1994 г. март — апрель *т. 49, вып. 2(296)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.977

ПРОБЛЕМА ТОЧЕЧНОЙ ПОЛНОТЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ

А. В. Метельский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Задача относительной нуль-управляемости и понятие точечной полноты

1.1. Определение относительной нуль-управляемости. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ – нормированное векторное пространство из n упорядоченных действительных чисел; $H^- = [-h, 0], h > 0$; $C = C(H^-, \mathbb{R}^n)$ – банахово пространство непрерывных n-вектор-функций φ: $H^- \to \mathbb{R}^n$ с топологией равномерной сходимости: $\|\varphi\| = \max\limits_{\theta \in H^-} |\varphi(\theta)|$. Ниже изучаются динамические системы с запаздыванием, где число h обозначает время последействия. Элементы произвольного вектора считаем записанными в столбец. Штрих ($'$) везде определяет операцию транспонирования вектора или матрицы.

Пусть движение объекта управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой запаздывающего типа, которую будем называть системой Σ_1:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i) + Bu(t), \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

$$x(t) = \eta(t), \qquad t \in H^-, \tag{1.2}$$

$$y(t) = Gx(t), \qquad t \in T = [0, t_1]. \tag{1.3}$$

Здесь x – n-вектор (столбец) решения уравнения (1.1) ($n \geq 2$); y – l-вектор выходных величин (выход) ($l \geq 1$); u – r-вектор входных величин (управление) ($r \geq 1$); h_i – постоянные запаздывания: $0 < \omega = h_1 < \cdots < h_m = h$ (если $m = 1$, то $\omega = h_1 = h$); $0 < t_1$ – фиксированный момент времени; A, A_i, B, G – постоянные матрицы подходящих размеров, причем $A_m \neq 0$. Считаем, что начальная функция $\eta \in C$, управление $u \in \overline{C}$, где $\overline{C} = \overline{C}(T, \mathbb{R}^r)$ – множество кусочно-непрерывных функций.

Исследование Н.Н. Красовским [1] проблемы полной управляемости системы Σ_1 привело к задаче относительной нуль-управляемости [2], [3] этой системы.

Определение 1.1. Система Σ_1 называется относительно нуль-управляемой, если для произвольной начальной функции $\eta \in C$ существует управление $u \in \overline{C}$, для которого

$$x(t_1) = x(t_1, \eta, u) = 0, \tag{1.4}$$

в силу уравнения (1.1).

1.2. Неявное условие относительной нуль-управляемости. Запишем [2] решение уравнения (1.1) в форме Коши

$$
\begin{aligned}
x(t) = F(t)\eta(0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} F(t-h_i-\tau)A_i\eta(\tau)\,d\tau \\
+ \int_0^t F(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau, \qquad t>0,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где $n \times n$ – матричная функция $F(t)$ удовлетворяет уравнению

$$
\dot F(t) = F(t)A + \sum_{i=1}^{m} F(t-h_i)A_i, \qquad t>0,
\tag{1.6}
$$

и начальным условиям

$$
F(t) \equiv 0, \quad t<0; \quad F(0)=E.
\tag{1.7}
$$

Из формулы (1.5) видно, что всякое решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$
x(t) = x^{\eta}(t) + x^{u}(t), \qquad t \geq 0,
$$

где

$$
x^{\eta}(t) = F(t)\eta(0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} F(t-h_i-\tau)A_i\eta(\tau)\,d\tau
$$

– собственное движение системы Σ_1,

$$
x^{u}(t) = \int_0^t F(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau
$$

– возмущенное движение системы Σ_1.

Векторы $x^{\eta}(t_1)$, $x^{u}(t_1)$ можно рассмотреть как значения линейных ограниченных операторов

$$
F_1\eta = x^{\eta}(t_1), \qquad F_2 u = x^{u}(t_1),
$$

где $F_1 : C \to \mathbb{R}^n$, $F_2 : L_2(T,\mathbb{R}^r) \to \mathbb{R}^n$. Обозначим области значений этих операторов через X^{η} и X^{u} соответственно. Множества X^{η}, X^{u} – подпространства в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1.1. *Для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы $X^{\eta} \subseteq X^{u}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система Σ_1 относительно нуль-управляема. В силу условия (1.4) для произвольного вектора $x^{\eta}(t_1)$, $\eta \in C$, найдется управление $u \in \overline{C}$, при котором $x_{\eta}(t_1) = -x^{u}(t_1)$. Ввиду линейности уравнения (1.1) $x^{\eta}(t_1) = x^{-u}(t_1)$ для тех же η, u. Итак, имеет место включение $X^{\eta} \subseteq X^{u}$.

Достаточность. Последнее включение считаем выполненным. Это означает, что для любого вектора $x^{\eta}(t_1)$, $\eta \in C$, при некоторой функции $u \in \overline{C}$ осуществимо равенство: $x^{\eta}(t_1) = x^{u}(t_1)$. Отсюда $x(t_1,\eta,-u) = x^{\eta}(t_1) + x^{-u}(t_1) = 0$ для той же начальной функции и управляющего воздействия $-u$. Согласно определению 1.1, система Σ_1 относительно нуль-управляема. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 достаточно, чтобы*

$$X^u = \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X^\eta \subseteq \mathbb{R}^n$, то ввиду условия (1.8) получаем: $X^\eta \subseteq X^u$. Из леммы 1.1 вытекает, что система Σ_1 относительно нуль-управляема. Следствие доказано.

1.3. Понятие точечной полноты. Условие (1.8) в силу леммы 1.1 будет и необходимо для относительной нуль-управляемости системы Σ_1, если $X^\eta = \mathbb{R}^n$, т.е. когда уравнение $F_1\eta = d$ разрешимо при любом $d \in \mathbb{R}^n$. Последнее означает, что концы всех собственных движений системы Σ_1 $\{x^\eta(t_1) \mid \eta \in C\}$ заполняют все пространство $\mathbb{R}^n$. Динамические системы, обладающие этим свойством при любом $t_1 > 0$, L. Weiss предложил [4] называть *точечно полными*. Таковы, например, системы, задаваемые обыкновенными дифференциальными уравнениями $\dot{x} = Ax$ с постоянными коэффициентами: каковы бы ни были $x^1 \in \mathbb{R}^n$, и $t_1 > 0$, существует начальный вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что соответствующее решение обладает свойством $x(t_1) = x^1$. Понятие точечной полноты системы (1.1) в фиксированный момент времени $t > 0$ ввели [5] R. B. Zmood и N. H. McClamroch.

Хотя до сих пор речь шла о системе Σ_1, возможно изучение свойства точечной полноты для системы более общего вида

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} [dM(\theta)]x_t(\theta), \qquad t > 0. \tag{1.9}$$

Здесь: $M(\theta), \theta \in H^-$ – $n\times n$-матрица ($n \geq 2$) с элементами ограниченной вариации непрерывными слева на $(-h, 0)$; $M(\theta) = 0, \theta \geq 0$; $M(\theta) = M(-h), \theta \leq -h$; $x(t) = x(t, \eta)$ – n-вектор ($n \geq 2$) решения уравнения (1.9) в момент времени t с начальной функцией η (см. выражение (1.2)). Под решением на отрезке T понимается [6] абсолютно непрерывная функция $x(t)$, $t \in T$, удовлетворяющая уравнению (1.9) почти всюду. Символом x_t, $t \in \mathbb{R}$ обозначена функция $x_t = (x_t(\theta) = x(t + \theta), \theta \in H^-)$, называемая [1], [2], [6]–[8] состоянием динамической системы (1.9) в момент времени $t \geq 0$.

Уравнение (1.9) называется [6] *функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа*. Уравнение (1.9) в комплексе с начальным условием (1.2) будем именовать системой Σ. Примем следующее определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Система Σ называется *точечно вырожденной в момент времени* $t_1 > 0$, если существует ненулевой вектор $g \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$g'x^\eta(t_1) = 0 \tag{1.10}$$

для всех начальных состояний (1.2). Вектор g называют вектором (направлением) вырождения системы Σ. Если такого вектора g не существует, то систему Σ называют точечно полной в момент времени t_1.

Наряду с понятием точечной полноты системы Σ или Σ_1, как равнозначное, будем употреблять понятие точечной полноты уравнения (1.9) или (1.1), задающего динамику системы.

Замечание 1.1. Как видно из определения 1.2, понятие точечной полноты системы Σ_1 связано со свойствами невозмущенного уравнения (1.1). Поэтому, говоря о точечной полноте системы Σ_1, предполагаем: $u = 0$ (в этом случае $x^\eta(t) = x(t)$, $t \geq 0$).

Пример 1.1. [9], [6]. Рассмотрим систему Σ_1, описываемую скалярными уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = 2y(t), \\ &\dot{y}(t) = -z(t) + x(t-1), \\ &\dot{z}(t) = 2y(t-1), \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Докажем точечную вырожденность системы (1.11) в направлении $g' = [1, -2, -1]$. В силу уравнений (1.11) производные $y^{(2)}(t) = 0$, $x^{(3)}(t) = 0$, если $t > 2$, т.е. переменная $x(t)$ – полином степени не выше второй, а переменная $y(t)$ – не выше первой. Поэтому для $t > 2$ верны равенства

$$y(t-1) - y(t) = -\dot{y}(t),$$
$$x(t) - x(t-1) = \frac{1}{2}(\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1)).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} g' \operatorname{col}[x, y, z](t) &= x(t) - 2y(t) - z(t) \\ &= x(t-1) + \frac{1}{2}(\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1)) - 2y(t) - z(t) \\ &= x(t-1) + (y(t) + y(t-1) - 2y(t)) - z(t) \\ &= x(t-1) - \dot{y}(t) - z(t) = 0, \qquad t \geq 2, \end{aligned}$$

в силу второго уравнения системы (1.11).

Для точечно вырожденных систем условие (1.8), вообще говоря, не является необходимым для относительной нуль-управляемости. Цель дальнейших рассуждений – описать подпространство векторов вырождения $\{g \in \mathbb{R}^n, g \neq 0 \mid g'x(t_1) = 0 \; \forall \eta \in C\}$ и тем самым дать критерий точечной полноты системы Σ_1, а затем сформулировать явный критерий относительной нуль-управляемости.

1.4. Краткая историческая справка. L. Weiss, первым исследовавший проблему точечной полноты, установил [4], что линейная неавтономная система с последействием может быть точечно вырожденной и предположил, что все автономные системы вида (1.1) с одним запаздыванием ($m = 1$) точечно полны. Для $n = 2$ эту гипотезу независимо подтвердили J. A. Yorke [10] и J. Kato. E. B. Lee, R. M. Brooks и K. Schmitt [11], В. Б. Колмановский [12] доказали точечную полноту системы Σ_1 ($m = 1$) при ограничениях: $\det A_1 \neq 0$ или $AA_1 = A_1 A$. Однако в дальнейшем V. M. Popov [9] и A. M. Зверкин [13] указали примеры точечно вырожденных автономных систем вида (1.1).

Проблема точечной полноты исследовалась многими авторами [4]–[6], [9]–[20]. V.M. Popov сформулировал [9] алгебраический критерий точечной вырожденности системы Σ_1 $(m = 1)$, в котором проблема точечной вырожденности заменяется проблемой существования решения системы матричных уравнений. R. B. Zmood и N. H. McClamroch получили [5] ранговый критерий точечной полноты системы Σ_1 $(m = 1)$, содержащий матричную экспоненту от матриц больших размеров, нежели порядок исходной системы. Оказалось [13], [18], что свойство точечной вырожденности является исключительным для системы Σ_1: при $m = 1$ система Σ_1 точечно полна почти при всех $h > 0$ [18]. А. М. Зверкин доказал [13] следующий интересный результат: если система Σ_1 $(m = 1)$ точечно вырождена, то ее характеристический квазиполином либо полином, либо содержит полиномиальный множитель. В дальнейшем этот результат на систему Σ_1 с соизмеримыми запаздываниями развил F. Kappel. С использованием теории модулей он, в частности, доказал [17], что в случае такой факторизации в системе Σ_1 может быть выделена подсистема с конечным спектром. Этот же результат и ряд новых по проблеме точечной вырожденности автономных систем, в том числе с частными производными, на базе теории определяющих уравнений [2] установлены В. В. Карпуком [19]. Два последних автора активно использовали аппарат целых функций. Основной результат здесь таков [16], [19]: для точечной вырожденности системы Σ_1 в направлении g необходимо и достаточно, чтобы функция $g'[\lambda E - A - \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i}]^{-1}$ была целой.

В связи с проблемой точечной полноты появились интересные постановки новых задач: о построении в обыкновенной системе $\dot{x} = Ax$ обратной связи с запаздыванием, обеспечивающей принадлежность всех траекторий замкнутой системы (1.1) $(u = 0)$ заданному подпространству в $\mathbb{R}^n$, начиная с некоторого (минимизируемого) момента времени [21], [22]; об управляемости в $\mathbb{R}^n$ систем с запаздыванием вида (1.1) по начальным условиям [23]–[25].

