ввиду (1.9) и (2.7) будем иметь

$$z_k(0) = 0, \quad z_k(t) = H^{-1}(t)\int_0^t [f(x)(s) - f(x_{k-1})(s)]\, ds \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если наряду с этим примем во внимание условия (2.4), (2.5), (2.7) и (2.13), то при $0 \le t \le a_0$ и $k = k_0+1, k_0+2, \ldots$ найдем

$$\|z_k(t)\| \le \delta(t), \tag{2.15}$$

$$\|z_k(t)\| \le \omega(u_{k-1})(t), \tag{2.16}$$

где

$$u_k(t) = \max\{\|z_k(s)\| : 0 \le s \le t\} \text{ при } 0 \le t \le a_0. \tag{2.17}$$

В силу условий $\delta \in M^+([0,a])$ и $\omega(u_{k-1}) \in M^+([0,a])$ из (2.15)—(2.17) вытекает, что при $0 \le t \le a_0$ и $k \ge 2$ справедливы неравенства

$$u_k(t) \le \delta(t), \tag{2.18}$$

$$u_k(t) \le \omega(u_{k-1})(t). \tag{2.19}$$

Из (2.1), (2.2) и (2.13) следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$. Если наряду с этим учтем непрерывность матричной функции $H :]0,a] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и условия (2.3), (2.14), (2.15), (2.17), станет ясным равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности $(u_k)_{k=1}^\infty$. Поэтому $\lim\limits_{k\to+\infty} \sup u_k(t) = u(t)$ равномерно на $[0,a_0]$, где $u \in M^+([0,a_0])$. В силу этого обстоятельства из (2.18) и (2.19) заключим, что $u \in M_\delta^+([0,a_0])$ и является решением функционального неравенства (2.6), поэтому $u(t) \equiv 0$. Тем самым доказали, что $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k(t) = 0$ равномерно на $[0,a_0]$. Отсюда, согласно (2.14) и (2.17), вытекает, что

$$\lim_{k\to+\infty} H^{-1}(t)\,\|x(t) - x_k(t)\| = 0 \text{ равномерно на }]0,a_0]. \tag{2.20}$$

С другой стороны, ввиду (2.1), (2.8) и (2.13) из (1.8) и (2.7) имеем

$$\|x(t) - x_k(t)\| \le 2\int_0^t f^*_{c_0,r}(s)\, ds \text{ при } 0 \le t \le a_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.21}$$

управляемых начальных состояний системы Σ обозначим $\mathrm{H}^c = \{\eta \in C \mid \exists u \in L_2 : \bar{x}_{t_1,\eta} = 0\}$. Подпространство $\mathrm{H}^c = \bar{Q}$ тогда и только тогда [15], когда $\bar{P}^{*0} = \bar{P}^*$, в противном случае $\mathrm{H}^c \supset \bar{Q}$.

Замечание 1. Из двойственности свойств c-идентифицируемости и c-управляемости и результатов работы [15] следует, что момент времени t_1 может быть взят один и тот же для всех $\eta \in \mathrm{H}^c$: $t_1 \geq 2(\alpha+1)nh$, $\alpha = nm$.

Дифференциальное соотношение для системы управления. Рассмотрим матрицу $\lambda E - A$ и присоединенную к ней матрицу $D(\lambda)$: $D(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - A)D(\lambda) = \Delta(\lambda)E$, где $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Из теории матриц известно, что $D(\lambda) = D_0\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \ldots$ $\ldots + D_{n-1}$, $D_0 = E$, $D_k = A^k - r_1A^{k-1} - \ldots - r_kE$, $k = \overline{1, n-1}$, $r_k = k^{-1}\mathrm{Sp}(AD_{k-1})$, где $\mathrm{Sp}M$ — след матрицы M.

Считая начальную функцию η и управление u достаточно гладкими, из уравнения (1) имеем $(p = d/dt)$ $\Delta(p)x(t) = D(p)\sum\limits_{i=1}^{m} A_i x(t - i\omega) + D(p)Bu(t)$, $t \geq 0$. Кроме того, $\Delta(p)x(t - i\omega) = \Delta(p)x(t - i\omega)$, $i = \overline{1, m-1}$, $t \geq 0$.