2. Элементы теории разложения. Функционально-дифференциальные системы с конечным спектром

2.1. Инфинитезимальный производящий оператор. Обобщенное собственное пространство. Приведем основные понятия теории разложения пространства состояний систем с последействием, заложенной С. Н. Шимановым [26] и J. Hale [6]. При этом будем придерживаться известной монографии J. Hale [6]. Попутно получим ряд вспомогательных результатов, необходимых в дальнейших рассуждениях.

Уравнение (1.9) задает [7] сильно непрерывную полугруппу ограниченных линейных преобразований $S(t)\colon C \to C$, действующих по формуле

$$x_{t,\varphi} = S(t)\varphi, \qquad t \geq 0.$$

Рассмотрим инфинитезимальный производящий оператор этой полугруппы. Последний определяется выражением

$$A\varphi = \lim_{t \to +0} \left\{ \frac{1}{t}[S(t)\varphi - \varphi] \right\}$$

при условии, что этот предел существует (по норме пространства C). Оператор A имеет плотную в C область определения $D(A)$, состоящую из непрерывно дифференцируемых на отрезке H^- функций таких, что

$$\left.\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \int_{-h}^{0} [dM(\theta)]\varphi(\theta).$$

Окончательно инфинитезимальный производящий оператор A семейства преобразований $S(t)$, $t \geq 0$, определенного уравнением (1.9), задается выражением

$$A\varphi(\tau) = \begin{cases} \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}, & \tau \in [-h, 0), \\ \int_{-h}^{0}[dM(\theta)]\varphi(\theta), & \tau = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для каждой функции $\varphi \in D(A)$

$$\frac{d}{dt}S(t)\varphi = S(t)A\varphi = AS(t)\varphi. \tag{2.2}$$

Спектр оператора A имеет лишь точечную часть, куда входят только те комплексные числа λ, при которых оператор $\lambda I - A$ (I – тождественный оператор) не имеет обратного. Эти числа, называемые *собственными значениями* оператора A, находятся как корни характеристического уравнения

$$\det W(\lambda) = 0, \qquad W(\lambda) = \lambda E - \int_{-h}^{0} e^{\lambda\theta}\, dM(\theta). \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda \in K$, K – множество комплексных чисел, E – единичная $n \times n$-матрица. Множество корней уравнения (2.3), называемое также *спектром* уравнения (1.9), обозначим Λ. Множество Λ конечно либо счетно [27].

Каждому $\lambda \in \Lambda$ соответствует [6] [26] обобщенное собственное пространство оператора A, определяемое как наименьшее подпростнсратво, содержащее все функции $\varphi \in C$, принадлежащие нуль-пространству оператора $(\lambda I - A)^i$ при некотором натуральном i. Обобщенное собственное пространство оператора A, обозначаемое $N_\lambda(A)$, совпадает со множеством функций вида

$$\varphi_\lambda(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{j+1}\frac{\theta^j}{j!}, \qquad \theta \in H^-, \tag{2.4}$$

где $\gamma_\lambda = \mathrm{col}[\gamma_1, \ldots, \gamma_k]$ – nk-вектор-столбец, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений:

$$M_k\gamma_\lambda = 0. \tag{2.5}$$

Постоянная $nk \times nk$-матрица $M_k = M_k(\lambda)$ задается формулой

$$M_k = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \ldots & W_k \\ 0 & W_1 & \ldots & W_{k-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & W_1 \end{bmatrix}, \qquad W_{j+1} = \frac{W^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{2.6}$$

Размерность пространства $N_\lambda(A)$ равна [6] алгебраической кратности собственного значения λ как нуля уравнения (2.3).

2.2. Вычисление обобщенных собственных функций. Пусть λ – собственное значение оператора A алгебраической кратности k. Рассмотрим вопрос о нахождении связанных с этим значением обобщенных собственных функций.

Теорема 1.1. *Если λ – собственное значение оператора A алгебраической кратности k, то степень квазиполиномов (2.4), входящих в обобщенное собственное пространство $N_\lambda(A)$, не превосходит $k-1$.*

Доказательство. Допустим противное: существует обобщенная собственная функция $\varphi_\lambda^{k_1}$ степени $k_1 > k-1$. Тогда вектор $\gamma_\lambda = \operatorname{col}[\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_1}]$, где коэффициент γ_{k_1} – ненулевой, удовлетворяет системе (2.5). Выделяя в ней $k_1 - 1$ векторных уравнений, начиная со второго, получим

$$M_{k_1-1}\operatorname{col}[\gamma_2, \ldots, \gamma_{k_1}] = 0.$$

Поэтому функция

$$\varphi_\lambda^{k_1-1}(\theta) = \sum_{j=0}^{k_1-2} \gamma_{j+2}\frac{\theta^j}{j!}e^{\lambda\theta}, \qquad \theta \in H^-,$$

также принадлежит обобщенному собственному пространству $N_\lambda(A)$.

По тем же причинам в обобщенное собственное пространство $N_\lambda(A)$ входят функции

$$\varphi_\lambda^{k_1-i}(\theta) = \sum_{j=0}^{k_1-i-1} \gamma_{j+i+1}\frac{\theta^j}{j!}e^{\lambda\theta}, \qquad i = \overline{2, k_1-1}, \quad \theta \in H^-,$$

если $k_1 \geq 3$. Функции $\varphi_\lambda^{k_1-i}$, $i = \overline{0, k_1-1}$, линейно независимы, т.к. старший коэффициент γ_{k_1} в каждой из них ненулевой. Это противоречит тому, что размерность обобщенного собственного пространства $N_\lambda(A)$ меньше, чем k_1. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *При построении обобщенного собственного пространства $N_\lambda(A)$ в системе (2.5) достаточно взять k равным алгебраической кратности собственного числа λ.*

Пример 2.1. Найдем обобщенное собственное пространство инфинитезимального производящего оператора системы (1.11), взятой в матричной форме

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(t-h), \qquad t > 0. \tag{2.7}$$

Записываем характеристическую матрицу и характеристическое уравнение

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -\mu & \lambda & 1 \\ 0 & -2\mu & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \mu = e^{-\lambda h},$$
$$\det W(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda\mu + 2\lambda\mu = \lambda^3 = 0.$$

Отсюда $\lambda = 0$ – единственный корень характеристического уравнения кратности 3. Таким образом, уравнение (2.7) имеет конечный спектр. Размерность обобщенного собственного пространства $N_\lambda(A)$ равна 3. Чтобы записать обобщенные собственные функции в явном виде, требуется решить алгебраическую систему (2.5), где ввиду следствия 2.1 можно взять $k = 3$.

Рассмотрим три последних уравнения системы (2.5), где

$$\gamma_\lambda = \mathrm{col}[\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \ldots, \gamma_{31}, \gamma_{32}, \gamma_{33}],$$

из которых имеем

$$\gamma_{32} = 0, \quad \gamma_{33} = \gamma_{31} = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Из уравнений 4–6 получаем

$$\gamma_{21} = c_2 + hc_1, \quad \gamma_{22} = \frac{c_1}{2}, \quad \gamma_{23} = c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Из первых трех уравнений находим

$$\gamma_{11} = c_3 + hc_2 + \frac{c_1}{2}(1 + h^2), \quad \gamma_{12} = \frac{c_1 + hc_1}{2},$$
$$\gamma_{13} = c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Все c_i – произвольные действительные числа.

Таким образом, обобщенное собственное пространство $N_\lambda(A)$ состоит из функций

$$\varphi_\lambda(\theta) = \sum_{j=0}^{2} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j}{j!}, \qquad \theta \in H^-,$$

с векторными коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, указанными выше.

Замечание 2.1. Как видно из данного примера, при решении алгебраической системы (2.5) достаточно решить k систем из n уравнений, имеющих один и тот же базисный минор.

2.3. Структура обобщенного собственного пространства. Исследуем структуру обобщенного собственного пространства оператора A, связанного с собственным значением λ кратности k.

Каждой обобщенной собственной функции φ_λ сопутствует набор векторных коэффициентов $\gamma_\lambda = \mathrm{col}[\gamma_1, \ldots, \gamma_k]$. Множество значений $\{\gamma_i\}$ произвольного вектора $\gamma_i, i = \overline{1,k}$, определяемое уравнением (2.5), – линейное многообразие в комплексном векторном пространстве K^n.

Лемма 2.1. *Имеют место следующие включения*

$$\{\gamma_k\} \subseteq \cdots \subseteq \{\gamma_1\}.$$

Доказательство. Если $k = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $k \geq 2$ и вектор $g \in K^n$ такой, что $g'\gamma_1 = 0$ для всех $\gamma_1 \in \{\gamma_1\}$. Возьмем nk-вектор-строку $\bar{g}' = [g', 0', \ldots, 0']$, где $0'$ – нулевая n-вектор-строка. Будем иметь $\bar{g}'\gamma_\lambda = 0$ для любого решения системы (2.5). Ввиду альтернативы Фредгольма для линейных алгебраических систем найдется nk-вектор-строка $v' = [v_1', \ldots, v_k']$ такая, что $v'M_k(\lambda) = \bar{g}'$. Отсюда в силу структуры матрицы $M_k(\lambda)$

$$[0', v_1', \ldots, v_{k-1}']M_k(\lambda) = [0', g', 0', \ldots, 0'].$$

Поэтому

$$[0', g', 0', \ldots, 0']\gamma_\lambda = g'\gamma_2 = 0$$

для любого решения системы (2.5). Аналогично доказывается, что $g'\gamma_i = 0$, $i = \overline{3, k}$, если $k \geq 3$. Лемма доказана.

Рассмотрим подпространство $K_\lambda \subseteq K^n$ всевозможных значений $\varphi_\lambda(\theta)$, $\theta \in H^-$, обобщенных собственных функций φ_λ.

Теорема 2.1. *Имеет место равенство* $K_\lambda = \{\gamma_1\}$.

Доказательство. Для произвольной функции $\varphi_\lambda \in N_\lambda(A)$ получаем $\varphi_\lambda(0) = \gamma_1$, поэтому $\{\gamma_1\} \subseteq K_\lambda$. С другой стороны, в силу леммы 2.1 и формулы (2.4) всякое значение $\varphi_\lambda(\theta)$, $\theta \in H^-$ есть линейная комбинация векторов из многообразия $\{\gamma_1\}$, т.е. $K_\lambda \subseteq \{\gamma_1\}$. Теорема доказана.

Обозначим через Γ_λ – $n \times \alpha_1$-матрицу ($\alpha_1 \leq n$), составленную из первых n строк фундаментальной системы решений алгебраического уравнения (2.5), где k – алгебраическая кратность собственного значения λ.

Следствие 2.2. *В качестве базиса подпространства* K_λ *можно взять столбцы матрицы* Γ_λ.

Пример 2.2. Запишем матрицу Γ_λ для уравнения (2.7). Многообразие $\{\gamma_1\}$ имеет вид

$$\left\{ \operatorname{col}\left[c_3 + hc_2 + \frac{c_1}{2}(1+h^2), \frac{c_1 + hc_1}{2}, c_3\right] \middle| c_i \in K^n, \quad i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Поочередно полагая одну из переменных, начиная с c_1, равной 1, а остальные 0, получаем, что

$$\Gamma_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{h^2+1}{2} & h & 1 \\ \frac{h}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если $h = 1$, то $\operatorname{rank}\Gamma_\lambda < 3$, т.е. множество K_λ – собственное подпространство векторного пространства K^n. В связи с возможностью такой ситуации выясним, при каком условии множество K_λ всех значений обобщенных собственных функций $\varphi_\lambda \in N_\lambda(A)$ образует собственное подпространство в K^n.

Лемма 2.2. *Пусть G – ненулевая $l \times n$-матрица. Для того чтобы $G\varphi = 0$ для всех обобщенных собственных функций $\varphi \in N_\lambda(A)$ оператора A необходимо и достаточно, чтобы имело место условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_k(\lambda) \\ G \quad 0\dots 0\end{bmatrix} = \operatorname{rank} M_k(\lambda), \tag{2.8}$$

где k – алгебраическая кратность собственного значения λ как нуля характеристического уравнения (2.3).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G\varphi = 0$ для любой функции $\varphi \in N_\lambda(A)$. В силу теоремы 2.1 необходимо, чтобы $G\gamma_1 = [G, 0, \dots, 0]\gamma_\lambda = 0$ для любого решения системы (2.5). Отсюда вытекает равенство (2.8).

Достаточность. Из условия (2.8) и альтернативы Фредгольма для линейных алгебраических уравнений следует, что $G\gamma_1 = 0$ для произвольного решения γ_λ системы (2.5). Если $k = 1$, то утверждение доказано. При $k > 1$ $G\gamma_i = 0$, $i = \overline{2, k}$ ввиду леммы 2.1. Таким образом, $G\varphi = 0$ для любой функции $\varphi \in N_\lambda(A)$. Лемма доказана.

2.4. Билинейная форма. Формально сопряженный оператор. Следуя [6], [26], введем билинейную форму

$$\begin{gathered}(\psi, \varphi) = \psi'(0)\varphi(0) - \int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi'(\tau-\theta)[dM(\theta)]\varphi(\tau)\,d\tau, \\ \varphi \in C, \quad \psi \in C^* = C(H^+, \mathbb{R}^n), \quad H^+ = [0, h].\end{gathered} \tag{2.9}$$

Рассмотрим оператор A^* формально сопряженный к оператору A относительно билинейной формы (2.9)

$$(\psi, A\varphi) = (A^*\psi, \varphi), \qquad \varphi \in D(A), \quad \psi \in D(A^*) \subset C^*.$$

Формально сопряженный оператор A^* имеет только точечный спектр, который совпадает со спектром Λ оператора A. Для всякого $\lambda \in \Lambda$ можно рассмотреть обобщенное собственное пространство $N_\lambda(A^*)$ оператора A^*, образованное из функций вида

$$\psi'_\lambda(s) = \sum_{j=1}^{k} \beta'_j \frac{(-s)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda s}, \qquad s \in H^+. \tag{2.10}$$

где $\beta' = [\beta'_1, \dots, \beta'_k]$ – nk-вектор-строка, удовлетворяющая соотношению $\beta' M_k = 0$. Пространство $N_\lambda(A^*)$, как и пространство $N_\lambda(A)$, конечномерно: $\dim N_\lambda(A^*) = k$, k – алгебраическая кратность собственного значения λ как корня характеристического уравнения (2.3).

Наряду с уравнением (1.9) рассмотрим формально сопряженное уравнение

$$\dot{z}'(\tau) = -\int_{-h}^{0} z'(\tau-\theta)\,dM(\theta), \qquad \tau < t_1, \quad t_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

с начальной функцией $\psi \in C^*$: $z(t_1 + s) = \psi(s)$, $s \in H^+$.

Обозначим через $z^t = (z^t(s) = z(t+s), s \in H^+)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Известно [6], что решения уравнений (1.9), (2.11) связаны тождеством

$$(z^t, x_t) \equiv \text{const}, \qquad t \in T = [0, t_1], \quad t_1 \geq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(2.12) \qquad \psi'(0)x(t_1) - \int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi'(\tau-\theta)[dM(\theta)]x_{t_1}(\tau)\,d\tau \\ = z'(0)\varphi(0) - \int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta} z'(\tau-\theta)[dM(\theta)]\varphi(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Замечание 2.2. Формулу (2.12) можно получить интегрированием по частям

$$\int_0^{t_1} dz'(\tau)x(\tau) + \int_0^{t_1} z'(\tau)\,dx(\tau) = z'(\tau)x(\tau)\Big|_0^{t_1},$$

не используя непрерывность начальных функций φ, ψ в нуле.

2.5. Разложение пространства состояний. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ рассмотрим линейную оболочку $P_\lambda \subset C$ собственных и присоединенных функций (2.4) оператора A, отвечающих собственному значению λ. Подпространство P_λ называют *обобщенным собственным пространством* уравнения (1.9), связанным с λ. Аналогично строится обобщенное собственное пространство $P_\lambda{}^*$ формально сопряженного уравнения (2.11), связанное с λ.

Обозначим: Λ_N – множество из N собственных значений $\lambda \in \Lambda$ уравнения (1.9); P, P^* – линейные оболочки пространств P_λ, $P_\lambda{}^*$, соответственно, $\lambda \in \Lambda_N$. Пусть Φ, Ψ – базисы конечномерных пространств P, P^* такие, что $(\Psi, \Phi) = E$.

Теорема 2.2. [6]. *Справедливо разложение пространства состояний уравнения* (1.9)

$$(2.13) \qquad C = P \oplus Q,$$

в прямую сумму обобщенного собственного пространства

$$P = \{\varphi \in C \mid \varphi = \Phi b,\ b \text{ - вектор-столбец}\}$$

и дополнительного подпространства

$$Q = \{\varphi \in C \mid (\Psi, \varphi) = 0\},$$

инвариантных относительно оператора сдвига $S(t)$ при всех $t \geq 0$.

Разложение (2.13) называют *разложением пространства C по спектральному набору Λ_N*. При этом операторы проектирования на подпространства P, Q имеют вид:

$$\varphi^P = \Phi(\Psi, \varphi), \qquad \varphi^Q = \varphi - \varphi^P, \qquad \varphi \in C.$$

Поскольку $AP \subseteq P$, то ввиду (2.1), (2.2) найдется постоянная матрица J, множество собственных значений которой совпадает с Λ_N, такая что $\dot{\Phi}(\theta) = \Phi(\theta)J$, $\theta \in H^-$. Отсюда

$$(2.14) \qquad \Phi(\theta) = \Phi(0)e^{J\theta}, \qquad \theta \in H^-,$$

$$(2.15) \qquad [S(t)\Phi](\theta) = \Phi(0)e^{J(t+\theta)}, \qquad \theta \in H^-.$$

Последнее выражение позволяет определить оператор сдвига $S(t)$ на обобщенном собственном пространстве P для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание 2.3. Чтобы подчеркнуть, что разложение пространства C взято по спектральному набору σ, составленному специальным образом, будем писать: P_σ, Q_σ и P^*_σ, Q^*_σ.

2.6. Оценка решения на дополнительном подпространстве. Для произвольного действительного числа β обозначим $\Lambda(\beta) = \{\, \lambda \in \Lambda \mid \operatorname{Re}\lambda \geq \beta \,\}$. Установлено [27], что множество $\Lambda(\beta)$ всегда конечно (в частности, может быть пусто).

Рассмотрим разложение

$$C = P_{\Lambda(\beta)} \oplus Q_{\Lambda(\beta)}, \tag{2.16}$$

тогда на дополнительном подпространстве $Q_{\Lambda(\beta)}$ справедлива [6] оценка

$$\left\|x_t^{Q_{\Lambda(\beta)}}\right\| \leq \left\|S(t)\eta^{Q_{\Lambda(\beta)}}\right\| \leq \theta e^{(\beta-\gamma)t}\left\|\eta^{Q_{\Lambda(\beta)}}\right\| \qquad \forall t \geq 0, \tag{2.17}$$

где θ, γ – положительные константы.

Уравнение (1.9) называют [27] уравнением с конечным спектром, если множество Λ конечно.

Теорема 2.3. *Если уравнение* (1.9) *имеет конечный спектр* Λ, *то при* $t \geq nh$ *состояние* $x_t \in P$ *– обобщенному собственному пространству уравнения* (1.9), *связанному с* $\Lambda_N = \Lambda$.

Доказательство. Известное доказательство [13], [27] этого факта использует преобразование Лапласа и аппарат целых функций. Сформулированный результат можно получить, опираясь на записанную выше оценку решения уравнения (1.9) на дополнительном подпространстве.

Рассмотрим разложение (2.13), где $\Lambda_N = \Lambda$. Тогда

$$x_t = x_t^P + x_t^Q, \qquad t \geq 0.$$

Докажем, что проекция состояния $x_t^Q = 0, t \geq nh$, для произвольной начальной функции $\eta \in C$.

Выберем число β_0 так, чтобы $\Lambda = \Lambda(\beta)$, если $\beta < \beta_0$. Это возможно ввиду конечности спектра уравнения (1.9). Умножим обе части (2.17) на $e^{\alpha t}$, где α – произвольное действительное число, и возьмем $\beta < \beta_0$, чтобы одновременно $\beta < -\alpha$. Тогда $e^{(\alpha+\beta-\gamma)t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Ввиду неравенства (2.17) x_t^Q стремится к нулю быстрее любой экспоненты. Значит [6], $x_t^Q = 0, t \geq nh$, для произвольного начального состояния $\eta \in C$, поэтому $x_t = x_t^P$. Теорема доказана.

2.7. Предварительные результаты. Пусть $\Lambda_N = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subseteq\ll, aN \geq 1$, - произвольный набор собственных значений уравнения (1.9). Образуем $n \times \alpha_2$-матрицу ($\alpha_2 \leq Nn$) $\Gamma_N = [\Gamma_{\lambda_1}, \ldots, \Gamma_{\lambda_N}]$. Напомним, что $n \times \alpha_1$-матрица ($\alpha_1 \leq n$) Γ_λ, $\lambda \in \Lambda_N$, – это первые n строк фундаментальной системы решений векторного уравнения (2.5), где k – алгебраическая кратность числа Λ как корня уравнения (2.3).

Замечание 2.4. Элементы матрицы Γ_N находятся неоднозначно. Отметим, что в качестве Γ_N можно взять $\Phi(0)$, где Φ – базис обобщенного собственного пространства P, связанного с Λ_N.

ЛЕММА 2.3. *Для точечной вырожденности системы Σ в момент времени $t_1 \geq (n-1)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал ненулевой вектор $g \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$g'\Gamma_N = 0 \tag{2.18}$$

для любого спектрального набора Λ_N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Равенство (1.10) считаем выполненным. Пусть Λ_N – произвольный спектральный набор. Поскольку на множестве функций (2.4) решение системы Σ продолжимо назад (см. формулу (2.15)), то для всякой обобщенной собственной функции φ_λ, $\lambda \in \Lambda_N$, найдется начальное состояние η такое, что $x_{t_1} = \varphi_\lambda$. Тогда

$$g'x(t_1) = g'\varphi_\lambda(0) = g'\gamma_1 = 0$$

для любого решения γ_λ, $\lambda \in \Lambda_N$, алгебраической системы (2.5), поэтому необходимо условие (2.18).

Достаточность. В работе [13] доказано, что независимо от начального состояния $\eta \in C$ вектор

$$x(t) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda, \qquad t \geq (n-1)h, \tag{2.19}$$

где K_λ – множество всевозможных значений обобщенных собственных функций φ_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Ввиду равенства (2.18) и следствия 2.2 $g'K_\lambda = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Из условия (2.19) имеем равенство (1.10) для всех начальных состояний, т.е. система Σ точечно вырождена в направлении g. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Для уравнения (1.1) условие (2.19) следует из разложения [28] произвольного решения $x(t), t \geq (n-1)h$, в ряд по обобщенным собственным функциям $\varphi_\lambda, \lambda \in \Lambda$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Если для какого-либо спектрального набора Λ_N $\operatorname{rank}\Gamma_N = n$, то система Σ точечно полна.*

2.8. Критерий точечной вырожденности системы с конечным спектром. Допустим, что число различных корней характеристического уравнения (2.3) конечно и равно N. Систему Σ в таком случае будем помечать Σ^0. Матрицу Γ_N, составленную по полному спектральному набору Λ, будем обозначать Γ_Λ.

ТЕОРЕМА 2.4. *Для точечной вырожденности системы Σ^0 с конечным спектром Λ в момент времени $t_1 \geq (n-1)h$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\Gamma_\Lambda < n.$$

При этом совокупность направлений вырождения $\{g\}$ есть подпространство решений алгебраической системы (2.18).

Доказательство. Поскольку Σ^0 – система с конечным спектром, то условие (2.18) для произвольного спектрального набора Λ_N возможно тогда и только тогда, когда оно выполняется при $\Lambda_N = \Lambda$. Ввиду леммы 2.3 теорема доказана.

Пример 2.3. [9]. Проанализируем точечную вырожденность системы (1.11), $t_1 \geq h$, которая в матричной записи имеет вид (2.7).

Это уравнение с конечным спектром (пример 2.1): $\Lambda = \{0\}$, поэтому можно воспользоваться теоремой 2.4. Матрица $\Gamma_\Lambda = \Gamma_\lambda$, где $\lambda = 0$, найдена в примере 2.2. Для точечной вырожденности уравнения (2.7) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}\Gamma_\Lambda < 3$. Решаем уравнение: $\det\Gamma_\Lambda = \dfrac{1-h^2}{2} = 0$, отсюда $h = 1$.

Чтобы найти направления вырождения, рассмотрим уравнение (2.18) с матрицей Γ_Λ при $h = 1$

$$g' \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

из которого имеем: $g' = [g_1, -2g_1, -g_1]$, где $g_1 \neq 0$ – любое действительное число.

Итак, если $h \neq 1$, то уравнение (2.7) точечно полное. При $h = 1$ оно точечно вырождено в направлении $g' = [1, -2, -1]$.

2.9. Точечная полнота систем с конечным спектром. Теперь докажем параметрический критерий точечной полноты системы Σ^0. Будем считать, что характеристические числа λ_i имеют алгебраические кратности q_i, $i = \overline{1, N} : q_1 + \dots + q_N = n$. Образуем матрицу размера $(n+1)n \times n^2$

$$M^0 = \begin{bmatrix} M_{q_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{q_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{q_N}(\lambda_N) \\ I_{q_1} & I_{q_2} & \dots & I_{q_N} \end{bmatrix},$$

где матрицы вида $M_q(\lambda)$ задаются формулой (2.6), $I_i = [E, 0, \dots, 0]$ – $n \times ni$-матрица.