Обозначим $X(t) = \mathrm{col}\,[x(t), x(t-\omega), \ldots, x(t-(m-1)\omega)]$, $t \geq -\omega$,

$$k(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda)A_1 \quad D(\lambda)A_2 \quad \ldots \quad D(\lambda)A_{m-1} & D(\lambda)A_m \\ \mathrm{diag}[\Delta(\lambda)E,\ \Delta(\lambda)E,\ \ldots,\ \Delta(\lambda)E] & 0 \end{bmatrix}$$

— $(\alpha \times \alpha)$-матрица, $\bar{B} = \mathrm{col}\,[D(\lambda)B,\ 0,\ \ldots,\ 0]$, запишем приведенные соотношения в матричном виде

$$\Delta(p)X(t) = k(p)X(t-\omega) + \bar{B}u(t), \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Скалярный оператор $\Delta(p)$ перестановочен с оператором $k(p)$. Учитывая это, применим оператор $\Delta(p)$ к уравнению (10) $m-1$ раз: $\Delta^m(p)X(t) = k^m(p)X(t-h) + \sum\limits_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i}(p)\bar{B}u(t - i\omega)$, $t \geq (m-1)\omega$. Вводя обозначения: $K(p) = k^m(p)$, $G(p) = [k^{m-1}(p)\bar{B},\ \ldots,\ k(p)\bar{B},\ \bar{B}]$, $U(t) = \mathrm{col}\,[u(t),\ \ldots,\ u(t-(m-1)\omega)]$, получим $\Delta^m(p)X(t) = K(p)X(t-h) + G(p)U(t)$, $t \geq (m-1)\omega$.

Отсюда $\Delta^{mi}(p)X(t) = K^i(p)X(t-ih) + \sum\limits_{j=0}^{i-1} K^j(p)G(p)\Delta^{m(i-1-j)}(p)U(t-jh)$, $t \geq ih - \omega$, $i = 1, 2, \ldots$ Заменяя переменную $t - ih = \tau$, имеем формулу $\Delta^{mi}(p)X(\tau + ih) = K^i(p)X(\tau) + \sum\limits_{j=0}^{i-1} K^j(p)G(p)\Delta^{m(i-1-j)}(p)U(\tau + (i-j)h)$, $\tau \in [t_0 - \omega, t_0]$, $t_0 \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$

Итак, доказана

Лемма 1. *Если управляющие воздействия* $U(\tau + jh)$, $j = \overline{1, k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\tau \in [t_0 - \omega, t_0]$, $t_0 \geq \alpha(k+1)h$, $\mu = \alpha(k+m-1)$ *раз непрерывно дифференцируемы и* $U(\tau + (k+1)h) = 0$, $\tau \in [t_0 - \omega, t_0]$, *то имеет место равенство*

$$\Delta^{m(k+1)}(p)X(\tau + (k+1)h) = K^{k+1}(p)X(\tau) + \sum_{j=1}^{k} K^j(p)G(p)\Delta^{m(k-j)}(p) \times$$
$$\times U(\tau + (k+1-j)h), \quad \tau \in [t_0 - \omega, t_0], \quad t_0 \geq 0. \tag{11}$$

Формула (11) связывает текущее состояние x_{t_1+h} системы Σ с начальным состоянием x_{t_0} и управлением $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + kh$.

Граничные условия для успокаивающего управления. Будем искать успокаивающее управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющее условиям леммы 1.