Теорема 2.5. *Для того, чтобы система Σ^0 была точечно полна в момент времени $t_1 \geq (n-1)h$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(2.20) \qquad \operatorname{rank} M^0 = n + n_1, \qquad n_1 = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{rank} M_{q_i}(\lambda_i), \qquad \lambda_i \in \Lambda.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система Σ^0 точечно полна. Если $\operatorname{rank} M^0 < n + n_1$, то найдется решение $\overline{\beta}' = [\overline{\beta}'_{q_1}, \dots, \overline{\beta}'_{q_N}, g']$ уравнения $\overline{\beta}' M^0 = 0$ ($\overline{\beta}_{q_i}$ – $q_i n$-векторы, g – ненулевой n-вектор) такое, что

$$(2.21) \qquad \overline{\beta}'_{q_i} M_{q_i}(\lambda_i) = \overline{g}'_i = [g', 0, \dots, 0], \qquad i = \overline{1, N}.$$

Число компонент вектора $\overline{g}'_i$ равно nq_i.

Ввиду равенств (2.21) и леммы 2.2

$$g'\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in P_\Lambda,$$

где P_Λ – обобщенное собственное пространство уравнения (1.9), связанное с полным спектральным набором Λ. Поскольку спектр Λ системы Σ^0 конечен, то в силу теоремы 2.3 $g'x(t) = 0, t \geq (n-1)h$, для всех начальных функций (1.2). Получили, что система Σ^0 точечно вырождена. Это противоречие доказывает необходимость условия (2.20).

Достаточность. Считаем справедливым равенство (2.20). Допустим, что система Σ^0 точечно вырождена в направлении g. Из леммы 2.2 следует, что для направления вырождения g при некотором векторе $\overline{\beta}'$ выполняются равенства (2.21).

Рассмотрим матрицу $\overline{M}^0 = [M^0, D]$, где $D' = [0, \ldots, 0, E]$ – $n \times (n+1)n$-матрица. Легко видеть, что $\operatorname{rank} \overline{M}^0 = n + n_1$. Поэтому $\operatorname{rank} M^0 = \operatorname{rank} \overline{M}^0$ ввиду условия (2.20). Кроме того, всякое решение уравнения $\overline{\beta}'\overline{M}^0 = 0$, где $\overline{\beta}$ – $(n+1)n$-вектор, удовлетворяет уравнению $\overline{\beta}' M^0 = 0$. Значит, подпространства решений двух последних уравнений совпадают. Из уравнения $\overline{\beta}'\overline{M}^0 = 0$ имеем: $\overline{\beta}' D = g' = 0$, т.е. система Σ^0 точечно полна. Теорема доказана.

Пример 2.4. Исследуем точечную полноту уравнения

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t-\omega) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-2\omega), \qquad t > 0, \tag{2.22}$$

в момент времени $t_1 \geq 2\omega$.

Вычисляем:

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - \mu & \mu^2 \\ -1 & \lambda + \mu \end{bmatrix}, \qquad \mu = e^{-\lambda\omega},$$
$$\det W(\lambda) = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu) + \mu^2 = \lambda^2.$$

Значит $\lambda = 0$ – единственное собственное значение (алгебраической кратности 2) уравнения (2.22), $\Lambda = \{0\}$, $N = 1$.

Так как уравнение (2.22) имеет конечный спектр, то можно воспользоваться теоремой 2.5. Для этого находим ранг матрицы

$$M_2(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1+\omega & -2\omega \\ -1 & 1 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\operatorname{rank} M_2(0) = 2 \quad \forall \omega > 0.$$

Теперь вычисляем ранг матрицы M^0:

$$\operatorname{rank} M^0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} M_2(0) & \\ E & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 3, & \omega = 1, \\ 4, & \omega \neq 1. \end{cases}$$

В силу теоремы 2.5 уравнение (22).2 точечно полно при $\omega \neq 1$ и точечно вырождено при $\omega = 1$.

Чтобы найти направление вырождения g (из уравнения (2.18)), запишем матрицу Γ_Λ при $\omega = 1$. Для этого решаем алгебраическую систему (2.5), где

$$\gamma_\lambda = \mathrm{col}[\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}].$$

Получаем:

$$\gamma_{21} = \gamma_{22} = c_1, \qquad \gamma_{12} = c_2 + (1-\omega)c_1, \qquad \gamma_{11} = c_2,$$

где c_1, c_2 – любые действительные числа.

Следовательно, $\Gamma_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $g' = [1, -1]$ – направление вырождения уравнения (2.22).

Данный пример показывает, что система Σ_1 с несколькими запаздываниями может вырождаться и при $n = 2$ в отличие от систем с одним запаздыванием (см. [10], [13]).

3. Условия точечной полноты и точечной вырожденности систем с сосредоточенными запаздываниями

3.1. Неявный критерий точечной полноты. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим транспонированное уравнение

$$\dot v(t) = A'v(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i' v(t-h_i), \qquad t > 0, \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$v(\theta) = 0, \qquad \theta \in [-h, 0); \qquad v(0) = g. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Система Σ_1 точечно вырождена в направлении g в момент времени $t_1 > 0$ тогда и только тогда, когда решение $v(t)$, задаваемое* (3.1), (3.2), *удовлетворяет тождеству*

$$v(t) = v(g, t) \equiv 0, \qquad t \geq t_1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из формулы (1.5) ($u = 0$) следует, что $v(t) = K(t)g$, $t \geq 0$, где

$$\dot K(t) = K(t)A' + \sum_{i=1}^{m} K(t-h_i)A_i', \qquad t > 0,$$
$$K(t) \equiv 0, \quad t < 0; \qquad K(0) = E,$$

или, что равносильно [28]

$$\begin{aligned} \dot K(t) &= A'K(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i' K(t-h_i), \qquad t > 0, \\ K(t) &\equiv 0, \quad t < 0; \qquad K(0) = E. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Транспонируя уравнение (1.6) с начальными данными (1.7) и сравнивая с задачей (3.4), видим, что $K(t) \equiv F'(t)$, $t \geq 0$. Таким образом,

$$v(t) = F'(t)g, \qquad t \geq 0.$$

Из определения 1.2 и формулы (1.5) ($u = 0$) вытекает, что для точечной вырожденности системы Σ_1 необходимо и достаточно

$$g'F(t_1)\eta(0) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} g'F(t_1 - h_i - \tau)A_i\eta(\tau)\,d\tau = 0 \qquad \forall \eta \in C.$$

Ввиду произвольности функции η последнее условие равносильно [16] следующим

$$g'F(t_1) = 0, \qquad \sum_{i=k+1}^{m} g'F(\tau - h_i)A_i = 0,$$
$$t_1 + h_k < \tau \leq t_1 + h_{k+1}, \qquad k = \overline{0, m-1}.$$

Отсюда в силу уравнения (1.6), имеем тождество [16]:

$$g'F(t) \equiv 0, \qquad t \geq t_1, \tag{3.5}$$

что равносильно (3.3). Лемма доказана.

Таким образом, точечная вырожденность уравнения (1.1) в момент времени $t_1 > 0$ равносильна линейной зависимости строк фундаментальной матрицы $F(t), t \geq t_1$. По этой причине обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{x} = Ax$, A – постоянная матрица, не может вырождаться: $\det F(t) = \det e^{At} \neq 0, t \geq 0$. Кстати, фундаментальная матрица системы с запаздыванием может вырождаться и для точечно полных систем.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t-h), \qquad h \geq 1.$$

Вычисляем фундаментальную матрицу

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & -t+h+1 \end{bmatrix}, \qquad t \in [h, 2h].$$

Отсюда $\det F(t) = f_{11}(t)(-t+h+1) = 0$, если $t = h+1$, хотя данное уравнение точечно полное, т.к. $n = 2$ [13].

3.2. Свойства фундаментальной матрицы. Ниже использованы обозначения: $\omega = h_1$; $[u]$ – целая часть числа u; p – оператор дифференцирования: $px(t) = \dot{x}(t)$; $e^{p\tau}$ – оператор сдвига: $e^{p\tau}x(t) = x(t+\tau)$; $D(\lambda)$ – матрица, присоединенная к $\lambda E - A$ [29]

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= D_0\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \dots + D_{n-1}, \\ D_k &= A^k - r_1A^{k-1} - \ldots - r_kE, \\ r_k &= \frac{1}{k}\operatorname{Sp}(AD_{k-1}), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad D_0 = E; \end{aligned}$$

$\operatorname{Sp} M$ – след матрицы M; Ξ – множество моментов времени [28]

$$\Xi = \left\{ t \mid t = \sum_{i=1}^{m} j_ih_i,\ j_i \geq 0 - \text{любые целые числа} \right\}.$$

Чтобы исследовать тождество (3.3), установим два свойства фундаментальной матрицы $F(t)$ уравнения (1.1).

Лемма 3.2. *Если $x(t)$, $t \in T$, – решение уравнения* (1.1) *с начальными условиями*

$$x(t) \equiv 0, \qquad t < 0; \qquad x(0) = x^0, \tag{3.6}$$

то

$$\begin{aligned} \Delta^k(p)x(t) = 0, \qquad &\Delta(p) = \det(pE - A), \\ k \geq \left[\frac{t_1}{\omega}\right] + 1, \quad &0 < t \leq t_1, \quad t \notin \Xi. \end{aligned}$$

Доказательство. Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$(pE - A)x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_ie^{-p(h_i-\omega)}x(t-\omega), \qquad t > 0.$$

Применяя [30] к обеим частям этого соотношения оператор $D(p)$, с учетом начальных условий (3.6) имеем

$$\Delta(p)x(t) = D(p)\sum_{i=1}^{m} A_ie^{-p(h_i-\omega)}x(t-\omega), \qquad t \notin \Xi.$$

Отсюда методом математической индукции получаем

$$\Delta^k(p)x(t) = \left(D(p)\sum_{i=1}^{m} A_ie^{-p(h_i-\omega)}\right)^k x(t-k\omega), \qquad t \notin \Xi.$$

Поскольку $x(\tau) \equiv 0$, $\tau < 0$, то при $k > t/\omega$, $t \notin \Xi$, правая часть в последнем выражении тождественно равна 0. Лемма доказана.

Пусть $Q_k(t)$ (k – целое число, $t \in \mathbb{R}$) – $n \times n$-матрицы – решения определяющего уравнения [2] системы Σ_1

$$Q_k(t) = Q_{k-1}(t)A + \sum_{i=1}^{m} Q_{k-1}(t-h_i)A_i, \qquad k^2 + t^2 > 0, \tag{3.7}$$

с начальными условиями

$$Q_k(t) = 0, \quad k < 0 \vee t < 0; \qquad Q_0(0) = E.$$

Известно [2], что производные функции $v'(t) = g'F(t)$ в точках $t \in S$ могут иметь скачки

$$\delta v^{(k)\prime}(t) = v^{(k)\prime}(t+0) - v^{(k)\prime}(t-0) = g'Q_k(t), \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Заметим, что $Q_k(t) = 0$ [2], если $k < t/h$.

Обозначим

$$\overline{Q}_{t_1} = [\,Q_k(t), 0 \le k \le n\alpha + n - 1, t \in \Xi_{t_1+h}\,]$$

– $n \times n\nu$-матрицу, составленную из решений определяющего уравнения (3.7), где $\alpha = \left[\dfrac{t_1+h}{\omega}\right]$, $\Xi_{t_1+h} = \Xi \cap (t_1, t_1+h]$, $t_1 > 0$. Число ν, как видно, зависит от пределов измерения k и мощности множества Ξ_{t_1+h}.

Пусть Λ – множество корней характеристического уравнения системы Σ_1

$$\det W(\lambda) = 0, \qquad W(\lambda) = \lambda E - A - \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i}, \qquad \lambda \in K, \tag{3.8}$$

где E – единичная матрица $n \times n$-матрица; K – множество комплексных чисел. Множество Λ будем называть спектром системы Σ_1 или уравнения (1.1). Спектр уравнения (3.1) совпадает с множеством Λ, поскольку определитель при транспонировании матриц сохраняется.

Разложим пространство $C = \overline{P} \oplus \overline{Q}$, где $\overline{P}$ – обобщенное собственное пространство уравнения (3.1), $\overline{Q}$ – дополнительное подпространство, по спектральному набору

$$\Lambda_A = \{\, \lambda \in \Lambda \mid \Delta(\lambda) = 0 \,\}.$$

Теорема 3.1. *Для того чтобы состояние v_{t_1+h} уравнения (3.1) с начальными данными (3.2) принадлежало обобщенному пространству $\overline{P}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$g'\overline{Q}_{t_1} = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство. Обоснуем достаточность условия (3.9), поскольку его необходимость для включения $v_{t_1+h} \in \overline{P}$ очевидна.