Пусть [16] $(n \times n)$-матричная функция $F(t)$ удовлетворяет задаче Коши $\dot{F}(t) = F(t)A + \sum\limits_{i=1}^{m} F(t - i\omega)A_i$, $t > 0$; $F(t) \equiv 0$, $t < 0$; $F(0) = E$. Обозначим

$$x^{\eta}(t) = F(t)\eta(0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} F(t - i\omega - \tau)A_i\eta(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \quad v(t) = \int_{t_0}^{t} F(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Согласно монографии [16], решение уравнения (1) можно записать в виде $x(t) = x^{\eta}(t) + v(t)$, $t \geq 0$. Получим формулу для вычисления скачков $\delta v^{(s)}(t) = v^{(s)}(t+0) - v^{(s)}(t-0)$ производных функции $v(t)$ в точках $t^* = t_0 + k\omega$, $k = 0, 1, \ldots$, считая $u(t) = 0$, $t < t_0$. Для этого введем определяющее уравнение, предложенное Ф. М. Кирилловой и С. В. Чураковой [2]: $Q_{k+1}(t) = AQ_k(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i Q_k(t - i\omega)$, где $Q_k(t)$ — $(n \times n)$-матрицы (k — целое число, $t \in \mathbb{R}$): $Q_k(t) = 0$, $k < 0 \vee t < 0$; $Q_0(0) = E$.

Лемма 2. *Имеет место равенство* $\delta v^{(s)}(t^*) = \sum\limits_{j=1}^{s} \sum\limits_{i=0}^{k} Q_{j-1}(i\omega) B \delta u^{(s-j)}(t_0 + (k-i)\omega)$, $t^* = t_0 + k\omega$, $k = 0, 1, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть $t = t^* + 0$, тогда $v(t) = \int\limits_{t-w}^{t} + \int\limits_{t-2w}^{t-w} + \ldots + \int\limits_{t_0}^{t-kw} F(t-\tau) B u(\tau) d\tau$. Отсюда

$$\dot{v}(t^* + 0) = \sum_{i=0}^{k} \delta F(i\omega) B u(t^* - i\omega + 0) + \int_{t_0}^{t} \dot{F}(t-\tau) B u(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} Q_0(i\omega) B u(t^* - i\omega + 0) + \int_{t_0}^{t} \dot{F}(t-\tau) B u(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Аналогично получаем при $t = t^* - 0$

$$\dot{v}(t^* - 0) = \sum_{i=0}^{k-1} \delta F(i\omega) B u(t^* - i\omega - 0) + \int_{t_0}^{t} \dot{F}(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} Q_0(i\omega) B u(t^* - i\omega - 0) + \int_{t_0}^{t} \dot{F}(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

поскольку $u(t^* - k\omega - 0) = u(t_0 - 0) = 0$.

Вычитая почленно из равенства (12) равенство (13), имеем $\delta \dot{v}(t^*) = \sum\limits_{i=0}^{k} Q_0(i\omega) B \delta u(t^* - i\omega)$, $k = 0, 1, \ldots$ При $s = 1$ требуемая формула доказана. Таким же образом, последовательно дифференцируя и вычитая те же равенства (12), (13), индукцией по s убеждаемся в справедливости леммы. Лемма доказана.

Замечание 2. В доказанной формуле проще сразу вычислять $Q_{j-1}(i\omega)B$, а не матрицы $Q_{j-1}(i\omega)$. Кроме того [2], $Q_{j-1}(i\omega) = 0$, если $i > m(j-1)$.

Граничная задача для нахождения успокаивающего управления. Пусть $\hat{\Psi}$ — базис обобщенного собственного пространства $\hat{P}^*$ системы Σ^*, связанного со спектральным набором $\Lambda_A = \{\lambda \in \Lambda | \Delta(\lambda) = 0\}$; z_{ξ}^{0*} — состояние, достижимое системой Σ^* в момент времени $t = 0$ из начальной функции $\xi^* \in \hat{\Psi}$; v_{ξ}^* — выход системы Σ^*, порожденный той же функцией; $t_1 \geq (\nu + k)h$, $\mu = \alpha(k + m - 1)$, $\nu = \alpha(k+1)$, k — произвольное натуральное число.

Как следует из равенства (9), подпространство H^c управляемых начальных состояний системы Σ (см. теорему 1) инвариантно относительно оператора сдвига $S(t) : \eta \to x_{t,\eta}$, $t \geq 0$, по траекториям уравнения (1) $(u = 0)$. Поэтому успокаивающее управление можно искать, полагая $u(t) = 0$, $t < t_0 = t_1 - kh$. Здесь $t_0 \geq \alpha(k+1)h$, что гарантирует гладкость состояния $x_{t_0} = (X(\tau),\ \tau \in [t_0 - \omega, t_0])$, требуемую в формулировке леммы 1.

Теорема 3. *Для того чтобы μ раз кусочно-дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in [t_1 - kh, t_1]$, $t \neq t_0 + i\omega$, $i = \overline{0, km}$, равное нулю вне указанного отрезка, было успокаивающим для начального состояния $\eta \in C$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло граничной задаче*

$$K^{k+1}(p) X(\tau) + \sum_{j=1}^{k} K^{j}(p) G(p) \Delta^{m(k-j)}(p) U(\tau + (k+1-j)h) = 0, \quad \tau \in [t_0 - \omega, t_0], \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=q}^{km+q} Q_{j-1}(i\omega) B \delta u^{(s-j)}(t_0 + (km + q - i)\omega) = 0, \quad s = \overline{1, \nu}, \quad q = \overline{1, m}, \tag{15}$$

$$\int\limits_{t_1-kh}^{t_1} v_\xi^*(\tau)u(\tau)d\tau + (z_\xi^{0*}, \eta) = 0 \quad \forall z_\xi^{0*} \mid \xi^* \in \hat{\Psi}. \tag{16}$$

Доказательство. Необходимость. Если u — успокаивающее управление, то $x_{t_2} = 0$, $t_2 = t_1 + h$, поэтому в формуле (11) $\Delta^{m(k+1)}(p)X(\tau+(k+1)h) = 0$. В силу леммы 1 должно выполняться равенство (14).

Если $x_{t_2} = 0$, то матрица $V_{t_2}^\nu = [\delta v^{(s)}(t) \mid t \in (t_2 - h, t_2],\ s = \overline{1,\nu}]$ скачков производных функции $v(t) = x_{t_2} - x_{t_2}^\eta$ должна быть нулевой: $\delta v^{(s)}(t_0 + kh + q\omega) = \delta v^{(s)}(t_0 + (km + q)\omega) = 0$, $s = \overline{1,\nu}$, $q = \overline{1,m}$. В силу леммы 2 получаем

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=0}^{km+q} Q_{j-1}(i\omega)B\delta u^{(s-j)}(t_0 + (km + q - i)\omega) = 0, \quad s = \overline{1,\nu}, \quad q = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Так как $\delta u^{(s)}(t_0 + (km + q - i)\omega) = 0$, если $km + q - i > km$, то граничные условия (17) принимают вид (15). Условие (16) вытекает из равенства (9), где s-состояние $\bar{x}_{t_1} = 0$, ввиду того, что функция $x_{t_2} = 0$.

Достаточность. Пусть управление u удовлетворяет условиям теоремы. Докажем, что состояние $x_{t_2} = x_{t_2,\eta} = 0$ в силу уравнения (1).

Из равенства (14) и формулы (11) получаем, что $\Delta^{m(k+1)}(p)x_{t_2} = 0$. В то же время матрица $V_{t_2}^\nu$ скачков производных состояния x_{t_2} нулевая ввиду условия (15) и леммы 2. Следовательно [17], состояние $x_{t_2} \in \hat{P}$ — обобщенному собственному пространству системы Σ, связанному со спектральным набором Λ_A.

Условие (16) в силу (9) обеспечивает $(\hat{\Psi}, x_{t_1}) = 0$. Отсюда состояние $x_{t_2} \in \hat{Q}$ — подпространству, дополнительному к пространству $\hat{P}$. Поскольку $\hat{Q} \cap \hat{P} = \emptyset$, то состояние $x_{t_2} = 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Поскольку $u(t) = 0$, $t < t_0$, то в силу равенства (9) в условии (16) $(z_\xi^{0*}, \eta) = (z_\xi^{t_0*}, x_{t_0})$ $\forall z_\xi^{t_0*} \mid \xi^* \in \hat{\Psi}$.