Из леммы 3.2 следует, что решение задачи (3.1), (3.2) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $\beta = kn$

$$\begin{aligned} &\Delta^k(p)v(t) = 0, \qquad k = \alpha + 1, \\ &t \in (t_1, t_1 + h + 0), \qquad t \notin \Xi_{t_1+h}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Причем скачки производных $\delta v^{(i)}(t) = Q_i'(t)g$, $i = \overline{0, \beta - 1}$, функции v_{t_1+h} в точках $t \in \Xi_{t_1+h}$ в силу условия (3.9) нулевые. Поэтому [2] состояние $v_{t_1+h} \in \overline{P}$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 получим следствие

Следствие 3.1. *Если система Σ_1 точечно вырождена в направлении g, то* $g'\overline{Q}_{t_1} = 0$.

Доказательсо. тв В случае точечной вырожденности системы Σ_1 в направлении g решение $v(t) \equiv 0, t \geq t_1$, ввиду леммы 3.1. Поэтому состояние $v_{t_1+h} \in \overline{P}$. Ссылка на теорему 3.1 завершает доказательство следствия.

Пусть $\sigma = \{\lambda_i \mid i = \overline{1, s}\}$, $1 \leq s \leq n$, – множество корней характеристического уравнения матрицы A: $\Delta(\lambda) = 0$ с алгебраическими кратностями d_i. Ввиду (3.9), (3.10) функция $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = \sum_{i=1}^{s} v_i(t)e^{\lambda_i t}, \qquad \lambda_i \in \sigma, \qquad t \in (t_1, t_1 + h + \varepsilon), \tag{3.11}$$

где $v_i(t)$ – n-векторные полиномы степени не выше $\rho_i - 1$ $(\rho_i = kd_i)$:

$$v_i(t) = \sum_{j=0}^{\rho_i - 1} \beta_{i,j+1} \frac{t^j}{j!}, \qquad t \in (t_1, t_1 + h + \varepsilon).$$

Чтобы определить n-векторные коэффициенты $\beta_{i,j+1}$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{0, \rho_i - 1}$, подставим выражение (3.11) в уравнение (3.1):

$$\overline{\beta}_i' M_{\rho_i}(\lambda_i) = 0, \qquad \overline{\beta}_i' = [\beta_{i,\rho_i}', \dots, \beta_{i,1}'], \qquad i = \overline{1, s}, \quad \lambda_i \in \sigma. \tag{3.12}$$

Если какое-либо из чисел $\lambda_i \in \sigma$ не принадлежит множеству Λ, то в уравнении (3.12) $\operatorname{rank} M_{\rho_i}(\lambda_i) = n\rho_i$, следовательно, $\overline{\beta}_i = 0$, и в формуле (3.11) соответствующий полином $v_i(t) \equiv 0$.

3.3. Вспомогательные результаты.

Лемма 3.3. *Для точечной вырожденности системы Σ_1 необходимо, чтобы множество Λ_A не было пусто.*

Доказательство. Допустим противное: $\Lambda_A = \varnothing$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - \varepsilon h_i), \quad t \in T, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.13}$$

Если для него множество $\Lambda_A = \varnothing$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $\Lambda_A = \varnothing$ для почти всех $\varepsilon > 0$. Это следует из того, что левая часть характеристического уравнения (3.8) - квазиполином.

Направление вырождения уравнения (1.1) при некотором $t_1 > 0$ обозначим g. По причине следствия 3.1 $g'\overline{Q}_{t_1} = 0$, поэтому (теорема 3.1) $v(t)$, $t \geq t_1$, - квазиполином вида (3.11), коэффициенты которого задаются равенствами (3.12). Поскольку $\Lambda_A = \varnothing$, то из уравнения (3.12) находим, что все $\overline{\beta}'_i = 0$, $i = \overline{1,s}$. В этом случае $v(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, и уравнение (3.13) точечно вырождено при почти всех $\varepsilon > 0$.

Из разложения фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \notin \Xi$, в степенной ряд [31] по переменным t, h, коэффициенты которого пропорциональны решениям определяющего уравнения (3.7), следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ уравнение (3.13) точечно полное, т.к. $F(0) = E$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 3.2. *Если $\Lambda_A = \varnothing$, то* $\operatorname{rank} \overline{Q}_{t_1} = n$ *при любом $t_1 > 0$, и система Σ_1 точечно полна.*

Доказательство. Если бы $\operatorname{rank} \overline{Q}_{t_1} < n$, то при некотором ненулевом векторе $g \in \mathbb{R}^n$ имело бы место условие (3.9). Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 3.3. Следствие доказано.

Замечание 3.1. Полезно сравнить лемму 3.3 с результатами работ [13], [17], где утверждается, что характеристический многочлен точечно вырожденной системы Σ_1 с соизмеримыми запаздываниями имеет полиномиальный множитель.

Уравнение, сопряженное к уравнению (3.1), имеет вид

$$\dot{z}'(t) = -z'(t)A' - \sum_{i=1}^{m} z'(t + h_i)A'_i, \qquad t < t_1, \tag{3.14}$$

и решается при начальном условии

$$z(t) = \psi(t - t_1), \qquad t \in [t_1, t_1 + h], \qquad \psi \in C^*.$$

Рассмотрим обобщенные собственные пространства уравнения (1.1) $\tilde{P}$ и сопряженного уравнения (3.14) $\overline{P}^*$, связанные со спектральным набором Λ_A.

Лемма 3.4. *Если $g \in K^n$, то $g'\varphi_\lambda = 0$ для всех функций $\varphi_\lambda \in \tilde{P}$ тогда и только тогда, когда $g'\psi_\lambda = 0$ для всех функций $\psi_\lambda \in \overline{P}^*$ из обобщенного собственного пространства уравнения* (3.14).

Доказательство. Каждая функция $\psi_\lambda \in \overline{P}^*$ имеет вид (2.10), где nk-вектор-строка $[\beta'_1, \ldots, \beta'_k]$ определяется из уравнения

$$[\beta'_1, \ldots, \beta'_k] \begin{bmatrix} W'_1 & W'_2 & \ldots & W'_k \\ 0 & W'_1 & \ldots & W'_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & W'_1 \end{bmatrix} = 0. \tag{3.15}$$

Это следует из того, что матрица $W(\lambda)$ для уравнения (3.1) в выражении (2.6) имеет вид: $\lambda E - A' - \sum_{i=1}^m A_i' e^{-\lambda h_i}$. Транспонируя уравнение (3.15), получим

$$M_k(\lambda)\,\mathrm{col}[\beta_k, \dots, \beta_1] = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.5), видим, что матрица коэффициентов у них одна и та же. Следовательно,

$$g'\gamma_i = 0 \Leftrightarrow g'\beta_i = 0, \qquad i = \overline{1,k}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

3.4. Параметрические критерии точечной вырожденности и точечной полноты системы Σ_1. Докажем критерий точечной вырожденности системы Σ_1. Обозначим через Γ матрицу Γ_N, составленную по спектральному набору Λ_A. Для определенности будем считать, что $\Gamma = 0$, если множество $\Lambda_A = \varnothing$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Для точечной вырожденности системы Σ_1 в момент $t_1 > 0$ в направлении g необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{aligned} &1)\quad \Lambda_A = \varnothing; \\ &2)\quad g'[\Gamma, \overline{Q}_{t_1}] = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Множество Λ_A должно быть непусто ввиду леммы 3.3. Необходимость условия $g'\Gamma = 0$ для точечной вырожденности системы Σ_1 доказана в лемме 2.3. Условие $g'\overline{Q}_{t_1} = 0$ получаем из следствия 3.1.

Достаточность. Запишем билинейную форму для уравнения (3.1)

$$(\psi, \varphi) = \psi'(0)\varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_0^{h_i} \psi'(\tau) A_i' \varphi(\tau - h_i)\, d\tau,$$

где $\varphi \in C$, $\psi \in C^*$. Тогда для любого решения $z(t)$, $t \in T$, сопряженного уравнения (3.14) и любого решения $v(t)$, $t \in T$, уравнения (3.1) с начальными условиями (3.2) выполняется (см. замечание 2.2) тождество $(z^t, v_t) \equiv \mathrm{const}$, $t \in T$. Здесь $z^t = (z^t(s) = z(t+s), s \in H^+)$ – состояние сопряженного уравнения (3.14) в момент времени $t \le t_1$. Стсюда

$$(z^{t_1}, v_{t_1}) = (z^0, v_0) = z'(0)g. \tag{3.17}$$

В качестве начальных условий для уравнения (3.14) будем брать функции $z^{t_1}(\theta) = \psi_\lambda(\theta)$, $\theta \in H^+$, $\psi_\lambda \in \overline{P}^*$, где $\overline{P}^*$ – обобщенное собственное пространство уравнения (3.14), связанное с Λ_A. Пространство $\overline{P}^*$ инвариантно [6] относительно оператора сдвига $S^*(t)$, $t \le t_1$, задаваемого уравнением (3.14): $z^t = S^*(t)\psi_\lambda$, поэтому $z^t \in \overline{P}^*$, если $\psi_\lambda \in \overline{P}^*$.

Из условия (3.16) следует, что $g'\Gamma = 0$. В силу следствия 2.2 $g'\varphi_\lambda = 0$ для произвольной функции $\varphi_\lambda \in \tilde{P}$. Так как $z^t \in \overline{P}^*$, то для того же вектора g (лемма 3.4) $g'z^t = 0$, $t \le t_1$. Значит в равенстве (3.17) $z'(0)g = 0$ и поэтому

$$(\psi_\lambda, v_{t_1}) = 0, \quad \text{если} \quad \psi_\lambda \in \overline{P}^*.$$

В силу последнего условия [6], состояние $v_{t_1} \in \overline{Q}$, где $\overline{Q}$ – дополнительное подпространство к обобщенному собственному пространству $\overline{P}$ уравнения (3.1), связанному с Λ_A. Ввиду инвариантности [6] подпространства $\overline{Q}$ относительно оператора сдвига уравнения (3.1) состояние v_{t_1+h} также принадлежит подпространству $\overline{Q}$.

В силу равенства (3.16) $g'\overline{Q}_{t_1} = 0$. Из теоремы 3.1 следует, что $v_{t_1+h} \in \overline{P}$. Поскольку одновременно функция $v_{t_1+h} \in \overline{Q}$, то $v_{t_1+h} = 0$ и справедливо тождество $g'F(t) \equiv 0, t \geq t_1, g \neq 0$. Ссылка на лемму 3.1 завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.2. Условие (3.16) можно заменить следующими

$$\begin{aligned} &1)\quad g'\overline{Q}_{t_1} = 0; \\ &2)\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_{q_i}(\lambda_i) \\ g'0\ldots0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} M_{q_i}(\lambda_i), \quad \lambda_i \in \Lambda_A, \quad i = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Если равенство 1) из условий (3.18) выполняется, то $\operatorname{rank}\overline{Q}_{t_1} < n$ и в силу следствия 3.2 $\Lambda_A \neq \varnothing$, т.е. условие 2) корректно. Ввиду леммы 2.2 равенство 2) равносильно тому, что $g'\varphi_\lambda = 0$ для любой функции $\varphi_\lambda \in \tilde{P}$. Последнее согласно следствию 2.2 возможно тогда и только тогда, когда $g'\Gamma = 0$.

Замечание 3.3. Если спектр уравнения (1.1) конечен, то [19]

$$\overline{Q}_{t_1} = 0, \quad t_1 \geq (n-1)h,$$

и условие (3.16) совпадает с (2.18).

Пусть множество Λ_A содержит $N (1 \leq N \leq n)$ собственных значений λ_i уравнения (1.1), имеющих алгебраические кратности q_i, $i = \overline{1,N}$. Составим матрицу размеров $(q+1)n \times (q+\nu)n$ $(q = q_1 + \cdots + q_N)$:

$$M = \begin{bmatrix} M_{q_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & M_{q_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & M_{q_N}(\lambda_N) & 0 \\ I_{q_1} & I_{q_2} & \ldots & I_{q_N} & \overline{Q}_{t_1} \end{bmatrix},$$

где $I_i = [E, 0, \ldots, 0]$ – $n \times ni$-матрица.

Теорема 3.3. *Для того чтобы система Σ_1 при $\Lambda_A \neq \varnothing$ была точечно полна в момент времени $t_1 > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank} M = n + n_1, \qquad n_1 = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{rank} M_{q_i}(\lambda_i), \qquad \lambda_i \in \Lambda_A. \tag{3.19}$$

Если $\Lambda_A \neq \varnothing$, то система Σ_1 заведомо точечно полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай, когда $\Lambda_A = \varnothing$ рассмотрен в следствии 3.2. Поэтому предполагаем, что $\Lambda_A \neq \varnothing$.