Замечание 4. Требование управляемости начального состояния $\eta \in C$ (см. теорему 1) в формулировке теоремы 3 отсутствует, поскольку оно следует из условий (14) — (16). Это видно из доказательства теоремы 3.

Пример. Рассмотрим систему Σ с матрицами $(m = 1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Построим успокаивающее управление для начального состояния $\eta = \mathrm{col}[\eta^1,\ \eta^2] \in C$ как решение граничной задачи (14) — (16), где $k = 2$, $t_0 \geq 6h$.

Для системы (18) $\Delta(\lambda) = \lambda^2$, $D(\lambda) = \lambda E + A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $D(\lambda)A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Обозначим $x = \mathrm{col}[x^1,\ x^2]$ — решение системы (18), порождаемое начальной функцией η. Уравнение (14) примет вид

$$u^{(4)}(\tau + 2h) + u^{(3)}(\tau + h) + x^{1(3)}(\tau) = 0, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0]. \tag{19}$$

Запишем граничные условия (15):

$$u(t_0 + 2h - 0) = 0; \quad \dot{u}(t_0 + 2h - 0) - u(t_0 + h + 0) + u(t_0 + h - 0) = 0;$$

$$u^{(i)}(t_0 + 2h - 0) - u^{(i-1)}(t_0 + h + 0) + u^{(i-1)}(t_0 + h - 0) - u^{(i-2)}(t_0 + 0), \quad i = \overline{2,4}. \tag{20}$$

Вычисляем $\det W(\lambda) = \lambda(\lambda - \mu)$, $\mu = e^{-\lambda h}$. Следовательно, $\Lambda_A = \{0\}$, где $\lambda = 0$ — простой корень характеристического уравнения $\det W(\lambda) = 0$. Обобщенное собственное пространство $\hat{P}$ системы, сопряженной к (18), состоит из функций $\psi^* = [0,\ a]$, $a \in \mathbb{R}$. В качестве матрицы $\hat{\Psi}$ можно взять $[0,\ 1]$, тогда условие (16) ввиду замечания 3 имеет вид $x^2(t_0) = 0$.

Решая граничную задачу (19), (20), получаем управление

$$u(\tau+h): \quad \int\limits_{t_0-h}^{t_0} u(\tau+h)\,d\tau + \int\limits_{t_0-h}^{t_0} x^1(\tau)\,d\tau + x^1(t_0) = 0,$$

$$u(\tau+2h) = \int\limits_{\tau}^{t_0} x^1(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\tau}^{t_0} u(\tau+h)\,d\tau, \quad \tau \in [t_0-h, t_0], \tag{21}$$

которое будет успокаивающим для всякой функции $\eta \in C : \eta^2(0) = 0$ при любом $t_1 \geq 2h$, что легко проверить, подставляя (21) в (18).

Замечание 5. Рассмотренный пример показывает, что в теореме 3 предположение о μ-кратной кусочной дифференцируемости успокаивающего управления связано лишь с формой записи граничной задачи для его отыскания. Проинтегрировав задачу (14) — (16), получим выражение (см. (21)), определяющее необходимый порядок гладкости управляемого состояния x_{t_0}, $t_0 \geq 0$, и успокаивающего управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + kh]$.

Вычисление успокаивающего управления по выходному сигналу. Пусть множество $\Lambda_G = \{\lambda \in \Lambda \mid \operatorname{rank}[G', W'(\lambda)] < n\}$ (штрих обозначает операцию транспонирования матрицы) содержит конечное число значений λ. В этом случае система Σ c-идентифицируема (определение и критерий c-идентифицируемости см. в [15]). Через $\Delta_0(\lambda)$ обозначим базисный минор матрицы $K_n(\lambda) = \operatorname{col}[\bar G, \bar G K(\lambda), \ldots, \bar G K^{n-1}(\lambda)]$, где $\bar G = \operatorname{diag}[G, \ldots, G]$ — $(lm \times \alpha)$-матрица. Степень многочлена $\Delta_0(\lambda)$ есть $\alpha_0 \leq \alpha(n-1)$.