Достаточность. Считаем условие (3.19) выполненным. Наряду с матрицей M рассмотрим $(q+1)n \times (q+\nu+1)n$-матрицу $\overline{M} = [M, D]$, где $D' = [0, \dots, 0, E]$ – $n \times (n+1)n$-матрица. Очевидно, что $\operatorname{rank} \overline{M} = n + n_1$, поэтому множества решений однородных алгебраических систем: $\beta' M = 0$, $\beta' \overline{M} = 0$, где β – $(q+1)n$-вектор, совпадают.

Допустим, что система Σ_1 точечно вырождена в направлении g. Как видно из леммы 2.2 и следствия 3.1, найдется решение β системы $\beta' M = 0$, последние n элементов которого образуют вектор g. Но ввиду структуры матрицы $\overline{M}$ последние n элементов вектора β всегда нулевые. Значит, $g = 0$, и система Σ_1 точечно полна.

Необходимость. Предположим, что система Σ_1 точечно полна, но множество $\Lambda_A \neq \varnothing$, и условие (3.19) не выполняется. Тогда найдется решение $\overline{\beta}' = [\beta'_{q_1}, \dots, \beta'_{q_N}, g']$ системы $\overline{\beta}' M = 0$ такое, что

$$g' \overline{Q}_{t_1} = 0, \qquad \beta'_{q_i} M_{q_i}(\lambda_i) = \overline{g}' = [g', 0', \dots, 0'], \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.20}$$

где β_{q_i} – $q_i n$-векторы, g – ненулевой n-вектор.

Из равенств (3.20) вытекают равенства 1), 2) замечания 3.2, в силу которого и теоремы 3.2 система Σ_1 точечно вырождена. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Известно [4], что при $0 < t_1 \leq \omega$ система Σ_1 точечно полна. С другой стороны, если она точечно вырождена при некотором $t_1 > \omega$, то она точечно вырождена [13] при $t_1 = (n-1)h$. Поэтому достаточно проверить условие (3.19) при $t_1 = (n-1)h$, чтобы выяснить возможность точечной вырожденности системы Σ_1 при каком-либо $t_1 > \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Если набор Λ_A содержит комплексно сопряженные корни, то в условии (3.19) достаточно рассмотреть один из них.

ПРИМЕР 3.2. [19]. Дано уравнение

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t-h), \qquad t_1 \geq 2h. \tag{3.21}$$

Посредством теоремы 3.2 проверим точечную вырожденность уравнения (3.21) при $t_1 \geq 2h$. В данном случае

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - \mu \end{bmatrix}, \qquad \det W(\lambda) = \lambda^2(\lambda - \mu), \qquad \mu = e^{-\lambda h},$$

$\Delta(\lambda) = \lambda^3 = 0$. Поэтому $\Lambda_A = \{0\}$. Кратность $\lambda = 0$ как корня характеристического уравнения (3.8) равна 2, т.к. $\det^{(2)} W(0) \neq 0$.

Записываем матрицу $M_2(0)$ (см. формулу (2.6)) и решаем систему

$$M_2(0)\gamma_\lambda = 0, \qquad \gamma_\lambda = \operatorname{col}[\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}].$$

Из трех последних уравнений имеем: $\gamma_{22} = \gamma_{23} = 0$, $\gamma_{21} = c_1$ – любое число. Решая три первых уравнения, получаем: $\gamma_{11} = c_2$ – любое число, $\gamma_{12} = c_1$, $\gamma_{13} = 0$. Итак, матрица $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Находим решения определяющего уравнения:

$$Q_3(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_4(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_i(3) = 0, \quad i > 4.$$

Видно, что $\operatorname{rank}[\Gamma, \overline{Q}_{t_1}] = 3$, поэтому уравнение (3.21) точечно полное при всех $h > 0$.

4. Критерий относительной нуль-управляемости линейных автономных дифференциально-разностных систем. Другие задачи, связанные с проблемой точечной полноты

4.1. Понятие относительной управляемости. Достаточное условие относительной нуль-управляемости. Ввиду следствия 1.1 для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 достаточно условия (1.8), т.е. чтобы в момент времени t_1 концы всех возмущенных движений системы Σ_1 $\{x^u(t_1) \mid u \in \overline{C}\}$ заполняли все пространство $\mathbb{R}^n$.

Введем определение [3], [4].

Определение 4.1. Систему Σ_1 назовем *относительно управляемой*, если

$$\forall x^1 \in \mathbb{R}^n \;\; \exists u \in \overline{C} \Rightarrow x^u(t_1) = x^1.$$

Таким образом, система Σ_1 относительно управляема тогда и только тогда, когда имеет место условие (1.8). Значит ортогональное дополнение к X^u должно быть тривиально: $g'X^u = 0 \Rightarrow g = 0$. Последнее равносильно следующему

$$g' \int_0^{t_1} F(t_1 - \tau) B u(\tau)\, d\tau = 0 \qquad \forall u \in \overline{C} \Rightarrow g = 0.$$

Отсюда получаем [2], [3] неявное условие относительной управляемости системы Σ_1.

Лемма 4.1. *Для относительной управляемости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы строки функциональной матрицы $F(t)B$, $t \in T$, были линейно независимы*

$$g'F(t)B \equiv 0,\; t \in T,\; g \in \mathbb{R}^n \Rightarrow g = 0. \tag{4.1}$$

Следуя работам [2], [3], запишем критерий относительной управляемости системы Σ_1, через решения определяющего уравнения (3.7).

Рассмотрим [2] множество моментов времени $\Xi^0_{t_1} = \Xi \cap [0, t_1)$ и матрицу

$$Q_{t_1} = [\, Q_k(t) B,\; 0 \le k \le n-1,\; t \in \Xi^0_{t_1}],$$

составленную из решений определяющего уравнения (3.7). Справедлив [2] следующий критерий относительной управляемости.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того чтобы система Σ_1 была относительно управляема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank} Q_{t_1} = n. \tag{4.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы имеется в [2]. Там же показано, что если равенство (4.2) не выполняется при $0 \le k \le n-1$, то оно невозможно ни при каких $k \ge n$. С другой стороны, $Q_k(t) = 0$, если $k < t/h$, [2], поэтому в (4.2) можно взять: $[t/h] \le k \le n-1$.

Чтобы пояснить идею перехода от неявного условия (4.1) к параметрическому критерию (4.2), приведем доказательство достаточности.

Достаточность. Допустим противное: система Σ_1 не является относительно управляемой, несмотря на наличие равенства (4.2). В силу леммы 4.1 должно нарушаться условие (4.1):

$$w(t) = g'F(t)B \equiv 0, \quad t \in T, \quad g \ne 0.$$

Отсюда следует, что все скачки производных функции w равны нулю

$$\begin{aligned} \delta w^{(k)}(t) &= g'F^{(k)}(t+0)B - g'F^{(k)}(t-0)B \\ &= g'Q_k(t)B = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad t \in \Xi^0_{t_1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Если выполнено условие (4.2), то определяющее уравнение (3.7) будем называть невырожденным. Если $g'Q_{t_1} = 0$, $g \ne 0$, то будем говорить, что g – вектор (направление) вырождения определяющего уравнения (3.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если равенство (4.2) не имеет места при $t_1 = nh$, то [2] оно нарушается при всех $t_1 > 0$. Поэтому, чтобы установить возможность относительной управляемости системы Σ_1 при каком-либо $t_1 > 0$, достаточно проверить условие (4.2) при $t_1 = nh$.

4.2. Обзор результатов по задачам относительной нуль-управляемости и относительной управляемости. Первый эффективный результат в теории управляемости систем с последействием получен в работе [32] Ф.М. Кирилловой и С.В. Чураковой. Ими приводятся необходимые и достаточные условия (не совпадающие между собой) относительной нуль-управляемости системы Σ_1 ($m = 1$). Достаточные условия разрешимости этой задачи (алгебраическое [32] и в терминах передаточной функции), которые, как отмечается, в случае точечно полных систем являются и необходимыми, доказываются в [33]. Критерий относительной нуль-управляемости системы Σ_1 ($m = 1$), основанный на результатах работы [5], приводится в [34].

Понятие определяющего уравнения (см. формулу (3.7)), играющее важную роль в теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем, введено [3] Ф.М. Кирилловой и С.В. Чураковой. Через этот объект ими дана [3] простая и естественная формулировка критерия относительной управляемости системы Σ_1 ($m = 1$) (см. теорему 4.1). Методом определяющего уравнения были исследованы задачи относительной управляемости системы Σ_1 *со многими запаздываниями* [35], с отклоняющимся аргументом нейтрального типа [36], систем с распределенным запаздыванием [37]. Дальнейшее развитие этого аппарата позволило доказать критерии относительной управляемости линейных автономных объектов общего вида [38], [39]. Задача относительной управляемости системы Σ_1 рассматривалась и многими зарубежными авторами [34], [40], [41], [42].

Обстоятельное изложение теории управляемости и наблюдаемости динамических систем на базе теории определяющего уравнения содержится в известной монографии Р. Габасова и Ф. М. Кирилловой [2].

4.3. Критерий относительной нуль-управляемости. Согласно определению 4.1 относительная управляемость системы Σ_1 равнозначна наличию условия (1.8). Ввиду следствия 1.1 относительно управляемая система Σ_1 является относительно нуль-управляемой. Для точечной полной системы Σ_1 $X^\eta = \mathbb{R}^n$, поэтому условие (1.8) в силу леммы 1.1 и необходимо для относительной нуль-управляемости такой системы. Из леммы 1.1 получено следствие.

Следствие 4.1. *Для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 достаточно, а в случае ее точечной полноты и необходимо, чтобы система Σ_1 была относительно управляема.*

Для точечно вырожденной системы Σ_1 множество X^η – собственное подпространство в $\mathbb{R}^n$, поэтому условие относительной управляемости (1.8) и равносильные ему условия (4.1), (4.2), вообще говоря, не являются необходимыми для относительной нуль-управляемости. Докажем следующий неявный критерий относительной нуль-управляемости системы Σ_1.

Лемма 4.2. *Для того чтобы система Σ_1 была относительно нуль-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы каждое направление вырождения g определяющего уравнения* (3.7) *было направлением точечного вырождения системы Σ_1.*

Доказательство. Поскольку множества X^η, X^u – подпространства $\mathbb{R}^n$, то ввиду леммы 1.1 для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы

$$g'X^u = 0 \Rightarrow g'X^\eta = 0, \qquad g \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Первое из равенств (4.4) означает, что

$$g' \int_0^{t_1} F(t_1 - \tau)Bu(\tau)\,d\tau = 0 \quad \forall u \in \overline{C}.$$

Это возможно [2] тогда и только тогда, когда $g'F(t)B \equiv 0, t \in T$.

Если полученное тождество осуществимо при $g \neq 0$, то в силу теоремы 4.1 g – вектор вырождения определяющего уравнения системы Σ_1. Второе из равенств (4.4) означает, что в этом случае g – вектор точечного вырождения системы Σ_1. Лемма доказана.

Замечание 4.2. Если g – вектор точечного вырождения системы Σ_1, то выполняется тождество (3.5). Поэтому условие леммы 4.2 можно записать таким образом [19]

$$g'F(t)B \equiv 0,\ t \in T \Rightarrow g'F(t) \equiv 0,\ t \geq t_1,\ g \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Первое из тождеств (4.5) в силу теоремы 4.1 равносильно равенствам (4.3), а второе – ввиду теоремы 3.2 равносильно условию (3.16). Поэтому критерий относительной нуль-управляемости можно сформулировать в виде утверждения.

Теорема 4.2. *Для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы*

$$g'Q_{t_1} = 0 \Rightarrow g'[\Gamma, \overline{Q}_{t_1}] = 0, \quad g \in \mathbb{R}^n. \tag{4.6}$$

Следствие 4.2. *Для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}[Q_{t_1}, \Gamma, \overline{Q}_{t_1}] = \operatorname{rank} Q_{t_1}.$$

Доказательство. Записанное равенство необходимо и достаточно, чтобы каждое решение уравнения $g'Q_{t_1} = 0$ удовлетворяло уравнению $g'[\Gamma, \overline{Q}_{t_1}] = 0$, $g \in \mathbb{R}^n$, т.е. чтобы выполнялось условие (4.6) теоремы 4.2. Следствие доказано.

Из теоремы 4.2 и замечания 3.2 получается следующий параметрический критерий относительной нуль-управляемости.

Теорема 4.3. *Для относительной нуль-управляемости системы Σ_1 необходимо и достаточно, чтобы все направления вырождения определяющего уравнения* (3.7) *удовлетворяли условиям* (3.18).

Замечание 4.3. Если определяющее уравнение (3.7) невырождено, то система Σ_1 относительно нуль-управляема ввиду следствия 4.1. В противном случае условия (3.16), (3.18) достаточно проверить для базиса $\{g_j\}_1^\alpha$, $\alpha < n$, подпространства вырождения определяющего уравнения (3.7): $g_j'Q_{t_1} = 0$, $j = \overline{1, \alpha}$. При этом можно сразу вычислять строки $g_j'Q_k(t)$, а не матрицы $Q_k(t)$.

4.4. Критерий точечной полноты дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Обобщением уравнения (1.1) служит уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i) + \sum_{i=1}^{m} B_i \dot{x}(t - h_i) + Bu(t), \qquad t > 0, \tag{4.7}$$

где $0 < h_i$ – числа, $i = \overline{1, m}$ ($m \geq 1$; $h_1 < \cdots < h_m = h$, если $m > 1$); A, B, A_i, B_i, $i = \overline{1, m}$ – постоянные матрицы, причем хотя бы одна из матриц A_m, B_m ненулевая. В начальном условии (1.2) считаем, что функция η непрерывно дифференцируема: $\dot{\eta} \in C$.

Определяющее уравнение для уравнения (4.7) имеет [2] вид

$$Q_k(t) = Q_{k-1}(t)A + \sum_{i=1}^{m} Q_{k-1}(t-h_i)A_i + \sum_{i=1}^{m} Q_k(t-h_i)B_i, \tag{4.8}$$
$$k^2+t^2>0, \quad k \text{ – целое}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Начальные условия для него те же, что и для уравнения (3.7)

Повторяя рассуждения п.п. 2.8–2.9 и 3.1–3.4, для уравнения (4.7) получаем те же критерии точечной полноты и точечной вырожденности, что и для уравнения (1.1) (см. теоремы 2.4, 2.5 и 3.2, 3.3). Характеристическая матрица при этом имеет вид

$$W(\lambda) = \lambda E - A - \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i} - \sum_{i=1}^{m} B_i \lambda e^{-\lambda h_i}.$$

Пример 4.1. Дано уравнение

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t-h), \quad t>0. \tag{4.9}$$

В данном случае

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & -2 \\ \mu-\lambda\mu & \lambda-1 \end{bmatrix}, \quad \mu = e^{-\lambda h}, \quad \det W(\lambda) = \lambda^2 - \lambda.$$

Следовательно, уравнение (4.9) имеет конечный спектр: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Находим, что $\Delta(\lambda) = \lambda(\lambda-1) = 0$, поэтому $\Lambda_A = \{0;1\}$.

Воспользуемся теоремой 2.4, чтобы исследовать точечную вырожденность уравнения (4.9). Для этого через систему алгебраических уравнений (2.5) определим матрицу $\Gamma = [\Gamma_{\lambda_1}, \Gamma_{\lambda_2}]$.

$$1)\ \lambda_1 = 0. \quad M_1(0)\gamma_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Значит $\gamma_1 = \gamma_2 = c \in \mathbb{R}$. Полагаем $c=1$, имеем $\Gamma_{\lambda_1} = \mathrm{col}[1;1]$.

$$2)\ \lambda_2 = 1. \quad M_1(1)\gamma_\lambda = \begin{bmatrix} 1+2e^{-h} & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Поэтому $\gamma_2 = \dfrac{1+2e^{-h}}{2}\gamma_1$, $\gamma_1 = c \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем $\Gamma_{\lambda_2} = \mathrm{col}[2; 1+2e^{-h}]$. Итак,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1+2e^{-h} \end{bmatrix}.$$

Для точечной вырожденности уравнения (4.9), $t_1 \geq h$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank}\Gamma < 2$. Следовательно, $h = \ln 2$. Направление вырождения $g' = [1,-1]$ находим из условия: $g'\Gamma = 0$. При $h \neq \ln 2$ уравнение (4.9) точечно полно для любых $t_1 > 0$.

4.5. Связь условий относительной нуль-управляемости и относительной управляемости. Согласно следствию 4.1 относительная управляемость системы Σ_1 влечет ее относительную нуль-управляемость. Для точечно полных систем Σ_1 верно и обратное, поэтому условие (4.2) необходимо и достаточно для относительной нуль-управляемости таких систем.

Ввиду простоты и естественности условия (4.2), многие авторы занимались [4], [19], [33], [34] описанием класса систем вида Σ_1 (необязательно точечно полных), для которых критерии относительной нуль-управляемости и относительной управляемости совпадают. Это справедливо, например, [19], для системы Σ_1 при $n \leq 2$.

Для всякой системы Σ_1 третьего порядка с одним запаздыванием условие (4.2) также является [34] критерием относительной нуль-управляемости. В последующем этот результат был установлен [19] для системы Σ_1 при $m = 1, n \leq 5$.

Наиболее полное исследование связи критериев относительной нуль-управляемости и относительной управляемости проведено В.В. Карпуком. В частности, им на примере системы Σ_1 десятого порядка показано [43], что и в случае одного запаздывания указанные критерии могут различаться.

Для системы Σ_1 с несколькими запаздываниями несовпадение критериев относительной нуль-управляемости и относительной управляемости возможно при более низком порядке системы.

Пример 4.2. [43]. Система Σ_1 $(n = 4, m = 3, \omega = 1)$ с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

относительно нуль-управляема, но не относительно управляема при $t \geq 12$.

Действительно, в условии (4.2) $Q_0(0)B = \mathrm{col}[0,0,0,1]$, $Q_1(0)B = \mathrm{col}[0,1,0,0]$, $Q_1(1)B = \mathrm{col}[0,0,-1,0]$, все остальные $Q_k(t)B = 0$, поэтому система (4.10) не является относительно управляемой.

Подпространство направлений g, задаваемое (4.3), в которых вырождается определяющее уравнение (3.7), – одномерное с базисным вектором $e_1' = [1,0,0,0]$.

Вычисляя характеристический полином системы (4.10): $\det W(\lambda) = \lambda^4$, заключаем, что это система с конечным спектром, следовательно, $\overline{Q}_{t_1} = 0$. Пользуясь критерием (3.18), можно проверить, что e_1' – направление вырождения системы (4.10). Ввиду теоремы 4.3 система (4.10) относительно нуль-управляема.

Задача относительной управляемости уравнения (4.7) на базе теории определяющего уравнения решена в [36]. А именно, доказано, что критерий относительной управляемости уравнения (4.7) имеет тот же вид (4.2), что и для системы Σ_1. Вопрос относительной нуль-управляемости уравнения (4.7) изучался, например, в [43]. В этой работе установлена справедливость неявного критерия (4.5) для относительной нуль-управляемости уравнения (4.7). Поэтому параметрический критерий относительной нуль-управляемости уравнения (4.7) имеет формулировку аналогичную теоремам 4.2, 4.3.

При $n = 2$ для уравнения (4.7), как и для системы Σ_1, критерии относительной нуль-управляемости и относительной управляемости совпадают (см. условие (4.2)). Однако для $n \geq 3$ эти критерии, вообще говоря, различны [43].

4.6. Относительная наблюдаемость и относительная идентифицируемость систем с запаздыванием. Рассмотрим систему (4.7), (1.3) с начальным условием

$$x(t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad x(0) = x^0, \quad x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Будем называть ее системой Σ_2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. [44]. Систему Σ_2 назовем относительно наблюдаемой, если

$$y = (y(t), t \in T) = 0 \Rightarrow x^0 = 0.$$

Для системы Σ_2 справедлива формула, аналогичная (1.5), в силу которой

$$x(t) = F(t)x^0, \quad y(t) = GF(t)x^0, \qquad t \geq 0. \tag{4.11}$$

Значит, неявное условие относительной наблюдаемости таково

$$GF(t)x^0 = 0, \ t \in T \Rightarrow x^0 = 0.$$

Сравнивая это условие с неявным условием относительной управляемости (4.1), получим теорему [44].

ТЕОРЕМА 4.4. *Система Σ_2 $(t_1 \geq nh)$ относительно наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняется условие (4.2) для определяющего уравнения (4.8), где полагается: $A = A'$, $A_i = A_i'$, $B_i = B_i'$, $i = \overline{1,m}$, $B = G'$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Систему Σ_2 назовем относительно идентифицируемой, если

$$y = 0 \Rightarrow x(t) = 0, \ t \geq t_1. \tag{4.12}$$

Ввиду равенств (4.11) условие (4.12) можно записать так

$$GF(t)x^0 = 0, \ t \in T \Rightarrow F(t)x^0 = 0, \ t \geq t_1. \tag{4.13}$$

Транспонируя равенства (4.13), получаем

$$x^{0\prime}F'(t)G' = 0, \ t \in T \Rightarrow x^{0\prime}F'(t) = 0, \ t \geq t_1, \ x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Сравнивая с условием (4.5), заключаем, что это есть условие относительной нуль-управляемости системы Σ_2 с матрицами $A = A'$, $A_i = A_i'$, $B_i = B_i'$, $i = \overline{1,m}$, $B = G'$. Поэтому имеет место теорема.

Теорема 4.5. *Система Σ_2 ($t_1 \geq nh$) относительно идентифицируема тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.16) *или* (3.18) *для всех направлений вырождения определяющего уравнения* (4.8), *где полагается: $A = A'$, $A_i = A_i'$, $B_i = B_i'$, $i = \overline{1,m}$, $B = G'$.*

Таким образом, понятия относительной наблюдаемости и относительной идентифицируемости двойственны понятиям относительной управляемости и относительной нуль-управляемости. Поэтому все результаты, касающиеся относительной управляемости и относительной нуль-управляемости, можно переформулировать для задач относительной наблюдаемости и относительной идентифицируемости. В частности, критерии относительной наблюдаемости и относительной идентифицируемости, вообще говоря, различны (см. пример 4.2 с транспонированными матрицами).

4.7. Задача управляемости по начальной функции и задача приводимости. Рассмотрим две задачи, связанные с проблемой точечной полноты.

Пусть начальное условие для уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-h, 0); \qquad x(0) = x^0, \quad \eta \in C, \quad x^0 = \mathbb{R}^n. \tag{4.14}$$

Систему (1.1) ($u = 0$), (4.14) назовем системой $\Sigma_{1\eta}$.

Понятие управляемости по начальной функции состоит в следующем [23].

Определение 4.5. Система $\Sigma_{1\eta}$ называется управляемой по начальной функции в момент времени $t_1 > 0$, если

$$\forall x^1 \in \mathbb{R}^n \ \exists \eta \in C \Rightarrow x(t_1) = x^1.$$

Допустим, что система $\Sigma_{1\eta}$ имеет соизмеримые запаздывания: $h_i = i\omega$, $\omega > 0$ ($i = \overline{1,m}$). Пользуясь результатами исследования [6], получаем теорему.

Теорема 4.6. *Для того чтобы система $\Sigma_{1\eta}$, $t_1 > (n-1)h$, была управляема по начальной функции, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\operatorname{rank}[\Gamma, \overline{Q}_{t_1}] = n$;
2) $\operatorname{rank}[A^i[A_1, \ldots, A_m], i = \overline{0, n-1}] = n$.

Условие 1) есть условие точечной полноты системы $\Sigma_{1\eta}$, а условие 2) – условие управляемости по Калману [45] пары $\{A, [A_1, \ldots, A_m]\}$. Если $\Lambda_A = \varnothing$, то условие 1) ввиду следствия 3.2 заведомо выполнено. Если $\Lambda_A \neq \varnothing$, то вместо условия 1) можно взять равносильное ему условие (3.18).

Вторая задача, также имеющая отношение к проблеме точечной полноты, – задача приводимости. Наряду с уравнением (1.9) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{v}(t) = Vv(t), \ t \geq 0; \quad v(0) = v^0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.15}$$

с постоянной $n \times n$-матрицей V. Введем определение.

Определение 4.6. Уравнение с запаздыванием (1.9) назовем приводимым к обыкновенному дифференциальному уравнению (4.15) в момент времени $t^* \geq 0$, если существуют постоянные $n \times n$-матрицы V, L, $\det L \neq 0$, такие, что

$$\forall \eta \in C \, \exists v^0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x(t) = Lv(t), \; t \geq t^*. \tag{4.16}$$

Ранее эта задача обсуждалась в работах [13], [46], из которых следует теорема.

Теорема 4.7. *Для того чтобы уравнение* (1.9) *в момент времени* $t^* \geq (n-1)h$ *было приводимо к обыкновенному дифференциальному уравнению* (4.15), *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *спектр* Λ *уравнения* (1.9) *был конечен*;
2) $\operatorname{rank} \Gamma_\Lambda = n$.

Необходимость условия 1) обусловлена тем, что размерность подпространства решений уравнения (4.15) равна n. Условие 2) – условие точечной полноты уравнения (1.9) (см. теорему 2.4). Оно продиктовано точечной полнотой уравнения (4.15). Отметим, что условие 2) равносильно условию (2.20).

Пусть выполнены условия теоремы 4.7. Каковы должны быть матрицы V, L, упоминаемые в определении 4.6? Ответ на данный вопрос содержит следующая теорема.