Пусть $Y(t) = \operatorname{col}[Gx(t), Gx(t-\omega), \ldots, Gx(t-(m-1)\omega)]$, $t \geq -\omega$. Умножая обе части равенства (11) при $u = 0$ на $\bar G$, имеем $\Delta^{mi}(p)Y(s+ih) = \bar G K^i(p)X(s)$, $s \in [t_0-\omega, t_0]$, $t_0 \geq 0$, $i = \overline{0, n-1}$. Если к обеим частям уравнения (14) применить дифференциальный оператор $d(p) = \Delta_0(p) \times \Delta^n(p)$ (см. [4]), то получим

$$K^{k+1}(p)\sum_{i=0}^{n-1} G_i(p)\Delta^{mi}(p)Y(\tau+(i-n)h) + \Delta_0(p)\Delta^{\alpha}(p)\sum_{j=1}^{k} K^j(p)G(p)\times$$

$$\times\Delta^{m(k-j)}(p)U(\tau+(k+1-j)h) = 0, \quad \tau \in [t_0-\omega, t_0], \tag{14'}$$

где $G_i(\lambda)$ — некоторые полиномиальные матрицы, $i = \overline{0, n-1}$.

Замечание 6. Применение оператора $d(p)$ к равенству (14) требует дополнительной гладкости состояния x_{t_0} и управления u. Условия теоремы 3 будут выполнены, если положить $t_1 \geq (2\alpha n + \alpha k + k)h$, $\mu = \alpha(k+m+2n-2)$, $\nu = \alpha(k+2n)$.

Как следует из доказательства теоремы 3, условия (14′), (15) ($\nu = \alpha(k+2n)$) дают включение $x_{t_2} \in \widetilde P$, где $\widetilde P$ — обобщенное собственное пространство системы Σ, связанное со спектральным набором $\widetilde\Lambda = \{\lambda \in \Lambda \mid \Delta_0(\lambda)\Delta(\lambda) = 0\}$.

Чтобы состояние $x_{t_2} = 0$, нужно обеспечить $x_{t_2} \in \widetilde Q$ ($\widetilde Q$ — подпространство, дополнительное к пространству $\widetilde P$). Поэтому условие (16) с учетом замечания 3 примет вид

$$\int\limits_{t_1-kh}^{t_1} v_\xi^*(\tau)u(\tau)d\tau + (z_\xi^{t_0*}, x_{t_0}) = 0 \quad \forall z_\xi^{t_0*} \mid \xi^* \in \widetilde\Psi. \tag{16'}$$

Следуя логике доказательства теоремы 3, получаем утверждение.

Теорема 4. *Пусть система Σ c-идентифицируема. Для того чтобы μ раз кусочно-дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in [t_1 - kh, t_1]$, $t \neq t_0 + i\omega$, $i = \overline{0, km}$, равное нулю вне указанного отрезка, было успокаивающим для начального состояния $\eta \in C$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло граничной задаче (14′), (15) ($\nu = \alpha(k+2n)$), (16′).*

Значения билинейной формы, фигурирующие в условии (16′), могут быть найдены по выходу $y(t)$, $t \in T_0 = [0, t_0]$. Необходимое и достаточное условие для этого $\operatorname{rank}[G', W'(\lambda)] = n$ при всех $\lambda \in \widetilde\Lambda$ [18]. Таким образом, теорема 4 позволяет находить успокаивающее управление только по измерениям выходного сигнала (3) при неизвестной начальной функции $\eta \in \mathrm{H}^c$.

Предположим, что система Σ управляема (см. условие (5)). Из теоремы 4 вытекает зависимость между наличием восстанавливающей операции (см. работу [15]) $L_{t_0} : (y(t), t \in T_0) \to$

$\to x_{t_0}$ и возможностью вычисления успокаивающего управления по прошлому выходу для произвольного начального состояния $\eta \in C$.

Следствие 1. *Вычисление успокаивающего управления* $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *по произвольному выходному сигналу* $y^0(t)$, $t \in T_0$, *равносильно построению восстанавливающей операции* L_{t_0}.

Доказательство. Предположим, что для начальной функции $\eta \in C$ найдено кусочно-гладкое успокаивающее управление u^0 ($u(t) = 0$, $t < t_0$) как функция выхода y^0. Тогда из формулы (9), где левая часть равна нулю, будем иметь $\int\limits_{t_0}^{t_1} v_\xi^*(\tau)u^0(\tau)d\tau + (z_\xi^{0*}, \eta) = 0$. Здесь v_ξ^* — выход сопряженной системы Σ^* с начальным состоянием $\xi^* \in C^*$, z_ξ^{0*} — состояние системы Σ^* в момент времени $t = 0$. В силу той же формулы (9) $(z_\xi^{0*}, \eta) = (z_\xi^{t_0*}, x_{t_0})$, $\xi^* \in C^*$.

В качестве функций $z_\xi^{t_0*}$ будем брать обобщенные собственные функции $\psi_\lambda^* \in \Psi_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Для всякой такой функции найдется [17] подходящее начальное состояние системы Σ^* $\xi^* = \xi^*(\psi)$, поэтому $(\psi_\lambda^*, x_{t_0}) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} v_\xi^*(\tau)u^0(\tau)d\tau$, $\psi_\lambda^* \in \Psi_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Используя эти равенства, находим [9] проекции неизвестного текущего состояния x_{t_0} на обобщенные собственные пространства P_λ, $\lambda \in \Lambda$, и на основании теоремы 6.5 из [16] записываем состояние x_{t_0} в виде предела равномерно сходящейся функциональной последовательности. С учетом того что успокаивающее управление u^0 есть функция выхода y^0, получим восстанавливающую операцию L_{t_0}.

Пусть известна операция L_{t_0}, отображающая прошлый выход y^0 на многообразие текущих состояний. Тогда, определив состояние x_{t_0}, вычислим значения билинейной формы, входящие в условие (16'). По теореме 4 получим успокаивающее управление u^0 как функцию выхода y^0. Следствие доказано.

Следствие 2. *Для того чтобы система* Σ *была управляема по измерениям выхода (3), необходимо и достаточно, чтобы она была управляема и идентифицируема [4, 15].*

Литература

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
2. *Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.* // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 436 — 445.
3. *Красовский Н. Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием: Тр. II Междунар. конгресса ИФАК. М., 1965. Т. 2. С. 201 — 210.
4. *Метельский А. В.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С. 972 — 984.
5. *Красовский Н. Н.* // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 5. С. 48 — 56.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., 1968.
7. *Куржанский А. Б.* // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 6. С. 1121 — 1124.
8. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
10. *Минюк С. А., Метельский А. В.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1977. № 4. С. 30 — 36.
11. *Hautus M. L. J.* // Proc. (K. Nederlandse akademie van Wetenshappen). Amsterdam. Ser. A. 1969. Vol. 72, N 5. P. 443 — 448.
12. *Марченко В. М.* // Problems of Control and Information Theory. 1979. Vol. 8, N 5 — 6. P. 421 — 432.
13. *Астровский А. И., Мулярчик В. В., Шкляр Б. Ш.* Управляемость и наблюдаемость систем с последействием в специальных классах функций. Минск, 1980. (Препринт/Ин-т математики АН БССР: 12 (92)).
14. *Шиманов С. Н.* // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102 — 116.
15. *Метельский А. В.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1962 — 1969.
16. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
17. *Метельский А. В.* // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, вып. 2. С. 103 — 140.
18. *Bhat K. P., Koivo H. N.* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1976. Vol. AC-21, N 2. P. 292 — 293.

Белорусская государственная политехническая академия

Поступила в редакцию 16 ноября 1994 г.