Теорема 4.8. *Всякое решение точечно полного уравнения* (1.9) *с конечным спектром* Λ *при* $t \geq (n-1)h$ *представимо в виде*

$$x(t) = \Phi(0)v(t),$$

где

$$\dot v(t) = Vv(t), \; t \geq 0, \quad v(0) = (\Psi, \eta), \qquad V = \Phi^{-1}(0)\dot\Phi(0). \tag{4.17}$$

Доказательство. Существует [6] постоянная матрица V со спектральным набором Λ такая, что в разложении $x_t = x_t^P + x_t^Q$ компонента $x_t^P = \Phi v(t)$, $t \geq 0$. Ввиду теоремы 2.3 $x_t = x_t^P$ при $t \geq nh$ для произвольной начальной функции $\eta \in C$. Отсюда $x(t) = \Phi(0)v(t)$, если $t \geq (n-1)h$.

Покажем, что $V = \Phi^{-1}(0)\dot\Phi(0)$. Воспользуемся формулой (2.14) $\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{V\theta}$, $\vartheta \in H^-$. Дифференцируя это равенство и полагая затем $\theta = 0$, имеем $\dot\Phi(0) = \Phi(0)V$. Так как спектр уравнения (1.9) конечен, то матрица Φ – квадратная. В силу точечной полноты этого уравнения матрица Φ – невырожденная, поэтому $V = \Phi^{-1}(0)\dot\Phi(0)$. Если бы $\det \Phi(0) = 0$, то для ненулевого вектора $g \in \mathbb{R}^n$ выполнялось бы равенство

$$g'x(t) = g'\Phi(0)v(t) = 0 \;\; \forall \eta \in C, \qquad t \geq (n-1)h,$$

что противоречило бы точечной полноте уравнения (1.9). Теорема доказана.

Замечание 4.4. Из задачи Коши (4.17) вытекает, что в выражениях (4.15), (4.16) начальный вектор $v^0 = (\Psi, \eta)$.

Пример 4.3. Рассмотрим уравнение (2.22). В примере 2.4 установлено, что это уравнение имеет конечный спектр и при $\omega \neq 1$ является точечно полным. Ввиду теоремы 4.7 оно приводимо к обыкновенному дифференциальному уравнению (4.15).

Пользуясь теоремой 4.8, найдем в явном виде матрицы L, V.

Чтобы записать базис обобщенного собственного пространства P, решаем уравнение $M_2(0)\gamma_\lambda = 0$, где $\gamma_\lambda = \operatorname{col}[\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}]$. Получаем

$$\varphi_\lambda(\theta) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} c_2 - c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

и можно взять

$$\Phi_1(\theta) = \begin{bmatrix} \theta - 1 & 1 \\ \theta & 1 \end{bmatrix}, \qquad \theta \in H^-.$$

Аналогично находим

$$\psi_\lambda(s) = \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3c_1 - c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} 3 - s & -1 \\ s & 1 \end{bmatrix}, \qquad s \in H^+.$$

Должно быть $(\Psi, \Phi) = E$. Вычисляем значение $(\Psi, \Phi_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Умножая матрицу Φ_1 справа на обратную матрицу $(\Psi, \Phi_1)^{-1}$, получаем

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 4 - \theta \\ 1 & 3 - \theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in H^-, \qquad V = \Phi^{-1}(0)\dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} v(t), \quad t \geq 2\omega, \quad \text{где} \quad \dot{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v(t), \quad t \geq 0,$$

$$v(0) = (\Psi, \eta) = \begin{bmatrix} 3\eta^1(0) + \int_0^2((3-\tau)(\eta^1(\tau-2) - \eta^2(\tau-4)) - \eta^2(\tau-2))\,d\tau \\ \eta^2(0) - \eta^1(0) - \int_0^2(\eta^1(\tau-2) - \eta^2(\tau-4))\,d\tau \end{bmatrix}.$$

4.8. Заключение. С позиций теории реализации [45], [8] динамическая система управления задается отображением "вход-выход"

$$L : u \to y, \tag{4.18}$$

где L – линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(T, \mathbb{R}^r)$ в $C(T, \mathbb{R}^l)$. Состояние x_t рассматривается [45] как *внутренняя характеристика* динамической системы, реализующей отображение (4.18). При такой трактовке естественно рассмотреть задачу управления выходом системы Σ, обобщающую задачу управления состоянием или полной управляемости [1], [2].

Определение 4.7. Начальную функцию $\eta \in C$ назовем *управляемой по выходу*, если найдется момент времени $t_1 > 0$ и управление $u \in \overline{C}$ такие, что, начиная с момента t_1, система Σ имеет нулевой выход

$$(4.19) \qquad y(t) = 0 \ \text{ при } \ u(t) = 0,\ t \geq t_1.$$

Систему Σ будем называть управляемой по выходу, если управляемы по выходу все начальные функции $\eta \in C$.

Если система Σ точечно вырождена в направлениях строк матрицы G (см. выражение (1.?)), то условие (4.19) обеспечивается при нулевом выходном воздействии $u(t) = 0$, $t \in T$, и любой начальной функции. Систему Σ, обладающую таким свойством, назовем *самоуправляемой*. Как и точечная вырожденность, свойство самоуправляемости является исключительным для системы Σ. В связи с этим можно рассмотреть следующие задачи.

Задача 1. Описать класс $P^0 = \{\eta \in C \mid Gx(t,\eta) = 0, t \geq t_1\}$ самоуправляемых начальных состояний системы Σ. Очевидно, что множество $P^0 \subseteq C$ замкнуто, т.е. является подпространством в пространстве C, инвариантном относительно оператора сдвига $S(t)$, $t \geq 0$. Естественен вопрос: Когда возможно разложение пространства C в прямую сумму $P^0 \oplus Q^0$, где Q^0 – подпространство дополнительное к P^0, также инвариантное относительно оператора сдвига $S(t)$, $t \geq 0$?

Задача 2. Описать многообразие C^0 начальных состояний $\eta \in C$, управляемых по выходу в смысле определения 4.7. Условие $C^0 = C$ будет критерием управляемости по выходу системы Σ. Рассмотреть вопрос о разложении $C = C^0 \oplus D^0$, где C^0, D^0 – подпространства инвариантные относительно оператора сдвига $S(t)$, $t \geq 0$. Если многообразие $C^0 \subseteq C$ замкнуто, то можно перейти к факторизованному пространству состояний $F = C/C^0$ банахову относительно нормы $\|\varphi^0\|_F = \inf_{z \in C^0} \|\varphi + z\|_C$, $\varphi^0 = \{\varphi + z\}$, $\varphi \in C$, $z \in C^0$. Задача управляемости по выходу системы Σ при этом сведется к задаче управляемости этой системы в факторизованном пространстве состояний F.

Конструктивный подход к решению этих задач для системы Σ_1, когда $\operatorname{rank} G = n$, включая вопросы построения успокаивающего управления в задаче 2, предлагается в работах [47]–[49]. В идейном плане эти работы развивают метод пространства состояний, изложенный выше при анализе проблемы точечной полноты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
[2] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
[3] Кириллова Ф.М., Чуракова С.В. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // ДАН СССР. 1967. Т. 174. №6. С. 1260–1263.
[4] Weiss L. On the controllability of delay differential sistems // SIAM J. Control. 1967. V. 5. №4. P. 575–587.
[5] Zmood R.B., McClamroch N.H. On the poinwise copmletness of differential-difference equations // J. Differential Eqns. 1972. V. 12. №3. P. 474–486.
[6] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
[7] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[8] Метельский А. В. Двойственность по Калману в теории управления динамическими дифференциально-разностными системами // Автоматика и телемех. 1989. №9. С. 81–90.

[9] Popov V. M. Pointwise degeneracy of linear, time-invariant, delay-differential equations // J. Differential Eqns. 1972. V. 11. №3. P. 541–561.

[10] Halanay A., Yorke J. Some new results and problems in the theory of functional-differential equations. Technical note BN-577: University of Maryland, College Park, MD, 1968.

[11] Brooks R. M., Schmitt K. Pointwise completeness of differential-difference equations // Rocky Mountain J. Math. 1973. V. 3. P. 11–14.

[12] Колмановский В. Б. Об одной задаче управления системами с последействием // Автоматика и телемех. 1970. №10. С. 47–53.

[13] Зверкин А. М. О точечной полноте систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. №3. С. 430–436.

[14] Choudhury A. K. Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems // Int. J. Contr. 1972. V. 16. №6. P. 1083–1100.

[15] Asner B. A., Halanay A. Algebraic theory of pointwise degenerate delay-differential systems // J. Differential Eqns. 1973. V. 14. №2. P. 293–306.

[16] Kappel F. On degeneracy of functional-differential equations // J. Differential Eqns. 1976. V. 22. №2. P. 250–267.

[17] Kappel F. Degenerate difference-differential equations. Algebraic theory // J. Differential Eqns. 1977. V. 24. №1. P. 99–126.

[18] Минюк С. А., Степанюк Н. Н. К теории точечной полноты линейных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. №5. С. 784–794.

[19] Карпук В. В. К проблеме точечной вырожденности // Проблемы оптимального управления. Минск: Наука и техника. 1981. С. 208–224.

[20] Метельский А. В. О точечной полноте функционально–дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №6. С. 969–978.

[21] Asner B. A., Halanay A. Delay-feedback using derivatives for minimal time linear control problems // J. Math. Analysis and Appl. 1974. V. 48. №16. P. 257–263.

[22] Popov V. M. Delay-feedback, time-optimal, linear time-invariant control systems // Ordinary Different. Equat., 1971, NRL-MRC Conf. New York: Academic Press. 1972. P. 545–552.

[23] Гноенский Л. С. О выводе системы с запаздыванием в заданное положение с помощью выбора начальной функции // Труды семинара по теории дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Т. 3. М. 1965. С. 57–60.

[24] Забелло Л. Е., Копейкина Т. Б. Управляемость по начальной функции систем с запаздыванием. Деп. в ВИНИТИ 03.12.1975, 3440-75. Казань: КГУ, 1975.

[25] Olbrot A. W. On generacy and related problems for linear constant time-lag systems // Ricerche di Automatica. 1972. V. 3. №3. P. 203–220.

[26] Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. №1. С. 102–116.

[27] Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

[28] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1967.

[29] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[30] Метельский А. В., Минюк С. А. Алгебраический подход к решению задачи полной наблюдаемости систем с запаздыванием // Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук. 1976. №2. С. 9–13.

[31] Марченко В. М. Об управляемости систем с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 1978. Т. 1. С. 54–65.

[32] Кириллова Ф. М., Чуракова С. В. К проблеме управляемости линейных систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. №3. С. 436–445.

[33] Choudhury A. K. Algebraic and transfer-function criteria of fixed-time controllability of delay-differential systems // Int. J. Contr. 1972. V. 16. №6. P. 1073–1081.

[34] Zmood R. B. The euclidean space controllability of control systems with delay // STAM J. Contr. 1974. V. 12. №4. P. 609–623.

[35] Габасов Р., Чуракова С.В. К теории управляемости линейных систем с запаздыванием // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. №4. С. 17–28.

[36] Габасов Р., Крахотко В.В. Относительная управляемость линейных систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. №8. С. 1359–1365.

[37] Крахотко В.В., Метельский А.В. К управляемости систем с распределенным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. №3. С. 419–425.

[38] Габасов Р., Кмриллова Ф.М. Современное состояние теории оптимальных процессов // Автоматика и телемех. 1972. №9. С. 31–62.

[39] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Крахотко В.В. Управляемость линейных стационарных систем // ДАН СССР. 1972. Т. 203. №3. С. 537–539.

[40] Delfour M.C., Mitter S.K. Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems // SIAM J. Contr. 1972. V. 10. №2. P. 298–328.

[41] Banks H.T., Jacobs M.Q., Langenhop C.E. Function space controllability for linear functional-differential equations // Differential games and contr. theory. New York. 1974. P. 81–89.

[42] Weiss L. An algebraic criterion for controllability of linear systems with time delay // IEEE Trans. Automat. Contr. 1970. V. AC-15. №4. P. 443–444.

[43] Карпук В.В. К теории нуль-управляемости систем с отклоняющимся аргументом. Деп. в ВИНИТИ 05.07.1989, 4485-В89. Минск, 1989.

[44] Габасов Р., Жевняк Р.М., Кириллова Ф.М., Копейкина Т.Б. Условная наблюдаемость линейных систем // Problems of Control and Information Theory. 1972. Т. 1. №3. С. 217–238.

[45] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

[46] Метельский А.В. Критерий приводимости функционально-дифференциальных уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тезисы докладов Республиканских научных чтений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск. 1990. С. 75–76.

[47] Метельский А.В. О классах эквивалентных состояний линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №10. С. 1703–1712.

[48] Метельский А.В. Выделение идентифицируемой и управляемой компонент состояния динамической системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №6. С. 972–984.

[49] Метельский А.В. О непрерывной идентификации класса текущих состояний дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №11. С. 1962–1969.

Белорусский государственный университет
г. Минск

Поступила в редакцию
17.02.1992